arXiv:2603.02027v1 [math.DG] 2 Mar 2026

因果时空中的里奇曲率与度量。

哈维尔·拉富恩特·洛佩斯

Abstract. 可行时空是指存在一条完备类时测地线的时空。本文证明，如果两个时空中至少有一个是可行时空，那么保持里奇张量不变的因果微分同胚必为位似。

1. Introduction.

因果时空 $(M, \mathcal{C})$ 的度量 $g \in \mathcal{C}$ 确定一个能量张量

$$T = \frac{1}{4\pi G}\left(Ric - \frac{1}{2}Scg\right) \tag{1.1}$$

其中， $Ric = Ric_g$ 是 g 的里奇张量， $Sc = Sc_g$ 是标量曲率张量。于是，我们称 T 属于因果结构 $\mathcal{C}$。众所周知，一般而言，能量张量 T 并不能自动保证存在满足方程 (1.1) 的度量 g；即使这种度量存在，除非施加某些初始条件，否则也不能保证其唯一性。现在我们要问：因果结构 $\mathcal{C}$ 中由能量张量 T 给出的场方程 (1.1)，在其共形类中是否存在唯一解（相差位似）？ 本文的主要结果是对此给出肯定回答，条件是能量张量来自一个可行时空，即其中存在一位按其固有时计寿命无限的惯性观测者。

Hawking 与 Penrose 有一条定理，它保证：若对能量张量 T 施加某些物理上合理的条件，则作为 (1.1) 之解的度量 g 必然包含一个寿命有限的惯性观测者（[12][5][6]）。若还能保证另有一个寿命无限、能够绕过一切可能奇点的观测者，那就再好不过了。例如，史瓦西时空中便是如此，因而它是可行的。因此，我们的结果保证：在其因果结构之内，史瓦西度规是方程 (1.1) 在 $T = 0$ 条件下的唯一解（至多相差一个位似）。

从另一个角度来看，我们还证明了：若假定两个时空之一是可行的，则在这两个时空之间保持里奇张量的因果微分同胚必然是位似。注意，两个里奇平坦空间之间的共形微分同胚对里奇张量的保持是自动的，特别地，史瓦西空间中的共形微分同胚必然是位似。关于这一切，在一般半黎曼流形的背景下已有大量文献。Kulkarni在 [8][7]中提出了在黎曼情形下确定曲率决定度量之条件的问题。在 [14] 中，De Turk研究里奇张量是否唯一决定（除位似外）黎曼结构，并证明这对某些爱因斯坦度规成立。另一方面，Xingwang [16], 在一个共形类内分析了这一唯一性，并证明，对于连通、紧致且定向的

维数为 $\geq$ 2的黎曼流形。最后，当(M,g)测地完备时，K¨uhnel [9] 证明了同一定理。我们在此也用不同方法证明了同一结果（见第7页注记2）。

已固定一个半黎曼流形（M，g）。这意味着，M是一个有限维实连通可微流形，$m>2$ 且 g 是一个度量。当 g 是洛伦兹度量时，我们称（M，g）为时空。通常，号差为（$-$，$+$，.....，$+$），但我们不区分度量 g与另一个相似变换的度量 cg （其中 $c\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$），因为二者定义相同的几何（尤其是相同的联络），只是测量单位不同。因此，在声称唯一性时，我们将不再附加“相差一个相似变换”的限定。

1.1. 一般假设。 我们用 ∇ 表示：（X，Y）$\mapsto\nabla_XY$的列维-奇维塔联络，用 $\langle X,\ Y\rangle$ 表示到 g（X，Y）的映射，而 grad 表示其梯度算子。所有联络均假定为对称的。

我们采用以下曲率张量定义 R:

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ+\nabla_{[X,Y]}Z\quad\text{for } X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$$

里奇张量定义为:

$$\mathrm{Ric}(X,Y)=\mathrm{Trace}(\mathfrak{X}(M)\ni V\longrightarrow R(X,V)Y)\quad\text{for } X,Y\in\mathfrak{X}(M)$$

若 $(X,Y)\ \to T(X,Y)$ 是一个协变张量，我们用 $X\mapsto T(X)$ 表示唯一的 (1,1) 张量，使得

$$\left\langle \widetilde{T}\left(X\right),Y\right\rangle =T\left(X,Y\right)$$

2. Conformal Structure.

若存在一个可微函数 $\sigma:M\longrightarrow\mathbb{R}$，满足 $g=e^{2\sigma}g$，则称度量 g, g 在 M 上共形等价。这是一种等价关系，我们用$\bar{\mathcal{C}}=[g]$ 表示由度量 g确定的等价类。$\mathcal{C}$ 称为 M上的共形结构。

