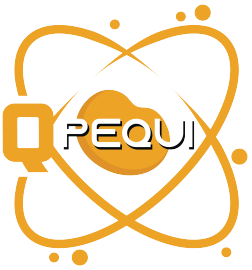
arXiv:2603.02034v1 [quant-ph] 2 Mar 2026





戈亚斯联邦大学

物理研究所

量子佩基小组

时空量子涨落导致的退相干与熵产生

物理学博士

Thiago Henrique MoReiRa

导师：Lucas Chibebe CÉleRi 教授、博士

戈亚尼亚，2026

巴西

戈亚斯联邦大学 物理研究所

知悉与授权声明（TECA），用于提供博士论文电子版本

以及UFG数字图书馆中的学术论文

本人以著作权人的身份，授权戈亚斯联邦大学（UFG）通过依据CEPEC第832/2007号决议规范的学位论文数字图书馆（BDTD/UFG）免费提供，且不予著作权补偿，并依照第9.610/98号法律，按照下方所标明的许可提供该文件，供阅读、打印和/或下载，用以宣传巴西科学成果，自本日起生效。

在BDTD/UFG上提供的学位论文与学术论文内容由作者独家负责。在提交最终成果时，作者与导师承诺，该作品不包含任何对著作权或其他第三方权利的侵犯。

1. 书目资料标识

[ ] 硕士论文 [X] 博士论文 [ ] 其他*：_____

*硕士/博士专业学位的情况下 请注明研究生培养项目所对应的课程结业论文形式，该形式须符合学科领域文件的规定，研究生培养项目，定向 CAPES现行法规指导。

示例：案例研究或系统综述或其他形式。

2. 作者全名

Thiago Henrique Moreira

3. 论文标题

时空量子涨落导致的退相干与熵产生

4. 文件访问信息（此字段应由导师填写）

是否同意完全公开该文件 [X] 是 [ ] 否1

[1] 在此情况下，该文件将自答辩之日起进入最长一年的禁限期。该期限届满后，仅在满足以下条件时才可能予以公开：
a) 征询作者及导师意见；**b)** 签署新的知情与授权书（TECA），并将其插入博士论文或硕士论文档案。禁限期内，该文件不予公开。

禁限期适用情形：
- 申请专利登记；- 向科学期刊投稿；-
作为图书章节出版；- 将硕士论文/博士
论文以图书形式出版。

注：本条款须由导师和作者在SEI中签署。

文件由以下人员以电子方式签署：**Thiago Henrique Moreira**，**学生**，签署时间为2026年2月27日10:47，遵循巴西利亚官方时间，依据2020年11月13日第10.543号法令第4条第3款。

文件由以下人员以电子方式签署：**Lucas Chibebe Celeri**，**高等教育教师**，签署时间为2026年2月27日11:24，遵循巴西利亚官方时间，依据2020年11月13日第10.543号法令。可通过以下网站核验本文件的真实性：https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0，输入校验码：**6011807**和 CRC码：**59F8693D**。

THIAGO HENRIQUE MOREIRA

时空量子涨落导致的退相干与熵产生

提交给戈亚斯联邦大学（UFG）物理研究所（IF）物理学研究生项目的博士论文，作为获得物理学博士学位的必要条件。

研究领域：物理学。

研究方向：量子光学与量子信息。

指导教师： Lucas Chibebe Céleri 教授、博士。

戈亚尼亚
2026

作品识别信息卡由作者通过UFG图书馆系统的自动生成程序编制。

Moreira, Thiago Henrique
时空量子涨落导致的退相干与熵产生
时空 [手稿] = 量子涨落导致的退相干与熵产生
时空量子涨落 / Thiago Henrique Moreira。- 2026。
XXIV，202 页：插图。2026

导师：Lucas Chibebe Céleri 教授、博士
博士论文 - 戈亚斯联邦大学，物理研究所
（IF），物理学研究生课程，戈亚尼亚，2026年。
插图。
附录。
参考文献。
包括：缩写、符号、表格、图表、插图目录、表格目录。

1. 引力子。2. 退相干。3. 涨落。4. 熵。

I. Céleri，Lucas Chibebe，指导。II. 标题。

国际十进分
类法 53

戈亚斯联邦大学

物理研究所

博士论文答辩记录

第84号记录：Thiago Henrique Moreira的论文答辩会议，据此授予其物理学博士学位，专业方向为物理学。

2026年2月26日，自14时00分起，通过视频会议举行了题为“时空量子涨落导致的退相干与熵产生”的公开论文答辩。答辩工作由导师Lucas Chibebe Céleri博士教授（戈亚斯联邦大学物理研究所）主持，答辩委员会其他成员参加：Daniel Augusto Turolla Vanzela博士教授（圣卡洛斯物理研究所/圣保罗大学），外部正式委员；Fernando da Rocha Vaz Bandeira de Melo博士教授（巴西物理研究中心），外部正式委员；Nelson de Oliveira Yokomizo博士教授（米纳斯吉拉斯联邦大学物理系），内部正式委员；Rômulo César Rougemont Pereira博士教授（戈亚斯联邦大学物理研究所），内部正式委员。质询期间，委员会成员未建议修改论文题目。答辩委员会召开秘密会议，以完成对博士论文的评定，候选人经其成员评定获得通过。答辩委员会主席Lucas Chibebe Céleri博士教授宣布结果后，答辩工作结束；为资存照，特此制作本记录，由答辩委员会成员签署，日期为2026年2月26日。

评审委员会建议的标题

由以下人员以电子方式签署：**Lucas Chibebe Celeri**，**高等教育教师**，于2026年2月26日18:01，根据巴西利亚官方时间，依据第10.543号法令（2020年11月13日）。

由以下人员以电子方式签署：**Daniel Augusto Turolla Vanzela**，**外部用户**，于2026年2月26日18:01，根据巴西利亚官方时间，依据第10.543号法令（2020年11月13日）。

由以下人员以电子方式签署：**Romulo Cesar Rougemont Pereira**，**高等教育教师**，于2026年2月26日18:01，根据巴西利亚官方时间，依据 第10.543号法令（2020年11月13日）。

由以下人员以电子方式签署：**Nelson de Oliveira Yokomizo**，**外部用户**，时间为2026年2月26日18:01，依据巴西利亚官方时间，并根据2020年11月13日第10.543号法令第4条第3款。

由以下人员以电子方式签署：**Fernando da Rocha Vaz Bandeira de Melo**，**外部用户**，时间为2026年2月26日18:01，依据巴西利亚官方时间，并根据2020年11月13日第10.543号法令第4条第3款。

本文件的真实性可通过以下网站核实https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=文件_conferir&id_orgao_acesso_externo=0，输入校验码**5932402**和CRC码**9BCE5646**。

参考： 第23070.003491/2026-60号程序

致谢[1]

首先，我要感谢戈亚斯联邦大学物理研究所。过去十年里，这里一直是我的第二个家，我也在这里完成了从本科生到硕士生、代课教授，最终到博士生的转变。

感谢过去几年中为我的物理学教育作出重要贡献的所有教授。特别要提到 Renato Pontes 教授，他曾在我讲授量子力学的教学实习期间担任我的导师。他不仅教给我许多相关知识，还为我的职业发展提供了很好的建议。我还要感谢 Hermann Freire 教授和 Rômulo Rougemont 教授，他们在我的资格考试期间对这项工作提出了宝贵意见。

感谢来自格但斯克大学量子技术理论国际中心的 Konrad Schlichtholz、Tomasz Linowski 和 Łukasz Rudnicki 教授，感谢他们在我作为访问博士生于波兰度过的那段时间里给予我的热情接待。

接下来，我几乎无法用言语表达我对导师 Lucas Céleri 教授的感激之情。在过去的四年里，他教会了我很多物理学知识，并一直引导我培养科学家所需的批判性思维能力。从选题建议、物理学讨论、职业和生活建议，到我需要帮助时给予的支持与理解，以及让我能够自主探索，他给予我的指导远远超出了导师职责的要求。

现在，我想感谢过去几年里一直陪伴在我身边的人们，无论是陪我参加派对，还是一起看电影和电视剧、在酒吧喝酒或共享美餐、为愚蠢的小事开怀大笑，或是没完没了地聊物理学、书籍、电影、电视剧、音乐和电子游戏，我都无法充分表达我的感激之情。这是我自己选择的家人，虽然我肯定无法提及每一个人，但有些人我绝不能不致谢。Ary、Igor、Pedro Augusto、Gabi、Babi、Maria、Felipe、Henrique、Sarah、Lucão、Gustavo、Frank、Dib、Lago、Mateus、Edson、Mazetti、Gratão、Arthur、Maykon、Murilo 和 Larissa，衷心感谢你们成为我生命的一部分。最后，我要特别提到我的男友 Adal，感谢他在过去这一年里给予我的爱与支持。

当然，我几乎要将这一切都归功于我的家人：我的母亲 Nádia、我的父亲 Jeneir、我的姐姐 Fernanda 和她的丈夫 Lucas，当然还有我的四条腿女儿 Fiona。没有他们，我不知道自己会成为怎样的人。

最后，我要感谢没有放弃的自己。

[1]这项工作得到了高等教育人才培养协调局（CAPES）的资助——财务代码 001。

明白真正重要的一切，是一
堂漫长而痛苦的课

二十一名飞行员，*RAWFEAR*

摘要

量子力学与引力物理学的交汇数十年来一直带来诸多棘手难题。在此背景下，我们研究一个与引力子浴耦合的开放量子系统的动力学；引力子是广义相对论线性极限下引力场的量子。我们着重探讨两个主要方面。首先，我们分析将开放系统描述为同时具有外部和内部自由度时，引力子所导致的退相干。由于引力具有普适性，内部变量也会与引力子相互作用。我们在此表明，即使单独的引力子浴不会导致微观系统的空间叠加态退相干，这种相互作用在长时区间仍会导致此类退相干。随后，我们探讨第二个主要方面：外部施力者驱动量子系统穿过引力子浴时所产生的熵。这种不可逆性源于时空本身的量子涨落，因此具有根本上的普适性。

关键词： 引力子；退相干；涨落；熵。

摘要

量子力学与引力物理学的交汇，几十年来一直带来颇具挑战性的谜题。在此背景下，我们研究一个耦合到引力子浴的开放量子系统的动力学；引力子是广义相对论线性化极限下引力场的量子 。我们重点关注两个主要方面。首先，我们分析引力子引发的退相干，并考虑开放系统由外部和内部自由度共同描述的情形。由于引力具有普适性，内部变量也会与引力子相互作用。我们在此表明，即使引力子浴本身不会导致微观系统的空间叠加态退相干，这种相互作用仍会在长时间尺度下引发退相干。随后，我们转向第二个主要方面，即外部主体引导量子系统穿过引力子浴时产生的熵。这种不可逆性源于时空本身的量子涨落，因此具有根本性的普适特征。

关键词：引力子；退相干；涨落；熵。

目录

图目录 xvii表格目录 xix出版物目录 xxi

符号与约定 xxiii

引言 1

I 理论背景 5

1 微扰量子引力 7

1.1 爱因斯坦-希尔伯特作用量 .81.2 平直时空中的线性化引力 .121.2.1 弱场极限 .121.2.2 规范不变性 .13洛伦兹规范 .15横向无迹规范 .161.2.3 平面波解 .161.2.4 引力波与试验质量的相互作用 . . . . . 181.2.5 引力波的产生 .201.2.6 引力波的探测 .24

1.3 量子引力辐射 .27

1.3.1 螺旋度与自旋 .281.3.2 自由引力子 .301.3.3 相互作用引力子 .311.3.4 PWZ方法 .33

1.4 弯曲时空中的线性化引力 .34

1.4.1 线性化爱因斯坦方程 .351.4.2 TT规范 .371.4.3 牛顿极限 .39

2 环境诱导退相干 43
2.1 退相干基础 .452.2 Feynman-Vernon影响泛函 .48

2.2.1 路径积分 .482.2.2 影响泛函 .502.2.3 线性耦合模型 .53

2.3 主方程 .57
2.3.1 推导主方程 .582.3.2 耗散、扩散与退相干 .602.3.3 涨落耗散定理 .622.3.4 Caldeira-Leggett 主方程 .65

2.4 朗之万方程 .662.5 退相干历史 .682.5.1 量子力学中的历史 .682.5.2 退相干泛函 .702.5.3 开放量子系统的一致历史 72

3 引力退相干 7 5
3.1 引力退相干的主方程 .763.2 引力子诱导的空间局域化 .803.3 引力时间膨胀导致的退相干 .81

II 引力子诱导的退相干与熵产生 85

4 与引力子环境相互作用的量子系统 87
4.1 经典作用量 .874.1.1 物质作用量 .884.1.2 引力作用量 .924.1.3 总作用量 .934.2 引力影响泛函 .944.3 外部自由度密度矩阵 .98

5 复合粒子的引力子诱导的退相干 10 3
5.1 退相干函数 .1035.1.1 构型 1 .1055.1.2 构型 2 .108

5.2 初始真空态的退相干 .111
5.2.1 短时极限 .1125.2.2 长时极限 .115

5.3 初始热态、相干态和压缩态的退相干 . . . 1165.4 引力再相干的可能性 . 119

6 引力子诱导的熵产生 123

6.1 含引力子噪声的朗之万方程 .1246.2 耗散功与熵 .125

C结论与未来工作 129

III 附录 131

A 微分几何 133

A.1 可微流形 .133A.2 张量.136A.3 流形之间的映射 .140A.4 李导数 . 142A.5 度规张量 .144A.6 协变导数 .146A.7 平行移动与测地线 .148A.8 黎曼曲率张量 .150A.9 测地线偏离 .152A.10 局部惯性坐标 .153A.11 费米正规坐标 .155A.11.1 构造费米正规坐标 .155A.11.2 度规分量 .158

B 牛顿势引起的引力子散射 163

B.1 S矩阵 .163B.2 时间序二点函数 .166B.2.1 自由引力子传播子 . 166B.2.2 相互作用理论引力子传播子 .167B.3 微分截面 .168

C 噪声核的计算 173

C.1 引力噪声核 .173C.1.1 真空态 .175C.1.2 热态 .176C.1.3 相干态 . 177C.1.4 压缩态 .178

C.2 内部自由度噪声核 .179

D 涨落定理 181

D.1 经典涨落定理 .181D.1.1 受驱动经典系统的微观可逆性 . . . . . 181D.1.2 克鲁克斯涨落定理 .182D.1.3 Jarzynski 等式 .185D.2 量子涨落定理 .185

D.2.1 量子微观可逆性 .186D.2.2 功的概率密度函数 .187D.2.3 Crooks 涨落关系和 Jarzynski 等式的量子版本 .188

参考文献 **191**

图目录

1.1 引力波对x^1-x^2 平面内静止粒子环的影响，取决于波的偏振。. . . . . 20 1.2 源的大小约为 $\delta r \ll r$，其中 r 是到观测点的距离 .22 1.3 双星系统.23 1.4 迈克耳孙干涉仪.25 1.5 微分截面关于散射角的函数.41 4.1 两个试验质量 M 和 m，其中 $M \gg m$，以及它们在费米正规坐标中的测地线偏离，由向量 $\boldsymbol{\xi}$表示。质量 m 还由内部自由度描述，以红色卷曲线表示. 89 4.2 两个试验质量 M 和 m 位于一个大得多、质量也大得多的球形质量 M_N附近；该球形质量的半径为 R_N，相对于质量 M位于R $\simeq R_N^e_3$处. 91 5.1 假设引力子最初处于真空态时，退相干函数的不同贡献.112 5.2 假设引力子最初处于热态时，退相干函数的不同贡献.117 5.3 假设引力子最初处于相干态时，退相干函数的不同贡献.118 5.4 假设引力子最初处于压缩态时，退相干函数的不同贡献.118 A.1 同胚 ϕ_i 和 ϕ_j 将流形 M 上的开集 O_i 和 O_j 映射到欧几里得空间中的开集 U_i 和 U_j .135 A.2 映射 f : $M \to M'$ 的坐标表示为$\psi \circ f \circ \phi^{-1}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n'}$.135 A.3 曲线 c 位于 M中，以 t为参数，其坐标表示为$\phi \circ c$.136

A.4 曲线 c 与函数 f 以及局部坐标系ϕ，定义流形 M 上一点沿由 $c(t)$确定方向的切向量 X .137 A.5 映射 ϕ 对函数 f 的拉回： $M \to N$.141 A.6 两个协变导数的对易子.150 A.7 一组测地线 $\gamma_s(t)$，其切向量为 T^μ，偏离向量为 S^μ.153 B.1 向量 p_1 和 p_2 及其对应的空间极化正交单位矢量. 171

表格目录

5.1 初始处于**真空态**时，退相干函数的不同贡献。“贡献”列中，“G”表示引力子，“I”表示内部自由度，“N”表示牛顿势。.1115.2 典型频率平方。左侧估算 $(\Lambda/\hbar)^2$ 在若干探测器尺寸 L_0下的量级。右侧估算 GM_N/R_N^3在若干牛顿势源下的量级。1135.3 初始处于**热态**时，退相干函数的不同贡献。.1165.4 初始处于**相干态**时，退相干函数的不同贡献。.1165.5 初始处于**压缩态**时，退相干函数的不同贡献。.117

出版物目录

与本学位论文相关

- MOREIRA, T. H.; CÉLERI, L. C. **弱量子化引力场诱导的复合粒子退相干**。《经典与量子引力》，第 41 卷，页码 015006，2023 年。

- MOREIRA, T. H.; CÉLERI, L. C. **时空涨落导致的熵产生**。《经典与量子引力》，第 42 卷，页码 025022，2024年。

- MOREIRA, T. H.; CÉLERI, L. C. **引力子诱导的复合粒子退相干**。载于：Alexandre Dodonov；Lucas Chibebe Céleri（编）。第三届量子非定常系统国际研讨会论文集。第 1 版：LF Editorial，2025年，页码 53–70。

- MOREIRA, T. H.; CÉLERI, L. C. **复合粒子的引力退相干与再相干：引力子与经典牛顿势之间的相互作用**，arXiv:2602.22517。

其他出版物

- MOREIRA,T. H.; BRAGHIN,F. L. **真空极化导致的磁场对NJL模型耦合常数的修正**。 *PhysicalReviewD*，第105卷，第114009页，2022年。

- DE OLIVEIRA, G.; MOREIRA, T. H.; CÉLERI, L. C. **引力波作用下的动态卡西米尔效应**。熵，第28卷，第177页，2026。

符号与约定

• **指标记法**。 四维矢量记作 $x^\mu = (x^0,\ \mathbf{x})$，其中 **x** 表示其空间分量， x^0 表示时间分量。偏导数通常记作 $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$。在一个$n$–维时空上处理张量场时，希腊指标从 0 到 $n-1$，而拉丁指标从 1 到 $n-1$。除非另有说明，重复指标均按爱因斯坦求和约定求和。方框符号专用于表示平直达朗贝尔算子 $\Box \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$，其中 $\eta_{\mu\nu}$表示闵可夫斯基时空度规张量。

• **对称化与反对称化**。 对于任意秩张量$T_{\mu_1\ldots\mu_n\rho}{}^{\sigma}$ 我们定义

$$T_{(\mu_1\ldots\mu_n)\rho}{}^{\sigma} = \frac{1}{n!}(T_{\mu_1\ldots\mu_n\rho}{}^{\sigma} + \text{sum over permutations of indices } \mu_1\ldots\mu_n),$$

and

$$T_{[\mu_1\ldots\mu_n]\rho}{}^{\sigma} = \frac{1}{n!}(T_{\mu_1\ldots\mu_n\rho}{}^{\sigma} + \text{alternating sum over permutations of indices } \mu_1\ldots\mu_n).$$

• **度规号差**。 本文始终采用以正号为主的度规约定，

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, \ldots).$$

• **曲率**。 由时空度规张量 $g_{\mu\nu}$ 及其逆度规 $g^{\mu\nu}$构造的有用张量和符号：

曲率符号与张量	
克里斯托费尔符号	$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$
黎曼张量	$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$
里奇张量	$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}$
里奇标量	$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$

• **时间导数**。 时间变量的函数上方的点表示对该时间的导数。例如， $\dot{f}(t) \equiv \mathrm{d}f(t)/\mathrm{d}t$, $\ddot{h}(t,\ \mathbf{x}) \equiv \partial^2 h(t,\ \mathbf{x})/\partial t^2$, 等等。

• **傅里叶变换**。 n–维时空函数 $F(x)$ 的傅里叶变换记为 $\tilde{F}(k)$，其定义使得

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n} \tilde{F}(k) e^{ikx},$$
$$\tilde{F}(k) = \int \mathrm{d}^n x\, F(x) e^{-ikx},$$

其中 $kx \equiv \eta_{\mu\nu} k^\mu x^\nu$，且 $k^\mu = (\omega,\ \mathbf{k})$。 n–维δ函数满足

$$\delta^n(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \mathrm{d}^n x\, e^{ikx}.$$

• **单位**。 除非另有明确说明，我们采用的单位使得

$$\hbar = c = k_B = G = 1,$$

其中，$\hbar$ 是约化普朗克常数， c 是真空光速， k_B是玻尔兹曼常数， G 是引力常数。有时，恢复这些普适常数会很有用，它们可以通过所谓的普朗克量表示:

普朗克量		
量	**定义**	**国际单位制中的近似值**
长度	$L_\mathrm{P} = \sqrt{\hbar G/c^3}$	$1.6 \times 10^{-35}\mathrm{m}$
Time	$t_\mathrm{P} = \sqrt{\hbar G/c^5}$	$5.4 \times 10^{-44}\mathrm{s}$
Mass	$M_\mathrm{P} = \sqrt{\hbar c/G}$	$2.2 \times 10^{-8}\mathrm{kg}$
能量	$E_\mathrm{P} = \sqrt{\hbar c^5/G}$	$2.0 \times 10^{9}\mathrm{J}$
温度	$T_\mathrm{P} = \sqrt{\hbar c^5/G k_B^2}$	$1.4 \times 10^{32}\mathrm{K}$

引言

广义相对论与量子力学的交汇领域，或许可以说是现代物理学的两大支柱，几十年来一直令不少科学家困惑。其中最著名的问题或许是寻求量子引力理论，这仍是当前物理学中最重大的未解问题之一。尽管人们已付出诸多理论努力 [1–18], 但对引力相互作用具有量子性质的实验确认仍然缺失，这很可能是因为相较于其他三种已知的基本相互作用，引力相互作用十分微弱，而后者都已由量子场论令人满意地加以描述。由于缺乏实验结果的指引，量子引力理论存在许多彼此差异显著的候选方案，而人们对于如何恰当地量子化引力，甚至是否需要对引力进行量子处理，尚未达成普遍共识。

无论最终证明哪种量子引力理论（如果确有其理论）最为合适，我们自然会预期，在弱引力场的极限下，通常的量子场论处理仍然成立。在这一极限下，总时空度规可表示为围绕爱因斯坦方程某个已知解的展开，其中微扰代表传播的自由度。这就是所谓引力波的经典描述，LIGO 已于 2015 [19] 探测到引力波。在量子层面，这些波会产生一种自旋为 2 的激发，称为引力子；这与电磁波量子化后引入光子这一概念的方式相同。这就是微扰量子引力 [1], 的框架——一种面临微扰不可重整化性问题的形式体系；尽管如此，它仍是一种真正具有预测能力的有效场论 [20]。然而，引力的微弱性给利用现有技术验证这类预测带来了重大障碍。

即使是 LIGO 探测到引力波，也是在数百名科学家多年努力之后才得以实现的，因此我们不禁会想，距离真正探测到单个引力子还有多远（如果这种探测确实可能的话 [21]）。这一情景促使人们提出不同方案，以更间接的方式探测引力的量子特性，而无需直接探测引力子，例如引力诱导纠缠 [22, 23], 、影响试验粒子测地线偏离的引力子噪声 [24–30], 以及引力退相干 [30–34]。

退相干 指的是感兴趣的系统与环境之间发生纠缠，导致量子相干性不可逆丧失的现象。环境通常是一个量子系统，其自由度要么与研究无关，要么从实际角度来看难以处理。当这一现象在某种程度上与引力相互作用相关时，我们称之为 引力退相干。例如，Kanno 等人 [30]分析了与引力子浴相互作用所导致的量子点粒子空间叠加态的退相干。然而，“引力退相干”一词并不总是用于环境由量子引力自由度描述的情形。特别是，Pikovski 等人 [35, 36]研究了复合粒子因与自身内部结构相互作用而产生的退相干，这种相互作用由经典静态引力势所引起的时间膨胀所中介。鉴于这两种截然不同的引力退相干机制，我们提出这样一个问题：引力子浴能否在自身充当环境的同时，也诱导复合系统内部自由度与外部自由度之间的耦合？这又会对这种复合粒子质心坐标的量子叠加态退相干产生什么影响?

在这项工作中，我们研究量子系统的外部自由度由于与其自身内部结构以及引力子浴耦合而产生的退相干。我们采用费曼-弗农影响泛函方法 [37–39]（该方法在施温格-凯尔迪什闭合时间路径框架 [40, 41]内，为所关注的系统生成非平衡有效作用量），以获得相关变量的约化密度矩阵。这种情形涉及一个与两个环境相互作用的开放量子系统。然而，由于引力具有普适性，该场也与内部自由度耦合，这意味着两个环境也会彼此相互作用，因此，仅仅将它们各自的影响相加，并不能轻易得到问题的解。我们通过考虑四种可能的初始引力子态，展示如何求得退相干函数以及退相干时间，从而描述最初处于空间分离的时空事件叠加态中的系统所发生的量子相干性丧失。

我们提出的另一个问题涉及此类时空量子涨落所导致的熵产生。具体而言，引力时间膨胀的不可逆性已在文献 [42], 中得到分析，随后在文献 [43]中被推广到经典弯曲时空，并在文献 [44]中应用于量子场。在此，通过考虑开放量子系统在有限时间区间内受到外部施力者的作用，我们得到了当系统被迫穿过引力子浴时耗散功的表达式。这通过分析来完成

涨落定理 [45–50]如何适用于当前问题。

本学位论文分为三个主要部分，安排如下：

- 第一部分介绍理论背景，以及本学位论文其余部分将用到的工具和概念。

  – 第1 章回顾经典线性化引力及其量子处理，也就是微扰量子引力框架，并介绍引力子的概念。

  – 第2 章回顾开放量子系统这一主题，重点讨论退相干现象，尤其是量子布朗运动这一背景下的退相干。第1 章和2 章彼此完全无关，无须按特定顺序阅读。– 第3 章整合前面章节介绍的概念，并简要、有选择地回顾引力退相干这一主题的相关文献。

- 第二部分是本学位论文的核心，我们将在此分析复合系统中由引力子诱导的退相干，以及引力子诱导的熵产生。

  – 在第4 章中，我们考虑一个由外部和内部自由度描述、并与牛顿背景中的弱量子化引力场耦合的量子复合粒子。通过利用 Feynman-Vernon 影响泛函，将除外部系统变量以外的所有变量积分掉，我们得到约化系统密度矩阵，其中环境的所有影响都编码在噪声核中。

  – 在第5 章中，我们通过考察叠加态的特定构型以及不同的初始引力子态，分析系统质心变量空间叠加的退相干函数。第4 章和5 章均改编自两篇原始论文 [51, 52]。

  – 在第6 章中，我们分析外部施力者使系统穿过引力子浴时所耗散的功，并量化熵产生。本章改编自另一篇原始论文 [53]。– 我们以一些总结性评论以及对未来工作的展望，结束第二部分II 。

- 第三部分包含附录。

– 附录 A 是对微分几何这一广义相对论背后的数学学科中一些有用概念的回顾。

– 附录 B 探讨量子引力辐射自由度与牛顿背景之间的相互作用。我们在此明确计算引力子散射的微分截面，并在第 1 章和第 4章中简要讨论这一问题。

– 在附录 C 中，我们明确计算用于表征环境对感兴趣的量子系统影响的噪声核。我们计算了真空态、热态、相干态和压缩态下的引力噪声核；此外，还假设内部自由度处于热态，以此计算内部自由度噪声核。

– 最后，附录 D 简要回顾 Crooks（经典与量子）涨落关系和 Jarzynski 等式。

– 文末列出了参考文献。

第一部分

理论背景

第1章

微扰量子引力

阿尔伯特·爱因斯坦于20世纪提出广义相对论。它很快与量子力学一道，成为现代物理学的支柱之一。广义相对论成功地以现代方式描述了引力相互作用，并由此作出了一些卓越的预言，且这些预言已得到实验验证，例如水星近日点的进动、引力场导致的光线弯曲，以及引力波的存在[54–63]。引力是已知四种基本相互作用中最弱的一种，而在这四种相互作用中，唯有引力尚缺乏令人满意且经实验确认的量子描述。电磁力、弱力和强力都已由粒子物理学标准模型成功描述 [64–66], 但引力是否也存在量子描述，抑或仍保持其经典属性，至今仍有争议 [3–8]。自然，这场争论只能通过实验来解决。尽管标准的量纲分析似乎表明，量子引力只有在普朗克尺度才会变得重要 [55], ，而这一尺度远超现有技术所能触及的范围，但近年来，人们越来越关注这样一种设想：受量子信息概念启发，通过桌面实验检验引力的量子特性 [22, 23, 67–80]。然而，由于在量子区域探测微弱引力相互作用存在困难，决定性的实验证据仍难以取得。

从理论角度来看，也存在一些概念上的困难。引力不同于其他相互作用，因为后者被描述为固定时空背景上的场，而广义相对论则是关于时空本身的理论，因此尚不清楚应如何对其进行量子化。关于完整的量子引力理论，目前有许多候选理论，例如二次引力 [9, 10], 渐近安全量子引力 [11, 12], 因果动力学三角剖分 [13, 14], 圈量子引力 [15,16], 弦论 [17, 18], 等 [1, 2]。每一种理论都面临自身的概念问题，而且它们都缺乏实验验证。

然而，无论我们是否能获得适用于所有能量尺度的量子引力完整描述（如有必要），都可以预期在弱场极限下恢复

通常在固定背景上的量子场论描述。更准确地说，弱场极限涉及围绕爱因斯坦场方程某个经典解进行度规展开，并且只考虑微小微扰的动力学。在经典理论中，这会导出对引力波的描述。由于在数学上，这等同于描述固定背景上的一个场，因此量子化过程可以直接类比电磁场的量子化。**微扰量子引力**正是这一理论框架，而度规微扰场的量子激发就是我们所说的**引力子**。

这种广义相对论的量子场论方法应被视为一种有效场论，因为它存在微扰不可重整化性；因此，不能认为它在任意能量尺度上都成立。这意味着，在普朗克尺度下，需要一种紫外完备理论，即完整的量子引力理论。尽管如此，微扰量子引力仍能作出可检验的预言。例如，文献 [20] 使用这一框架明确计算了牛顿势的辐射修正（另见文献 [65]）。对于形式如下的势[1] $\phi(r) = -GM/r$，这一修正的量级为 $\hbar G/c^3 r^2$。短期内，这一修正小到无法测量，但它仍然是微扰量子引力的一项真正预言。

本章旨在回顾这一框架，为后续分析奠定基础。我们先简要介绍基于作用量原理表述的广义相对论一般理论，接着考察线性化引力，研究闵可夫斯基时空中的小扰动。这些小扰动就是经典上所知的引力波，因此我们将讨论这些时空涟漪如何传播、如何与试验粒子相互作用、如何产生以及如何探测。接下来，我们讨论其量子化，由此引入引力子，并概述该理论的局限性。最后，我们将线性化引力框架推广到一般弯曲背景。随后，我们取牛顿极限，研究引力子如何与经典牛顿势相互作用并发生散射。这一讨论对于我们在第二部分考察牛顿源（如地球）附近的引力子诱导的退相干问题至关重要。II。

1.1 爱因斯坦-希尔伯特作用量

爱因斯坦引力理论的核心思想之一是**等效原理**。这一原理可追溯至牛顿力学，其指出惯性质量，

[1] 将普适常数明确写出。

它衡量任意给定的力对系统运动的影响程度，与引力质量相同；引力质量则与任何有质量的系统都具有在整个空间中与引力场相互作用并产生引力场的性质有关（这类似于库仑定律中的电荷）。等效原理赋予引力相互作用一种特殊地位，其更现代的表述为 [54]

在足够小的时空区域中，物理学定律约化为狭义相对论的定律；不可能借助局部实验探测到引力场的存在。

等效原理意味着引力是普适的，会影响一切形式的能量和动量。倘若并非如此，人们就可以进行一项涉及两个系统的局部实验（其中一个受引力影响，另一个不受其影响），观察它们的不同行为，并由此推断引力场的存在，从而违反该原理。在这一范式下，自然会认为，这样一种普适的相互作用因此必然与物质和辐射赖以传播的时空结构相联系。

与黎曼几何的联系源于等效原理与非欧几里得几何的高斯指导原理之间的相似性：在弯曲空间的任意一点，我们都可以构造一个局部笛卡尔坐标系，其中距离服从毕达哥拉斯定律[56]。如果我们假定时空事件是具有伪黎曼度规的弯曲可微流形中的点，那么一旦我们将引力等同于时空曲率，等效原理便会自然地从局部惯性坐标的构造中产生（见附录A，以便快速回顾微分几何）。时空曲率受能量和动量分布的影响，其方式由爱因斯坦方程描述。

广义相对论的公设可列举如下：

1. 时空是一个四维可微流形 M，其上赋予洛伦兹度量 $g_{\mu\nu}$。

2. $(M, g_{\mu\nu})$的曲率通过爱因斯坦方程与时空中的物质分布相关联，该方程为[2]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \tag{1.1.1}$$

在方程（1.1.1）中，$R_{\mu\nu}$ 是里奇张量，而 R 是里奇标量。（0，2）对称张量 $T_{\mu\nu}$ 称为**能量-动量张量**。比安基恒等式与

[2]在本文中，我们只考虑宇宙学常数为零的解。

爱因斯坦方程共同推出能量-动量守恒,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{1.1.2}$$

其中 ∇_μ 表示（与度规相容的）协变导数。

爱因斯坦方程表明，时空的度规结构由编码在能量-动量张量中的能量密度分布所支配；然而，该张量本身也依赖于度规。例如，对于理想流体，其形式为

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)U^\mu U^\nu + g^{\mu\nu}P, \tag{1.1.3}$$

由其静止系能量密度 ρ 和各向同性的静止系压强 P，以及其四速度矢量场 $U^\mu(x)$来描述。由于对度规的显式依赖，以及爱因斯坦张量高度非线性的性质，求出爱因斯坦方程的一般解通常是一项非常困难的任务。

广义相对论是经典场论的一个例子，其中的动力学场是时空度规。正如场论中通常所做的那样，可以从最小作用量原理导出运动方程。对于广义相对论，我们将总作用量写为

$$S = S_{\text{EH}} + S_{\text{matter}}, \tag{1.1.4}$$

其中，右侧第一项描述度规场，而第二项描述在时空中传播的物质。描述引力场的作用量称为爱因斯坦-希尔伯特作用量，其表达式为

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}R, \tag{1.1.5}$$

其中，积分遍及整个时空，g 是度规行列式 t.

根据最小作用量原理，对于满足 $\delta S = 0$ 的场构型，运动方程成立。其中，δ 表示关于度规场的作用量泛函变分。对于爱因斯坦-希尔伯特作用量，我们有

$$\delta S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^4x\left[\left(\delta\sqrt{-g}\right)R + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu})\right]. \tag{1.1.6}$$

对于右边的第一项，我们对恒等式 $\ln g = \mathrm{Tr}(\ln g_{\mu\nu})$ 两边取变分，得到 $\delta g = g(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu})$。现在利用以下事实：$\delta(g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu}) = 0$，进而得到 $\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}\delta g^{\rho\lambda}$，最后得到 $g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} =$

$-g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$。然后，

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{1.1.7}$$

现在，对于式（1.1.6）右端的第三项，我们需要计算$\delta R_{\mu\nu}$。首先注意，度规的线性变分 $g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$会导致克里斯托费尔符号的线性变分 $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \to \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$。由于变分 $\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ 是两个联络之差，因此它是一个张量。于是，黎曼张量相应的变分为

$$\begin{aligned}\delta R^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu} &= \partial_{\lambda}\big(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}\big) + \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}\big(\delta\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}\big) + \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}(\delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}) - (\lambda \leftrightarrow \nu)\\ &= \nabla_{\lambda}\big(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}\big) - \nabla_{\nu}\big(\delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}\big),\end{aligned} \tag{1.1.8}$$

其中，协变导数与 $g_{\mu\nu}$相容，而不是与 $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$相容。

将所有结果代回式（1.1.6）可得

$$\begin{aligned}\delta S_{\text{EH}} = &\frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu}\\ &+ \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\nabla_{\rho}\big[g^{\mu\nu}\big(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}\big) - g^{\mu\rho}\big(\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu}\big)\big].\end{aligned} \tag{1.1.9}$$

注意，根据斯托克斯定理，最后一行的项是一个边界贡献。然而，对于保持 $g_{\mu\nu}$ 固定的一般变分，该项并不为零，因为它还依赖于度规的一阶导数。对于边界非零的时空，若其上 $g_{\mu\nu}$ 的一阶导数不固定，则需要在爱因斯坦-希尔伯特作用量中加入边界项，以抵消这一贡献并得到爱因斯坦方程。这是因为里奇标量（爱因斯坦-希尔伯特作用量的拉格朗日密度）依赖于度规场的二阶导数，而其他场论的拉格朗日密度通常只依赖于场及其一阶导数（参见文献[55, 81]）。提及这一微妙之处后，我们姑且令边界项为零，这对我们的目的来说已经足够。

总作用量的变分为

$$\delta S = \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} + \delta S_{\text{matter}}. \tag{1.1.10}$$

能量-动量张量 $T_{\mu\nu}$ 随后可根据度规变化时物质作用量 S_{matter} 的变分定义为

$$\delta S_{\text{matter}} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{1.1.11}$$

然后，令 $\delta S = 0$ 即可立即得到爱因斯坦方程（1.1.1）。

1.2 平直时空中的线性化引力

在确立了广义相对论的基础之后，我们现在讨论弱场极限下度规场的动力学自由度，这将引出引力辐射现象。由于爱因斯坦方程的非线性，研究引力辐射会立即面临一个困难，而研究电磁辐射时则不存在这一问题。前者与后者的主要区别在于：电磁波不携带电荷，而引力波本身就是能量和动量的分布，因而会影响其自身的场。因此，我们将关注爱因斯坦方程的弱场解，它们代表能量和动量不足以显著改变自身场的引力波。在本节中，我们研究围绕平直时空的度规展开。围绕弯曲度规展开的一般情形将在第1.4节讨论。

1.2.1 弱场极限

广义相对论的线性化版本描述了一个对称张量场 $h_{\mu\nu}(x)$ 在固定背景时空上传播的理论；目前我们选择平直时空作为背景。我们从将度规展开为以下形式开始:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{1.2.1}$$

其中我们假设 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$，从而可以在运动方程中忽略高阶项。逆度规为

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \tag{1.2.2}$$

其中 $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$。保留 $h_{\mu\nu}$ 的线性项，克里斯托费尔符号为

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}(\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\nu h_{\sigma\mu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}), \tag{1.2.3}$$

而黎曼张量则变为

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\sigma h_{\rho\nu} + \partial_\nu\partial_\rho h_{\mu\sigma} - \partial_\mu\partial_\rho h_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma h_{\rho\mu}). \tag{1.2.4}$$

为了得到描述场 $h_{\mu\nu}(x)$ 的作用量表达式，我们需要将爱因斯坦-希尔伯特作用量展开到 $h_{\mu\nu}$ 的二阶，因为

运动方程预期是度规扰动的一阶。经过漫长但直接的计算，我们得到

$$R = \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \Box h - \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\partial_\mu\partial^\rho h_{\rho\nu} + \frac{1}{4}h\Box h + \frac{1}{4}h^{\mu\nu}\Box h_{\mu\nu} + \text{total derivative of second order terms}, \tag{1.2.5}$$

其中 $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$，我们略去了 $O(h^2)$ 阶项的全导数，因为这些项要么会产生边界项，要么会在拉格朗日量中产生 $O(h^3)$ 阶项。此外，我们可以利用恒等式 [3]

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{1}{2}h + O(h^2), \tag{1.2.6}$$

得到

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{64\pi}\int \mathrm{d}^4x\,(h_{\mu\nu}\Box h^{\mu\nu} + 2h^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu h - h\Box h - 2h_{\mu\nu}\partial_\rho\partial^\mu h^{\nu\rho}), \tag{1.2.7}$$

这里我们略去了边界项以及高阶项。式（1.2.7）是围绕平直时空线性化的爱因斯坦-希尔伯特作用量，它描述了度规微扰场 $h_{\mu\nu}$的自由动力学。由该作用量得到的真空（$T_{\mu\nu} = 0$）中的运动方程，例如，可写为

$$\Box h_{\mu\nu} = \partial^\sigma\partial_\nu h_{\sigma\mu} + \partial^\sigma\partial_\mu h_{\sigma\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h. \tag{1.2.8}$$

接下来，我们来看看广义相对论的微分同胚不变性实际上如何进一步简化爱因斯坦-希尔伯特作用量。

1.2.2 规范不变性

回想一下，爱因斯坦方程可以写成 $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$，其中 $G_{\mu\nu}$ 是爱因斯坦张量 [参见式（ A.8.10 ）],，它是一个对称张量，有十个代数独立的分量。这些分量不足以唯一确定 $g_{\mu\nu}$，因为它们受到四个微分恒等式的约束，即比安基恒等式 $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$。这意味着，爱因斯坦方程的解中仍有四个 $g_{\mu\nu}$ 自由度无法唯一确定。这源于微分同胚不变性，在物理上对应于：如果$g_{\mu\nu}$ 是爱因斯坦方程的解，那么 $g'_{\mu\nu}$也将是解；后者由 $g_{\mu\nu}$ 经过一般坐标变换得到。

[3]这可由矩阵 $\mathbb{G}$ 的恒等式 $\det\mathbb{G} = \exp[\mathrm{Tr}(\ln\mathbb{G})]$ 得出。

为了了解这一观察对线性化引力的影响，我们将度规展开（1.2.1）写作

$$g_{\mu\nu}(\epsilon) = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}, \tag{1.2.9}$$

使得

$$h_{\mu\nu} = \left.\frac{\mathrm{d}g_{\mu\nu}(\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0}. \tag{1.2.10}$$

因此，可以将参数 ϵ 视为生成一族时空度规。

设 $\phi: M \to M$ 是一个微分同胚。由于微分同胚不变性，$(M, g_{\mu\nu})$ 和 $(M, (\phi^* g)_{\mu\nu})$ 表示同一个物理时空，其中 $(\phi^* g)_{\mu\nu}$表示度规张量的拉回[4] （见附录 A）。现在考虑一族单参数时空，$(M, g_{\mu\nu}(\epsilon))$。那么 $(M, (\phi_\epsilon^* g(\epsilon))_{\mu\nu})$ 表示同一时空族，其中 ϕ_ϵ 表示由任意向量场 $\varepsilon^\mu(x)$ 生成的单参数微分同胚群。

微分同胚不变性意味着 $h'_{\mu\nu} = \mathrm{d}(\phi_\epsilon^* g(\epsilon))_{\mu\nu}/\mathrm{d}\epsilon \,\big|_{\epsilon=0}$和$h_{\mu\nu}$ 表示同一个物理度规扰动。通过计算，我们可以得到它们之间的关系

$$\begin{aligned} h'_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}[(\phi_\epsilon^* g(\epsilon))_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}(\epsilon)]\right|_{\epsilon=0} \\ &= \lim_{\Delta\epsilon\to 0}\left[\frac{(\phi_{\Delta\epsilon}^* g(\Delta\epsilon))_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}(\Delta\epsilon)}{\Delta\epsilon}\right] \\ &= \mathcal{L}_\varepsilon g_{\mu\nu}(0), \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

其中 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 是沿向量场 $\varepsilon^\mu(x)$的李导数。这里，我们用到了 ϕ_0 是恒等映射这一事实。我们可以利用式（A.6.10）写成

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \nabla_\mu \varepsilon_\nu + \nabla_\nu \varepsilon_\mu, \tag{1.2.12}$$

其中 ∇_μ 表示与 $g_{\mu\nu}(0)$相容的协变导数。在我们的例子中，这就是闵可夫斯基度规，$g_{\mu\nu}(0) = \eta_{\mu\nu}$，因此我们得到[5]

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu. \tag{1.2.13}$$

这与电磁学中的规范自由度十分相似，在电磁学中，麦克斯韦方程组在规范变换 $A_\mu \to A_\mu +$ 下保持不变

[4]为简化记号，我们省略了这样一个事实：如果在时空点p处取$g_{\mu\nu}$ 的值，那么（$\phi^* g$）就在 $\phi(p)$处取值。[5]尽管向量场 $\varepsilon^\mu(x)$是任意的，但为了使条件 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ 成立，我们将其限制为满足 $\partial_\nu \varepsilon^\mu \sim O(h)$的向量场。

$\partial_\mu\Lambda$，其中 A_μ 是电磁势场，而 Λ 是任意标量函数。我们将式（1.2.13）称为**规范变换**，而它使运动方程保持不变这一事实称为**规范不变性**。

洛伦兹规范

规范自由度使我们能够简化运动方程。例如，可以选择**洛伦兹规范**，其中

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial^\nu h = 0. \tag{1.2.14}$$

为了说明这是如何实现的，假设我们从给定的度规扰动开始 $h_{\mu\nu}$，它不满足条件（1.2.14）。此时，可以进行一次规范变换，使新的场满足

$$\partial_\mu h'^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial^\nu h' = \partial_\mu h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial^\nu h + \Box\varepsilon^\nu. \tag{1.2.15}$$

于是，我们可以选择向量 $\varepsilon^\mu(x)$，使得

$$\Box\varepsilon^\nu = -\left(\partial_\mu h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial^\nu h\right), \tag{1.2.16}$$

经过规范变换的度规扰动将自动满足方程（1.2.14）。

在此规范选择下，爱因斯坦-希尔伯特作用量（1.2.7）取如下形式

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{64\pi}\int \mathrm{d}^4x\, h^{\mu\nu}_{\text{L}}\Box\left(h^{\text{L}}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\text{L}}\right), \tag{1.2.17}$$

其中 $h^{\text{L}}_{\mu\nu}$ 表示洛伦兹规范下的度规扰动。在由能量-动量张量 $T_{\mu\nu}$所描述的物质源存在时，由式（1.1.11）可得，

$$\delta S_{\text{matter}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\, T_{\mu\nu}\delta h^{\mu\nu}, \tag{1.2.18}$$

而最小作用量原理导出

$$\Box\bar{h}^{\text{L}}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}, \tag{1.2.19}$$

其中我们定义了

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \tag{1.2.20}$$

而洛伦兹规范条件可写为 $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu}{}_{\text{L}} = 0$。注意，式（1.2.19）是一个由能量-动量张量作为源的波动方程。

横向无迹规范

当关注引力源 $T_{\mu\nu} = 0$ 外部区域时，剩下的就是

$$\Box \bar{h}^{\mathrm{L}}_{\mu\nu} = 0. \tag{1.2.21}$$

由于平直达朗贝尔算子与偏导数对易，这个方程自然意味着 $\partial_\mu h^{\mu\nu}{}_{\mathrm{L}} = 0$，只要满足适当的边界条件；此时洛伦兹条件不再能完全固定规范（我们称之为存在剩余规范自由度）。接下来，只要满足 $\Box\xi^\mu = 0$，我们就可以进一步进行规范变换 $h^{\mathrm{L}}_{\mu\nu} \to h^{\mathrm{L}}_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu$，并利用四个函数 $\xi^\mu(x)$ 对度规扰动施加另外四个条件，从而将自由度从六个减少到两个。例如，我们可以选择 ξ^0，使新的微扰满足$h = 0$（这意味着 $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$）；并选择 ξ^i，使得 $h_{0i} = 0$。现在，洛伦兹条件的 $\nu = 0$ 分量 $\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$变为 $\partial_0 h^{00} = 0$，这意味着 h_{00} 在时间上为常数。在引力波传播的背景下，这个常数 h_{00} 在物理上与引力相互作用的静态部分有关，即产生这些波的源的牛顿势 [54, 62]。对于没有源的区域，这自动变为 $h_{00} = 0$；结合$h_{0i} = 0$，可写成 $h_{0\mu} = 0$。由运动方程自动满足的洛伦兹条件变为 $\partial_i h^{ij} = 0$。

总之，我们选择的规范定义为

$$h^{\mathrm{TT}}_{0\mu} = 0, \tag{1.2.22a}$$
$$\eta^{\mu\nu} h^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu} = 0, \tag{1.2.22b}$$
$$\partial^i h^{\mathrm{TT}}_{ij} = 0. \tag{1.2.22c}$$

这种选择称为**横向无迹规范**，或简称 TT 规范；满足这些要求的度规扰动记为 $h^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu}$。正如我们将看到的，这种规范选择大大简化了我们对引力波的研究。

1.2.3 平面波解

对于源外区域中的动力学，运动方程的形式为

$$\Box h^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu} = 0, \tag{1.2.23}$$

即波动方程，其解的形式为[6]

$$h^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu}(x) = C_{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho}, \tag{1.2.24}$$

我们称之为**引力波**。这里 $C_{\mu\nu}$ 是一个常数、对称的$(0,2)$ 张量，而常矢量 k_ρ 称为波矢。我们可以将解（1.2.24）代入波动方程（1.2.23，得到 $k_\rho k^\rho h^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu} = 0$。要求 $h^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu}$存在非平凡解，可得

$$k_\rho k^\rho = 0, \tag{1.2.25}$$

也就是说，波矢为零，意味着引力波以真空光速传播。波矢的类时分量称为波的**频率**，记作 $k^\rho = (\omega,\ k^1,\ k^2,\ k^3)$，于是

$$\omega^2 = \delta_{ij} k^i k^j. \tag{1.2.26}$$

如前所述，我们的规范选择将引力波的自由度从十个减少到两个。对于平面波解（1.2.24），这意味着常张量 $C_{\mu\nu}$ 只有两个独立分量，我们称之为引力波的两种偏振。于是我们可以写成 $C_{\mu\nu} = \sum_s q_s \epsilon^s_{\mu\nu}$，其中指标 s 标记偏振，q_s 是波幅，而张量 $\epsilon^s_{\mu\nu}$ 称为**偏振张量**。它是无迹且纯空间的，同时满足横向条件，

$$\epsilon_{0\nu} = 0, \tag{1.2.27a}$$
$$\eta^{\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu} = 0, \tag{1.2.27b}$$
$$k^i \epsilon_{ij} = 0. \tag{1.2.27c}$$

这些结论可直接由方程（1.2.22）和（1.2.24）得出。注意，横向条件必然使偏振张量取决于波矢的空间部分，$\epsilon_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu}(\mathbf{k})$。

为了更好地理解引力波的传播，我们选择一组空间坐标，使波沿 x^3 方向传播。因此，波矢的形式为 $k^\rho = (\omega, 0, 0, \omega)$。在这种情况下，偏振张量的横向条件要求 $\epsilon_{3j} = 0$。此外，由于偏振是

[6]自然，任何此类平面波解的叠加态也满足波动方程。

纯空间的、对称且无迹的，我们得出 $C_{\mu\nu}$ 的形式为

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_+ & q_\times & 0 \\ 0 & q_\times & -q_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2.28}$$

其中 q_+ 和 $q_\times$ 是常数（很快就会明白选择这种记号的原因）。与波频率 ω 一起，这些量完全刻画了该波。通常将两种偏振分别写作 [82],

$$\begin{aligned} \epsilon^+_{ij} &= \hat{\epsilon}^{(1)}_i \otimes \hat{\epsilon}^{(1)}_j - \hat{\epsilon}^{(2)}_i \otimes \hat{\epsilon}^{(2)}_j, \\ \epsilon^\times_{ij} &= \hat{\epsilon}^{(1)}_i \otimes \hat{\epsilon}^{(2)}_j + \hat{\epsilon}^{(2)}_i \otimes \hat{\epsilon}^{(1)}_j, \end{aligned} \tag{1.2.29}$$

其中，空间偏振单位矢量 $\hat{}\epsilon^{(1)}$ 和 $\hat{}\epsilon^{(2)}$ 与传播方向正交 $k = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$（对于 $k = \hat{}\mathbf{e}_3$,），偏振单位矢量为 $\hat{}\mathbf{e}_1$ 和 $\hat{}\mathbf{e}_2$）。于是，平面波解可写成以下形式

$$h^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu}(x) = \sum_{s=+,\times} q_s \epsilon^s_{\mu\nu}(\mathbf{k}) e^{ik_\rho x^\rho}, \tag{1.2.30}$$

偏振张量通常按以下方式归一化

$$\epsilon^s_{ij}\epsilon^{ij}_{s'} = 2\delta^s_{s'}. \tag{1.2.31}$$

这两种“加号”和“叉号”偏振合称为线偏振基底[7]。

1.2.4 引力波与试验质量的相互作用

现在，我们来考察引力波对试验粒子运动的影响。首先考虑一个试验质量，其坐标为 x^μ，位于 TT参考系中（在该参考系内，度规扰动满足条件（1.2.22））），并静止于 $\tau = 0$，其中 τ 表示其固有时。测地线方程意味着

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}\tau^2}\right|_{\tau=0} = -\left.\left[\Gamma^i_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\right]\right|_{\tau=0} = -\left.\left[\Gamma^i_{00}\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right]\right|_{\tau=0}, \tag{1.2.32}$$

[7]我们还可以通过定义 $q_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_+ + iq_\times)$ 和 $q_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_+ - iq_\times)$ 来考虑右旋和左旋的圆偏振模。

这里用到了这样一个事实：根据假设，在 $x^i/\mathrm{d}\tau = 0$ 处，$\mathrm{d}\tau = 0$。将克里斯托费尔符号按 $h_{\mu\nu}$的一阶展开代入式（1.2.3），可得

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2}\delta^{ij}(2\partial_0 h_{0j} - \partial_j h_{00}). \tag{1.2.33}$$

施加 TT规范条件（1.2.22）后，我们得到 $\Gamma^i_{00} = 0$ 因此，

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}\tau^2}\right|_{\tau=0} = 0. \tag{1.2.34}$$

因此，如果粒子在时间 $\tau = 0$ 处于静止状态，那么它在 TT参考系中将始终保持静止。若要观测引力波对试验质量的物理效应，仅有一个试验质量是不够的。

接下来，我们根据测地线偏离方程考察邻近粒子的相对运动[8]。考虑两个试验质量，它们各自沿着以 t为参数的测地线运动，其四速度由同一个向量场描述$U^\mu(x)$。用 S^μ表示分离向量，测地线偏离方程为（附录 A）

$$\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{d}t^2}S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}U^\nu U^\rho S^\sigma, \tag{1.2.35}$$

其中，$\mathrm{D}/\mathrm{d}t$ 表示沿测地线切向量的方向协变导数。接下来，假设试验质量运动缓慢，使得$U^\mu(x) = \delta^\mu_0 + O(h)$。由于黎曼张量已经是 $O(h)$，测地线偏离方程可化简为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}S_\mu = R_{\mu 00\sigma}S^\sigma, \tag{1.2.36}$$

此处左侧同样舍去了高阶项。保留 $h_{\mu\nu}$ 的一阶项，黎曼张量由式（1.2.4）给出。在 TT规范下，

$$R^{\mathrm{TT}}_{\mu 00\sigma} = \frac{1}{2}\partial_0^2 h^{\mathrm{TT}}_{\mu\sigma}, \tag{1.2.37}$$

测地线偏离方程变为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}S_\mu = \frac{1}{2}S^\sigma\frac{\partial^2}{\partial t^2}h^{\mathrm{TT}}_{\mu\sigma}. \tag{1.2.38}$$

由式（1.2.24）和（1.2.28）可清楚看出，对于沿 x^3方向传播的波，只有 S^1 和 S^2 会受到影响；试验质量只会在与波矢正交的方向上受到扰动。

现在我们可以代入 $h^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu}$的表达式，即式（1.2.30）。接下来考察

[8]参见参考文献 [83]，其中给出了一种略有不同（但等价）的方法。

分别考虑每种偏振的影响。例如，取 $q_\times = 0$并保持 $q_+ \neq 0$，式（1.2.38）关于 $h_{\mu\nu}$ 的最低阶解具有以下形式

$$S^1_+(t) = S^1(0) + \frac{1}{2}S^1(0)q_+ e^{ik_\rho x^\rho}, \tag{1.2.39a}$$

$$S^2_+(t) = S^2(0) - \frac{1}{2}S^2(0)q_+ e^{ik_\rho x^\rho}. \tag{1.2.39b}$$

类似地，取 $q_+ = 0$ 并保持 $q_\times \neq 0$，方程（1.2.38）在 $h_{\mu\nu}$ 的最低阶近似解形式为

$$S^1_\times(t) = S^1(0) + \frac{1}{2}S^2(0)q_\times e^{ik_\rho x^\rho}, \tag{1.2.40a}$$

$$S^2_\times(t) = S^2(0) + \frac{1}{2}S^1(0)q_\times e^{ik_\rho x^\rho}. \tag{1.2.40b}$$

我们可以通过设想一圈静止粒子，并考察引力波经过时的影响，来直观理解上述解。对于加偏振，方程（1.2.39）表明，粒子会沿着“+”的形状来回振荡，因为初始时沿 x^1 (x^2)方向分开的测地线会沿 x^1(x^2)方向振荡。对于叉偏振，方程（1.2.40）表明，粒子会沿着“×”的形状来回振荡，因为初始时沿x^1 (x^2)方向分开的测地线会沿 x^2 (x^1)方向振荡。这些效应如图1.1 所示，现在应该可以清楚地理解符号 q_+ 和 $q_\times$ 的含义了。

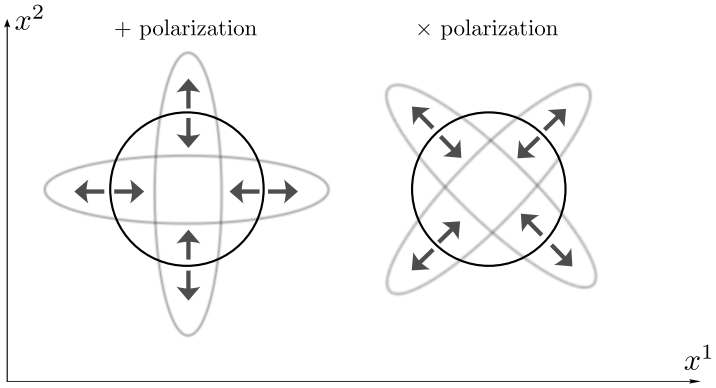


图1.1：引力波对位于 x^1-x^2 平面内的一圈静止粒子的影响，具体取决于波的偏振。

1.2.5 引力波的产生

讨论了引力波的传播及其与试验质量的相互作用后，现在让我们来了解它们是如何产生的。请记住，在存在源的情况下，我们不能再采用 TT规范，而应使用

洛伦兹规范，其运动方程为

$$\Box\bar{h}^{\mathrm{L}}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}, \tag{1.2.41}$$