请注意，M 上的两个洛伦兹度量定义相同的因果结构，当且仅当它们在每个切空间中定义相同的光锥，或者等价地说，在 M上定义相同的因果关系。因此，我们也称 $(M,\mathcal{C})$ 为因果空间，并假设它是定向于时间的。

定义1. 若存在一个度量$g\in\mathcal{C}$，使得$(M,\mathcal{C})$ 可行，并且在此意义上存在一条定义为 $\forall t>0$的类时测地线 $\gamma=\gamma\left(t\right)$，则称因果空间$(M,\mathcal{C})$ 可行。

2.1. 共形联络。 若联络∇ 在$(M,\mathcal{C})$上保持共形结构在平行移动下不变，则称其为共形联络。也就是说，平行移动会在切空间之间诱导共形（线性）变换。在洛伦兹情形下，当且仅当 ∇ 在平行移动下保持光锥不变时，这一条件成立。由此得到以下结果:

定理 1 ([8])**.** 联络 ∇在M 上为共形联络的充要条件是存在一个向量场 $A\in\mathfrak{X}(M)$ 使得:

$$\overline{\nabla}_XY-\nabla_XY=\langle A,X\rangle Y+\langle A,Y\rangle X-\langle X,Y\rangle A\quad \textit{for all } X,Y\in\mathfrak{X}(M)\tag{2.1}$$

特别地，$A=$(梯度)$_g\sigma$，当且仅当 ∇ 和 ∇ 分别是与 g 和 $g=e^{2\sigma}g$ 相关联的列维-奇维塔联络。

注 1。条件 $A=$ 梯度σ 等价于 $\alpha=d\sigma$，其中 α 是与 A 在 g 度量意义下等价的 *1*-形式（即 $\alpha:\ \mathfrak{X}(M)\ni X\longrightarrow\langle A,_X\rangle\in\mathbb{R}$）。特别地，条件 $d\alpha=0$ 意味着 ∇ 是局部度量，即：对于 M 中的每一点，都存在其邻域 U 和一个可微的 $\sigma:\ U\longrightarrow\mathbb{R}$，使得 ∇ 是 $e^{2\sigma}g$ 的列维-奇维塔联络。

推论 1. 两个共形联络的零测地线必然重合。

2.2. **里奇张量的比较**。

记号 1. 在下文中，符号 ∇、∇ 和 A 与定理 *1* 中的含义相同。参考度量为 g，其里奇张量为 Ric；而 Ric 将是 ∇对应的张量。若 α 是唯一的 *1*-形式，使得 $\widetilde{\alpha}=A$（即$\alpha(X)=\langle A,X\rangle$），则我们定义 $Q=\nabla\alpha-\alpha\otimes\alpha$ 因此

$$\tilde{Q}(X)=\nabla_X A-\langle A,X\rangle A \tag{2.2}$$

于是我们得到以下结果（见 [8]）：

定理 2. 假设 Ric 是对称的，差张量 $\mathrm{E}=\mathrm{Ric}-\mathrm{Ric}$ 满足以下方程

$$-\frac{1}{m-2}\mathrm{E}+\frac{1}{2(m-2)(m-1)}tr\left(\widetilde{\mathrm{E}}\right)g=Q+\frac{1}{2}\langle A,A\rangle g \tag{2.3}$$

证明。差张量

$$E(X,Z)=\overline{Ric}(X,Z)-Ric(X,Z)=tr\{Y\to D(X,Y)Z\}$$

由下式给出

$$E(X,Z)=(2-m)Q(X,Z)-\{q+(m-1)\langle A,A\rangle\}\langle X,Z\rangle$$

其中 $q=tr\left(\widetilde{Q}\right)$ 也就是说

$$E=(2-m)Q-\{(q+(m-1))\langle A,A\rangle\}g \tag{2.4}$$

利用 (2.4)，张量 $E(X)=Ric(X)-Ric(X)$ 的表达式如下：

$$\widetilde{E}(X)=(2-m)\widetilde{Q}(X)-\{q+(m-1)\langle A,A\rangle\}X$$

收缩 E 得到

$$\begin{aligned}tr\left(\widetilde{E}\right)&=(2-m)q-\{q+(m-1)\langle A,A\rangle\}m\\&=(2-2m)q-(m-1)m\langle A,A\rangle\end{aligned} \tag{2.5}$$

在 (2.5) 中求解 q

$$q=\frac{1}{2-2m}tr\left(\widetilde{E}\right)-\frac{m}{2}\langle A,A\rangle \tag{2.6}$$