其中 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 由方程（1.2.20）定义，洛伦兹条件为 $\partial_\mu h^{\mu\nu}{}_{\mathrm{L}} = 0$。非齐次波动方程的解具有如下形式：

$$\bar{h}^{\mathrm{L}}_{\mu\nu}(x) = -16\pi \int \mathrm{d}^4y\, G(x-y)T_{\mu\nu}(y), \tag{1.2.42}$$

其中 $G(x-y)$ 是满足下列条件的达朗贝尔算子的格林函数：

$$\Box_x G(x-y) = \delta^4(x-y), \tag{1.2.43}$$

其中 $\Box_x$ 表示关于 x 坐标的达朗贝尔算子。由于我们关注来自所考察点过去的信号所产生的影响，因此只考虑推迟格林函数，其形式为 [54, 84]

$$G(x-y) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\delta\big[y^0 - \big(x^0 - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|\big)\big]\theta(x^0-y^0), \tag{1.2.44}$$

其中 $\theta(x)$ 表示赫维赛德阶跃函数。将方程（1.2.44）代入方程（1.2.42）可得

$$\bar{h}^{\mathrm{L}}_{\mu\nu}(t,\mathbf{x}) = 4\int \mathrm{d}^3y\, \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}T_{\mu\nu}(t_r,\mathbf{y}), \tag{1.2.45}$$

其中 $t_r = t - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ $(t = x^0)$ 称为“推迟时间”。它出现在一般解（1.2.45）中，是为了确保度规扰动场在 $(t,\mathbf{x})$ 处的扰动只受过去光锥上点 $(t_r, |\mathbf{x}-\mathbf{y}|)$ 处的能量和动量源影响，从而保持因果律。

一般解（1.2.45）的分析最好在频率空间中进行，在此我们引入时间傅里叶变换

$$\tilde{\bar{h}}^{\mathrm{L}}_{\mu\nu}(\omega,\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\, e^{i\omega t}\bar{h}^{\mathrm{L}}_{\mu\nu}(t,\mathbf{x}). \tag{1.2.46}$$

利用式（1.2.45）并改变积分变量，我们得到

$$\begin{aligned}
\tilde{\bar{h}}^{\mathrm{L}}_{\mu\nu}(\omega,\mathbf{x}) &= 4\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int \mathrm{d}^3y\, e^{i\omega t}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}T_{\mu\nu}(t_r,\mathbf{y}) \\
&= 4\int \mathrm{d}^3y\, \frac{e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_r\, e^{i\omega t_r}T_{\mu\nu}(t_r,\mathbf{y}) \\
&= 4\int \mathrm{d}^3y\, \frac{e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega,\mathbf{y}),
\end{aligned} \tag{1.2.47}$$

其中我们引入了能量-动量张量˜的时间傅里叶变换， $T_{\mu\nu}(\omega,\ \mathbf{y})$。

现在，我们可以通过采用一些合理的近似来简化分析。考虑一个孤立、缓慢运动的源，它远离观测点，中心位于$\mathbf{r}$处，内部各点的位置为$\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}$，满足 $\delta r \ll r$ （图1.2）。那么，在对源积分时，距离 $r = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ 变化很小，因此我们可以写成

$$\tilde{\bar{h}}^{\mathrm{L}}_{\mu\nu}(\omega,\mathbf{x}) \simeq 4\frac{e^{i\omega r}}{r}\int \mathrm{d}^3y\,\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega,\mathbf{y}). \tag{1.2.48}$$

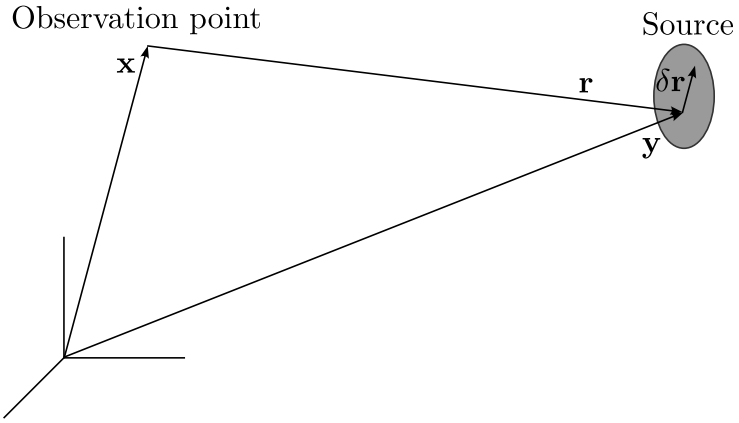


图 1.2：源的大小约为 $\delta r \ll r$，其中 r 是到观测点的距离。

我们可以利用这样一个事实来简化计算：只需计算度规微扰场的空间分量，其余分量可通过洛伦兹条件由这些分量求得。现在，在频率空间中，能量-动量守恒关系 $\partial^\mu T_{\mu\nu}=0$ 的形式为 $\partial^j\tilde{T}_{j\nu} = -i\omega\tilde{T}_{0\nu}$，因此

$$\begin{aligned}
\tilde{\bar{h}}^{\mathrm{L}}_{ij}(\omega,\mathbf{x}) &= 4\frac{e^{i\omega r}}{r}\int \mathrm{d}^3y\,\tilde{T}_{ij}(\omega,\mathbf{y}) = 4\frac{e^{i\omega r}}{r}\int \mathrm{d}^3y\Big[\partial^k\Big(y_i\tilde{T}_{kj}\Big) - y_i\partial^k\tilde{T}_{kj}\Big]\\
&= 4i\omega\frac{e^{i\omega r}}{r}\int \mathrm{d}^3y\,y_i\tilde{T}_{0j} = 2i\omega\frac{e^{i\omega r}}{r}\int \mathrm{d}^3y\,\Big(y_i\tilde{T}_{0j}+y_j\tilde{T}_{0i}\Big)\\
&= 2i\omega\frac{e^{i\omega r}}{r}\int \mathrm{d}^3y\,\Big[\partial^k\Big(y_iy_j\tilde{T}_{0k}\Big) - y_iy_j\partial^k\tilde{T}_{0k}\Big]\\
&= -2\omega^2\frac{e^{i\omega r}}{r}\int \mathrm{d}^3y\,y_iy_j\tilde{T}_{00}(\omega,\mathbf{y}),
\end{aligned} \tag{1.2.49}$$

我们像往常一样舍去了边界项。现在可以计算逆傅里叶变换，并将源的能量密度的**四极矩张量** 定义为

$$Q_{ij}(t) = \int \mathrm{d}^3y\,y_iy_jT_{00}(t,\mathbf{y}). \tag{1.2.50}$$

由此我们可以写成

$$\bar{h}^{\mathrm{L}}_{ij}(t,\mathbf{x}) = \frac{2}{r}\ddot{Q}_{ij}(t_r). \tag{1.2.51}$$

式（1.2.51）表明，孤立、缓慢运动的源所发出的引力辐射正比于能量密度的四极矩张量的二阶时间导数 T_{00}。将此结果与电磁辐射的类似情形相比较，后者的主导阶贡献来自电荷密度的偶极矩。通常，四极矩小于偶极矩；再结合引力与物质的弱耦合，这就解释了为何引力辐射远弱于电磁辐射，从而使其探测成为一项高度非平凡的任务。

一个典型例子是两颗相互绕转的恒星组成的系统（双星）发出引力辐射。例如，考虑质量为M 的两颗恒星，在 x^1-x^2 平面内做圆轨道运动，距其质心的距离为 R，速度为 v （图1.3）。其运动可用牛顿近似处理，度规扰动则可由式（1.2.51）求得。结果为 [54]

$$\bar{h}^{\mathrm{L}}_{ij}(t,\mathbf{x}) = \frac{8M}{r}\Omega^2 R^2 \begin{pmatrix} -\cos 2\Omega t_r & -\sin 2\Omega t_r & 0 \\ -\sin 2\Omega t_r & \cos 2\Omega t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2.52}$$

其中 $\Omega = v/R$ 是轨道的角频率。

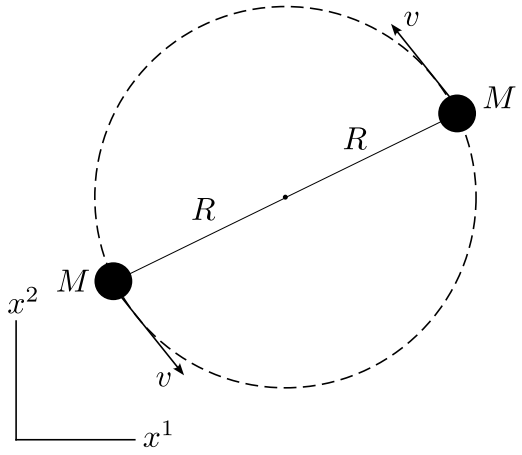


图 1.3：一个双星系统。

1.2.6 引力波的探测

近年来，除了电磁辐射、中微子和宇宙射线之外，引力波也已成为获取太阳系外 Universe 天体物理学信息的新源。鉴于其重要性，有必要简要介绍一下现代实验是如何探测这些信号的。我们将仅概述基本原理，因为理解现实中的引力波探测器背后的实际工作机制超出了我们的讨论范围。

首先，估算引力波探测器必须达到多高的灵敏度会很有帮助。由于引力辐射十分微弱，建造探测器并非易事，这一点不足为奇。为了给出数值估算，我们将上一节中的双星系统（图1.3）作为待测引力波的源。根据式（1.2.52），波的频率为 $f = \Omega/2\pi$，其中 Ω 是源的轨道角频率。由于我们的目标仅是给出数值估算，因此可以用牛顿运动定律写出[9]

$$\frac{GM^2}{(2R)^2} = \frac{Mv^2}{R}, \tag{1.2.53}$$

其中，左边就是牛顿万有引力定律，右边则是向心力的表达式。由此可得

$$\Omega = c\sqrt{\frac{R_S}{8R^3}}, \tag{1.2.54}$$

其中，$R_S = 2MG/c^2$ 表示质量为 M 的恒星的史瓦西半径[10]。于是，波频率估算为

$$f = \frac{cR_S^{1/2}}{2\pi\sqrt{8}R^{3/2}} \sim \frac{cR_S^{1/2}}{10R^{3/2}}. \tag{1.2.55}$$

现在，对于波幅，根据公式（1.2.52），

$$q = \frac{8GM}{c^4 r}\Omega^2 R^2 \sim \frac{R_S^2}{rR}. \tag{1.2.56}$$

以引力波源为例，考虑双黑洞[11] 的并合，其典型参数为 $R_S \sim 10^4$m、$R \sim 10^5$m 和

[9]在本小节中，我们将恢复 G 和 c 的因子，以便用国际单位制进行数值估算。[10]史瓦西半径是爱因斯坦方程球对称真空解中的一个参数，它定义了史瓦西黑洞的事件视界。[11]双黑洞会因相互之间的引力吸引而彼此绕转，直至合并为一个黑洞；这一过程称为双黑洞并合。

$r \sim 10^{24}\mathrm{m}$ [54]。那么，

$$f \sim 10^2\,\mathrm{s}^{-1}, \qquad q \sim 10^{-21}. \tag{1.2.57}$$

因此，能够测量具有上述参数的黑洞并合所发出的引力辐射的探测器，必须对约 100Hz 的频率和约为 10^{-21} 的波振幅敏感。

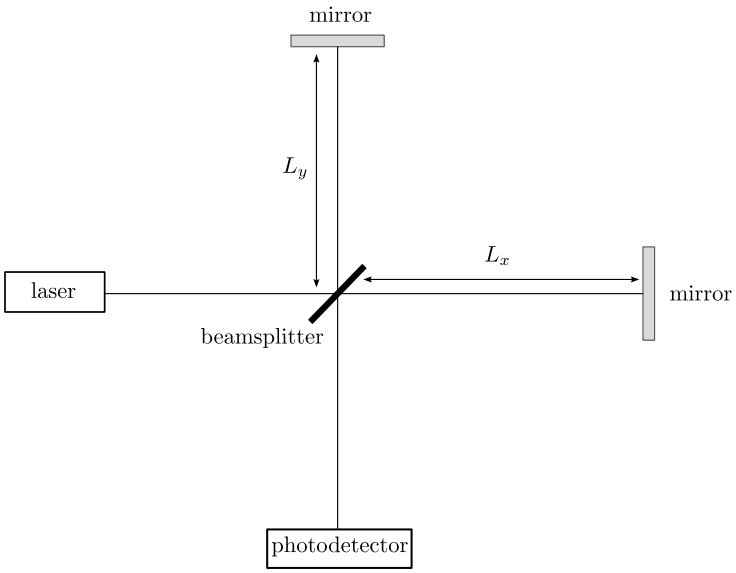


图 1.4：迈克耳孙干涉仪。

观测引力波的设想始于约瑟夫·韦伯在 1960年代提出共振质量探测器的概念，但人们很快便发现，这类探测器只对罕见而强大的近邻源敏感。另一方面，现代引力波探测器通常以激光干涉仪为基础，例如图1.4所示的迈克耳孙干涉仪。基本原理是将激光射向分束器，分束器随后将光子引向两条长度分别为 L_x 和 L_y的不同路径。光子在每条路径末端的反射镜处反射，然后回到分束器并重新汇合，在那里发生相消干涉，同时信号被传送到光电探测器。引力波经过这类装置时，会改变光所经过的正交路径长度，扰乱干涉并产生相移

$$\delta\phi \sim \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\delta L, \tag{1.2.58}$$

其中，λ是激光的波长，$\delta L = \delta L_x - \delta L_y$表示由引力波经过所导致的 L_x (L_y) 差异，δL_x (δL_y)。

为了估算 δL，我们考虑一个加偏振引力波

$$h_{ij}(t,x,y,z)=\begin{pmatrix} q & 0 & 0\\ 0 & -q & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cos\left(\omega t-kz\right), \tag{1.2.59}$$

其中我们用 $x^1=x$、 $x^2=y$ 和 $x^3=z$ 表示。这个解是在 TT规范下得到的；由于我们假定自己距离源非常远，因此可以使用这种规范。对于这个度规，任意两点之间的时空间隔为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu=(\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu})\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu\\ &=-c^2\mathrm{d}t^2+(1+q)\mathrm{d}x^2+(1-q)\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2.\end{aligned} \tag{1.2.60}$$

光子沿 $x-$方向从分束器传播到反射镜，固有距离为 L_x，所需时间为 Δt_x，满足

$$c\int_0^{\Delta t_x}\mathrm{d}t=\int_0^{L_x}\sqrt{1+q}\,\mathrm{d}x=\int_0^{L_x}\left(1+\frac{1}{2}q\right)\mathrm{d}x+O(q^2),$$

$$c\Delta t_x=\left(1+\frac{1}{2}q\right)L_x, \tag{1.2.61}$$

这里我们利用了这样一个事实：对于光束，$\mathrm{d}s^2=0$。这意味着，光沿 $x-$ 轴传播的路径差为 $\delta L_x=qL_x/2$。完全类似的分析可得，光沿 y 轴传播的路径差为 $\delta L_y=-qL_y/2$。如果现在假设[12] $L_x=L_y\equiv L$，那么 $\delta L=\delta L_x-\delta L_y=qL$，或者

$$\frac{\delta L}{L}=q. \tag{1.2.62}$$

对于臂长约为数公里的探测器，我们有 $\delta L\sim 10^{-18}$ 米，其中 $q\sim 10^{-21}$。如果使用波长为 $\lambda\sim 10^{-6}$米的典型激光，并让光子沿臂长传播约 100 次后再返回分束器[13], 根据式（1.2.58），我们估计干涉仪必须具有对量级为以下数值的相移的灵敏度

$$\delta\phi\sim 10^{-9}, \tag{1.2.63}$$

当光子数量足够多时，现有技术便可对其进行测度 [54]。

[12]这确保了在路径不受任何扰动的情况下，重新汇合的光束会发生完全相消干涉。[13]这通常通过在每条路径上增加一面部分反射镜来实现。

如今，实际的引力波探测器结构比简单的迈克耳孙干涉仪更为复杂，通常还会与法布里-珀罗干涉仪结合使用 [85]。与几乎所有实验一样，探测器的大部分功都用于消除噪声；噪声本质上是任何并非由引力波引起的激光功率涨落。噪声源包括离散物体到达时间的泊松涨落（称为散粒噪声）、由干涉仪臂中电场的量子涨落引起的位移噪声、构成反射镜的原子产生的热噪声、由地球运动造成的地震噪声，以及一般意义上的控制噪声[14]。关于引力波实验中的数据分析，详情请参阅文献 [62] 。

引力波存在的首个实验证据于1974年来自赫尔斯-泰勒双星脉冲星（高度磁化且快速旋转的中子星），其轨道衰减与引力波辐射导致的能量损失预测相符 [86]。Russell A. Hulse 和 Joseph H. Taylor Jr. 因这一发现获得了1993年诺贝尔物理学奖。首个来自双黑洞并合的引力波直接探测于2015年由先进激光干涉引力波天文台（LIGO）完成 [19], 。该天文台是一台长基线激光干涉仪，具有两条长4公里、彼此正交的臂。由于对 LIGO 探测器及直接观测引力波作出的决定性贡献，2017 年诺贝尔物理学奖授予了 Rainer Weiss、Barry C. Barish 和 Kip C. Thorne[15]。实验引力波物理领域正在显著发展，未来观测预期将具备更高灵敏度，这为其发展提供了助力。例如，LIGO 的峰值灵敏度对应的频率约为100 Hz，而预计将于2030年代后期发射的空间激光干涉空间天线（LISA），将探测频率更低（毫赫兹）的引力波 [88]。

1.3 量子引力辐射

到目前为止，我们所讨论的引力波描述可以看作是在平直背景度规上传播的对称（0，2）张量的经典场论。这使我们能够利用现代量子场论的工具，对度规微扰场进行量子描述。引力辐射量子化后产生的粒子称为**引力子**。需要强调的是，引力子物理（微扰量子引力）与量子引力本身之间存在显著差异。引力子物理指的是

[14]不同类型的噪声可通过其功率谱加以区分。[15]关于促成 LIGO 合作组科学家首次直接观测到引力波的思想发展历程，请读者参阅文献 [87] ，其中对此作了精彩介绍。

在弱场极限下对度规扰动进行量子化，而完整的量子引力理论则指对整个度规场进行量子化。从这个意义上说，不应必然将引力子视为空间—时间的基本构成要素。尽管如此，我们可以说，任何量子引力理论都应当在取某种低能极限时还原出引力子物理。

1.3.1 螺旋度与自旋

在量子场论的正则形式体系中，经典场被提升为希尔伯特空间上的算符，并且必须满足正则等时对易关系。给定场的模激发就是我们所理解的粒子。经典场经量子化后所代表的粒子类型，取决于它在庞加莱变换下的行为；庞加莱变换包括一般的洛伦兹变换和时空平移。我们称不同类型的粒子在庞加莱群的不同不可约酉表示下变换[16] [65]。例如，由于空间旋转的生成元是角动量算符，因此可以通过检验引力辐射的波在此类洛伦兹变换下如何变化，推断量子化后所得粒子的自旋。

考虑一个沿 x^3–方向传播的引力波，见方程（1.2.24）和（1.2.28）。在洛伦兹变换 Λ下，度规微扰场按如下方式变化 $h_{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu'}{}^{\mu}\Lambda_{\nu'}{}^{\nu}h_{\mu\nu}$。令 Λ表示绕 θ轴旋转 x^3–角（自然地，时间分量保持不变），则 $\Lambda^1_1 = \Lambda^2_2 = \cos\,\theta$，$\Lambda^2_1 = -\Lambda^1_2 = -\sin\theta$，$\Lambda^3_3 = 1$，且 $\Lambda^j_i = 0$ 其他情况下为零。该变换得出

$$C_{i'j'} = \begin{pmatrix} q'_+ & q'_\times & 0 \\ q'_\times & -q'_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.3.1}$$

with

$$\begin{aligned} q'_+ &= q_+ \cos 2\theta + q_\times \sin 2\theta, \\ q'_\times &= q_\times \cos 2\theta - q_+ \sin 2\theta. \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

用线性组合 $C_\pm \equiv q_+ \mp i q_\times$ 表示，这可以写成

$$C'_\pm = \exp(\pm 2i\theta) C_\pm. \tag{1.3.3}$$

[16]更精确地说，该表示实际上是指粒子态希尔伯特空间上的算符集合，这些算符对这些态执行庞加莱变换。关于基本表示论概念的综述，我们请读者参阅参考文献 [89, 90]。

一般而言，任何平面波 ψ 在绕其传播方向旋转角度 θ 后，都会变为

$$\psi' = e^{ih\theta}\psi \tag{1.3.4}$$

称为**螺旋度**[17] h [56]。量子化后，螺旋度表示粒子沿运动方向投影的自旋。因此，我们已经证明引力波具有螺旋度 $h = 2$，所以引力子是自旋2粒子。

值得一提的是，我们也可以采用逆向方法。如果我们转而问什么样的场代表无质量自旋2粒子，就会得到一个对称的$(0,\ 2)$张量 $h_{\mu\nu}$，其唯一的拉格朗日量见式（1.2.7）。这里我们仅概述这一过程。更多细节请参阅文献 [65, 91]。

根据维格纳定理 [65, 92, 93], ，庞加莱群的酉不可约表示由两个参数 m 和 J 唯一分类，其中 m 是非负实数，而 J 是非负整数或半整数，我们分别称之为质量和自旋。这些表示取决于粒子态的动量 p，因此是无限维的。如果$J > 0$，对于动量的每一个取值，只要满足 $p^2 = -m^2$，表示中就有 $2J + 1$ 个相互独立的态（若 $m > 0$），而当 $m = 0$ 时则恰有2个态。如果 $J = 0$，那么对于任意 m，都只有一个相互独立的态。这种分类告诉我们，在洛伦兹不变理论中可以描述什么样的粒子。下一步是将这些表示嵌入场中，构造拉格朗日量。

对于 $J = 0$，我们只有 1 个自由度，它自然地嵌入标量场中。对于 $J = \frac{1}{2}$（2 个自由度），则嵌入旋量场中。对于 $J = 1$ 和 $m \neq 0$，我们有 3 个自由度。这些自由度嵌入一个具有四个分量的向量场中。因此，具有质量的自旋 1 粒子的拉格朗日量必须以这样的方式构建：确保在运动方程中去除一个自由度。普罗卡拉格朗日量恰好做到了这一点 [65]。取极限 $m \to 0$ 后，我们得到无质量自旋 1 粒子的理论，例如光子。根据维格纳定理，光子由两个自由度描述，我们称之为它的两个偏振。这要求在向量场表示中再去除一个自由度。这正是规范不变性发挥重要作用之处。必须去除不需要的自由度，向量场才能真正表示无质量自旋 1 粒子。 $J = 3/2$ 的情况描述的是嵌入拉里塔–施温格场中的自旋 3/2 粒子

[17]不要将其与度规扰动的迹混淆。

，其例子包括 Delta 和 Sigma重子，以及引力微子；引力微子是一种假设存在的规范费米子，是超对称引力理论中引力子的伴侣 [94]。

对于 $J=2$ 和 $m\neq 0$，有5个自由度，显然无法归入矢量表示。因此，我们考虑一个对称的$(0,2)$ 张量场，它有10个独立分量。通过构造拉格朗日量，可以在运动方程中消去5个自由度 [65, 91]。但根据式（1.2.25），引力波以真空光速传播，因此引力子必须是无质量粒子。在无质量极限下，运动方程仍能消去4个独立分量[18]，，剩下6个。由于 $J>0$ 和$m=0$，我们必须只保留2个，而额外4个自由度的消去则再次通过引入规范不变性来实现。随后可以证明，描述无质量自旋2粒子的唯一拉格朗日量就是式（1.2.7）所给出的形式。最后，采用几何观点，可以用微分同胚不变性来理解这种规范不变性，正如我们在上一节中讨论的那样。

1.3.2 自由引力子

引力辐射的（正则）量子化，是通过在平面波展开中将度规微扰场提升为量子算符来实现的 [32]

$$\hat{h}_{\mu\nu}(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\sum_s\left[\epsilon^s_{\mu\nu}(p)\hat{a}_{p,s}e^{ipx}+\epsilon^s_{\mu\nu}{}^*(p)\hat{a}^\dagger_{p,s}e^{-ipx}\right],\tag{1.3.5}$$

其中 $p^\mu=(\omega_p,\ \mathbf{p})$、$px\equiv\eta_{\mu\nu}p^\mu x^\nu$，以及算符系数 $\hat{a}_{p,\ s}$和 $\hat{a}^\dagger_{p,\ s}$是满足以下关系的湮灭与产生算符

$$\left[\hat{a}_{p,s},\hat{a}^\dagger_{p',s'}\right]=(2\pi)^3\delta_{ss'}\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}').\tag{1.3.6}$$

由真空态 $|0\rangle$ 出发，该态定义为福克空间中被所有 $\hat{a}'$s 湮灭的态，我们得到单粒子态

$$|p,\epsilon^s\rangle=\sqrt{2\omega_p}\hat{a}^\dagger_{p,s}|0\rangle\,,\tag{1.3.7}$$

它表示一个动量为 p、偏振为 s 的引力子。

就自由理论而言，基本上就是这些。人们可以使用平面波展开（1.3.5）来计算任何相关的二点函数，例如 Feynman

[18]与自旋 1 的情形一样，质量项负责去除一个独立分量。取 $m=0$ 时，该分量不再被去除。

传播子 [1] 或 Wightman 函数 [32], , 具体取决于所处理的问题。然而，物理预言来自相互作用理论；在量子场论中，这些通常采用微扰处理，其中涉及费曼图和费曼规则，用以计算散射和衰变过程的概率振幅 [65, 92, 95, 96]。这些规则会导致对大虚动量的积分，而这些积分通常是发散的。在某些情况下，这些发散可以被吸收到拉格朗日量中各项的系数里。例如，在量子电动力学（量子电动力学）中，所有发散都可以通过质量、电荷和波函数的重整化来处理。如果这对微扰理论的所有阶都成立[19], , 则称该理论是**微扰可重整化**的。如果进一步出现发散，可以在拉格朗日量中加入称为反项的新项，以吸收这些发散。需要无穷多个反项的理论是**微扰不可重整化** [95]。

1.3.3 相互作用引力子

现在来考虑引力相互作用。在本小节中，保留 G 的因子会很有意义，同时保留 $\hbar = c = 1$ （即量子场论教材中通常使用的所谓自然单位制）。此外，让我们以一种使展开式（1.2.1）变为

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa_{\mathrm{g}} h_{\mu\nu}, \tag{1.3.8}$$

其中 $\kappa_{\mathrm{g}} = \sqrt{32\pi G}$。注意，现在场 $h_{\mu\nu}$ 的质量量纲为 $+1$ ，因为 κ_{g}的质量量纲为 -1。爱因斯坦-希尔伯特作用量

$$S_{\mathrm{EH}} = \frac{2}{\kappa_{\mathrm{g}}^2} \int \mathrm{d}^4x \, \sqrt{-g} R, \tag{1.3.9}$$

按照式（1.3.8）进行线性化后，变为

$$S_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^4x \, (-\partial_\rho h_{\mu\nu} \partial^\rho h^{\mu\nu} + 2h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h - h \Box h - 2h_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\mu h^{\nu\rho}). \tag{1.3.10}$$

注意，重新缩放后的场现在已正则归一化。

保留爱因斯坦-希尔伯特作用量中的高阶项，即可得到引力-引力相互作用。于是， n阶相互作用项（$n \geq 3$）将与 $\kappa_{\mathrm{g}}^{n-2} h^n$ 成正比，因此耦合常数的质量维数始终为负。这强烈表明该理论是微扰不可重整化的，原因如下。

[19]该展开按耦合常数的幂次进行。

微扰量子场论中的高阶费曼图包含圈积分，即对内部动量进行的四维积分。这些积分通常在形式上是无穷大的，因此需要采用某种正则化方法，例如将内部动量截断在单一尺度 Λ，并希望在计算结束时令该尺度趋于无穷大。某个圈图对所需散射振幅的贡献，随着我们取 $\Lambda \to \infty$，其尺度行为为 Λ^D；若 $D \neq 0$，则其尺度行为为 $\ln \Lambda$。因子 D 称为表面发散度。对于纯引力，一个具有 E 条外部引力子腿、并插入了 V_n 个维数为 Δ_n 的顶点的图，其表面发散度为 [1, 65]

$$D = 4 - E - \sum_n V_n \Delta_n. \tag{1.3.11}$$

由于 $\Delta_n = -(n-2)$，它是 n 阶相互作用的耦合常数的质量维数，并且 $n \geq 3$，因此我们总有 $\Delta_n < 0$。于是，E 和 V_n 可以有无穷多个取值，使得 $D > 0$ 成立。这意味着存在无穷多个带有 $D > 0$ 的格林函数对散射振幅有贡献，因此需要加入无穷多个反项来消除所有发散。

事实证明，纯引力（即没有物质耦合的引力）实际上可以在单圈阶通过场重定义消除发散，从而实现重整化；然而，在双圈阶则不会发生这种抵消。现在，如果我们加入与物质的耦合，物质作用量的度规一阶展开为

$$S_{\text{matter}} = \frac{\kappa_{\text{g}}}{2} \int \mathrm{d}^4 x \, T_{\mu\nu} h^{\mu\nu}, \tag{1.3.12}$$

事实证明，即使在单圈图的层次上，也无法实现重整化 [1]。

微扰不可重整化性并不会使该理论变得毫无用处，更绝不意味着广义相对论与量子力学之间存在某种不一致性。不可重整化理论仍然能够在某个紫外（UV）截断 [95] 以下的能量范围内作出有用的预言。例如，费米弱相互作用理论最初是为了描述β衰变并考虑中微子的存在而发展起来的，它是一种微扰不可重整化理论，但在低于$E \sim 300$GeV的能标下能够作出良好的预言。温伯格、萨拉姆和格拉肖提出的电弱理论，就是我们所说的费米理论的紫外（UV）完备化；纳入希格斯玻色子 [65]后，该理论便是可重整化的。类似地，引力子物理在某个紫外截断以下（$E \sim M_{\text{P}}$，其中 M_{P} 表示普朗克质量 [65]）能够作出真实的预言，

例如对牛顿势的辐射修正 [20]。从这个意义上说，微扰量子引力是一种一致的有效场论，在紫外截断以下有效。

尽管广义相对论在微扰意义下不可重整化，但存在一种度规相容、无挠且微分同胚不变的引力量子场论，它在四个时空维度中是微扰可重整化的，这就是二次引力，尽管它在幺正性方面存在一些难题 [9, 10]。另一方面，如果广义相对论的量子场论处理具有非平凡的紫外固定点，那么它仍有可能在非微扰意义下可重整化[20]。在这种情况下，就必须采用非微扰框架，这正是渐近安全量子引力所采取的方法 [11, 12]。最后，量子引力的紫外行为也可能根本无法用量子场论的工具来描述，因此需要一种截然不同的方法，例如弦论 [17, 18]。

在本文中，我们将满足于把微扰量子引力视为一种有效场论，而其紫外完备则不在本文讨论范围之内。

1.3.4 PWZ 方法

现在我们简要探讨一个重要问题：是否有可能探测单个引力子。Freeman Dyson [21] 提出的论证似乎得出了这样的结论：探测单个引力子注定是不可能的。例如，要探测一个引力子，像 LIGO 这样的引力波探测器必须将两面反射镜之间的距离缩短到小于它们各自的施瓦西半径，这会导致它们在测量完成之前坍缩成黑洞。尽管单个引力子的探测问题仍存在争议， [97, 98], Parikh、Wilczek 和 Zahariade（PWZ）最近采取了另一种方法。 [24–26]

PWZ方法的基本思想是，通过检测引力子引起的量子噪声对经典粒子产生的影响，来探究引力场可能具有的量子本质；这与研究量子布朗运动的思路相同。这样，引力在弱场极限下的量子化便体现在与其相互作用的经典系统所遵循的运动方程中。PWZ运用Feynman和Vernon提出的形式体系 [37, 38], ，推导出一个类朗之万随机方程，用以描述两个测试粒子之间的测地线偏离。文献 [30] 也通过另一种方法进行了类似分析

[20]固定点是给定理论的参数空间中的一个点，在该点重整化群流停止，也就是说，理论在该点具有尺度不变性。当参数取零时出现这种情况，我们称之为平凡固定点。

随后在文献 [27], 中，所有引力子模和偏振均纳入了考虑。

在本工作中，我们将遵循PWZ方法，研究由弱量子化引力场引起的复合粒子退相干，以及此类系统中出现的熵产生。这将是本学位论文第II 部分的主题。

1.4 弯曲时空中的线性化引力

既然我们已经讨论了平直时空中的线性化引力，接下来让我们考虑一般背景。我们可以采用与1.2 节相同的做法，将爱因斯坦-希尔伯特作用量在背景度规 $\gamma_{\mu\nu}$附近展开。然而，在作用量层面进行此类展开需要保留至度规扰动的二阶；对于一般背景，这会变得相当繁琐。为避免过多的数学细节，本节将采取不同的方法。度规展开将在运动方程（爱因斯坦方程）层面进行，也就是说，我们只保留至微扰的一阶项。随后，在方便地选择规范之后，我们可以写出一个作用量，其变分将导出这样的线性化方程。关于围绕一般背景将完整作用量展开至二阶的全部内容，请读者参阅文献 [1]。

本节的最终目标是描述引力子与经典静态牛顿势的相互作用。这意味着，尽管我们将从考虑一般背景开始 $\gamma_{\mu\nu}$，最终仍会取牛顿极限，此时 $\gamma_{\mu\nu}$ 由对闵可夫斯基时空的另一种小（现在固定的）微扰描述。因此，第 1.3 节中讨论的引力辐射量子化程序仍适用于我们的目的。从这个意义上说，我们不会讨论一般弯曲时空中量子场所涉及的微妙问题 [99, 100]。

最后，就记号略作说明。在本节中，我们需要区分与 $\gamma_{\mu\nu}$（即背景度规）相关联的曲率符号与张量，以及与 $g_{\mu\nu}$（即包含传播引力辐射的完整时空度规）相关联的那些量。对于后者，我们将继续沿用迄今所用的同一套记号；但对于与背景度规相关联的克里斯托费尔符号，例如，我们将用 $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}[\gamma]$、$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}[\gamma]$ 表示背景黎曼张量，依此类推。与$\gamma_{\mu\nu}$ 相容的协变导数将记为 D_{μ}。

1.4.1 线性化爱因斯坦方程

假设 $\gamma_{\mu\nu}$ 是爱因斯坦方程的一个已知解（为简单起见，取真空情形），我们希望研究其周围的小度规微扰。在这种情况下，完整度规张量取如下形式 $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$，其中 $h_{\mu\nu}$ 表示我们所关心的微扰，且 $|h_{\mu\nu}| \ll |\gamma_{\mu\nu}|$。本着与方程（1.2.9）相同的精神，我们可以考虑一个单参数解族，

$$g_{\mu\nu}(\epsilon) = \gamma_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}, \tag{1.4.1}$$

使得，再一次，

$$h_{\mu\nu} = \left.\frac{\mathrm{d}g_{\mu\nu}(\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0}. \tag{1.4.2}$$

单参数解族满足爱因斯坦方程，这是一种形式为.....的非线性运算

$$\mathcal{E}[g(\epsilon)] = 0. \tag{1.4.3}$$

对该方程关于 ϵ 求导，并令 $\epsilon = 0$，可得到关于 $h_{\mu\nu}$ 的线性方程，这就是所需的线性化爱因斯坦方程。

真空中的爱因斯坦方程为

$$R_{\sigma\nu} = 0. \tag{1.4.4}$$

里奇张量通过 $g_{\mu\nu}(\epsilon)$ 依赖于 ϵ。由此得到一个线性化方程：

$$\left.\frac{\mathrm{d}R_{\sigma\nu}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0. \tag{1.4.5}$$

现在，回想一下，黎曼张量的定义如下：

$$\nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} V^\sigma, \tag{1.4.6}$$

对于任意向量 V^μ。协变导数 ∇_μ，与 $g_{\mu\nu}(\epsilon)$相关联，可通过张量场（参见附录A）与协变导数 D_μ相关联；后者与 $\gamma_{\mu\nu}$相关联。

$$C^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}(\epsilon)[D_\mu g_{\nu\sigma}(\epsilon) + D_\nu g_{\sigma\mu}(\epsilon) - D_\sigma g_{\mu\nu}(\epsilon)]. \tag{1.4.7}$$

具体而言，我们得到

$$\nabla_\mu\nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu\nabla_\mu V^\rho = D_\mu D_\nu V^\rho - D_\nu D_\mu V^\rho + \left(2D_{[\mu}C^\rho{}_{\nu]\sigma} + 2C^\rho{}_{\delta[\mu}C^\delta{}_{\nu]\sigma}\right)V^\sigma, \tag{1.4.8}$$

因此

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}[\gamma] + 2D_{[\mu}C^\rho{}_{\nu]\sigma} + 2C^\rho{}_{\delta[\mu}C^\delta{}_{\nu]\sigma}. \tag{1.4.9}$$

与 $g_{\mu\nu}(\epsilon)$ 相关的里奇张量为

$$R_{\sigma\nu} = R_{\sigma\nu}[\gamma] + 2D_{[\mu}C^\mu{}_{\nu]\sigma} + 2C^\mu{}_{\delta[\mu}C^\delta{}_{\nu]\sigma}. \tag{1.4.10}$$

由于假设 $\gamma_{\mu\nu}$ 是真空爱因斯坦方程的精确解，我们必须有 $R_{\sigma\nu}[\gamma] = 0$ 以及

$$R_{\sigma\nu} = -2D_{[\nu}C^\mu{}_{\mu]\sigma} + 2C^\mu{}_{\delta[\mu}C^\delta{}_{\nu]\sigma}. \tag{1.4.11}$$

将这一结果代回方程（1.4.5），并利用方程（1.4.2）和（1.4.7），可得到关于 $h_{\mu\nu}$ 的线性方程，

$$-\frac{1}{2}D_\nu D_\sigma h - \frac{1}{2}D^\mu D_\mu h_{\sigma\nu} + D^\mu D_{(\nu}h_{\sigma)\mu} = 0, \tag{1.4.12}$$

其中 $h = \gamma^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$。注意，在平直时空的极限下，此时 $\gamma_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$ 且$D_\mu \to \partial_\mu$，我们便得到方程（1.2.8）。

我们可以改写为

$$\begin{aligned} D^\mu D_{(\nu}h_{\sigma)\mu} &= \frac{1}{2}D_\nu D^\mu h_{\sigma\mu} + \frac{1}{2}(D^\mu D_\nu - D_\nu D^\mu)h_{\sigma\mu} \\ &\quad + \frac{1}{2}D_\sigma D^\mu h_{\nu\mu} + \frac{1}{2}(D^\mu D_\sigma - D_\sigma D^\mu)h_{\nu\mu} \\ &= D_{(\nu}D^\mu h_{\sigma)\mu} - R_{\rho\sigma\mu\nu}[\gamma]h^{\rho\mu}. \end{aligned} \tag{1.4.13}$$

此外，由于 h是一个标量， $D_\nu D_\sigma h = D_\sigma D_\nu h$，因此

$$\begin{aligned} D_{(\nu}D^\mu h_{\sigma)\mu} - \frac{1}{2}D_\nu D_\sigma h &= \frac{1}{2}D_\nu\left(D^\mu h_{\sigma\mu} - \frac{1}{2}D_\sigma h\right) + \frac{1}{2}D_\sigma\left(D^\mu h_{\nu\mu} - \frac{1}{2}D_\nu h\right) \\ &= D_{(\nu}D^\mu \bar{h}_{\sigma)\mu}, \end{aligned} \tag{1.4.14}$$

其中

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}h. \tag{1.4.15}$$

最后，剩下的是

$$D_{(\nu}D^{\mu}\bar{h}_{\sigma)\mu} - \frac{1}{2}D^{\mu}D_{\mu}h_{\sigma\nu} - R_{\rho\sigma\mu\nu}[\gamma]h^{\rho\mu} = 0. \tag{1.4.16}$$

这是弯曲时空中的线性化爱因斯坦方程。

1.4.2 TT规范

现在让我们讨论这个更一般情形下的规范不变性。结果表明，运动方程在规范变换（1.2.12）下仍保持不变。现在的区别在于 $g_{\mu\nu}(0) = \gamma_{\mu\nu}$，因此规范变换的形式为

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + D_{\mu}\varepsilon_{\nu} + D_{\nu}\varepsilon_{\mu}, \tag{1.4.17}$$

其中 ε_{μ} 是任意向量。同样，规范自由度使我们能够简化 $h_{\mu\nu}$ 的运动方程。例如，从任意给定的 $h_{\mu\nu}$ 出发，使得 $D^{\nu}h_{\mu\nu} \neq 0$ 通常情况下，可以进行一次规范变换，使新的微扰满足

$$D^{\nu}\bar{h}'_{\mu\nu} = D^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu} + D^{\nu}D_{\nu}\varepsilon_{\mu}, \tag{1.4.18}$$

这里我们用到了 $R_{\mu\nu}[\gamma] = 0$ 这一事实。于是我们可以选择 ε^{μ} 使其满足

$$D^{\nu}D_{\nu}\varepsilon_{\mu} = -D^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu}, \tag{1.4.19}$$

因此，在新的规范下，微扰现在满足 $D^{\nu}\bar{h}^{\mathrm{L}}_{\mu\nu} = 0$，这是洛伦兹条件在弯曲时空中的推广。

在此规范下，线性化的爱因斯坦方程（1.4.16）变为

$$D^{\mu}D_{\mu}h^{\mathrm{L}}_{\sigma\nu} + 2R_{\rho\sigma\mu\nu}[\gamma]h^{\rho\mu}_{\mathrm{L}} = 0, \tag{1.4.20}$$

其中度规扰动满足规范条件

$$D^{\nu}h^{\mathrm{L}}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}D_{\mu}h^{\mathrm{L}} = 0. \tag{1.4.21}$$

在平直时空的极限下，方程（1.4.20）化简为 $\Box h^{\mathrm{L}}_{\sigma\nu} = 0$。在这个极限下，正如我们在第 1.2 节中所见，存在剩余规范自由度；也就是说，可以进一步进行一次由向量 ξ^{ν} 参数化的规范变换，只要满足 $\Box\xi_{\nu} = 0$，使规范条件和运动方程都保持成立。于是，可以利用这一自由度来选取 $h = 0$ 和 $h_{0i} = 0$；结合运动方程，可得 $h_{00} = 0$。

然而，对于弯曲背景，一般来说无法做到这一点。我们可以尝试进行这样一次额外的规范变换，由向量ξ^ν 参数化，并满足 $D^\mu D_\mu \xi_\nu = 0$ （这是保持方程（1.4.21）成立所必需的），但此时运动方程（1.4.20）的左端变为

$$D^\mu D_\mu h'_{\sigma\nu} + 2R_{\rho\sigma\mu\nu}[\gamma]h'^{\rho\mu} = D^\mu D_\mu h^{\mathrm{L}}_{\sigma\nu} + 2R_{\rho\sigma\mu\nu}[\gamma]h^{\rho\mu}_{\mathrm{L}} - \{D^\mu(R_{\mu\sigma\rho\nu}[\gamma] + R_{\rho\sigma\mu\nu}[\gamma])\}\xi^\rho. \tag{1.4.22}$$

我们可以看到，方程（1.4.22）最后一行中的项使我们无法在保持运动方程不变的同时进行这样的规范变换。

让我们看看，当背景本身可视为闵可夫斯基时空的一个小微扰时，这一项会发生什么，

$$\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h^{(B)}_{\mu\nu}, \tag{1.4.23}$$

其中 $|h^{(B)}_{\mu\nu}| \ll 1$ 与通常一样。直接计算可得

$$\begin{aligned} D^\mu\{R_{\rho\sigma\mu\nu}[\gamma] + R_{\mu\sigma\rho\nu}[\gamma]\} &= \frac{1}{2}\partial_\sigma\Box h^{(B)}_{\rho\nu} + \frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\rho\partial^\mu h^{(B)}_{\mu\sigma} + \frac{1}{2}\partial_\rho\partial_\sigma\partial^\mu h^{(B)}_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{2}\partial_\nu\Box h^{(B)}_{\rho\sigma} - \partial_\rho\Box h^{(B)}_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma\partial^\mu h^{(B)}_{\rho\mu} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{1.4.24}$$

这里用到了这样一个事实：由于 $\gamma_{\mu\nu}$ 是真空中的爱因斯坦方程的解，背景微扰 $h^{(B)}_{\mu\nu}$必须满足线性化方程（1.2.8）。

换言之，当背景度规可视为闵可夫斯基时空的一个小微扰时，阻止我们对 $h_{\mu\nu}$ 进行剩余规范变换的项在 $h^{(B)}_{\mu\nu}$的一阶近似下消失。因此，可以选择满足 $D^\mu D_\mu \xi_\nu = 0$的 ξ^μ，使得 $h = 0$ 和 $h_{0i} = 0$。此时，规范条件变为

$$D_\mu h^{\mu\nu} = 0. \tag{1.4.25}$$

特别地，该方程的 $\nu = 0$ 分量写为

$$\partial_0 h^{00} + \left\{\Gamma^\mu_{\mu 0}[\gamma] + \Gamma^0_{00}[\gamma]\right\}h^{00} + \Gamma^0_{ij}[\gamma]h^{ij} = 0. \tag{1.4.26}$$

具体而言，有

$$\Gamma^0_{\mu\nu}[\gamma] = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu h^{(B)}_{\nu 0} + \partial_\nu h^{(B)}_{0\mu} - \partial_0 h^{(B)}_{\mu\nu}\right), \tag{1.4.27a}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\nu}[\gamma] = \frac{1}{2}\partial_{\nu}h^{(B)}. \tag{1.4.27b}$$

如果度规扰动是静态的，则得到 $\Gamma^{\mu}_{\mu 0}[\gamma] = \Gamma^{0}_{00}[\gamma] = 0$。此外，如果$h^{(B)}_{0i} = 0$，我们还有 $\Gamma^{0}_{ij}[\gamma] = 0$，因此

$$\partial_0 h^{00} = 0. \tag{1.4.28}$$

那么，由于 h_{00} 只是一个常数，因此可以选择合适的边界条件，使得 $h_{00} = 0$。

总之，对于一个相对于平直时空仅有微小静态微扰的背景度规，其中 $h^{(B)}_{0i} = 0$，爱因斯坦方程 $h_{\mu\nu}$ 写作

$$D^{\mu}D_{\mu}h^{\mathrm{TT}}_{ij} + 2R_{ikjl}[\gamma]h^{kl}_{\mathrm{TT}} = 0, \tag{1.4.29}$$

满足 TT 规范条件

$$D_{\mu}h^{\mu\nu}_{\mathrm{TT}} = 0, \tag{1.4.30a}$$
$$\gamma^{\mu\nu}h^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu} = 0, \tag{1.4.30b}$$
$$h^{\mathrm{TT}}_{0\mu} = 0. \tag{1.4.30c}$$

特别是，这表明，例如，当背景由牛顿极限描述时，我们可以施加 TT 规范条件。

最后请注意，TT 规范下的线性化真空方程可以通过对作用量 [21] 求极值获得。

$$S_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{32\pi}\int \mathrm{d}^4x \left(\frac{1}{2}h^{\mathrm{TT}}_{ij}D^{\mu}D_{\mu}h^{ij}_{\mathrm{TT}} + h^{\mathrm{TT}}_{ij}R^{ikjl}[\gamma]h^{\mathrm{TT}}_{kl}\right). \tag{1.4.31}$$

取 $\delta S_{\mathrm{EH}} = 0$ 可立即得到式（1.4.29）。

1.4.3 牛顿极限

广义相对论的牛顿极限由方程（1.4.23）描述，在这种情况下，我们有

$$h^{(B)}_{\mu\nu} = -2\phi\delta_{\mu\nu}, \tag{1.4.32}$$

[21]选择该归一化因子是为了使其在平直时空极限下与线性化爱因斯坦-希尔伯特作用量相符。此外，我们注意到，若采用 TT 规范并使归一化约定一致，该作用量便与参考文献 [1] 中给出的作用量相符（后者是从一开始就在作用量层面进行二阶展开得到的）。

其中 $\phi = \phi(\mathbf{x})$ 是与时间无关的牛顿势。然后我们可以证明

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}} R^{ikjl}[\gamma] h_{kl}^{\mathrm{TT}} = -2\phi(\partial_k h_{ij}^{\mathrm{TT}})(\partial^i h_{\mathrm{TT}}^{jk}) + \text{boundary terms}, \tag{1.4.33}$$

其中我们使用了规范条件

$$0 = \gamma_{\mu\nu} h_{\mathrm{TT}}^{\mu\nu} = (1-2\phi)\delta_{ij} h_{\mathrm{TT}}^{ij} \implies \delta_{ij} h_{\mathrm{TT}}^{ij} = 0, \tag{1.4.34a}$$

and

$$0 = \phi\, D_\mu h_{\mathrm{TT}}^{\mu\nu} = \phi\, \partial_\mu h^{\mu\nu} + O(\phi^2) \implies \phi\, \partial_i h^{ij} = 0. \tag{1.4.34b}$$

此外，对于由方程（1.4.23）给出的背景度规，保留 $h_{\mu\nu}^{(B)}$的一阶项，

$$\begin{aligned} h_{ij}^{\mathrm{TT}} D_\mu D^\mu h_{\mathrm{TT}}^{ij} = {} & \gamma^{\mu\nu} h_{ij}^{\mathrm{TT}} \partial_\mu \partial_\nu h_{\mathrm{TT}}^{ij} + 2 h_{ij}^{\mathrm{TT}} (\partial^\mu \Gamma^i_{\mu k}[\gamma]) h_{\mathrm{TT}}^{kj} \\ & - h_{ij}^{\mathrm{TT}} \eta^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\nu}[\gamma] \partial_\lambda h_{\mathrm{TT}}^{ij} + 4 h_{ij}^{\mathrm{TT}} \Gamma^i_{\mu k}[\gamma] \partial^\mu h_{\mathrm{TT}}^{kj}. \end{aligned} \tag{1.4.35}$$

在牛顿极限下，唯一非零的克里斯托费尔符号为

$$\Gamma^i_{00}[\gamma] = \partial^i \phi, \tag{1.4.36a}$$

$$\Gamma^0_{0i}[\gamma] = \Gamma^0_{i0}[\gamma] = \partial_i \phi, \tag{1.4.36b}$$

$$\Gamma^k_{ij}[\gamma] = \delta_{ij}\partial^k \phi - \delta^k_j \partial_i \phi - \delta^k_i \partial_j \phi. \tag{1.4.36c}$$

然后，经过一些涉及分部积分和规范条件的运算，并仅保留直到 ϕ 一阶的项，我们得到

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{EH}} &= \frac{1}{64\pi} \int \mathrm{d}^4x\, \gamma^{\mu\nu} h_{ij}^{\mathrm{TT}} \partial_\mu \partial_\nu h_{\mathrm{TT}}^{ij} \\ &= \frac{1}{64\pi} \int \mathrm{d}^4x \left(h_{ij}^{\mathrm{TT}} \Box h_{\mathrm{TT}}^{ij} + 2\phi\, h_{ij}^{\mathrm{TT}} \delta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu h_{\mathrm{TT}}^{ij} \right). \end{aligned} \tag{1.4.37}$$

作用量方程（1.4.37）可视为描述平直时空中的引力辐射与静态牛顿势相互作用。在量子层面，量子化程序如第1.3节所述。由此，该作用量描述了引力子被牛顿势散射的过程。在附录B 中，我们计算了引力子被如下形式的牛顿源散射时的微分截面：$\phi(r) = -M_N/r$，其中 $r^2 = \delta_{ij}x^i x^j$ 和 M_N 分别为源的质量。结果为[22] [101, 102]

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{G^2 M_N^2}{c^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(\cos^8 \frac{\theta}{2} + \sin^8 \frac{\theta}{2} \right), \tag{1.4.38}$$

[22]再次恢复普适常数。

其中 θ 为散射角。从图1.5 可见，微分截面主要由 $\theta \ll 1$的区域贡献，其变化规律为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \sim \frac{G^2 M_N^2}{c^4} \frac{1}{\theta^4}. \tag{1.4.39}$$

散射角较大时概率如此之小，反映了引力相互作用的微弱。

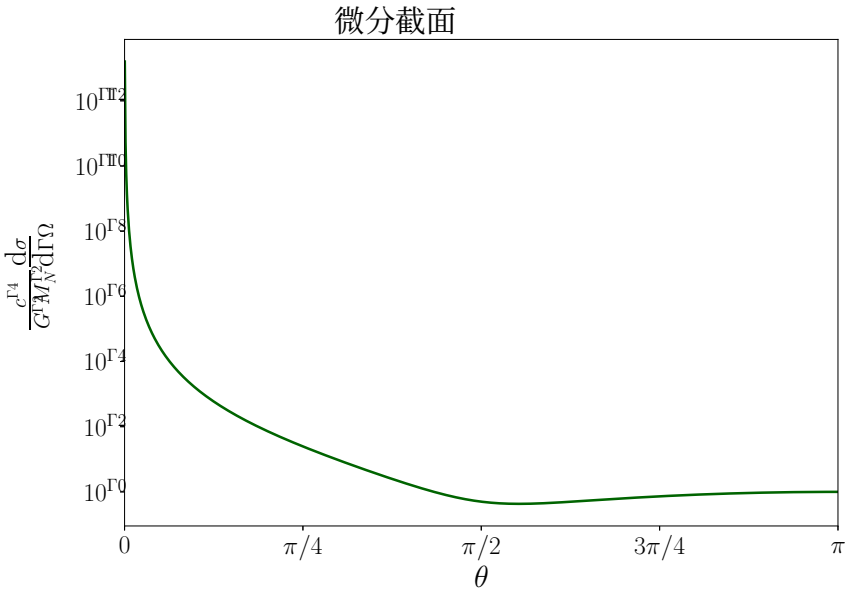


图 1.5：微分截面作为散射角的函数。

第2章

环境诱导退相干

在物理学中，封闭系统的概念是一种有用但有时过于简化的理想化，因为它基于这样一种设想：可以将感兴趣的物体与周围环境的任何相互作用隔离开来。实际中，人们会尽量减少这些不必要的影响，以研究此类近似的封闭系统。经典系统会与环境发生动量和能量交换，但在大多数情况下这些交换可以忽略不计（例如尘埃粒子与网球之间的碰撞）；而量子系统除了受到这类影响之外，还可能与环境发生纠缠。

纠缠是一种强关联，没有经典对应物。如果两个量子系统处于纠缠态，那么对其中一个子系统进行测量，就能获得有关另一个子系统的一些信息，即使二者相距甚远。现在，考虑一个最初被制备为若干两两正交态叠加的量子系统。假设自然的量子描述具有普适性，那么感兴趣的系统通常会在与其（量子）环境相互作用后变得纠缠。此时，可以将环境的自由度（DoFs）视为对量子系统进行探测，同时获取一定程度的“路径信息”（或者更一般地说，“状态信息”）。没有任何基本原理阻止我们测量这些环境自由度并获取这类信息，尽管人们通常不会这样做，原因可能是出于选择，也可能是受到实际限制（事实上，这常常是判断哪个系统是感兴趣的系统、哪个系统是环境的标准）。因此，随着环境获取越来越多的状态信息，对系统进行的测量将越来越难以探测叠加态各分量之间的干涉项（即相干项）。在极限情况下，所有相干项都在某种程度上被“摧毁”[1]，系统只能处于

[1]更准确地说，与环境的相互作用并不会破坏最初的量子叠加，而是将其扩展到包含环境本身。当这种叠加态仅在感兴趣的系统这一层面变得不可观测时，便会发生退相干，使人觉得它已经被破坏（尽管它仍然存在）。

确定的“半经典”态中。这个过程称为 **环境诱导退相干**，或简称为 **退相干** [103–110]。

环境诱导退相干是指与环境耦合的系统不可逆地丧失量子相干性的现象，以及系统可观测性质的动力学选择。这是一种纯粹的量子现象，它可以与环境相互作用的某些“经典”方面同时发生，例如耗散。由于量子态可以表示为希尔伯特空间不同基的不同叠加态，退相干是一种依赖于基的现象。一般而言，正是系统与给定环境相互作用的方式决定了哪一个基更容易丧失量子相干性。例如，如果相互作用哈密顿量将环境算符与系统的位置算符耦合，那么我们可以认为环境在每一时刻都在探测系统的位置，退相干最终将在位置基中发生，从而使系统局域化。这种可观测性质的选择是退相干中与量子到经典的转变关系最为密切的方面，即对能量、位置和动量等少数“经典”可观测量的动力学选择。关于这一联络以及与不同量子力学诠释的进一步联络的讨论，见文献[111]及其参考文献。

本章将对退相干方案作较为一般的概述，以便在本文余下部分专门讨论引力环境之前，先阐明这一现象背后的物理学。我们首先在第 2.1 节探讨退相干背后的基本思想，更精确地展开讨论，并明确展示系统-环境纠缠所带来的后果。接着，在第 2.2 节，我们介绍开放量子系统的影响泛函形式体系。由于更常用的技术涉及所谓的主方程，我们将在第 2.3 节展示这两种方法的等价性，并探讨构成环境对开放量子系统影响的各项所具有的物理意义。为此，我们考虑典型模型：感兴趣的系统由连续相空间变量描述，而环境则由一组互不相互作用的谐振子描述。该模型通常称为**量子布朗运动**，与本文要考察的量子粒子处于引力子浴中的问题有许多相似之处。在第 2.4 节，我们将探讨系统因退相干而局域化，如何使系统能够由轨迹描述；这些轨迹是朗之万方程的解。朗之万方程是一种类似牛顿方程的运动方程，由一个

随机力变量作为来自环境的噪声进入其中。最后，我们将在第 2.5 节结合量子力学的退相干历史方法，讨论这类轨迹的物理实在性。这对于我们在第 6 章为开放量子系统定义功至关重要。

2.1 退相干基础

考虑一个与环境 $\mathcal{E}$耦合的量子系统 $\mathcal{S}$。总系统 $\mathcal{S}+\mathcal{E}$ 的希尔伯特空间由张量积 $\mathcal{H}=\mathcal{H}_{\mathcal{S}}\otimes\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$给出，其中 $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$（$\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$）表示单独的系统（环境）的希尔伯特空间。系统与环境之间的这种划分要求我们区分描述感兴趣的系统的变量与其他变量（通常有无穷多个）；这些变量会影响该系统，但其详细动力学的重要性相对较低，甚至可能因实际原因而难以处理。从现在起，我们假设这种划分是以合理的方式做出的。此外，我们还假设可以引入一些粗粒化度量来表征环境（例如，当我们用热力学变量描述热浴时）。

假设总哈密顿量可以写成

$$\hat{H}=\hat{H}_{\mathcal{S}}\otimes\hat{I}_{\mathcal{E}}+\hat{I}_{\mathcal{S}}\otimes\hat{H}_{\mathcal{E}}+\hat{H}_{\mathcal{I}}, \tag{2.1.1}$$