并在 (2.4) 中求解 Q

$$Q=\frac{1}{2-m}E+\frac{1}{2-m}\{q+(m-1)\langle A,A\rangle\}g \tag{2.7}$$

最后将 (2.6) 代入 (2.7)，得到 (2.3) □

采用记号 1，我们有如下结果

命题1. 条件 Ric =Ric 等价于场 $\overline{A}$满足

$$\nabla_X A = \langle A, X\rangle A - \frac{1}{2}\langle A, A\rangle X, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M) \tag{2.8}$$

证明。 若 $\mathrm{E} = \overline{\mathrm{Ric}} - \mathrm{Ric} = 0$，由 (2.3) 可得 $Q + \frac{1}{2}\langle A, A\rangle g = 0$，即

$$\widetilde{Q} + \frac{1}{2}\langle A, A\rangle \widetilde{g} = 0$$

由于 $\widetilde{g} = id$，由 (2.2) 可得

$$\underbrace{\nabla_X A - \langle A, X\rangle A}_{\widetilde{Q}(X)} + \frac{1}{2}\langle A, A\rangle X = 0$$

因此 A满足 (2.8)。反之，若 A满足 (2.8)，则 $\widetilde{Q}(X) = -\frac{1}{2}\langle A, A\rangle X$，因此 $Q + \frac{1}{2}\langle A, A\rangle g = 0$。由 (2.3) 可知

$$-\frac{1}{m-2}\mathrm{E} + \frac{1}{2(m-2)(m-1)} tr\left(\widetilde{\mathrm{E}}\right) g = 0 \tag{2.9}$$

但此时

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2(m-1)}\mathrm{Trace}\left(\widetilde{\mathrm{E}}\right) g \tag{2.10}$$

因此，由于 $\widetilde{g} = Id$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{E}} &= \frac{1}{2(m-1)}\mathrm{Trace}\left(\widetilde{\mathrm{E}}\right) Id \Rightarrow \\ \mathrm{Trace}\left(\widetilde{\mathrm{E}}\right) &= \frac{m}{2(m-1)}\mathrm{Trace}\left(\widetilde{\mathrm{E}}\right) \\ &\Rightarrow 0 = -\frac{m-2}{2(m-1)}\mathrm{Trace}\left(\widetilde{\mathrm{E}}\right) \end{aligned}$$

如果存在 p 使得 $\mathrm{Trace}\left(\widetilde{\mathrm{E}}\right)\Big|_p \neq 0$，那么 $m = 2$，但根据假设， $m \geq 3$。由 (2.9) 可知，它是 $\mathrm{E} = 0$. □

2.3. **非典型场**。 受命题1启发，我们给出以下定义

定义2。 若场 $A \in \mathfrak{X}(M)$ 满足以下条件，则称其为非典型场，简称 ***ATP***:

$$\nabla_X A = \langle A, X\rangle A - \frac{1}{2}\langle A, A\rangle X, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M) \tag{2.11}$$

注意，恒零场 A 是非典型场。另一方面，若 $(X_1, \ldots, X_m)$是一个平行化，则 A 是非典型场，当且仅当对每个$X = X_i$, *(2.11)* 都成立。

现在，在记号 1 定理 1 的背景下，条件 $\mathrm{Ric} = \overline{\mathrm{Ric}}$ 等价于场 $\overline{A}$是非典型的。非典型场通常很难找到，我们给出一个例子:

例 1. 取 $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ y>x>0\right\}\setminus$ 以及闵可夫斯基度量 $g=-dx^2+dy^2$，在双曲极坐标 (ρ,θ) $x=\rho$双曲正弦 θ, $y=\rho$双曲余弦 θ下可写为 $g=d\rho^2-\rho^2d\theta^2$。我们观察到存在一个共形度量

$$\overline{g}=\frac{1}{\rho^4}g$$

由于双曲反演具有共形性质，因此有 里奇 $=$ 里奇 $=0$。事实上

单位双曲面的反演 ι 用极坐标表示为

$$\left(\overline{\rho},\overline{\theta}\right)\overset{\iota}{\longleftarrow}(\rho,\theta):\left\{\begin{array}{l}\rho=1/\overline{\rho}\\ \theta=\overline{\theta}\end{array}\right.,\left\{\begin{array}{l}d\rho^2=-\left(1/\overline{\rho}^4\right)d\overline{\rho}^2\\ d\theta^2=d\overline{\theta}^2\end{array}\right.$$

and

$$\begin{aligned}\iota^*g&=\left(1/\overline{\rho}^4\right)d\overline{\rho}^2-\left(1/\overline{\rho}^2\right)d\overline{\theta}^2\\&=\frac{1}{\overline{\rho}^4}\left(d\overline{\rho}^2-\overline{\rho}^2d\overline{\theta}^2\right)\end{aligned}$$