^^^^ 其中，$H_{\mathcal{S}}$（$H_{\mathcal{E}}$）是系统（环境）的自由哈密顿量，而 $I_{\mathcal{S}}$（$I_{\mathcal{E}}$）表示系统（环境）子空间上的恒等算符。它们之间的相互作用由 $H_{\mathcal{I}}$ 描述。所有算符均以薛定谔绘景表示，并且我们假设哈密顿量不显含时间。相互作用哈密顿量可写为

$$\hat{H}_{\mathcal{I}}=\sum_{\alpha}\hat{S}_{\alpha}\otimes\hat{E}_{\alpha}, \tag{2.1.2}$$

这是最一般的形式，即系统和环境厄米算符 S_α 和 E_α 的对角分解。该相互作用哈密顿量确定了系统的一组特定正交归一基向量 $\{|s_n\rangle\}$，它们满足

$$\hat{S}_{\alpha}\,|s_n\rangle=s_n^{(\alpha)}\,|s_n\rangle \qquad \text{for all } n \text{ and } \alpha. \tag{2.1.3}$$

为简单起见，假设 $[H_{\mathcal{S}}, S_\alpha] = 0$。在相互作用绘景中，我们有

$$\hat{H}_{\mathcal{I}}(t) = e^{i\hat{H}_0 t}\hat{H}_{\mathcal{I}}e^{-i\hat{H}_0 t} = \sum_\alpha \hat{S}_\alpha \otimes \hat{E}_\alpha(t), \tag{2.1.4}$$

其中 $\hat{H}_0 = \hat{H}_{\mathcal{S}}\otimes\hat{I}_{\mathcal{E}} + \hat{I}_{\mathcal{S}}\otimes\hat{H}_{\mathcal{E}}$ 和 $\hat{E}_\alpha(t) = e^{i\hat{H}_{\mathcal{E}}t}\hat{E}_\alpha e^{-i\hat{H}_{\mathcal{E}}t}$。因此，总系统在相互作用绘景中的时间演化算符为

$$\hat{U}(t) = \mathrm{T}\exp\left[-i\int_0^t \mathrm{d}t' \sum_\alpha \hat{S}_\alpha \otimes \hat{E}_\alpha(t')\right], \tag{2.1.5}$$

其中，T 表示时间排序运算，它对任意由依赖时间的算符构成的乘积进行处理，并调整顺序，使较晚的时间位于左侧。

现在考虑一个初态 $|\psi(0)\rangle = |s_n\rangle \otimes |E(0)\rangle$，其中 $|E(0)\rangle$ 表示环境初态。由于这是一个乘积态，这意味着系统与环境最初并不存在纠缠。根据式（2.1.5），该态演化为

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \hat{U}(t)\,|\psi(0)\rangle \\
&= \mathrm{T}\exp\left[-i\int_0^t \mathrm{d}t' \sum_\alpha \hat{S}_\alpha \otimes \hat{E}_\alpha(t')\right]|s_n\rangle \otimes |E(0)\rangle \\
&= |s_n\rangle \otimes \left\{\mathrm{T}\exp\left[-i\int_0^t \mathrm{d}t' \sum_\alpha s_n^{(\alpha)}\hat{E}_\alpha(t')\right]|E(0)\rangle\right\}.
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

由于末态仍可用张量积来描述，这意味着一个最初处于状态 $|s_n\rangle$ 的系统不会与环境发生纠缠。我们称它表示一个环境超选择优选态 [109]。

不过，现在让我们来考虑初态

$$|\Psi(0)\rangle = \left(\sum_n c_n\,|s_n\rangle\right) \otimes |E(0)\rangle\,, \tag{2.1.7}$$

它仍然是一个乘积态，因此不包含纠缠。这里的区别在于，仅系统的初态由状态向量 $|s_n\rangle$ 的叠加态描述。不难看出，总态演化为

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n\,|s_n\rangle \otimes |E_n(t)\rangle\,, \tag{2.1.8}$$

其中

$$|E_n(t)\rangle = \mathrm{T}\exp\left[-i\int_0^t \mathrm{d}t' \sum_\alpha s_n^{(\alpha)}\hat{E}_\alpha(t')\right]|E(0)\rangle\,. \tag{2.1.9}$$

态（2.1.8）无法写成张量积，因为它是以下状态的叠加态 $|s_n\rangle\otimes|E_n(t)\rangle$，因此它表示一个系统-环境纠缠态。我们看到，系统态的初始叠加态已扩展到包含环境，因此不再能为系统单独指定一个特定状态。然而，如果只想对感兴趣的系统进行测量，就需要利用约化密度矩阵计算系统可观测量的期望值。约化密度矩阵由总密度矩阵$\hat{}\rho(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$ 对环境变量 [112],进行偏迹得到。

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t) &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\{|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|\} \\ &= \sum_i \langle i| \left(\sum_n c_n |s_n\rangle \otimes |E_n(t)\rangle\right)\left(\sum_m c_m^* \langle s_m| \otimes \langle E_m(t)|\right)|i\rangle \\ &= \sum_n \sum_m \sum_i c_n c_m^* |s_n\rangle\langle s_m|\langle i|E_n(t)\rangle\langle E_m(t)|i\rangle \\ &= \sum_{n,m} c_n c_m^* |s_n\rangle\langle s_m|\langle E_m(t)|E_n(t)\rangle, \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

其中，$\{|i\rangle\}$ 表示环境的一组完备正交归一基向量。由于$\langle E_n(t)|E_n(t)\rangle = 1$，$\hat{}\rho_{\mathcal{S}}(t)$的对角元随时间保持不变。然而，非对角元（称为相干项）会随时间变化。矩阵元 $\langle s_n|\hat{}\rho_{\mathcal{S}}(t)|s_m\rangle$的时间依赖性由相应环境态 $|E_n(t)\rangle$ 与 $|E_m(t)\rangle$的重叠给出，通常写作

$$|\langle E_n(t)|E_m(t)\rangle| = \exp[-\Gamma_{nm}(t)]. \tag{2.1.11}$$

当量 $\Gamma_{nm}(t)$满足 $\Gamma_{nm}(t) \geq 0$时，我们称其为**退相干函数** [110]。此时，矩阵元 $\rho_{\mathcal{S}}^{nm} = \langle s_n|\hat{}\rho_{\mathcal{S}}|s_m\rangle$可写为

$$\rho_{\mathcal{S}}^{nm}(t) = \rho_{\mathcal{S}}^{nm}(0)e^{-\Gamma_{nm}(t)}, \tag{2.1.12}$$

其中$\rho_{\mathcal{S}}^{nm}(0) = c_n c_m^*$。

退相干函数随时间的变化取决于许多变量，例如系统-环境耦合和总系统初态。对于许多值得关注的物理系统，系统-环境相互作用会导致环境态 $|E_n(t)\rangle$ 和 $|E_m(t)\rangle$ 之间的重叠迅速减小，且可以发现，经过远大于典型时间尺度 τ_{dec} 的时间后，该重叠会消失，

$$\langle E_n(t)|E_m(t)\rangle \to \delta_{nm} \quad \text{for } t \gg \tau_{\mathrm{dec}}. \tag{2.1.13}$$

时间尺度 τ_{dec} 称为<款式 id='2'>退相干时间</款式>，通常由条件$\Gamma_{nm}(\tau_{\text{dec}})$ $= 1$ 定义。对于远大于 τ_{dec} 的时间，约化系统密度矩阵趋近于

$$\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t) \to \sum_{n} |c_n|^2 \, |s_n\rangle \langle s_n| \quad \text{for } t \gg \tau_{\text{dec}}. \tag{2.1.14}$$

从物理上说，这意味着最初存在的状态 $|s_n\rangle$ 的叠加态实际上被“摧毁”了，也就是说，对系统 $\mathcal{S}$ 进行任何测量都不再能观测到它们。相干叠加态已转变为非相干统计混合态，而约化密度矩阵在特定的基态集合 $|s_n\rangle$ 中已成为对角矩阵。这种由环境诱导的转变就是所谓的退相干现象。

接下来的章节中，我们将讨论一个具体的典型模型，该模型展现并阐释量子系统中的环境诱导退相干。为此，我们首先需要建立描述开放量子系统的形式体系。

2.2 费曼–弗农影响泛函

介绍了退相干现象背后的思想之后，接下来我们将阐述费曼–弗农影响泛函的形式体系，以研究开放量子系统的一般动力学 [37–39]。我们先简要回顾量子力学的路径积分表述，随后运用影响泛函方法研究开放量子系统。最后，我们将介绍一个与环境线性耦合的开放系统实例，该实例与本文的研究密切相关。

2.2.1 路径积分

在量子力学的薛定谔绘景中，态随时间的演化遵循

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) \, |\psi(t_0)\rangle \, , \tag{2.2.1}$$

其中，从初始时间 t_0 到时间 t 的幺正时间演化算符为

$$\hat{U}(t, t_0) = \mathrm{T}\left[\exp\left(-i \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \, \hat{H}(t')\right)\right] \tag{2.2.2}$$

ˆwith $H(t)$表示哈密顿算符，而 T 表示时间排序。

为简单起见，我们考虑一个由单个自由度 ˆ ˆx 描述的系统，它表示位置算符 X, $X \, |x\rangle = x \, |x\rangle$ 的谱族。内积 $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ 就是我们所说的位置表象中的波函数

。用波函数表示，时间演化（2.2.1）写作

$$\psi(x,t) = \langle x|\psi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_0 \, \langle x|\hat{U}(t,t_0)|x_0\rangle \, \langle x_0|\psi(t_0)\rangle \,, \tag{2.2.3}$$

其中我们引入了完备性关系。我们可以将最后一个方程改写为a s

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_0 \, K(x,t;x_0,t_0)\psi(x_0,t_0). \tag{2.2.4}$$

ˆ 函数 $K(x,t;\ x_0,t_0) = \langle x|U(t,t_0)|x_0\rangle$ 称为**传播子**，它是从 t_0 时刻的点 x_0 移动到 t时刻的点 x 的振幅。

在量子力学的路径积分表述中，传播子由下式得到

$$K(x_f,t_f;x_0,t_0) = \int_{x(0)=x_0}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}x \, e^{iS[x(t)]}, \tag{2.2.5}$$

其中对测度 $\mathcal{D}x$ 的积分表示对所有从 x_0 通向 x_f的路径 $x(t)$求和，而 $S[x(t)]$ 是对每条路径计算的经典作用量（系统拉格朗日量从 t_0 到 t_f 的时间积分）。可以通过将时间区间 $[t_0,t_f]$ 划分为 N 个长度为 δt的无穷小区间，对每个中间点 $x_i,\ i \in [0,N]$，向 $\langle x|U(t,t_0)|x_0\rangle$中插入完备性关系ˆ，利用时间演化算符(2.2.2)的表达式计算所有矩阵元，最后取极限 $N \to \infty$ $(\delta t \to 0)$ [65, 95, 96]，从而得到(2.2.5)。或者，可以将式(2.2.5)作为量子力学的时间演化公设，并证明波函数(2.2.4)必须满足薛定谔方程 [38]。量子力学的这两种表述是等价的。

费曼路径积分形式，如式（2.2.5）所述，令人惊讶地告诉我们，量子态的时间演化 $|\psi\rangle$ 由从起点到终点的所有路径上的积分描述，并以经典作用量的指数函数作为权重。然而，我们对量子系统的描述可能并非由希尔伯特空间中的单个右矢给出，而是由一类给定的状态 $|\psi_i\rangle$ 所构成；对于这类状态，我们所知有限，无法进一步确定其发生的概率 p_i 以外的内容。因此，我们使用密度矩阵来描述该系统，

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \, |\psi_i\rangle \, \langle\psi_i| \,. \tag{2.2.6}$$

我们总有 $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = 1$，而一般情况下 $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}^2 \leq 1$。希尔伯特空间中的右矢由密度矩阵的特例表示，其 $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}^2 = 1$ （也称为纯态），而 $\mathrm{Tr}\hat{\rho}^2 < 1$ 的状态称为混合态）。由此可从

方程（2.2.1）和（2.2.6）可知，密度矩阵的时间演化为

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t)\hat{\rho}(0)\hat{U}^{\dagger}(t), \tag{2.2.7}$$

ˆ ˆ 其中，我们将初始时刻记为 $t_0 = 0$，并将 $U(t) \equiv U(t,\ 0$).

通过考察矩阵元 $\rho(x,\ x',\ t) \equiv \langle x|\hat{}\rho(t)|x'\rangle$，并插入完备性关系，利用传播子的路径积分表示（2.2.5），即可得到密度矩阵时间演化的路径积分表示[2]

$$\begin{aligned}
\rho(x,x',t) &= \langle x|\hat{U}(t)\hat{\rho}(0)\hat{U}^{\dagger}(t)|x'\rangle \\
&= \langle x|\hat{U}(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_0\,|x_0\rangle\langle x_0|\right)\hat{\rho}(0)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_0'\,|x_0'\rangle\langle x_0'|\right)\hat{U}^{\dagger}(t)|x'\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x_0'\,\langle x|\hat{U}(t)|x_0\rangle\,\langle x_0'|\hat{U}^{\dagger}(t)|x'\rangle\,\langle x_0|\hat{\rho}(0)|x_0'\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x(0)\mathrm{d}x'(0)\int_{\substack{x(0)=x_0\\x'(0)=x_0'}}^{\substack{x(t)=x\\x'(t)=x'}}\mathcal{D}x\mathcal{D}x'\,e^{i(S[x]-S[x'])}\rho(x(0),x'(0),0).
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

我们可以看到，密度矩阵的时间演化涉及系统的两条历史，而非单条历史；波函数的时间演化（2.2.4）则是如此。

2.2.2 影响泛函

我们再次考虑一个开放量子系统 $\mathcal{S}$，它与一个量子环境 $\mathcal{E}$耦合。虽然组合而成的（封闭）总系统 $\mathcal{S}+\mathcal{E}$的动力学是幺正的，但作为该组合系统子系统的系统 $\mathcal{S}$，其状态将按照自身的内部动力学以及与周围环境的相互作用演化。这些相互作用会产生系统—环境关联，因此系统 $\mathcal{S}$ 的动力学通常不是幺正的。系统 $\mathcal{S}$ 的动力学称为约化系统动力学，而系统 $\mathcal{S}$ 本身则称为约化系统 [110]。

总系统的作用量通常由三项组成：一项描述系统本身，另一项描述环境的动力学，还有一项描述二者之间的相互作用。现在，考虑一个由变量集合 $x = \{x_n\}$ 描述的系统 $\mathcal{S}$，它与一个由变量 $q = \{q_n\}$描述的环境 $\mathcal{E}$ 相互作用。

[2]关于符号说明一句：从这里开始，符号可能会变得相当令人困惑。在路径积分测度中出现的变量（例如 x 和 q，如 $\mathcal{D}x$ 和 $\mathcal{D}q$），或出现在方括号内的变量（如 $S[x,q]$），指的是函数 $x(t)$、$q(t)$ 等。其他所有地方的这些符号则指空间点 x 或 q，它们通常是路径 $x(t)$ 和 $q(t)$ 的端点。

经典作用量的形式为

$$S[x,q] = S_{\mathcal{S}}[x] + S_{\mathcal{E}}[q] + S_{\mathcal{I}}[x,q], \tag{2.2.9}$$

其中，作用量 $S_{\mathcal{I}}[x,q]$ 描述系统与环境之间的相互作用。总系统的量子态由密度矩阵$\rho(xq,\ x'q',\ t)$描述，该矩阵取决于系统变量和环境变量。它根据总哈密顿量作幺正演化，满足 [39]

$$\rho(xq,x'q',t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_0\mathrm{d}q_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_0'\mathrm{d}q_0'\, \mathcal{J}(xq,x'q',t|x_0q_0,x_0'q_0',0)\, \rho(x_0q_0,x_0'q_0',0), \tag{2.2.10}$$

其中，$\rho(xq,\ x'q',\ t) \equiv \langle xq|\hat{\rho}(t)|x'q'\rangle$，而 $\mathcal{J}$可视为总组合系统的时间演化核，定义为

$$\mathcal{J}(xq,x'q',t|x_0q_0,x_0'q_0',0) = \int\limits_{\substack{x(0)=x_0\\ x'(0)=x_0'}}^{\substack{x(t)=x\\ x'(t)=x'}} \mathcal{D}x\mathcal{D}x' \int\limits_{\substack{q(0)=q_0\\ q'(0)=q_0'}}^{\substack{q(t)=q\\ q'(t)=q'}} \mathcal{D}q\mathcal{D}q'\, e^{i(S[x,q]-S[x',q'])}. \tag{2.2.11}$$

然而，在研究开放量子系统动力学时，人们通常关注的是计算系统可观测量的期望值，而不关心环境动力学。这些可观测量的期望值由约化密度矩阵 $\hat{\rho}_{\mathcal{S}}$计算得出；约化密度矩阵则通过对总密度矩阵中的环境变量取偏迹获得：

$$\rho_{\mathcal{S}}(x,x',t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\, \rho(xq,x'q,t). \tag{2.2.12}$$

假设在 $t=0$ 时，系统与环境彼此不相关，

$$\rho(x_0q_0,x_0'q_0',0) = \rho_{\mathcal{S}}(x_0,x_0',0)\rho_{\mathcal{E}}(q_0,q_0',0), \tag{2.2.13}$$

我们可以重新排列积分次序，将约化密度矩阵写为

$$\rho_{\mathcal{S}}(x,x',t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_0\mathrm{d}x_0'\, \mathcal{J}_{\mathcal{S}}(x,x',t|x_0,x_0',0)\rho_{\mathcal{S}}(x_0,x_0',0), \tag{2.2.14}$$

其中，约化系统的时间演化核为

$$\mathcal{J}_{\mathcal{S}}(x,x',t|x_0,x_0',0) \equiv \int_{\substack{x(0)=x_0\\x'(0)=x_0'}}^{\substack{x(t)=x\\x'(t)=x'}} \mathcal{D}x\mathcal{D}x'\, e^{i(S_{\mathcal{S}}[x]-S_{\mathcal{S}}[x'])}\mathcal{F}[x,x']. \tag{2.2.15}$$

泛函 $\mathcal{F}[x,x']$ 称为**费曼-弗农影响泛函**，其定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x,x'] &= e^{iS_{\mathrm{IF}}[x,x',t]}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\mathrm{d}q_0\mathrm{d}q_0'\,\rho_{\mathcal{E}}(q_0,q_0',0)\\ &\quad\times \int_{\substack{q(0)=q_0\\q'(0)=q_0'}}^{q(t)=q'(t)=q} \mathcal{D}q\mathcal{D}q'\, e^{i(S_{\mathcal{E}}[q]+S_{\mathcal{I}}[x,q]-S_{\mathcal{E}}[q']-S_{\mathcal{I}}[x',q'])}.\end{aligned} \tag{2.2.16}$$

这里，S_{IF} 称为**影响作用量**，它编码了环境对系统的所有影响。它在时间演化（2.2.14）中的存在会导致两条历史 x 与 x'之间发生相互作用，并由此导致非幺正演化。

我们可以列出影响泛函 [37–39] 的一些一般性质：

1. 用分别对应于 $S_{\mathcal{E}}[q]+S_{\mathcal{I}}[x,q]$和 $S_{\mathcal{E}}[q]+S_{\mathcal{I}}[x',q]$ 的时间演化算符 $\hat{\mathcal{U}}(t)$ 和 $\hat{\mathcal{U}}'(t)$ 表示时，影响泛函可写为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x,x'] &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\mathrm{d}q_0\mathrm{d}q_0'\,\rho_{\mathcal{E}}(q_0,q_0',0)\,\langle q|\hat{\mathcal{U}}(t)|q_0\rangle\,\langle q_0'|\hat{\mathcal{U}}'^{\dagger}(t)|q\rangle\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\mathrm{d}q_0\mathrm{d}q_0'\,\langle q_0'|\hat{\mathcal{U}}'^{\dagger}(t)|q\rangle\,\langle q|\hat{\mathcal{U}}(t)|q_0\rangle\,\langle q_0|\hat{\rho}_{\mathcal{E}}(0)|q_0'\rangle\\ &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\left\{\hat{\mathcal{U}}(t)\hat{\rho}_{\mathcal{E}}(0)\hat{\mathcal{U}}'^{\dagger}(t)\right\} = \left\langle\hat{\mathcal{U}}'^{\dagger}(t)\hat{\mathcal{U}}(t)\right\rangle_{\mathcal{E}},\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

其中，$\langle\cdot\rangle_{\mathcal{E}}$ 表示相对于环境初态 $\hat{\rho}_{\mathcal{E}}(0)$ 取平均。

2. 影响泛函满足

$$\mathcal{F}[x,x'] = \mathcal{F}^*[x',x], \tag{2.2.18}$$

这直接由式（2.2.17）得出。

3. 影响作用量满足

$$S_{\mathrm{IF}}[x,x,t]=0, \tag{2.2.19}$$

由式（2.2.17即可轻易看出这一点，只需回想一下 $\mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\hat{\rho}_{\mathcal{E}}(0)=1$。

4. 如果若干统计独立且动力学独立的环境同时作用于系统，并且 $\mathcal{F}_k$ 表示单独第 k 个环境的影响泛函，那么总影响由各个 $\mathcal{F}_k$的乘积给出，

$$\mathcal{F}=\prod_k \mathcal{F}_k. \tag{2.2.20}$$

路径积分表示（2.2.16）包含两段历史 q 和 q'。由于边界条件 $q(t)=q'(t)$，它们可表示为在一条闭合时间路径（CTP）上定义的单一历史的积分。在本节余下部分中，我们将沿用文献 [39] 的记法，并记 $x(t)=x^1(t)$、$x'(t)=x^2(t)$，使得 x^a、$a=1$、2 可视为定义在单一时间路径上的单个双重态场。我们还定义度规张量 $c_{ab}=\mathrm{diag}(1,-1)$，它与其逆度规 $c^{ab}=\mathrm{diag}(1,-1)$ 一起，可用于升降指标，例如 $x_1=c_{1a}x^a=c_{11}x^1=x^1=x$ 和 $x_2=c_{2a}x^a=c_{22}x^2=-x^2=-x'$。在这种 CTP 记法中，例如系统拉格朗日量中的动能项将写作 $c_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b=\dot{x}_a\dot{x}^a=\dot{x}^2-\dot{x}'^2$。当考虑闭合时间路径两条分支的贡献时，我们称之为闭合时间路径作用量 $S[x^a]\equiv S[x]-S[x']$。采用 CTP 记法，影响泛函（2.2.16）写作

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x^a]=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q^1(t)\mathrm{d}q^1(0)\mathrm{d}q^2(0)\,\rho_{\mathcal{E}}(q^1(0),q^2(0),0)\\ \times\int_{q^1(t)=q^2(t)}\mathcal{D}q^a\,e^{i(S_{\mathcal{E}}[q^a]+S_{\mathcal{I}}[x^a,q^a])}.\end{aligned} \tag{2.2.21}$$

讨论了影响泛函的一般性质后，现在让我们考虑一个具体例子：与系统线性耦合的环境。

2.2.3 线性耦合模型

线性耦合模型的假设是：环境作用量关于 q 变量为二次型，初始环境密度矩阵为高斯分布，且相互作用项为双线性的（对系统变量和环境变量均为线性）。例如，量子布朗运动模型便符合这些条件，其中环境作用量描述的是谐振子；而

正如我们将在第4章看到的，引力子浴中的量子粒子问题也符合这些条件。

于是，我们在所有这些假设下进行，并取如下形式的相互作用[3]

$$S_{\mathcal{I}}[x,q]=\int \mathrm{d}t\, x^a(t)Q_a[q(t)], \tag{2.2.22}$$

其中 Q是 q的线性组合。在这种情况下，影响泛函（2.2.16）成为历史 $Q(t)$ 与 $Q'(t)$ 的高斯泛函的泛函傅里叶变换。由于高斯的傅里叶变换仍是另一个高斯，我们得出结论：在所有这些假设下，影响作用量对 x 和x' [39]也必须是二次的。因此，我们写出

$$S_{\mathrm{IF}}[x^a]=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\, x^a(t)G_{ab}(t,t')x^b(t'), \tag{2.2.23}$$

其中

$$G_{ab}(t,t')=-i\frac{\delta^2}{\delta x^a(t)\delta x^b(t')}\, e^{iS_{\mathrm{IF}}[x^a]}\Big|_{x_a=0}, \tag{2.2.24}$$

其中δ记号表示泛函导数。由式（2.2.21）对 $S_{\mathcal{I}}$ （由式（2.2.22）给出）作直接变分，得到

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2}{\delta x^a(t)\delta x^b(t')}\, e^{iS_{\mathrm{IF}}[x^a]}\Big|_{x_a=0} &= -\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q^1(t_f)\mathrm{d}q^1(0)\mathrm{d}q^2(0)\\ &\times\int_{q^1(t_f)=q^2(t_f)}\mathcal{D}q^a\, e^{iS_{\mathcal{E}}[q^a]}Q_a(t)Q_b(t')\,\rho_{\mathcal{E}}(q^1(0),q^2(0),0).\end{aligned} \tag{2.2.25}$$

显式地，

$$\begin{aligned}G_{11}(\tau,\tau') = i\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q\mathrm{d}q(0)\mathrm{d}q'(0)\,\rho_{\mathcal{E}}(q(0),q'(0),0)\\ \times\int_{q(t)=q'(t)=q}\mathcal{D}q\mathcal{D}q'\, e^{i(S_{\mathcal{E}}[q]-S_{\mathcal{E}}[q'])}Q(\tau)Q(\tau'),\end{aligned} \tag{2.2.26a}$$

$$\begin{aligned}G_{12}(\tau,\tau') = -i\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q\mathrm{d}q(0)\mathrm{d}q'(0)\,\rho_{\mathcal{E}}(q(0),q'(0),0)\\ \times\int_{q(t)=q'(t)=q}\mathcal{D}q\mathcal{D}q'\, e^{i(S_{\mathcal{E}}[q]-S_{\mathcal{E}}[q'])}Q(\tau)Q'(\tau'),\end{aligned} \tag{2.2.26b}$$

[3]更精确的记法应为 $S_{\mathcal{I}}[x,q,t]=\int_0^t \mathrm{d}t'\, x^a(t')Q_a[q(t')]$。

$$G_{21}(\tau,\tau') = -i\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\mathrm{d}q(0)\mathrm{d}q'(0)\,\rho_{\mathcal{E}}(q(0),q'(0),0) \times \int_{q(t)=q'(t)=q} \mathcal{D}q\mathcal{D}q'\, e^{i(S_{\mathcal{E}}[q]-S_{\mathcal{E}}[q'])}Q'(\tau)Q(\tau'), \tag{2.2.26c}$$

$$G_{22}(\tau,\tau') = i\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\mathrm{d}q(0)\mathrm{d}q'(0)\,\rho_{\mathcal{E}}(q(0),q'(0),0) \times \int_{q(t)=q'(t)=q} \mathcal{D}q\mathcal{D}q'\, e^{i(S_{\mathcal{E}}[q]-S_{\mathcal{E}}[q'])}Q'(\tau)Q'(\tau'). \tag{2.2.26d}$$

为了以典范形式计算这些量，我们利用传播子2.2.5满足以下关系这一事实 [38]

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_c\, K(x_b,t_b;x_c,t_c)K(x_c,t_c;x_a,t_a), \tag{2.2.27}$$

其中 $x_c = x(t_c)$ 和 $t_a < t_c < t_b$。然后，假设 $\tau > \tau'$，我们可以写成

$$\begin{aligned}
&\int_{q(t)=q'(t)} \mathcal{D}q\mathcal{D}q'\, e^{i(S_{\mathcal{E}}[q]-S_{\mathcal{E}}[q'])}Q(\tau)Q(\tau') \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q(\tau')\mathrm{d}q(\tau) \int_{0\le t'\le\tau'} \mathcal{D}q(t')\, e^{iS_{\mathcal{E}}[q(t')]}Q(\tau') \int_{\tau'\le t'\le\tau} \mathcal{D}q(t')\, e^{iS_{\mathcal{E}}[q(t')]}Q(\tau) \\
&\quad\times \int_{\tau\le t'\le t} \mathcal{D}q(t')\, e^{iS_{\mathcal{E}}[q(t')]} \int_{0\le t'\le t} \mathcal{D}q'(t')e^{-iS_{\mathcal{E}}[q'(t')]},
\end{aligned} \tag{2.2.28}$$