因此，ι 确实是共形的。从另一个角度来看，实际上我们已经证明，$\frac{1}{\rho^4}\left(d\rho^2+\rho^2d\theta^2\right)$ 是度量 g 在坐标 $(\rho=1/\rho、\ \theta=\theta)$下的表达式，因此形式上$g$ 具有（如同 g）零里奇张量。不过

$$\frac{1}{\rho^4}=e^{2\sigma},\ with\ \sigma=-2\ln\rho$$

因此

$$\alpha=d\sigma=\frac{-2}{\rho}d\rho\Rightarrow\widetilde{\alpha}=A=\frac{-2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}$$

尽管所述理论在维数为 $m=2$ 时并不一致，但可以验证 A 是非典型场，且 散度 $A=0$。若定义 $\phi(x_0,\ldots,x_m)=-x_0^2+x_1^2+\cdots+x_m^2$，则可以证明存在一个微分同胚 Φ，将

$$M=\{x=(x_0,\ldots,x_m):\phi(x)<0\}$$

从 $\mathbb{R}^+\times\mathbb{H}=\{(\rho,\theta):\ \rho>0,\ \theta\in\mathbb{H}\}$ 其中 $\mathbb{H}$ 是方程为

$$\mathbb{H}:\phi(x)=-1$$

其方程为

$$\Phi:\left\{\begin{array}{l}\rho=\sqrt{-\phi(x)}\\ \theta=x/\sqrt{-\phi(x)}\end{array}\right.$$

若在 M 上赋予闵可夫斯基度量 $\eta=-dx_0^2+dx_1^2+\cdots+dx_m^2$，并在 $\mathbb{H}$ 上赋予黎曼度量，则可以证明

$$\Phi:(M,\eta)\to\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{H},h=d\rho^2-\rho^2d\theta^2\right)$$

是一个等距变换。注意，h 是洛伦兹的，但号差为$(+,-\cdots-)$。因此，$(\mathbb{R}^+\times\mathbb{H},h)$ 是里奇平坦的，而映射 $\phi:\ \mathbb{R}^+\times\mathbb{H}\to\mathbb{R}^+\times\mathbb{H},(\rho,\theta)\ \mapsto\left(\rho=1/\rho,\theta=\theta\right)$ 是共形的，其因子为 $\frac{1}{\rho^4}$，它

$$\phi^*h=\frac{1}{\rho^4}h$$

并且由于 $\frac{1}{\rho^4} = e^{2\sigma}$，其中 $\sigma = -2\ln\rho$, $\alpha = d\sigma = \frac{-2}{\rho}d\rho$，可得场

$$\widetilde{\alpha} = A = \frac{-2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}$$

是非典型的。

另一方面，这些非典型场表现出某些全局性质，这些性质将在下一节产生影响。

命题 2. 设 A 是一个非典型场。若存在 $p \in M$ 满足 $\langle A, A\rangle(p) \neq 0$，则对所有 $x \in M$，它都是 $\langle A, A\rangle(x) \neq 0$。

证明。事实上，设 $x \in M$，且 $\gamma\colon (a,b) \longrightarrow M$ 是一条可微曲线（可以假设它是场 X 的一条积分曲线），满足 $a < 0 < 1 < b$ 和 $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = x$。令 $f(t) = \langle A, A\rangle \circ \gamma(t)$ 和 $F(t) = \langle A(\gamma(t))\ \gamma'(t)\rangle$，我们验证：

$$\begin{aligned} X(\langle A, A\rangle)(\gamma(t)) = f'(t) &= \langle A, X\rangle(\gamma(t))\langle A, A\rangle(\gamma(t)) \\ &= F(t)f(t) \quad \forall t \in (a,b), \text{ and } f(0) \neq 0 \end{aligned}$$

因此，以下引理的假设均已满足，从而可得 $F(1) = \langle A,\ A\rangle(\gamma(1)) = \langle A,\ A\rangle(x) \neq 0$。
□

引理 1。设 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ 是一个不恒为零的可微函数。假设存在连续函数 $F\colon (a, b) \to \mathbb{R}$，使得 $f'(t) = F(t)f(t)\ \forall t \in (a,b)$。那么 f 恒不为零（即 $f(t) \neq 0\ \forall t \in (a,b)$）。