其中，$q(t')$ 和 $q'(t')$ 表示积分（路径）变量，等式右侧的下标表示正在计算路径积分的时间区间。现在，我们可以将每个路径积分识别为环境自由时间演化算符 $\hat{U}_{\mathcal{E}}(t) = e^{-i\hat{H}_{\mathcal{E}}t}$ 的一个矩阵元，并写成

$$\begin{aligned}
-iG_{11}(\tau,\tau') &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q(t)\mathrm{d}q(0)\mathrm{d}q'(0)\mathrm{d}q(\tau')\mathrm{d}q(\tau) \\
&\quad\times \langle q(t)|\hat{U}_{\mathcal{E}}(t,\tau)|q(\tau)\rangle\, Q(\tau)\, \langle q(\tau)|\hat{U}_{\mathcal{E}}(\tau,\tau')|q(\tau')\rangle\, Q(\tau') \\
&\quad\times \langle q(\tau')|\hat{U}_{\mathcal{E}}(\tau',0)|q(0)\rangle\, \langle q(0)|\rho_{\mathcal{E}}(0)|q'(0)\rangle\, \langle q'(0)|\hat{U}_{\mathcal{E}}(0,t)|q(t)\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q(t)\mathrm{d}q(\tau')\mathrm{d}q(\tau)\, \langle q(t)|\hat{U}_{\mathcal{E}}(t,\tau)\hat{Q}|q(\tau)\rangle \\
&\quad\times \langle q(\tau)|\hat{U}_{\mathcal{E}}(\tau,\tau')\hat{Q}|q(\tau')\rangle\, \langle q(\tau')|\hat{U}_{\mathcal{E}}(\tau',0)\rho_{\mathcal{E}}(0)\hat{U}_{\mathcal{E}}(0,t)|q(t)\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q(t)\, \langle q(t)|\hat{U}_{\mathcal{E}}(t,\tau)\hat{Q}\hat{U}_{\mathcal{E}}(\tau,\tau')\hat{Q}\hat{U}_{\mathcal{E}}(\tau',0)\rho_{\mathcal{E}}(0)\hat{U}_{\mathcal{E}}(0,t)|q(t)\rangle \\
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\Big\{\hat{U}_{\mathcal{E}}(t,\tau)\hat{Q}\hat{U}_{\mathcal{E}}(\tau,\tau')\hat{Q}\hat{U}_{\mathcal{E}}(\tau',0)\rho_{\mathcal{E}}(0)\hat{U}_{\mathcal{E}}(0,t)\Big\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\left\{\hat{U}_{\mathcal{E}}(0,t)\hat{U}_{\mathcal{E}}(t,\tau)\hat{Q}\hat{U}_{\mathcal{E}}(\tau,\tau')\hat{Q}\hat{U}_{\mathcal{E}}(\tau',0)\rho_{\mathcal{E}}(0)\right\}\\
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\left\{\hat{U}_{\mathcal{E}}(0,\tau)\hat{Q}\hat{U}_{\mathcal{E}}(\tau,0)\hat{U}_{\mathcal{E}}(0,\tau')\hat{Q}\hat{U}_{\mathcal{E}}(\tau',0)\rho_{\mathcal{E}}(0)\right\}\\
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\left\{\hat{U}^{\dagger}_{\mathcal{E}}(\tau)\hat{Q}\hat{U}_{\mathcal{E}}(\tau)\hat{U}^{\dagger}_{\mathcal{E}}(\tau')\hat{Q}\hat{U}_{\mathcal{E}}(\tau')\rho_{\mathcal{E}}(0)\right\}\\
&= \left\langle \hat{Q}(\tau)\hat{Q}(\tau')\right\rangle_{\mathcal{E}}, \qquad (\tau > \tau')
\end{aligned}
\tag{2.2.29}
$$

其中，$\hat{Q}(\tau)$ 是相互作用绘景中的一个算符，$\hat{Q}(\tau) = \hat{U}^{\dagger}_{\mathcal{E}}(\tau)\hat{Q}\hat{U}_{\mathcal{E}}(\tau)$。在上述 $\hat{}$ 表达式中，我们使用了复合规则 $U_{\mathcal{E}}(t,\ t')U_{\mathcal{E}}(t',\ t_0) = U_{\mathcal{E}}(t,\ t_0)$。值得注意的是，如果我们没有指定 τ 和 τ' 之间的时间关系，路径积分会自动将最新的时间置于左侧。这意味着我们可以写出一般结果

$$
G_{11}(\tau,\tau') = i\left\langle \mathrm{T}\left[\hat{Q}(\tau)\hat{Q}(\tau')\right]\right\rangle_{\mathcal{E}}. \tag{2.2.30}
$$

通过完全类似的过程，我们可以将其他分量写成2.2.26典范形式，并得到

$$
\mathbb{G}(t,t') = i\begin{pmatrix} \left\langle \mathrm{T}\left[\hat{Q}(t)\hat{Q}(t')\right]\right\rangle_{\mathcal{E}} & -\left\langle \hat{Q}(t')\hat{Q}(t)\right\rangle_{\mathcal{E}} \\ -\left\langle \hat{Q}(t)\hat{Q}(t')\right\rangle_{\mathcal{E}} & \left\langle \tilde{\mathrm{T}}\left[\hat{Q}(t)\hat{Q}(t')\right]\right\rangle_{\mathcal{E}} \end{pmatrix}, \tag{2.2.31}
$$

其中，T 表示反时间排序，它将任何含时算符乘积重新排序，使较晚的时间位于右侧。此外，$\mathbb{G}$表示一个矩阵，其元素为 G_{ab}。

影响作用量（2.2.23）于是可以写为

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{IF}}[x,x'] = \frac{i}{2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}t' \Big\{ &\left\langle \mathrm{T}\left[\hat{Q}(t)\hat{Q}(t')\right]\right\rangle_{\mathcal{E}} x(t)x(t') - \left\langle \hat{Q}(t')\hat{Q}(t)\right\rangle_{\mathcal{E}} x(t)x'(t')\\
&- \left\langle \hat{Q}(t)\hat{Q}(t')\right\rangle_{\mathcal{E}} x'(t)x(t') + \left\langle \tilde{\mathrm{T}}\left[\hat{Q}(t)\hat{Q}(t')\right]\right\rangle_{\mathcal{E}} x'(t)x'(t')\Big\}.
\end{aligned}
\tag{2.2.32}
$$

通过引入变量 $u = x - x'$和 $X = (x + x')/2$，我们可以将其写得更紧凑。此外，利用阶跃函数的性质 $\theta(-x) = 1 - \theta(x)$，可得

$$
\mathrm{T}\left[\hat{Q}(t)\hat{Q}(t')\right] = \theta(t-t')\left[\hat{Q}(t),\hat{Q}(t')\right] + \hat{Q}(t')\hat{Q}(t), \tag{2.2.33a}
$$

and

$$
\tilde{\mathrm{T}}\left[\hat{Q}(t)\hat{Q}(t')\right] = -\theta(t-t')\left[\hat{Q}(t),\hat{Q}(t')\right] + \hat{Q}(t)\hat{Q}(t'), \tag{2.2.33b}
$$

其中 $[\cdot,\cdot]$ 表示算符之间的对易子。经过大量代数运算后，我们得到

$$S_{\mathrm{IF}}[x,x'] = \int \mathrm{d}t\mathrm{d}t' \left[u(t)D(t,t')X(t') + \frac{i}{2}u(t)N(t,t')u(t') \right], \tag{2.2.34}$$

其中，我们定义了**耗散**和**噪声核**

$$D(t,t') = i\left\langle \left[\hat{Q}(t),\hat{Q}(t')\right]\right\rangle_{\mathcal{E}} \theta(t-t'), \tag{2.2.35a}$$

$$N(t,t') = \frac{1}{2}\left\langle \left\{\hat{Q}(t),\hat{Q}(t')\right\}\right\rangle_{\mathcal{E}}, \tag{2.2.35b}$$

分别表示。此处，$\{\cdot,\cdot\}$ 表示算符之间的反对易子。

这些核的物理含义及其名称由来，将在下一节推导约化密度矩阵的主方程后变得更加明了。

2.3 主方程

对于封闭量子系统，时间演化完全可以通过刘维尔–冯·诺依曼方程用密度矩阵来描述，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}(t) = -i\left[\hat{H},\hat{\rho}(t)\right], \tag{2.3.1}$$

ˆ其中，H 是系统的总哈密顿量。这种时间演化是幺正的，而对于开放系统则不能这么说。在这种情况下，刘维尔-冯·诺伊曼方程被所谓的主方程所取代。对于大多数感兴趣的情形，与环境耦合的系统的约化密度矩阵的时间演化具有以下形式： [109, 110]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t) = -i\left[\hat{H}'_{\mathcal{S}},\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)\right] + \hat{\mathcal{D}}[\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)]. \tag{2.3.2}$$

ˆ这是 $H'_{\mathcal{S}}$ 仅作用于感兴趣系统的哈密顿量部分。ˆ ˆ一般而言，$H'_{\mathcal{S}} \neq H_{\mathcal{S}}$，因为与环境的相互作用可能导致系统能级发生重整化，这种效应通常称为 兰姆位移 贡献 [109]。此外，环境的存在会在式（2.3.2）右侧引入第二项，该项负责ˆ约化系统的非幺正时间演化。这个超算符[4] $\mathcal{D}$

[4]超算符是指作用于另一个算符的算符。

有时称为耗散子，它负责耗散和退相干效应。

像式（2.3.2）这样的主方程通常是通过对总合并系统的刘维尔-冯·诺伊曼方程中环境变量取偏迹得到的，并假设系统处于初始直积态（如上一节所做），此外还施加其他近似，例如玻恩近似和马尔可夫近似[5]（详见参考文献[109, 110]）。这里我们将简单展示如何通过影响泛函方法，从约化密度矩阵得到主方程。

2.3.1 推导主方程

我们首先将 $\rho_{\mathcal{S}}(x_f, x'_f, t+\Delta t)$ 写成 $\rho_{\mathcal{S}}(x, x', t)$ 的形式，

$$\rho_{\mathcal{S}}(x_f, x'_f, t+\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\mathrm{d}x'\, \mathcal{J}_{\mathcal{S}}(x_f, x'_f, t+\Delta t|x, x', t)\rho_{\mathcal{S}}(x, x', t), \tag{2.3.3}$$

其中

$$\mathcal{J}_{\mathcal{S}}(x_f, x'_f, t+\Delta t|x, x', t) = \int_{\substack{x(t)=x \\ x'(t)=x'}}^{\substack{x(t+\Delta t)=x_f \\ x'(t+\Delta t)=x'_f}} \mathcal{D}x\mathcal{D}x'\, e^{i(\Delta S_{\mathcal{S}}[x]-\Delta S_{\mathcal{S}}[x'])} e^{i\Delta S_{\mathrm{IF}}[x,x']}, \tag{2.3.4}$$

其中 $\Delta S_{\mathcal{S}}[x] \equiv S_{\mathcal{S}}[x, t+\Delta t] - S_{\mathcal{S}}[x, t]$， $\Delta S_{\mathrm{IF}}[x, x']$ 也同理。

由于我们的目标是获得约化密度矩阵时间演化的一阶微分方程，因此我们希望保留 Δt 的一阶项。现在， $\Delta S_{\mathrm{IF}}[x, x'] \propto \Delta t$ ，因此

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\mathcal{S}}(x_f, x'_f, t+\Delta t|x, x', t) \simeq\ & K_{\mathcal{S}}(x_f, t+\Delta t|x, t)K^*_{\mathcal{S}}(x'_f, t+\Delta t|x', t) \\ & + i\int \mathcal{D}x\mathcal{D}x'\, e^{i(\Delta S_{\mathcal{S}}[x]-\Delta S_{\mathcal{S}}[x'])}\Delta S_{\mathrm{IF}}[x, x'],\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

[5]玻恩近似假设系统与环境之间的相互作用足够弱，且环境相对于系统足够大，因此总态在整个时间演化过程中始终近似为乘积态。马尔可夫近似假设，环境的关联函数衰减至零的速度远快于系统约化密度矩阵发生显著变化所需的特征时间尺度。它基本上忽略了环境的记忆效应，通常会将积分微分主方程转化为一个简单得多的微分方程。

其中

$$K_{\mathcal{S}}(x_f, t+\Delta t|x,t) = \int_{x(t)=x}^{x(t+\Delta t)=x_f} \mathcal{D}x\, e^{i\Delta S_{\mathcal{S}}[x]} = \langle x_f|\hat{U}_{\mathcal{S}}(t+\Delta t,t)|x\rangle$$
$$\simeq \delta(x_f - x) - i\Delta t\, \langle x_f|\hat{H}_{\mathcal{S}}|x\rangle\,. \tag{2.3.6}$$

如果采用线性耦合模型，影响作用量由方程（2.2.34）给出，于是可得

$$\Delta S_{\mathrm{IF}}[x,x'] = \Delta t\, u(t) \int_0^t \mathrm{d}t'\, [D(t,t')X(t') + iN(t,t')u(t')], \tag{2.3.7}$$

这里我们利用了 $D(t,t') \propto \theta(t-t')$ 这一事实；也就是说， $D(t,t')$ 显式地具有因果性。

将方程（2.3.6）和（2.3.7）代入方程（2.3.3），再利用方程（2.2.14）将时间演化表示为系统的初始密度矩阵形式，然后取极限 $\Delta t \to 0$，同时令 $x_f \to x$ 和 $x'_f \to x'$，最终得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\mathcal{S}}(x,x',t) = -i\,\langle x|\Big[\hat{H}_{\mathcal{S}}, \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)\Big]|x'\rangle$$
$$-(x-x')\int_0^t \mathrm{d}t'\left[N(t,t')(\mathbf{X}-\mathbf{X}')(x,x',t') - \frac{i}{2}D(t,t')(\mathbf{X}+\mathbf{X}')(x,x',t')\right], \tag{2.3.8}$$

with

$$\mathbf{X}(x,x',t') = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x'_0 \int \mathcal{D}x\mathcal{D}x'\, e^{i(S_{\mathcal{S}}[x]-S_{\mathcal{S}}[x']+S_{\mathrm{IF}}[x,x'])}\rho_{\mathcal{S}}(x_0,x'_0,0)x(t'). \tag{2.3.9}$$

注意，$\mathbf{X}(x,\ x',\ t')$ 的演化也通过影响作用量取决于与环境的相互作用。然而，对于足够弱的相互作用，我们可以利用以下事实：噪声核和耗散核 ˆ 通常都是与系统耦合的算符 Q 的二阶量。因此，我们可以忽略指数中的影响作用量，因为它会导致更高阶的贡献，并写作 [39]

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(x,x',t') &\simeq \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x'_0 \int \mathcal{D}x\mathcal{D}x'\, e^{i(S_{\mathcal{S}}[x]-S_{\mathcal{S}}[x'])}\rho_{\mathcal{S}}(x_0,x'_0,0)x(t')\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x'_0\mathrm{d}x(t')\,\langle x(t')|\hat{U}_{\mathcal{S}}(t',0)|x_0\rangle\,\langle x|\hat{U}_{\mathcal{S}}(t,t')\hat{X}|x(t')\rangle\\ &\quad\times\langle x_0|\hat{U}_{\mathcal{S}}(0,t)|x'\rangle\,\langle x_0|\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(0)|x'_0\rangle\\ &= \langle x|e^{-i\hat{H}_{\mathcal{S}}(t-t')}\hat{X}e^{-i\hat{H}_{\mathcal{S}}t'}\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(0)e^{i\hat{H}_{\mathcal{S}}t}|x'\rangle\end{aligned}$$

$$= \langle x|\hat{X}(-\tau)\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)|x'\rangle\,, \tag{2.3.10}$$

其中 $\tau = t - t'$，而 $\hat{X}(t) = e^{i\hat{H}_{\mathcal{S}}t}\hat{X}e^{-i\hat{H}_{\mathcal{S}}t}$ 是相互作用绘景中的位置算符。类似地，可以证明 $\mathbf{X}'(x,\ x',\ t')$ 是 $\hat{}$ 算符 $\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)X(-\tau)$ 的 $(x,\ x')$ 矩阵元。

最后，将所有内容汇总起来可得到主方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t) = -i\Big[\hat{H}_{\mathcal{S}}, \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)\Big] - \int_0^t \mathrm{d}\tau\, \Big\{N(t,t-\tau)\Big[\hat{X}, \Big[\hat{X}(-\tau), \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)\Big]\Big] - \frac{i}{2}D(t,t-\tau)\Big[\hat{X}, \Big\{\hat{X}(-\tau), \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)\Big\}\Big]\Big\}. \tag{2.3.11}$$

其形式与公式（2.3.2）中给出的一致，其中耗散核和噪声核编码了非幺正时间演化。为了进一步探究这些项背后的物理含义，让我们将主方程应用于感兴趣的系统的一个知名模型，即谐振子。

2.3.2 耗散、扩散与退相干

现在假设我们的感兴趣的系统是一个质量为 M、频率为 Ω 的谐振子，其自由哈密顿量形式为

$$\hat{H}_{\mathcal{S}} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\Omega^2\hat{X}^2, \tag{2.3.12}$$

$\hat{}\hat{}$其中 X 和 P 分别是系统的（薛定谔绘景）位置算符和动量算符，满足正则对易关系 $[X,P] = i$。相互作用绘景中的位置算符（当系统仅依据其自身哈密顿量 $H_{\mathcal{S}}$ 演化时，该算符与海森堡绘景中的算符 $\hat{}$ 相同）为 [113]

$$\hat{X}(t) = \hat{X}\cos(\Omega t) + \frac{1}{M\Omega}\hat{P}\sin(\Omega t). \tag{2.3.13}$$

将此结果代入主方程（2.3.11）可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t) = -i\Big[\hat{H}_{\mathcal{S}} + \frac{1}{2}M\delta\Omega^2(t)\hat{X}^2, \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)\Big] - i\gamma(t)\Big[\hat{X}, \Big\{\hat{P}, \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)\Big\}\Big] - \sigma^2(t)\Big[\hat{X}, \Big[\hat{X}, \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)\Big]\Big] - \Sigma^2(t)\Big[\hat{X}, \Big[\hat{P}, \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)\Big]\Big], \tag{2.3.14}$$

其中

$$\delta\Omega^2(t) = -\frac{1}{M}\int_0^t \mathrm{d}\tau\, D(t,t-\tau)\cos(\Omega\tau), \tag{2.3.15a}$$

$$\gamma(t) = \frac{1}{2M\Omega}\int_0^t \mathrm{d}\tau\, D(t, t-\tau)\sin(\Omega\tau), \tag{2.3.15b}$$

$$\sigma^2(t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau\, N(t, t-\tau)\cos(\Omega\tau), \tag{2.3.15c}$$

$$\Sigma^2(t) = -\frac{1}{M\Omega}\int_0^t \mathrm{d}\tau\, N(t, t-\tau)\sin(\Omega\tau). \tag{2.3.15d}$$

在位置表象中，主方程（2.3.14）为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho_S(x,x',t) = \Bigg[&\frac{i}{2M}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right) - \frac{i}{2}M\left(\Omega^2 + \delta\Omega^2(t)\right)\left(x^2 - x'^2\right)\\ &- \gamma(t)(x-x')\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right) - \sigma^2(t)(x-x')^2\\ &+ i\Sigma^2(t)(x-x')\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x'}\right)\Bigg]\rho_S(x,x',t).\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

值得一提的是，无需施加弱耦合近似，即可得到量子布朗运动的精确主方程，而我们在式（2.3.10）中采用了这一近似。在这种情况下，系数（2.3.15）的表达式会复杂得多，但主方程仍保持相同的形式（2.3.14）（参见文献 [39, 114]）。值得注意的是，尽管精确主方程呈现非马尔可夫效应，但它在时间上仍是局域的。

现在我们来讨论式（2.3.15）中各个系数的物理解释。首先请注意，系数 $\delta\Omega^2(t)$由式（2.3.15a）给出，它相当于对系统固有频率的重整化（兰姆位移贡献）。因此，时间演化的幺正部分对应于一个物理频率为 $\left(\Omega^2 + \delta\Omega^2(t)\right)^{1/2}$ 的量子谐振子。

系数 $\gamma(t)$由式（2.3.15b）给出，描述了通过动量阻尼产生的耗散。为说明这一点，我们来考察期望ˆ ˆ值 $\langle P\rangle(t) = \mathrm{Tr}_S[P\hat{}\,\rho_S(t)]$的时间演化。利用主方程（2.3.14），并运用正则对易关系展开计算细节，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{P}\rangle(t) &= \mathrm{Tr}_S\left[\hat{P}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}_S(t)\right]\\ &= -M\left(\Omega^2 + \delta\Omega^2(t)\right)\langle\hat{X}\rangle(t) - 2\gamma(t)\langle\hat{P}\rangle(t).\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

右侧第一项描述振子的通常幺正演化，第二项则描述动量阻尼。采用完整的马尔可夫近似，并将积分上限延伸至无穷大，使系数（2.3.15b）变为常数 [109]时，这一点就更加明显。在这种情况下，我们有 $\langle\hat{}\,P\rangle(t) \propto e^{-2\gamma t}\langle\hat{}\,P\rangle(0)$。注意，$\gamma(t)$ 完全由核决定

$D(t,t')$，因此我们称其为耗散 核。

系数 $\sigma^2(t)$ 描述了位置基中的退相干，这一点可从主方程（2.3.16的位置表象中看出。它不仅相当于对系统位置算符进行环境监测，而且因此还描述了[6] 动量扩散。由 $\langle \hat{P}^2\rangle(t)$ [109],的时间演化可知这一点。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{P}^2\rangle(t) = -M\big(\Omega^2+\delta\Omega^2(t)\big)\langle\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X}\rangle(t) - 4\gamma(t)\langle\hat{P}^2\rangle(t) + 2\sigma^2(t), \quad (2.3.18)$$

因此，在马尔可夫极限下，当该系数随时间保持恒定时，$\langle \hat{P}^2\rangle(t) \propto \sigma^2 t$。因此，$\sigma^2(t)$ 有时也称为（正常）扩散系数。还可以证明，这种系统的维格纳函数满足扩散方程，其扩散系数由式（2.3.15c） [109]给出。

最后，系数 $\Sigma^2(t)$ 也与退相干和扩散有关。不过，在主方程的维格纳表象中，该系数与一个二阶导数相关，其中两个偏导分别针对不同变量（位置和动量），而不是针对单一变量。因此，它被称为反常扩散系数；在许多值得关注的物理情形中，与正常扩散系数 [109] 导致的影响相比，它造成的影响可以忽略不计。

现在，若要更深入地从物理角度理解这些核$D(t,t')$ 和 $N(t,t')$，我们需要明确环境的模型。在量子布朗运动中，环境由一组处于热平衡状态的谐振子描述。借助这一模型，我们可以推导出一个重要定理，该定理揭示了耗散核与噪声核之间的关系，即涨落-耗散定理。

2.3.3 涨落-耗散定理

我们推导影响作用量（2.2.34）时，仅假设环境的自由哈密顿量为二次型、初态为高斯态且耦合为线性，并未作进一步限定。现在，我们选择该环境来表示一组质量为 m_i、频率为 ω_i 的谐振子，使环境哈密顿量写为

$$\hat{H}_{\mathcal{E}} = \sum_i \left(\frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2}m_i\omega_i^2\hat{q}_i^2\right), \quad (2.3.19)$$

[6]由于经典布朗运动中也观察到正常扩散， [115], 正是这种相似性使这一典型模型得名“量子布朗运动” [109]。

其中，$\hat{q}_i$ ($\hat{p}_i$) 是第 i 个振子的 位置（动量）算符。现在假设第 i 个模以耦合常数 c_i 与系统耦合，因此环境算符 Q 可表示为 $Q = \sum_i c_i \hat{q}_i$。对于环境的初态，我们假设各模处于温度 β^{-1} 下的热平衡态，使得 $\hat{\rho}_{\mathcal{E}}(0) = e^{-\beta H_{\mathcal{E}}}/Z$，其中 $Z = \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}(e^{-\beta H_{\mathcal{E}}})$ 是正则配分函数。

现在，由于各个模之间没有直接相互作用，对于$i \neq j$，我们有：

$$\langle q_i(t) q_j(t') \rangle_{\mathcal{E}} = \langle q_i(t) \rangle_{\mathcal{E}} \langle q_j(t') \rangle_{\mathcal{E}} = 0, \tag{2.3.20}$$

耗散核和噪声核可写为

$$D(t,t') = i \sum_i c_i^2 \langle [\hat{q}_i(t), \hat{q}_i(t')] \rangle_{\mathcal{E}} \theta(t-t'), \tag{2.3.21a}$$

$$N(t,t') = \frac{1}{2} \sum_i c_i^2 \langle \{\hat{q}_i(t), \hat{q}_i(t')\} \rangle_{\mathcal{E}} . \tag{2.3.21b}$$

相互作用绘景中的位置算符为 [113]

$$\hat{q}_i(t) = \sqrt{\frac{1}{2m_i\omega_i}} \left(\hat{a}_i e^{-i\omega_i t} + \hat{a}_i^\dagger e^{i\omega_i t} \right), \tag{2.3.22}$$

其中，$\hat{a}$（$\hat{a}^\dagger$）是湮灭（产生）算符，满足以下对易关系

$$\begin{aligned} [\hat{a}_i, \hat{a}_j] &= \left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\right] = 0, \\ \left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\right] &= \delta_{ij}. \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

直接计算可得

$$\langle [\hat{q}_i(t), \hat{q}_i(t')] \rangle_{\mathcal{E}} = -\frac{i}{m_i\omega_i} \sin[\omega_i(t-t')], \tag{2.3.24a}$$

$$\begin{aligned} \langle \{\hat{q}_i(t), \hat{q}_i(t')\} \rangle_{\mathcal{E}} = {} & \frac{2}{m_i\omega_i^2} \langle \hat{H}_i \rangle_{\mathcal{E}} \cos[\omega_i(t-t')] \\ & + \frac{1}{m_i\omega_i} \left[\langle \hat{a}_i^2 \rangle_{\mathcal{E}} e^{-i\omega_i(t+t')} + \langle (\hat{a}_i^\dagger)^2 \rangle_{\mathcal{E}} e^{i\omega_i(t+t')} \right], \end{aligned} \tag{2.3.24b}$$

其中$\hat{H}_i = \omega_i \left(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{1}{2} \right) = \frac{\omega_i}{2} \{\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger\}$ 是频率为 ω_i的谐振子的自由哈密顿算符。注意，在该模型中，耗散核与初始环境态无关。

由于环境最初处于热态，我们有 $\langle \hat{a}_i^2 \rangle_{\mathcal{E}} = \langle (\hat{a}_i^\dagger)^2 \rangle_{\mathcal{E}} = 0$。此外，第 i 个模的配分函数为

$$Z_i = \sum_{n_i=0}^{\infty} \exp\left[-\omega_i \beta \left(n_i + \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{e^{-\omega_i \beta/2}}{1 - e^{-\omega_i \beta}}, \tag{2.3.25}$$

由此可得 [116]

$$\langle \hat{H}_i \rangle_{\mathcal{E}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_i = \frac{\omega_i}{2} \coth\left(\frac{\omega_i \beta}{2}\right). \tag{2.3.26}$$

现在，将所有结果整合到耗散核和噪声核中，可得

$$D(\tau) = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \, J(\omega) \sin(\omega\tau) \, \theta(\tau), \tag{2.3.27a}$$

$$N(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \, J(\omega) \coth\left(\frac{\omega\beta}{2}\right) \cos(\omega\tau), \tag{2.3.27b}$$

其中 $\tau = t - t'$，并引入了**谱密度** [109, 110]

$$J(\omega) \equiv \sum_i \frac{c_i^2}{m_i \omega_i} \delta(\omega - \omega_i). \tag{2.3.28}$$

注意，热涨落的影响完全由核 $N(\tau)$ 编码，这就是我们称其为噪声 核的原因。不过，尽管耗散核完全由谱密度决定，且不显含环境温度，但这两个核通过一个重要关系相互关联。要看清这一点，首先注意到 $J(\omega)$ 只是耗散核的正弦傅里叶变换，

$$J(\omega) = \tilde{D}_S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}\tau \, D(\tau) \sin(\omega\tau). \tag{2.3.29a}$$

类似地，

$$\frac{1}{2} J(\omega) \coth\left(\frac{\omega\beta}{2}\right) = \tilde{N}_C(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}\tau \, N(\tau) \cos(\omega\tau), \tag{2.3.29b}$$

˜其中 $N_C(\omega)$ 是噪声核的余弦傅里叶变换。两个方程共同意味着

$$\tilde{N}_C(\omega) = \frac{1}{2} \tilde{D}_S(\omega) \coth\left(\frac{\omega\beta}{2}\right). \tag{2.3.30}$$

这个表达式称为**涨落耗散定理** [115, 117, 118],，因为它本质上将系统的热涨落与编码在噪声

核中的热涨落联系起来，并与耗散相关。

涨落耗散定理源于这两种效应都取决于谱密度 $J(\omega)$。通常，人们不会采用方程（2.3.28）给出的定义，而是用环境频率的连续函数取代离散求和，这往往是基于某种唯象动机 [39, 109]。在结束本节之前，我们来看一个例子。

2.3.4 Caldeira-Leggett 主方程

通常，谱密度采用幂律表达式 $J(\omega) \propto \omega^{\alpha}$，其中 α 为某个常数。当 $\alpha = 1$ 时，这种情况称为欧姆谱密度。例如，我们可以取

$$J(\omega) = \frac{4M\gamma_0}{\pi}\omega\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+\omega^2}, \tag{2.3.31}$$

其中 γ_0 是有效耦合常数，用来衡量系统与环境之间的相互作用。加入因子 $\Lambda^2/(\Lambda^2+\omega^2)$，是为了避免谱密度无限增长，因为这并不符合物理实际。随后引入频率截断 Λ，其数值通常远大于系统的固有频率 $\Lambda \gg \Omega$。实现这一点有多种方法，方程（2.3.31）中的处理方式称为 Lorentz-Drude 形式 [109]。

对于欧姆谱密度（2.3.31），我们得到

$$D(\tau) = 2M\gamma_0\Lambda^2 e^{-\Lambda\tau}, \tag{2.3.32a}$$

$$N(\tau) \simeq 2M\gamma_0\frac{\Lambda}{\beta}e^{-\Lambda\tau}, \tag{2.3.32b}$$

为简化起见，我们取高温极限，$\beta\omega \ll 1$。进一步简化，令系数采用马尔可夫近似形式（2.3.15），

$$\delta\Omega^2 = -\frac{1}{M}\int_0^\infty \mathrm{d}\tau\, D(\tau)\cos(\Omega\tau) = -2\gamma_0\frac{\Lambda^3}{\Lambda^2+\Omega^2}, \tag{2.3.33a}$$

$$\gamma = \frac{1}{2M\Omega}\int_0^\infty \mathrm{d}\tau\, D(\tau)\sin(\Omega\tau) = \gamma_0\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+\Omega^2}, \tag{2.3.33b}$$

$$\sigma^2 = \int_0^\infty \mathrm{d}\tau\, N(\tau)\cos(\Omega\tau) = \frac{2M\gamma_0}{\beta}\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+\Omega^2}, \tag{2.3.33c}$$

$$\Sigma^2 = -\frac{1}{M\Omega}\int_0^\infty \mathrm{d}\tau\, N(\tau)\sin(\Omega\tau) = -\frac{2\gamma_0}{\beta}\frac{\Lambda}{\Lambda^2+\Omega^2}. \tag{2.3.33d}$$

回想起 $\Lambda \gg \Omega$，我们可以得到更简单的表达式。特别是，我们发现反常扩散系数的变化规律为 $\Sigma^2 = -\sigma^2/M\Lambda$，因此

这种效应远小于正常扩散。

最后，主方程（2.3.14）可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t) = -i\Big[\hat{H}'_{\mathcal{S}}, \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)\Big] - i\gamma_0\Big[\hat{X}, \Big\{\hat{P}, \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)\Big\}\Big] - \frac{2M\gamma_0}{\beta}\Big[\hat{X}, \Big[\hat{X}, \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)\Big]\Big], \tag{2.3.34}$$

ˆ其中 $H'_{\mathcal{S}}$ 是频率偏移了 $-2\gamma_0\Lambda$的谐振子哈密顿量。式（2.3.34）称为**卡尔代拉-莱格特主方程** [118], 它描述了一个系统（此处由谐振子表示）与一个由非相互作用模组成的马尔可夫奥姆热浴之间的相互作用，该热浴处于高温热平衡状态 β^{-1}。

请注意，我们对谱密度的选择意味着扩散系数为 $\sigma^2 = \gamma_0/\lambda_{\mathrm{B}}^2$，其中 $\lambda_{\mathrm{B}} = 1/\sqrt{2M\beta^{-1}}$ 是热德布罗意波长。由于退相干率与 σ^2成正比，而宏观系统的热德布罗意波长极短，因此我们展示了一种描述 此类系统中退相干如何迅速发生的方法；这与通常观察不到宏观物体处于量子叠加态 [109]的现象相符。

2.4 朗之万方程

量子系统因退相干而发生局域化，这引发了一些有趣的问题：如果我们不再观测到位置基中的叠加态，那么我们能否理解量子系统的“轨迹”这一概念？如果可以，又该如何获得这些轨迹？我们将在第 2.5 节探讨前一个问题。本节将说明如何从所谓的朗之万方程中获得这样的轨迹。

无论量子轨迹是否能够得到合理解释，都可以求出所考虑系统的经典极限[7]。在路径积分表述中，这是通过驻相法实现的，其依据是经典路径使总作用量取驻值这一事实 [38]。现在来看看如何推导与环境耦合的约化量子系统在经典极限下的运动方程。

[7]尽管从数学上看，朗之万方程的解既属于“量子轨迹”（将在第 2.5 节讨论）的范畴，也属于经典极限下的轨迹，但它们各自的物理意义截然不同。后一种情况下，经典极限是人为施加的；而前一种情况下，这一概念则仅源于退相干机制，除此之外并不需要作出任何假设，量子理论本身便已足够 [119]。

回忆一下，根据方程（2.2.14），约化密度矩阵随时间的演化满足

$$\rho_{\mathcal{S}}(x,x',t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x_0'\int\mathcal{D}x\mathcal{D}x'\,e^{i(S_{\mathcal{S}}[x]-S_{\mathcal{S}}[x']+S_{\mathrm{IF}}[x,x'])}\rho_{\mathcal{S}}(x_0,x_0',0),\quad(2.4.1)$$

其中，所有环境影响都编码在影响作用量中 $S_{\mathrm{IF}}[x,x']$。特别是，若考虑线性耦合模型，影响作用量可根据耗散核和噪声核由方程（2.2.34）给出。假设情况如此，我们注意到，可以将包含噪声核的项改写为 [39]

$$e^{-\frac{1}{2}\int\mathrm{d}t\mathrm{d}t'\,u(t)N(t,t')u(t')}=\mathcal{C}\int\mathcal{D}\mathcal{N}e^{-\frac{1}{2}\int\mathrm{d}t\mathrm{d}t'\,\mathcal{N}(t)N^{-1}(t,t')\mathcal{N}(t')}e^{i\int\mathrm{d}t\mathcal{N}(t)u(t)},\quad(2.4.2)$$

其中 $\mathcal{C}$ 是归一化常数，$\mathcal{D}\mathcal{N}$ 表示随机变量 $\mathcal{N}(t)$的路径积分测度。这个简单的泛函恒等式使我们能够将噪声核影响改写为具有高斯概率密度的随机平均，其表达式为

$$\mathscr{P}[\mathcal{N}]=\mathcal{C}\,e^{-\frac{1}{2}\int\mathrm{d}t\mathrm{d}t'\,\mathcal{N}(t)N^{-1}(t,t')\mathcal{N}(t')}.\quad(2.4.3)$$

例如，一点和两点关联函数为

$$\langle\mathcal{N}(t)\rangle_{\mathrm{sto}}=\int\mathcal{D}\mathcal{N}\,\mathscr{P}[\mathcal{N}]\mathcal{N}(t)=0,\quad(2.4.4a)$$

$$\langle\mathcal{N}(t)\mathcal{N}(t')\rangle_{\mathrm{sto}}=\int\mathcal{D}\mathcal{N}\,\mathscr{P}[\mathcal{N}]\mathcal{N}(t)\mathcal{N}(t')=N(t,t').\quad(2.4.4b)$$

于是，约化密度矩阵的时间演化可写为

$$\rho_{\mathcal{S}}(x,x',t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x_0'\int\mathcal{D}x\mathcal{D}x'\mathcal{D}\mathcal{N}\,\rho_{\mathcal{S}}(x_0,x_0',0)e^{iS_{\mathrm{SEA}}[x,x',\mathcal{N}]},\quad(2.4.5)$$

其中随机有效作用量为

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{SEA}}[x,x',\mathcal{N}]=S_{\mathcal{S}}[x]-S_{\mathcal{S}}[x']+\int\mathrm{d}t\,\mathcal{N}(t)[x(t)-x'(t)]\\+\frac{1}{2}\int\mathrm{d}t\mathrm{d}t'\,[x(t)-x'(t)]D(t,t')[x(t')+x'(t')].\end{aligned}\quad(2.4.6)$$

按照惯例，令 $\delta S_{\mathrm{SEA}}=0$，即可得到运动方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L_{\mathcal{S}}}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L_{\mathcal{S}}}{\partial x}-\frac{1}{2}\int_0^t\mathrm{d}t'\,D(t,t')[x(t')+x'(t')]=\mathcal{N}(t),\quad(2.4.7)$$

其中 L_S 是系统的拉格朗日量。式（2.4.7）是**朗之万方程**。例如，若感兴趣的系统是谐振子，则有

$$M\ddot{x}(t) + M\Omega^2 x(t) - \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{d}t'\, D(t,t')[x(t') + x'(t')] = \mathcal{N}(t). \tag{2.4.8}$$

注意， D 项会产生非局域、依赖记忆的耗散，而 N 项则作为作用于系统的随机力。再次说明，将二点函数 $N(t,\ t')$ 称为噪声核 确实十分贴切。

最后，在结束本章之前，我们来讨论朗之万方程的个别解是否可观测这一问题，适用对象是量子系统；也就是说，虽然没有人为地施加经典极限，但轨迹描述仍然适用。为此，我们将转向量子力学中的**退相干**（或**一致**）**历史**方法。

2.5 退相干历史

现在介绍退相干历史形式体系，它主要由 Griffiths、Omnès、Gell-Mann 和 Hartle [120–123]发展而来（综述参见参考文献 [124]）。我们先引入量子力学中历史的概念，然后定义所谓的退相干泛函，并讨论它在这一形式体系中的作用。最后，我们讨论使量子系统的轨迹描述具有意义的物理条件。

2.5.1 量子力学中的历史

量子力学历史是由一系列在连续时间点发生的量子力学事件构成的序列，因此可由一系列连续的投影算符来表征。以一个封闭量子系统为例，它在初始时刻t_0 处于由密度矩阵 $\hat{}\rho_0$描述的状态。在时间 $t_1 > t_0$，该系统将由

$$\hat{\rho}(t_1) = \hat{U}(t_1,t_0)\hat{\rho}_0\hat{U}^\dagger(t_1,t_0), \tag{2.5.1}$$

$\hat{}$其中，$U(t_i,\ t_j)$ 是从时间 t_j到时间 t_i的幺正时间演化算符。我们现在可以思考，与一组相互正交的投影算符 Π_{α_1} 相对应的事件是否会在 t_1发生。此类事件发生的概率为

$$\begin{aligned} p(\alpha_1 t_1) &= \mathrm{Tr}\left[\hat{\Pi}_{\alpha_1}\hat{\rho}(t_1)\right] = \mathrm{Tr}\left[\hat{\Pi}_{\alpha_1}\hat{U}(t_1,t_0)\hat{\rho}_0\hat{U}^\dagger(t_1,t_0)\right] \\ &= \mathrm{Tr}\left[\hat{U}^\dagger(t_1,t_0)\hat{\Pi}_{\alpha_1}\hat{U}(t_1,t_0)\hat{\rho}_0\right] \end{aligned}$$

$$= \mathrm{Tr}\Big[\hat{\Pi}_{\alpha_1}(t_1)\hat{\rho}_0\Big], \tag{2.5.2}$$

其中，我们定义了 $\hat{\Pi}_{\alpha_1}(t_1) \equiv \hat{U}^\dagger(t_1,\ t_0)\,\hat{\Pi}_{\alpha_1}\hat{U}(t_1,\ t_0)$，迹是在系统的希尔伯特空间的一组正交归一基上求取的。作出投影测量后，系统将经历通常的非幺正演化，

$$\hat{\rho}(t_1) \to \hat{\rho}_{\alpha_1}(t_1) = \frac{\hat{\Pi}_{\alpha_1}\hat{\rho}(t_1)\hat{\Pi}_{\alpha_1}}{\mathrm{Tr}\Big[\hat{\Pi}_{\alpha_1}\hat{\rho}(t_1)\Big]}. \tag{2.5.3}$$

现在，假设我们让系统继续演化到时间 $t_2 > t_1$，并询问与投影算符 Π_{α_2} 对应的事件。这个额外事件发生的概率为

$$\begin{aligned}
p(\alpha_2 t_2|\alpha_1 t_1) &= \mathrm{Tr}\Big[\hat{\Pi}_{\alpha_2}\hat{U}(t_2,t_1)\hat{\rho}_{\alpha_1}(t_1)\hat{U}^\dagger(t_2,t_1)\Big] \\
&= \frac{1}{p(\alpha_1 t_1)}\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_{\alpha_2}\hat{U}(t_2,t_1)\hat{\Pi}_{\alpha_1}\hat{U}(t_1,t_0)\hat{\rho}_0\hat{U}^\dagger(t_1,t_0)\hat{\Pi}_{\alpha_1}\hat{U}^\dagger(t_2,t_1)] \\
&= \frac{1}{p(\alpha_1 t_1)}\mathrm{Tr}\Big[\hat{\Pi}_{\alpha_2}\hat{U}(t_2,t_1)\hat{U}(t_1,t_0)\hat{U}^\dagger(t_1,t_0)\hat{\Pi}_{\alpha_1}\hat{U}(t_1,t_0)\hat{\rho}_0\hat{U}^\dagger(t_1,t_0) \\
&\qquad \times \hat{\Pi}_{\alpha_1}\hat{U}(t_1,t_0)\hat{U}^\dagger(t_1,t_0)\hat{U}^\dagger(t_2,t_1)\Big] \\
&= \frac{1}{p(\alpha_1 t_1)}\mathrm{Tr}\Big[\hat{U}^\dagger(t_2,t_0)\hat{\Pi}_{\alpha_2}\hat{U}(t_2,t_0)\hat{U}^\dagger(t_1,t_0)\hat{\Pi}_{\alpha_1}\hat{U}(t_1,t_0)\hat{\rho}_0] \\
&\qquad \times \hat{U}^\dagger(t_1,t_0)\hat{\Pi}_{\alpha_1}\hat{U}(t_1,t_0)\Big] \\
&= \frac{1}{p(\alpha_1 t_1)}\mathrm{Tr}\Big[\hat{\Pi}_{\alpha_2}(t_2)\hat{\Pi}_{\alpha_1}(t_1)\hat{\rho}_0\hat{\Pi}_{\alpha_1}(t_1)\Big] \\
&= \frac{1}{p(\alpha_1 t_1)}\mathrm{Tr}\Big[\hat{\Pi}_{\alpha_2}(t_2)\hat{\Pi}_{\alpha_1}(t_1)\hat{\rho}_0\hat{\Pi}_{\alpha_1}(t_1)\hat{\Pi}_{\alpha_2}(t_2)\Big],
\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

这里我们用到了时间演化算符的幺正性及其复合规则、迹的循环性质，以及投影算符的幂等性。

概率

$$\begin{aligned}
p(\alpha_2 t_2, \alpha_1 t_1) &= p(\alpha_2 t_2|\alpha_1 t_1)p(\alpha_1 t_1) \\
&= \mathrm{Tr}\Big[\hat{\Pi}_{\alpha_2}(t_2)\hat{\Pi}_{\alpha_1}(t_1)\hat{\rho}_0\hat{\Pi}_{\alpha_1}(t_1)\hat{\Pi}_{\alpha_2}(t_2)\Big]
\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

这就是我们所说的历史的概率 $(\rho_0,\ t_0) \to (\alpha_1,\ t_1) \to (\alpha_2,\ t_2)$。严格来说，这种称呼并不准确，因为式（2.5.5）中的量不满足概率论的柯尔莫哥洛夫第三公理，即概率求和规则。例如，我们来考虑另一段历史，其中在时间

t_1，也就是说，历史 $(\rho_0,\ t_0) \to (\alpha_2,\ t_2)$。与式（2.5.2）完全类似，$\alpha_2$ 在 t_2 发生的概率现在由下式给出

$$p(\alpha_2 t_2) = \mathrm{Tr}\Big[\hat{\Pi}_{\alpha_2}(t_2)\hat{\rho}_0\Big]. \tag{2.5.6}$$

ˆ 我们可以利用恒等式 $\sum_{\alpha_1} \Pi_{\alpha_1}(t_1) = 1$ 将其写为

$$\begin{aligned} p(\alpha_2 t_2) &= \mathrm{Tr}\Big[\hat{\Pi}_{\alpha_2}(t_2)\hat{\rho}_0\hat{\Pi}_{\alpha_2}(t_2)\Big] \\ &= \mathrm{Tr}\left[\hat{\Pi}_{\alpha_2}(t_2)\sum_{\alpha_1}\hat{\Pi}_{\alpha_1}(t_1)\hat{\rho}_0\sum_{\alpha_1'}\hat{\Pi}_{\alpha_1'}(t_1)\hat{\Pi}_{\alpha_2}(t_2)\right] \\ &= \sum_{\alpha_1}\mathrm{Tr}\Big[\hat{\Pi}_{\alpha_2}(t_2)\hat{\Pi}_{\alpha_1}(t_1)\hat{\rho}_0\hat{\Pi}_{\alpha_1}(t_1)\hat{\Pi}_{\alpha_2}(t_2)\Big] \\ &\quad + \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_1' \\ \alpha_1\neq\alpha_1'}}\mathrm{Tr}\Big[\hat{\Pi}_{\alpha_2}(t_2)\hat{\Pi}_{\alpha_1}(t_1)\hat{\rho}_0\hat{\Pi}_{\alpha_1'}(t_1)\hat{\Pi}_{\alpha_2}(t_2)\Big]. \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

将这一结果与式（2.5.5）比较，我们可以得出，一般而言，

$$p(\alpha_2 t_2) \neq \sum_{\alpha_1} p(\alpha_2 t_2, \alpha_1 t_1) \tag{2.5.8}$$

由于这一项

$$\mathrm{Tr}\Big[\hat{\Pi}_{\alpha_2}(t_2)\hat{\Pi}_{\alpha_1}(t_1)\hat{\rho}_0\hat{\Pi}_{\alpha_1'}(t_1)\hat{\Pi}_{\alpha_2}(t_2)\Big], \tag{2.5.9}$$

该项通常不为零，代表不同量子力学历史之间的干涉。这是量子力学的一个关键特征，即存在阻碍我们为量子历史赋予概率的干涉项。不过，对于某些应用，我们可以尝试找出彼此间干涉可忽略不计的历史集合，因此可以为这些集合赋予概率。我们可以通过研究式（2.5.9）中的量来找到这些集合。

2.5.2 退相干泛函

对于一对历史 $[\alpha]$、$[\beta]$，其中 $[\alpha]$ 表示在时间 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 发生的一系列事件 α_1、α_2..... 和 α_n，$[\beta]$ 也类似，我们将**退相干泛函** 定义为

$$\mathcal{D}[\alpha,\beta] = \mathrm{Tr}\Big[\hat{\Pi}_{\alpha_n}(t_n)\ldots\hat{\Pi}_{\alpha_1}(t_1)\hat{\rho}_0\hat{\Pi}_{\beta_1}(t_1)\ldots\hat{\Pi}_{\beta_n}(t_n)\Big], \tag{2.5.10}$$

其中

$$\hat{\Pi}_{\alpha_k}(t_k) = \hat{U}^\dagger(t_k, t_0)\hat{\Pi}_{\alpha_k}\hat{U}(t_k, t_0). \tag{2.5.11}$$

退相干泛函也可以写成更为紧凑的形式 [39]

$$\mathcal{D}[\alpha, \beta] = \mathrm{Tr}\left\{\tilde{\mathrm{T}}\left[\prod_{j=1}^{n}\hat{\Pi}_{\beta_j}(t_j)\right]\mathrm{T}\left[\prod_{i=1}^{n}\hat{\Pi}_{\alpha_i}(t_i)\right]\hat{\rho}_0\right\}. \tag{2.5.12}$$

于是不难证明，该泛函满足以下性质：

i) $\mathcal{D}[\alpha, \beta] = \mathcal{D}^*[\beta, \alpha]$,

ii) $\sum_{[\alpha],[\beta]}\mathcal{D}[\alpha, \beta] = 1$,

iii) $\mathcal{D}[\alpha, \alpha] \geq 0$,

iv) $\sum_{[\alpha]}\mathcal{D}[\alpha, \alpha] = 1$,

其中我们记$\sum_{[\alpha]} \equiv \sum_{\alpha_1}\sum_{\alpha_2}\cdots\sum_{\alpha_n}$。

最后两个性质表明，我们应将对角元 $\mathcal{D}[\alpha, \alpha]$视为历史$(\rho_0, t_0) \to (\alpha_1, t_1) \to \cdots \to (\alpha_n, t_n)$的概率，即$p(\alpha) = \mathcal{D}[\alpha, \alpha]$。然而，这并不满足概率求和规则，并且一般而言，我们有 [124]

$$\begin{aligned} p(\alpha \vee \beta) &= \mathcal{D}[\alpha, \alpha] + \mathcal{D}[\beta, \beta] + 2\mathrm{Re}\mathcal{D}[\alpha, \beta] \\ &= p(\alpha) + p(\beta) + 2\mathrm{Re}\mathcal{D}[\alpha, \beta]. \end{aligned} \tag{2.5.13}$$

如前所述，这种违背使我们无法理解量子力学中的轨迹概念。另一方面，当存在强退相干 $\mathcal{D}[\alpha, \beta] = 0$时，这一概念便获得了意义。于是，可将历史的量子力学的基本公式写为

$$\mathrm{Re}\{\mathcal{D}[\alpha, \beta]\} = p(\alpha)\delta_{\alpha_1,\beta_1}\ldots\delta_{\alpha_n,\beta_n}. \tag{2.5.14}$$

这个方程表达了为单个历史赋予概率的必要且充分条件；同时，它也告诉我们这些概率是多少。对于形式体系的大多数应用，只要声称一对互斥历史在以下条件成立时是一致的，通常就足够了：

$$\mathrm{Re}\{\mathcal{D}[\alpha, \beta]\} \ll \mathcal{D}[\alpha, \alpha],\ \mathcal{D}[\beta, \beta] \quad \text{for} \quad \alpha \neq \beta. \tag{2.5.15}$$

从现在起，我们考虑位置基中的投影。这是一种在路径积分形式中自然实现的历史。投影算符$\hat{}$由窗函数表示 $\Pi_{\alpha_k}(t_k) \rightarrow w_\alpha[x(t_k)]$, 例如，当 t_k 满足历史 α 的要求时，窗函数可以取值为 1，否则取值为 0 [39, 119]。于是，公式（2.5.12）可以写成

$$\mathcal{D}[\alpha,\beta] = \int \mathrm{d}y(0)\mathrm{d}y'(0) \times \int \mathcal{D}y\mathcal{D}y'\, e^{i(S[y]-S[y'])}\rho(y(0),y'(0),0)\left\{\prod_i w_\alpha[y(t_i)]\right\}\left\{\prod_j w_\beta[y'(t_j)]\right\}. \tag{2.5.16}$$

这里， S 是由通用坐标 y描述的总系统的作用量。现在让我们研究开放量子系统的退相干泛函，以确定在什么条件下，才能实际观测到由朗之万方程产生的准经典轨迹。

2.5.3 开放量子系统的一致历史

让我们考虑前几节讨论过的线性耦合模型中的开放量子系统。为便于说明，我们还假设感兴趣的系统是一个谐振子。在这种情况下，我们关注这样的历史：系统变量 $x(t)$沿着轨迹 $\chi(t)$演化；该轨迹是通过以给定精度 $\sigma_\chi(t)$求解朗之万方程得到的。现在令窗函数为高斯函数，以便进行如下替换 [39, 119]

$$\rho_S(x(0),x'(0),0)\left\{\prod_i w_\alpha[x(t_i)]\right\}\left\{\prod_j w_\beta[x'(t_j)]\right\} \rightarrow \rightarrow \exp\left\{-\int \mathrm{d}t \frac{1}{2\sigma_\chi^2(t)}\left[(x-\chi)^2+(x'-\chi')^2\right]\right\} \tag{2.5.17}$$

由轨迹表示的两条历史的退相干泛函 $\chi(t)$ 和$\chi'(t)$中的环境变量积分，按照第 2.2节所述的方法进行，得到

$$\mathcal{D}[\chi,\chi'] = \int \mathcal{D}x\mathcal{D}x' \exp\left\{\int \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\left[u(t)iL(t,t')X(t') - \frac{1}{2}u(t)N(t,t')u(t')\right] - \int \mathrm{d}t \frac{1}{2\sigma_\chi^2(t)}\left[(x-\chi)^2+(x'-\chi')^2\right]\right\}, \tag{2.5.18}$$

其中定义了 [119]

$$L(t,t') \equiv -M\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\Omega^2\right)\delta(t-t')+D(t,t'). \tag{2.5.19}$$

此外，回想一下 $X(t)=[x(t)+x'(t)]/2$ 和 $u(t)=x(t)-x'(t)$。

现在定义 $Y(t)=[\chi(t)+\chi'(t)]/2$ 和 $v(t)=\chi(t)-\chi'(t)$，并对路径积分变量 $(x,\ x')\to(X,\ u)$ 作变换，使得退相干泛函可以写成

$$\begin{aligned}\mathcal{D}[\chi,\chi'] = \exp&\left\{-\int \mathrm{d}t \frac{1}{2\sigma_\chi^2(t)}\left[2Y^2(t)+\frac{1}{2}v^2(t)\right]\right\}\\ &\times\int \mathcal{D}X\mathcal{D}u\ \exp\left[-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}t' \begin{pmatrix}X(t) & u(t)\end{pmatrix}\mathbb{M}(t,t')\begin{pmatrix}X(t')\\ u(t')\end{pmatrix}\right]\\ &\times\exp\left\{\int \mathrm{d}t\,[\mathbb{J}(t)]^T\begin{pmatrix}X(t)\\ u(t)\end{pmatrix}\right\},\end{aligned} \tag{2.5.20}$$

其中我们定义

$$\mathbb{M}(t,t') = \begin{pmatrix}\frac{2}{\sigma_\chi^2(t)}\delta(t-t') & -iL(t,t')\\ -iL(t,t') & \tilde{N}(t,t')\end{pmatrix}, \tag{2.5.21a}$$

其中 $\tilde{N}(t,\ t')=N(t,\ t')+[2\sigma_\chi^2(t)]^{-1}\delta(t-t')$，并且

$$\mathbb{J}(t) = \frac{1}{2\sigma_\chi^2(t)}\begin{pmatrix}4Y(t)\\ v(t)\end{pmatrix}. \tag{2.5.21b}$$

方程（2.5.20）中的高斯路径积分是场论中的传统积分，其众所周知的结果为 [65]

$$\begin{aligned}\mathcal{D}[\chi,\chi'] \propto \exp&\left\{-\int \mathrm{d}t \frac{1}{2\sigma_\chi^2(t)}\left[2Y^2(t)+\frac{1}{2}v^2(t)\right]\right\}\\ &\times\exp\left[\frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\,[\mathbb{J}(t)]^T\mathbb{M}^{-1}(t,t')\mathbb{J}(t)\right].\end{aligned} \tag{2.5.22}$$

明确地说，我们有

$$\mathbb{M}^{-1}(t,t') = [\det\mathbb{M}(t,t')]^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{N}(t,t') & iL(t,t')\\ iL(t,t') & \frac{2}{\sigma_\chi^2(t)}\delta(t-t')\end{pmatrix} \tag{2.5.23}$$

其行列式为 $\mathbb{M}(t,t') = \frac{2}{\sigma_\chi^2(t)}\delta(t-t')\,\tilde{N}(t,t') + L^2(t,t')$。于是我们可以写成

$$\begin{aligned}\mathcal{D}[\chi,\chi'] \propto \exp\Bigg\{ &-\int \mathrm{d}t\mathrm{d}t' \,\frac{Y(t)}{\sigma_\chi^2(t)}\left[\delta(t-t') - \frac{2}{\sigma_\chi^2(t')}[\det \mathbb{M}(t,t')]^{-1}\tilde{N}(t,t')\right]Y(t') \\ &+ \int \mathrm{d}t\mathrm{d}t' \frac{Y(t)}{\sigma_\chi^2(t)\sigma_\chi^2(t')}[\det \mathbb{M}(t,t')]^{-1} iL(t,t')v(t') \\ &- \int \mathrm{d}t \frac{v(t)}{4\sigma_\chi^2(t)}\left[1 - \frac{1}{\sigma_\chi^4(t)}[\det \mathbb{M}(t,t)]^{-1}\right]v(t)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.5.24}$$

为简便起见，我们假设（耗散）动力学远小于噪声，$L(t,\ t') \ll N(t,\ t')$ [39], 使得

$$\begin{aligned}\mathcal{D}[\chi,\chi'] \sim \exp\Bigg\{ &-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}t \left[N(t) + \left(2\sigma_\chi^2(t)\right)^{-1}\right]^{-1}[L(t)Y(t)]^2 \\ &+ \int \mathrm{d}t \,\frac{i}{2\sigma_\chi^2(t)}Y(t)\left[N(t) + \left(2\sigma_\chi^2(t)\right)^{-1}\right]^{-1}L(t)v(t) \\ &-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\, N(t)\left[2\sigma_\chi^2(t)N(t)+1\right]^{-1}v^2(t)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.5.25}$$

历史 χ 的概率可通过在方程（2.5.25）中令 $v=0$

$$\mathcal{D}[\chi,\chi] \sim \exp\left\{-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}t \left[N(t) + \left(2\sigma_\chi^2(t)\right)^{-1}\right]^{-1}[L(t)\chi(t)]^2\right\}. \tag{2.5.26}$$

因此，概率最高的是满足运动方程（不含噪声）的那些轨迹，$L\chi = 0$；而偏离确定性的程度则由因子 $N + \left(2\sigma_\chi^2\right)^{-1}$ 衡量。

两段历史之间的一致性 χ 与 χ' 由方程（2.5.25在 v增大时的行为决定。特别是，当 $v^2 \geq 2\sigma_\chi^2 + N^{-1}$时，两段历史近似一致。现在，如果噪声较弱，$N^{-1} \gg \sigma_\chi^2$，那么 $v \gtrsim N^{-1} \gg \sigma_\chi^2$，这意味着精度为 $\sim \sigma_\chi$ 的历史不会退相干。另一方面，如果噪声很强，$N^{-1} \ll \sigma_\chi^2$，那么 $v \gtrsim \sigma_\chi$，这意味着任何可通过探测其精度加以考察的历史都是一致的。因此，朗之万方程的解所表示的轨迹确实描述了物理现实。当然，强噪声会降低可预测性；我们可以这样理解两者之间的平衡：只有当我们选择以$\sigma_\chi^2 \sim N^{-1}$ [39, 119]所给定的精度追踪这些路径时，朗之万轨迹才呈现出这种“物理现实”特征。

第3章

引力退相干

我们在第2 章中看到，退相干与量子到经典的转变相关，这可以解释为什么人们通常不会观测到处于量子叠加态的宏观系统。退相干是由与环境的相互作用引起的，例如光子、尘埃粒子，有时甚至是系统自身的内部自由度。如果这一过程直接或间接地与引力相互作用有关，我们就称之为**引力退相干**。

正如我们在第1章中所讨论的，引力是已知四种相互作用中最弱的一种，而且通常其他退相干源都远强于引力退相干源。这给观测引力量子叠加态中的效应带来了一个直接挑战：必须抑制所有其他相互竞争的退相干过程（参见文献 [125] ，其中提出了一种引力退相干普适性检验方案）。从理论角度来看，人们感兴趣的是引力具有普适性，因此无法屏蔽。