证明。如果函数 f 不恒为零，则存在 $t_0 \in (a,b)$，使得 $f(t_0) \neq 0$，且满足微分方程

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = yF(t) \Rightarrow \int\frac{dy}{y} &= \int F \\ \Rightarrow y = Ce^{\varphi(t)} \text{ with} &\begin{cases} \varphi' = F \\ C \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

由于函数 f 不恒为零，因此它是 $C \neq 0$，故 f 恒不为零。 □

命题 3. 若Ric =Ric，则 $\overline{\nabla}$ 是局部度量。

证明。若 $\langle A,\ A\rangle$ 恒等于零，则由于 A 是非典型的：

$$\nabla_X A = \langle A, X\rangle A - \frac{1}{2}\langle A, A\rangle X = \langle A, X\rangle A, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

因此，对所有 $X,\ Y \in \mathfrak{X}(M)$，若 $\alpha(X) = \langle A,\ X\rangle$ 则可验证：

$$\begin{aligned} X(\alpha(Y)) = X(\langle A, Y\rangle) &= \langle \nabla_X A, Y\rangle + \langle A, \nabla_X Y\rangle \\ &= \langle A, X\rangle\langle A, Y\rangle + \langle A, \nabla_X Y\rangle \end{aligned}$$

因此 $d\alpha = 0$，（并且根据 0.3.2 $\overline{\nabla}$ 是局部度量），因为：

$$X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) = \langle A, \nabla_X Y - \nabla_Y X\rangle = \langle A, [X,Y]\rangle$$

若 $\langle A,\ A\rangle|_p \neq 0$ 对某个 p 成立，则根据命题 2 $\langle A,\ A\rangle$ 永不为零。假设没有 w
例如 $\langle A, A\rangle > 0$ 在 M 上。我们有：

$$\begin{aligned} X(\langle A, A\rangle) = 2\langle \nabla_X A, A\rangle &= 2(\langle A, X\rangle\langle A, A\rangle - \frac{1}{2}\langle A, A\rangle\langle X, A\rangle) \\ &= \alpha(X)\langle A, A\rangle \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M) \end{aligned}$$

因此 $X(\log(\langle A,A\rangle)) = \alpha(X)$，所以 $\alpha = d(\log(\langle A,A\rangle))$。类似地，若 $\langle A,A\rangle < 0$在 M 上，则有 $\alpha = d(\log(-\langle A,A\rangle))$，并且定理在非空开子流形 $M' = \{x \in M$上成立：$\langle A,A\rangle(x) \neq 0\}$。□

因此，我们证明了如下推论

推论 2. 若 A 是非典型的，且对某个 $p \in M$ 有 $\langle A,\ A\rangle(p) \neq 0$，则对所有 $x \in M$有$\langle A,\ A\rangle(x) \neq 0$。并且若 $\sigma = \log(|\langle A,\ A\rangle|)$，则可得出 ∇ 是度量 $g = e^{2\sigma}g \in \mathcal{C}$的列维-奇维塔联络。特别地，$A =$ 梯度σ。

3. Main results.

3.1. 假设。 回顾：∇ 是 M，$\mathcal{C} = [g]$的度量 g 的列维-奇维塔联络。∇ 是一个 $\mathcal{C}$-共形对称联络，与 g具有相同的里奇张量$\mathrm{Ric} = \mathrm{Ric}$，且 $A \in \mathfrak{X}(M)$是将 ∇ 与 ∇联系起来的1的非典型场。

由于 M 是连通的，由命题 2 可知，下列情况之一成立：

$\langle A,\ A\rangle(x) > 0$对所有 $x \in M$均成立。$\langle A,\ A\rangle(x) < 0$对所有 $x \in M$均成立。$\langle A,\ A\rangle(x) = 0$对所有 $x \in M$均成立。

命题 4. 设$\mathrm{Ric} = \mathrm{Ric}$。那么 A定义了一个由 ∇-预测地线组成的场。此外，若 $\langle A,$ 且 $A\rangle \neq 0$ 在 M上，则 A 的所有积分曲线都定义不完备的 ∇-测地线。因此：若 A 为类空（分别为类时），则存在不完备的类空（分别为类时） ∇-测地线。

证明。存在一个场 $U \in \mathfrak{X}(M)$和一个可微的 $f: M \longrightarrow \mathbb{R}^+$，使得 $\langle U,\ U\rangle = \epsilon$且 $A = fU$，其中若 A为类空，则 $\epsilon = 1$；若 A为类时，则 $\epsilon = -1$。另一方面，由于$\nabla_A A = \frac{1}{2}\langle A,\ A\rangle A$可得 A是由 ∇-预测地线组成的场，因此 U 的积分曲线是 ∇-测地线。但是

$$\frac{\epsilon}{2}f^3U = \frac{1}{2}\langle A,A\rangle A = \nabla_A A = \nabla_{fU}(fU) = f\{U(f)U + f\nabla_U U\} = fU(f)U$$

将两边同除以 f^3，我们得到：$U(f) = \frac{\epsilon}{2f^2}$在这些条件下，$U$ 的所有（∇-测地线）积分曲线都是不完备的。事实上，假设存在 U的一条积分曲线 γ：$\mathbb{R} \longrightarrow M$。则函数 $\varphi = f \circ \gamma$ 满足微分方程：$\frac{\varphi'}{\varphi^2} = \frac{\epsilon}{2}$，其解为：

$$f(\gamma(t)) = \frac{2\epsilon f(\gamma(0))}{2 - \epsilon f(\gamma(0))t}$$

特别地，可以断定函数 f 在 γ的邻域内不能可微地定义（$\epsilon f^2(\gamma(0))$）。□

注记 2（定理）**.** 在黎曼情形中，所有测地线都是类空的，并且命题 *4* 保证：若(M, g) 是完备的，则它不容许非典型场，因此里奇张量决定度量。该结果也已在 [9]，中得到证明，后者推广了 [16]。

引理2. 若$\mathrm{Ric} = \overline{\mathrm{Ric}}$，且 $\langle A、\ A\rangle = 0$ 在 M 上。则若 A 不恒为零，A 处处不为零，且$(M、\ g)$ 是类时且类空不完备的，此外所有类时 ∇-测地线均不完备。

证明。由于 $\langle A, A\rangle = 0$ 它是 $\nabla_A A = 0$，且 A 定义了一族零 ∇-测地线。设 γ 是一条极大 ∇-测地线，$\langle \gamma', \gamma'\rangle = \epsilon = \pm 1$，并设 $E_0 = \gamma', E_1, ..., E_n$ 是沿 γ 的平行正交基，其中 $\epsilon_i = \langle E_i, E_i\rangle = \pm 1$。于是可验证：

$$A(\gamma(t)) = \sum a_i(t)\epsilon_i E_i(t) \quad \text{with } a_i = \langle A, E_i\rangle$$

由于 A 是非典型的，且 $\langle A, A\rangle = 0$ 它是 $\nabla_X A = \langle A, X\rangle A$ 并且我们有：

$$\frac{\nabla A}{dt} = \sum \epsilon_i \frac{da_i}{dt} E_i = \langle A, \gamma'\rangle A = a_0 \sum a_i \epsilon_i E_i$$

特别地，$\frac{da_0}{dt} = -a_0^2$。如果 $\langle A(\gamma(0)), \gamma'(0)\rangle = \epsilon a_0(0) \neq 0$，取 $\alpha = a_0(0) \neq 0$，则可得 $a_0(t) = \frac{\epsilon\alpha}{-\epsilon\alpha t + 1}$，$\gamma$ 不可能是完备的，因为当 $t = \frac{1}{\epsilon\alpha}$ 时，$a_0(t)$ 会变为无穷大。如果 $\langle A(\gamma(0)), \gamma'(0)\rangle = \epsilon a_0(0) = 0$，则可得 $\epsilon a_0(t) = \langle A, \gamma'\rangle(t) = 0$，并且由于 A 是非典型的且 $\langle A, A\rangle = 0$，$\frac{\nabla A}{dt} = \langle A, \gamma'\rangle A = 0$。因此，$A$ 沿 γ 平行。这证明了：如果对于一点 $p \in M$，有 $A(p) = 0$，那么对于从 p 出发的所有非零测地线 γ，$A \circ \gamma$ 恒等于零。因此，开集 $N = \{x \in M : A(x) \neq 0\}$ 也是闭集，并且由于它非空，所以它与完备流形 M 重合。在洛伦兹情形中，任意极大类时 ∇-测地线 γ 都满足 $\langle A(\gamma(0)), \gamma'(0)\rangle \neq 0$，因此是不完备的。□

定理3 (主定理)。如果 (M, g) 是一个可行时空（定义*1*），且 ∇ 是与 g 具有相同里奇张量、并通过平行移动保持光锥不变的对称联络，那么 ∇ 就是 g 的度量联络。

证明。如果 ∇ 是 g，的度量联络，且 Ric =Ric，则由命题1，存在一个 A 非典型向量场，使其满足 (2.11)

如果 $\langle A, A\rangle = 0$，且存在 $p \in M$ 使得 $A(p) \neq 0$，那么根据引理 2 A 在任何点都不为零，所有类时测地线都不完备，这与假设矛盾。因此，假设存在 $p \in M$ 使得 $\langle A, A\rangle(p) \neq 0$。由 2 可知，$\langle A, A\rangle \neq 0$ 在整个 M 上成立。令 $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$ 为类时测地线，根据假设它是完备的；令 $(E_0 = \gamma', E_1, ..., E_n)$ 为沿 γ 的平行正交基，其中 $A = \sum a_i E_i$，且 $a_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 可微。注意，由引理 1，4 A 定义了一个不完备预测地线场，因此 $A \circ \gamma$ 永不与 γ 相切，也就是说，函数：

$$f(t) = \frac{1}{2}(a_1(t)^2 + ... + a_n(t)^2)$$

对所有 $t \in \mathbb{R}$，都满足 $f(t) > 0$。由于 $\frac{\nabla A}{dt} = \sum \frac{da_i}{dt} E_i = \langle A, \gamma'\rangle A - \frac{1}{2}\langle A, A\rangle\gamma' = -a_0[\sum a_i E_i] - \frac{1}{2}(-a_0^2 + a_1^2 + ... + a_n^2)E_0$，比较乘以 E_0 的系数，我们得到：

$$\frac{da_0}{dt} = -\frac{1}{2}a_0^2 - f(t)$$

令 $y(t) = -a_0(t)$，我们得出结论：$y(t)$ 在整个 $\mathbb{R}$ 上都有定义，并满足微分方程：

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y^2 + f(t) \tag{3.1}$$

其中 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 可微，且 $f(t) > 0$。

We can choose the direction of traversal of γ, such that $a_0(0) = -\langle A, E_0\rangle|_{t=0} > 0$

这与下述引理矛盾。 □

引理 3. 微分方程的任意解 $y = y(t)$：

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y^2 + f, \quad where\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ is\ differentiable,\ with\ f(t) > 0$$

满足 $y(0) > 0$，无法在整个 $\mathbb{R}$上定义。

证明。假设存在 $\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$，它是定义在整个 $\mathbb{R}$ 上的微分方程解，并且满足 $\beta = \psi(0) > 0$。令

$$\varphi(t) = \frac{2\beta}{-\beta t + 2}$$

它是 $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y^2$ 的解，并满足 $\varphi(0) = \beta$。考虑区间$I = \left]0, b = \frac{2}{\beta}\right[$。注意，在 I上有 $\varphi > 0$，且 $\lim_{t\to b}\varphi(t) = +\infty$。下面证明在 I上有$\varphi \le \psi$，这将排除 $\psi(b)$的存在。为此，只需证明集合 $J = \{s \in I :\ 对于\ 0 < t < s\}$，$\varphi(t) \le \psi(t)$，是非空的，并且在 I中既是开集又是闭集：

由于 $\varphi(0) = \psi(0) = \beta$, $\varphi'(0) = \frac{1}{2}\beta^2 \le \frac{1}{2}\beta^2 + f(0) = \psi'(0)$，由（$*$）可得，对某个 $\epsilon > 0$ 以及所有满足 $0 < t < \epsilon$ 的 t，有 $\varphi(t) < \psi(t)$ 且 $(0, \epsilon) \subset J$，并且 $J \neq \emptyset$。另一方面，如果 $s_1 \in I - J$ 存在一个满足 $\tau < t_1 < s_1$ 的 t_1，且 $\varphi(t_1) > \psi(t_1)$，并且这对所有满足 $\delta < s_1 - t_1$ 的值 $s \in (s_1 - \delta, s_1 + \delta)$ 都成立，那么 $I - J$ 是闭集。最后，我们来证明 J 是开集：

事实上，如果 $s \in J$，则有 $0 < \varphi(s) \le \psi(s)$。于是：

$$\varphi'(s) = \frac{1}{2}\varphi(s)^2 \le \frac{1}{2}\psi(s)^2 < \frac{1}{2}\psi(s)^2 + f(s) = \psi'(s)$$

由（$*$），存在 ε，使得对于 $s < t < s + \varepsilon$，$\varphi(t) < \psi(t)$，因此$(s - \varepsilon,\ s + \varepsilon) \subset J$。

（$*$）设 $f = f(t)$　$g = g(t)$ 是在 $\tau \in \mathbb{R}$ 附近定义的实值可微函数，且 $f(\tau) = g(\tau)$。假设 $f'(\tau) < g'(\tau)$。那么存在一个 $\varepsilon > 0$，使得对于所有满足 $\tau < t < \tau + \varepsilon$ 的 t，都有 $f(t) \le g(t)$。□

定理 1.8 还有其他等价表述，这里将其作为推论列出。

推论 3。时空之间保持里奇张量不变的共形微分同胚必为位似，前提是其中至少一个是可行时空。

推论 4。在可行时空中，里奇张量可以唯一确定度量，精确到一个乘法常数。

4. Conclusions.

两个不同的共形非齐次度量 g和 $g = e^{2\sigma}g$ 具有相同的里奇张量，这是一个奇异现象，因为这等价于存在一个非典型场 $A = \mathrm{grad}^g\sigma$，满足奇异性质 $\nabla_X A = \langle A, X\rangle A - \frac{1}{2}\langle A,\ A\rangle X$(2.11)。该性质将依赖于度量一阶导数的元素与仅依赖于度量点值的其他元素联系起来。一般而言，寻找非典型场被证明是一个极其困难的问题。

但从理论层面而言，若承认此类场的存在（即 $\mathrm{Ric}^g = \mathrm{Ric}^g$），那么我们将证明，在黎曼情形下，它 A 是一个积分曲线不完备的预测地场（命题 4），这意味着该空间必定是测地不完备的。因此，完备黎曼空间不允许存在非典型场（见注 2）

在洛伦兹情形下，已证明非典型场 A 在每一点都保持相同的因果性质。在每种情形（类时、类光或类空）下，均已证明，若 A 与一条对所有 t都有定义的类时测地线 $\gamma = \gamma(t)$共存，则函数 $\langle A,\ \gamma' \rangle$ 将是某个常微分方程的解，而该方程不存在对所有 t 都有定义的解（引理2和定理3）。因此，它的所有类时测地线都是不完备的，该时空因而不可行。可行条件具有全局性。

局部非典型场的存在性分析通常是一个难以处理的问题。尽管如此，它们的存在仍有局部障碍。例如，通过简单计算即可验证：若 A 是非典型场，则对所有 $X,\ Y$，有$R(X,\ Y)\, A = 0$，由此可得，对所有 X，$Ric(X,\ A) = 0$，因此里奇张量是退化的。所以，若 Ric_p 在某一点 $p \in M$处是非退化的，则在 p.附近不可能存在非典型场

References

[1] Aubin, T. (1976). ”´非线性微分方程´´与关于标量曲率的Yamabe问题¨”. 《纯粹与应用数学杂志》´´.[2] Besse, A. L. (1987). 爱因斯坦流形. Springer-Verlag. [3] Cao, Jianguo (1991). 在开曲面上指定里奇曲率. 《太平洋数学杂志》[4] Hamilton, R. S. (1984). 里奇曲率方程. 载于：非线性偏微分方程研讨会（S.S. Chern 编）. [5] S. W. Hawking, ”宇宙学中奇点的出现”, 皇家学会会刊A辑 294, 511 (1966). [6] S. W. Hawking与R. Penrose ”引力坍缩与宇宙学的奇点” 《伦敦皇家学会会刊》A辑，数学与物理科学卷：314（第 ´ 1519 27 1970529 548 期）1月之 – S. Kulkarni 曲率结构与[7]
共形变换. 美国数学会会刊 第123卷 第8期 (1995) [8] R.S Kulkarni. 曲率与度量. 《数学年刊》第91卷 (1970) [9] W.K¨uhnel, B.Rademacher 保持里奇张量的共形微分同胚. 美国数学会会刊 第123卷，第9期，1995年9月 edings [10] Lelong-Ferrand, J. (1971). ”紧致黎曼流形的共形与拟共形变换´”. 科学部通报，比利时皇家科学院´.[11] Obata, M. (1971). ”关于黎曼流形共形变换的猜想”. 微分几何杂志。科学部通报，比利时皇家科学院´.t Henri Poincar´e.[12] R. Penrose, ”引力坍缩与时空奇点”, 物理评论快报 14, 57 (1965). [13] J. A. Schouten, 《里奇演算》¨，Springer-Verlag，柏林，1924. [14] DeTurck, D, 与 Koiso, N. (1984). 具有指定的里奇曲率的度量的唯一性与不存在性. 《亨利·庞加莱研究所年刊》´. [15] Viaclovsky, J. A. (2000). 共形几何、接触几何与变分法. 杜克数学杂志.[16] Xu, Xingwang (1992). 在黎曼度量的共形类中指定里奇张量. 美国数学会会刊

Dpto. de Álgebra, Geometría y Topología., Universidad Complutense de Madrid., Avda. Complutense s/n Madrid 28040 Spain

Email address: jlafuent@ucm.es*URL*: https://blogs.mat.ucm.es/jlafuent/