引力退相干是一个广义术语，涵盖量子系统中任何相干性的丧失，无论这是由与（经典或量子）引力场的耦合直接造成的，还是以某种方式与引力效应有关（综述见参考文献 [31, 32] ）。例如，它可以指坍缩模型：在这类模型中，波函数坍缩被视为由引力引起的物理过程。与经典物理学不同，量子力学似乎赋予测量过程一种特殊地位，而动力学薛定谔方程并未描述这些过程。坍缩模型是对量子力学的修正，通常会在薛定谔方程中引入随机项，以解释测量公设，或有时所说的波函数坍缩。这种观点认为，坍缩确实是一种物理过程。由于此类过程被认为具有普适性，且在宏观系统中更为显著，一些作者提出，引力是波函数坍缩的幕后原因，因为引力同样具有普适性，且其作用随量子系统的质量而增强 [126–133]。最近，有人提出了另一种观点，认为量子力学与经典力学属于不同的适用范围，二者都源自某种尚未知晓的物理学，而这种物理学存在于

普朗克尺度（与经典物理学从其量子对应物中涌现这一观点相反），并提出一种引力自退相干模型，用以描述量子系统接近海森堡切割时发生的退相干 $M_{\mathrm{C}} \sim M_{\mathrm{P}}$，同时保持 $m \ll M_{\mathrm{C}}$ [134] 所对应的微观系统的相干性。

在本研究中，我们考察一种不同类型的引力退相干。我们认为，据我们所知，原则上，量子描述适用于自然界中的所有系统，包括引力动力学自由度。我们在弱引力场的范围内开展研究，因此其量子描述属于第1章所述的微扰量子引力框架。我们将研究时空量子涨落导致的量子非相对论系统的退相干（当然，也可以研究随机经典时空涨落引起的退相干；参见文献 [135–141]）。

本章并非旨在全面综述引力退相干领域的文献，也不打算完整介绍该领域中选定的研究成果。在第3.1 节中，我们概述 Blencowe [33], 以及 Anastopoulos 和 Hu [34],的研究发现：他们推导出了一个马尔可夫主方程，用以描述弱量子引力场引起的非相对论系统退相干。在第3.2 节中，我们介绍 Kanno 等人 [30] 采用的另一种方法，该方法利用 Feynman-Vernon 影响泛函描述引力子引起的空间局域化。最后，在第3.3 节中，我们介绍 Pikovski 等人提出的另一种引力退相干机制 [35, 36]。在这种机制中，经典静态引力势导致时间膨胀，进而使量子系统的质心坐标与其内部自由度发生耦合，从而产生退相干。这不同于时空涨落导致的退相干，但将为我们在本学位论文第二部分研究的复合粒子引力退相干问题提供启发。II 。

3.1 引力退相干主方程

我们通过概述 Blencowe [33], 的方法，并提及 Anastopoulos 和 Hu [34]的等效研究结果，来引入引力退相干这一主题。

Blencowe [33] 将量子物质视为由有质量标量场描述$\varphi(x)$，其质量参数为 m。度规场按式（1.3.8）展开，即作者考虑弱场极限，其中动力学自由度为闵可夫斯基时空的微扰，$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa_{\mathrm{g}} h_{\mu\nu}$。总作用量为

随后由下式给出

$$S[\varphi, h_{\mu\nu}] = S_{\mathcal{S}}[\varphi] + S_{\mathcal{E}}[h_{\mu\nu}] + S_{\mathcal{I}}[\varphi, h_{\mu\nu}], \tag{3.1.1}$$

其中 $S_{\mathcal{S}}[\varphi]$ 是自由克莱因–戈尔登作用量，

$$S_{\mathcal{S}}[\varphi] = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x \big(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + m^2\varphi^2\big), \tag{3.1.2}$$

$S_{\mathcal{E}}[h_{\mu\nu}]$是线性化爱因斯坦–希尔伯特作用量，式（1.3.10），而标量场与张量场之间的相互作用由下式描述：[1]

$$S_{\mathcal{I}}[\varphi, h_{\mu\nu}] = \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\kappa_{\mathrm{g}}}{2}T^{\mu\nu}(\varphi)h_{\mu\nu} + \frac{\kappa_{\mathrm{g}}^2}{4}U^{\mu\nu\rho\sigma}(\varphi)h_{\mu\nu}h_{\rho\sigma}\right], \tag{3.1.3}$$

with

$$T_{\mu\nu}(\varphi) = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\rho\varphi\partial^\rho\varphi - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}m^2\varphi^2 \tag{3.1.4a}$$

其中，T 为标量场能动张量，且 [142]

$$\begin{aligned} U^{\rho\sigma\mu\nu}(\varphi) = &-2\eta^{\sigma\mu}\partial^\rho\varphi\partial^\nu\varphi + \eta^{\rho\sigma}\partial^\mu\varphi\partial^\nu\varphi \\ &+ \left(\frac{1}{2}\eta^{\rho\mu}\eta^{\sigma\nu} - \frac{1}{4}\eta^{\rho\sigma}\eta^{\mu\nu}\right)\big(\partial^\lambda\varphi\partial_\lambda\varphi + m^2\varphi^2\big). \end{aligned} \tag{3.1.4b}$$

随后，作者采用闭合时间路径积分方法对标量场和度规扰动进行量子化，同时对引力变量积分，从而将引力子视为环境。与通常做法一样，假定初态可分离，$\hat{}\rho(0) = \hat{}\rho_{\mathcal{S}}(0)\otimes\hat{}\rho_{\mathcal{E}}(0)$；而引力子被认为初始处于温度为 T_{g} 的热态（本节末尾附近将讨论这一参数的解释）。结果是，约化密度矩阵 $\rho_{\mathcal{S}}[\varphi, \varphi', t]$ 的时间演化可用影响泛函表示，这与[2] 式（2.2.14）完全类似。随后，通过将影响作用量按 κ_{g} 展开至最低阶，并在线性化爱因斯坦–希尔伯特作用量中引入洛伦兹规范固定项，Blencowe 得到了标量场的玻恩近似主方程：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t) = &-i\Big[\hat{H}_{\mathcal{S}}, \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)\Big] \\ &- \int_0^t \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3r' \Big\{N(\tau, \mathbf{r}-\mathbf{r}')\Big(2\Big[\hat{T}_{\mu\nu}(\mathbf{r}), \Big[\hat{T}^{\mu\nu}(-\tau, \mathbf{r}'), \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)\Big]\Big] \\ &- \Big[\hat{T}_\mu{}^\mu(\mathbf{r}), \Big[\hat{T}_\nu{}^\nu(-\tau, \mathbf{r}'), \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)\Big]\Big]\Big) \end{aligned}$$

[1]请注意，作者在相互作用项中也采用了度规展开的二阶项。[2]参见文献 [39]，其中介绍了应用于量子场的影响泛函方法。

$$- iD(\tau, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \left(2\left[\hat{T}_{\mu\nu}(\mathbf{r}), \left\{ \hat{T}^{\mu\nu}(-\tau, \mathbf{r}'), \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t) \right\} \right] \right.$$
$$\left. - \left[\hat{T}_{\mu}{}^{\mu}(\mathbf{r}), \left\{ \hat{T}_{\nu}{}^{\nu}(-\tau, \mathbf{r}'), \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t) \right\} \right] \right) \Big\} . \tag{3.1.5}$$

ˆ其中 $H_{\mathcal{S}}$ 是自由标量场哈密顿量，且

$$D(t, \mathbf{r}) = \left(\frac{\kappa_{\mathrm{g}}}{4} \right)^2 \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \sin(\omega_k t) \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\omega_k}, \tag{3.1.6a}$$

$$N(t, \mathbf{r}) = \left(\frac{\kappa_{\mathrm{g}}}{4} \right)^2 \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \cos(\omega_k t)[1 + 2n(\omega_k)] \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\omega_k}, \tag{3.1.6b}$$

它们是耗散核和噪声核，其中 $\omega_k = |\mathbf{k}|$ ，而 $n(\omega_k)$ 是温度为 T_{g} 时的玻色-爱因斯坦分布。

对于该系统，Blencowe 接着考虑了一类特定的相干态，它们将静止物质对象建模为高斯物质“球” [33]。随后，在主要贡献来自 $T_{00} \simeq m^2\varphi^2/2$的非相对论极限下，并在马尔可夫近似和高温极限内，作者得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\mathcal{S}}[\varphi, \varphi', t] = -\frac{T_{\mathrm{g}}}{2\pi} \left(\frac{\kappa_{\mathrm{g}}}{4} \right)^2 \left\{ \int \mathrm{d}^3 r \left[\frac{1}{2} m^2 \varphi^2(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} m^2 \varphi'^2(\mathbf{r}) \right] \right\}^2 \rho_{\mathcal{S}}[\varphi, \varphi', t] + \ldots , \tag{3.1.7}$$

这里我们只明确写出了与退相干相关的项。对于能量为 E_1 和 E_2的两个物质“球”态，这个马尔可夫主方程描述了密度矩阵非对角元的衰减，其退相干时间为

$$t_{\mathrm{dec}} = \frac{\hbar}{k_B T_{\mathrm{g}}} \left(\frac{E_{\mathrm{P}}}{\Delta E} \right)^2 , \tag{3.1.8}$$

其中 E_{P} 是普朗克能量， $\Delta E = E_1 - E_2$ ，并且我们恢复了普适常数。

Blencowe [33] 认为，这一结果“足够基础”，因此可以预期它适用于比标量场模型更一般的情况。事实上，例如，文献 [143, 144]，曾利用这一结果约束量子时空引起的（超相对论）中微子实验中的振荡阻尼。

由式（3.1.8可知，对于 $\Delta E \ll E_{\mathrm{P}}$ 的叠加态，不会发生退相干。此外，引力退相干发生在能量基中，这意味着状态 $|\mathbf{r}_1\rangle$ 和 $|\mathbf{r}_2\rangle$ 的空间叠加例如在能量相同的情况下不会发生退相干。

通过采取略有不同的路径，Anastopoulos 和 Hu [34] 得出了相同的结论。作者还将系统建模为有质量标量场，它通过总作用量的 $3+1$ 分解与引力子热浴相互作用

。得到主方程后，作者将分析限定在单粒子希尔伯特子空间，并取非相对论极限，从而得到（在 Born-Markov近似和高温极限下）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t) = -\frac{i}{2m_R}\Big[\hat{P}^2, \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)\Big] - \frac{4\pi T_{\mathrm{g}}}{9m_R^2}\Big[\hat{P}^2, \Big[\hat{P}^2, \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)\Big]\Big], \tag{3.1.9}$$

对于一维空间中的运动。这里， m_R 是系统的重整化质量， P是单粒子动量算符。

如果初态是两个分别局域于 p_1 和 p_2的状态的量子叠加，或者等价地说，具有 v_1 和 v_2的速度，那么经过一段时间后就会发生退相干:

$$t_{\mathrm{dec}} = \frac{\hbar^2 c^5}{G k_B T_{\mathrm{g}} m_R^2 V^2 (\Delta v)^2}, \tag{3.1.10}$$

其中 $V = (v_1 + v_2)/2$ 且 $\Delta v = v_1 - v_2$。利用 $m_R^2 V^2 (\Delta v)^2 = (\Delta E)^2$,这一事实，不难看出，此退相干时间等价于 Blencowe 得到的结果 [33],式（3.1.8）。

现在，让我们转而讨论参数 T_{g}的含义；我们将其宽泛地称为引力子浴的温度。正如 Anastopoulos 和 Hu [34]指出的那样，鉴于引力子之间的相互作用极其微弱，不能假定引力子环境会在典型时间尺度内达到热化。相反，参数 T_{g} 应被视为一个唯象参数，它仅仅表征引力噪声的功率谱密度，有时也称为噪声温度。它的作用与通常热浴的温度相同，但不一定对应于任何精确的热力学定义。尽管如此，对引力退相干的观测（由参数 T_{g}表征）将为初始引力子态提供宝贵的信息；Anastopoulos 和 Hu [34] 将其称为“时空纹理”。

当然，关于引力退相干主方程的文献并不局限于我们在此讨论的研究。本节概述的研究是在非相对论极限下，采用 Born-Markov近似得到的，但也可应用于相对论性系统，例如光子 [145]。此外，作为物质系统的场也不必局限于标量场，同样可以推导出主方程 [146, 147]。再者，尽管本节没有讨论主方程中的重整化问题，但有文献探讨了推导过程中的哪一部分必须进行重整化 [148]。最后，关于适用于引力子浴任意温度的引力退相干非马尔可夫主方程，请参阅文献 [149]。

3.2 引力子诱导的空间局域化

在上一节中，我们看到引力退相干发生在能量基中。不过，我们可以分析引力子如何使一个最初处于位置态叠加中的系统发生空间退相干，前提是这些位置态具有不同的能量。这正是 Kanno 等人所进行的退相干分析。 [30]。

Kanno 等人的方法 [30] 在理念上与我们的方法更为接近，因此我们只会概述他们得出结论所涉及的一些步骤，而将细节留到本学位论文的第二部分再讨论。该方法与第3.1 节讨论的方法有两个主要区别。首先，Kanno 等人 [30] 从一开始就将量子系统描述为非相对论点粒子。从弯曲时空中自由粒子的作用量出发，通过引入相对于另一试探粒子测地线的费米正规坐标，并采用闵可夫斯基背景附近常用的度规展开，便可得到与引力子的相互作用。只要入射引力辐射的波长不小于某个特征间距，这种坐标系就适用，因此我们需要引入能量截断 Λ （我们将在第4章对此作更清楚的说明）。其次，无需推导主方程，即可直接从影响泛函得到退相干率。

考虑系统只能沿两条经典上可区分的路径 $\xi^{(1)}(t)$ 和 $\xi^{(2)}(t)$ 运动，且引力子最初处于真空态的情形，Kanno 等人 [30] 得到了退相干函数[3]

$$\Gamma(t) \sim \frac{m^2\Lambda^6\Xi^2}{M_{\rm P}^2}\int_0^t \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\,\Delta\xi(t_1)\Delta\xi(t_2)F_5[\Lambda(t_1-t_2)], \tag{3.2.1}$$

其中， m 是粒子的质量， $M_{\rm P}$ 是普朗克质量， $\Xi = (\xi^{(1)}+\xi^{(2)})/2$（假设近似与时间无关），而 $\Delta\xi(t) = \xi^{(1)}(t) - \xi^{(2)}(t)$。函数 F 来自对初始引力子态的噪声核的计算，其定义为

$$F_n(x) \equiv \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x \mathrm{d}y\, y^n \cos y. \tag{3.2.2}$$

对于该叠加态的特定构型，Kanno 等人 [30] （另见参考文献 [150]）取

$$\Delta\xi(t') = \begin{cases} 2vt' & \text{for } 0 < t' \le t/2 \\ 2v(t-t') & \text{for } t/2 < t' < t \end{cases}, \tag{3.2.3}$$

[3]作者采用自然单位制，其中 $\hbar = c = 1$，但 G 保持显式。

取某个恒定速度 v。由此可得

$$\Gamma(t) \sim \frac{m^2 v^2}{M_{\mathrm{P}}^2} f_{\mathrm{v}}^{(I)}(\Lambda t), \tag{3.2.4}$$

其中[4]

$$f_{\mathrm{v}}^{(I)}(x) = 1 + \frac{2}{3x}\left[\sin x - 8\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right] + \frac{1}{x^2}\left[\frac{2}{3}\cos x - \frac{32}{3}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 10\right]. \tag{3.2.5}$$

注意，$f_{\mathrm{v}}^{(I)}(x) \sim O(1)$，因此只要满足 $mv \ll M_{\mathrm{P}}$，$\Gamma(t) \ll 1$ 就成立；在这种情况下不会发生退相干。密度矩阵非对角元的时间演化形式为 $e^{-\Gamma(t)}$，只有动量大于普朗克质量（约为 $M_{\mathrm{P}} \sim 10^{-8}\,\mathrm{kg}$）的系统才会发生衰减。然而，迄今为止实现空间叠加态的质量最大的量子系统，是质量约为 $m \sim 10^{-22}\,\mathrm{kg}$的分子 [151–153], ，这说明观测到这种引力退相干面临着巨大的挑战。尽管如此，正如 Kanno 等人所指出的，[30], 通过考虑其他构型以及初始压缩引力子态，可以提高退相干率。

Kanno 等人 [30] 将量子系统视为点粒子。在本学位论文的第二部分中，我们将说明，量子系统的内部自由度实际上会增强这种引力退相干机制，这源于引力的普适性。因此，我们将讨论另一种引力退相干，它是由引力时间膨胀所诱导的内部和外部变量之间的耦合导致的。

3.3 引力时间膨胀导致的退相干

与前几节讨论的研究不同，Pikovski 等人分析的引力退相干 [35, 36], 并非由时空涨落引起，即使在静态引力场中也会发生。其思路是考虑一个复合量子系统，即由一个包含动态内部自由度的点状粒子构成，并用单一的质心坐标描述。例如，具有内部振荡运动的系统（可用于计量时间）便是我们所理解的时钟模型。一般而言，复合系统由以下状态描述

$$|\Psi\rangle = |\psi_{\mathrm{ext}}\rangle \otimes |\psi_{\mathrm{int}}\rangle\,, \tag{3.3.1}$$

[4]下标和上标将在第5章中说明。

其中， $|\psi_{\text{ext}}\rangle$ 描述质心变量的量子态，而 $|\psi_{\text{int}}\rangle$描述内部自由度。

根据非相对论量子力学，在外部变量与内部变量之间不存在相互作用时，复合系统的时间演化由以下哈密顿量描述

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{ext}} \otimes \hat{I}_{\text{int}} + \hat{I}_{\text{ext}} \otimes \hat{H}_{\text{int}}, \tag{3.3.2}$$

ˆ ˆ其中， H_{ext} （H_{int}）决定外部（内部）自由度的自由演化，而 I_{ext} （I_{int}）是外部（内部）希尔伯特空间中的恒等算符。总时间演化为

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= e^{-i\hat{H}t} |\Psi\rangle \\ &= e^{-i\hat{H}_{\text{ext}}t} |\psi_{\text{ext}}\rangle \otimes e^{-i\hat{H}_{\text{int}}t} |\psi_{\text{int}}\rangle . \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

末态仍然是乘积态。

在相对论情形下（狭义相对论和广义相对论均如此），情况有所不同。现在，让我们考虑一般背景时空中的复合系统，并选取坐标 $x^\mu = (t, \mathbf{x})$，以相对于某个实验室参考系描述其世界线。系统将按照其固有时 τ演化。现在，只要其组成部分被限制在一个足够小的时空区域内，使得可以忽略沿复合粒子延展方向的度规变化，[5],总作用量将表示为

$$S = \int L_{\text{rest}} \mathrm{d}\tau, \tag{3.3.4}$$

其中 $L_{\text{rest}} = -m + \mathscr{L}$， $\mathscr{L}$ 表示描述内部自由度的拉格朗日量，并且

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}}. \tag{3.3.5}$$

请注意，引力与系统的总静能耦合，这与等效原理相符（关于复合系统引力质量的精确定义，参见文献 [154]）。

Pikovski 等人 [35, 36] 接着考虑牛顿极限，

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - 2\phi\delta_{\mu\nu}, \tag{3.3.6}$$

其中 ϕ 为静态牛顿势，同时采用 c^{-1}–展开 n.

[5] 必须满足这一条件，才能首先精确定义质心 [154]。

这使我们得以避免使用（弯曲时空中）量子场论的全部机制。到 $O(c^{-2})$为止，我们有

$$\mathrm{d}\tau \simeq \mathrm{d}t\left[1+\phi(x)-\frac{v^2}{2}\right], \tag{3.3.7}$$

其中 v 表示复合粒子在实验室参考系中的速度。方括号内的附加项导致了时间膨胀现象。在此极限下，质量为 m的复合系统的总哈密顿量为

$$\hat{H}=\hat{H}_{\text{ext}}\otimes\hat{I}_{\text{int}}+\hat{I}_{\text{ext}}\otimes\hat{H}_{\text{int}}+\left[\phi(\hat{X})-\frac{\hat{P}^2}{2m^2}\right]\otimes\hat{H}_{\text{int}}. \tag{3.3.8}$$

例如，对于自由粒子，我们有

$$\hat{H}_{\text{ext}}=m+\frac{\hat{P}^2}{2m^2}+m\phi(\hat{X}). \tag{3.3.9}$$

请注意，在这种情形下，时间演化会在内部自由度与外部自由度之间产生耦合。

如果我们关注外部变量的叠加态，例如空间叠加，那么质心坐标就是感兴趣的系统，而内部自由度则充当环境。通过对后者进行积分消去，同时假设质心静止（以忽略动量项），并采用 Born-Markov近似，Pikovski 等人 [35, 36] 得到了初始态为两个不同高度叠加态时的退相干时间 x_1 和 x_2，其表达式为

$$t_{\text{dec}}\simeq\frac{\sqrt{2}\hbar}{\Delta E}\frac{c^2}{\Delta\phi}, \tag{3.3.10}$$

其中 $\Delta E=\sqrt{\left\langle\hat{H}_{\text{int}}^2\right\rangle-\left\langle\hat{H}_{\text{int}}\right\rangle^2}$, $\Delta\phi=\phi(x_2)-\phi(x_1)$，并且我们恢复了普适常数。对于处于温度 T_{int}下热平衡的 N 个自由度，例如，三维爱因斯坦固体模型给出 $\Delta E=\sqrt{N}k_BT_{\text{int}}$，即 [36], ；退相干会随着内部自由度数量的增加以及内部温度的升高而增强。与其他称为引力退相干的模型一样，要通过实验实现这种由时间膨胀诱导的效应，面临着控制竞争性退相干源这一难题（相关讨论见参考文献 [155] ）。

Pikovski 等人提出的方法 [35, 36] 表明，即使通过间接作用，例如耦合，也能使引力在量子系统中引发退相干

其质心坐标与动态内部自由度耦合，而无须其自身表现出（经典或量子）涨落。但我们在前几节中看到，这类涨落也会导致退相干。此外，它们还能以与静态牛顿势相同的方式耦合量子复合系统的内部变量和外部变量，人们或许会想知道，这又会如何进一步导致此类系统的量子相干性丧失。这将是本学位论文第二部分的主题，同时也将探讨引力退相干对量子系统中熵产生的影响。

第二部分

引力子诱导的退相干与熵产生

第4章

与引力子环境相互作用的量子系统

让我们首先考虑一个开放量子系统，它同时与牛顿引力势和引力子浴相互作用。具体而言，这里我们假设一个由外部和内部自由度（自由度）描述的非相对论量子粒子。它可以代表一个分子，其外部自由度是其质心坐标，而内部自由度例如可以是其振动模式。我们将简单地将其称为复合粒子。本章的主要目标是得到仅描述外部自由度的约化密度矩阵表达式。为此，我们从描述复合系统与引力辐射和静态牛顿势同时相互作用的经典作用量出发，见第4.1节。然后，在第4.2节，我们继续对引力变量进行积分，并将其视为环境。最后，我们对系统的内部自由度进行积分，见第4.3 节，并得到所需的约化密度矩阵，其时间为 t。这将作为后续章节中分析退相干和熵产生的起点。

4.1 经典作用量

我们可以先写出一个与经典引力波耦合的单个复合粒子的拉格朗日量。然而，正如第 1 章所述，单个粒子不足以检验引力场的效应，因为静止的粒子在TT参考系中始终保持静止。那么，我们从写出弱引力场与一对自由下落的有质量粒子耦合时的经典作用量开始。总作用量的形式为

$$S = S_{\text{matter}} + S_{\text{EH}}, \tag{4.1.1}$$

其中，第一项描述这对自由下落的检验质量，第二项是爱因斯坦-希尔伯特作用量，它描述度规场$g_{\mu\nu}$的动力学。

4.1.1 物质作用量

将每个粒子的时空坐标分别记为 ζ^μ 和 ξ^μ，物质作用量可写为 [154]

$$S_{\text{matter}} = -M \int \mathrm{d}t \sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{\zeta}^\mu\dot{\zeta}^\nu} + \int \mathrm{d}t\, L_{\text{rest}} \sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{\xi}^\mu\dot{\xi}^\nu}, \tag{4.1.2}$$

其中 M 是第一个粒子的质量（其坐标为 ζ^μ），而 L_{rest} 表示第二个粒子的静止拉格朗日量（其坐标为 ξ^μ）。写出作用量（4.1.2）时，我们假设第一个粒子没有（动力学）内部自由度。对于第二个粒子，其静止拉格朗日量的形式为

$$L_{\text{rest}}(\varrho, \dot{\varrho}\,\bar{t}) = -m + \mathscr{L}(\varrho, \dot{\varrho}\,\bar{t}). \tag{4.1.3}$$

在此方程中，m 是第二个粒子的质量，而 $\mathscr{L}(\varrho,\ \dot{\varrho}\,\bar{t})$ 描述其内部自由度，其中坐标为 ϱ（相对于质心坐标），广义速度为 $\dot{\varrho} = \mathrm{d}\varrho/\mathrm{d}t$。我们还定义了 $\bar{t} = \mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$，其中 τ 是粒子的固有时。

现在，让我们设第一个粒子静止在坐标系的原点，$\zeta^\mu(t) = t\,\delta^\mu_0$，使坐标时间 t 可解释为它的固有时，并假设 $M \gg L_{\text{rest}}$。在这些假设下，作用量（4.1.2）中的第一项基本上没有动力学。由于我们关注的是复合粒子，从现在起我们将它简称为系统。

在上述背景下，可以将(t, ξ^i) 视为相对于较重粒子的世界线定义的费米正规坐标（参见附录A）。在这些坐标中，我们可以将度规分量写为 [公式（A.11.37）]

$$g_{00}(t,\xi^i) = -1 - R_{i0j0}(t,0)\xi^i\xi^j + O(\xi^3), \tag{4.1.4a}$$

$$g_{0i}(t,\xi^i) = -\frac{2}{3}R_{0jik}(t,0)\xi^j\xi^k + O(\xi^3), \tag{4.1.4b}$$

$$g_{ij}(t,\xi^i) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{ikjl}(t,0)\xi^k\xi^l + O(\xi^3), \tag{4.1.4c}$$

其中 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ 是黎曼曲率张量。从物理上看，采用费米正规坐标使我们能够将坐标 ξ^i 解释为并非仅仅描述任意坐标系中的单个粒子，而是测地线偏离

两个试验质量之间（图4.1）。根据附录A末尾的讨论，我们强调，只要 $\xi \ll R_0$，该度规分量的这一展开式便成立，其中 R_0 是度规发生显著变化的尺度。

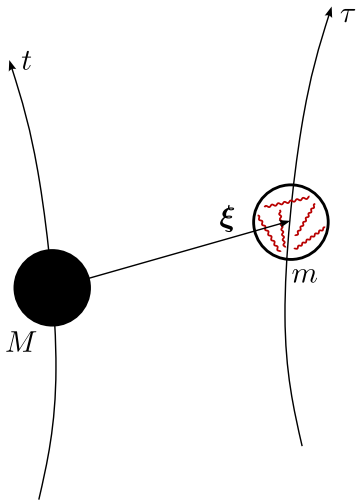


图 4.1：两个试验质量 M 和 m，其中 $M \gg m$，以及它们在费米正规坐标中的测地线偏离，用向量 $\boldsymbol{\xi}$表示。质量 m 还由内部自由度描述，以红色卷曲线表示。

在我们的参数化中，$\xi^0(t) = t$，因此得到

$$\begin{aligned}\sqrt{-g_{\mu\nu}(\xi)\dot{\xi}^\mu\dot{\xi}^\nu} &\simeq \sqrt{1 + R_{i0j0}(t,0)\xi^i\xi^j - \delta_{ij}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j} \\ &\simeq 1 - \frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j + \frac{1}{2}R_{i0j0}(t,0)\xi^i\xi^j. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

接下来，我们将度规场具体写为描述小扰动的形式 $h_{\mu\nu}$ 围绕某个背景时空 $\gamma_{\mu\nu}$，如式（1.4.1）所示，即 $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$，其中$|h_{\mu\nu}| \ll |\gamma_{\mu\nu}|$。回顾式（1.4.9，与 $g_{\mu\nu}$相关联的黎曼张量为

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}[\gamma] + 2D_{[\mu}C^\rho{}_{\nu]\sigma} + 2C^\rho{}_{\delta[\mu}C^\delta{}_{\nu]\sigma}. \tag{4.1.6}$$

其中，D_μ 是与 $\gamma_{\mu\nu}$ 相容的协变导数，其对易子定义了 $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}[\gamma]$。张量 $C^\rho{}_{\mu\nu}$ 展开至度规微扰的二阶为，

$$\begin{aligned} C^\rho{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(D_\mu g_{\nu\sigma} + D_\nu g_{\sigma\mu} - D_\sigma g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}\gamma^{\rho\sigma}(D_\mu h_{\nu\sigma} + D_\nu h_{\sigma\mu} - D_\sigma h_{\mu\nu}), \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

这可由度规相容性推出。接着，经过显式计算可得

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu}[\gamma] + \frac{1}{2}\big(R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu}[\gamma]h_{\lambda\rho} - R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}[\gamma]h_{\sigma\lambda}\big) + \frac{1}{2}(D_\mu D_\sigma h_{\rho\nu} - D_\mu D_\rho h_{\nu\sigma} - D_\nu D_\sigma h_{\rho\mu} + D_\nu D_\rho h_{\mu\sigma}), \tag{4.1.8}$$

其中 $R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\eta}R^{\eta}{}_{\sigma\mu\nu}$ 如常。系统变量与时空曲率之间的相互作用于是具有如下形式

$$\frac{1}{2}R_{i0j0}(t,0)\xi^i\xi^j = \frac{1}{2}R_{i0j0}[\gamma](t,0)\xi^i\xi^j + \frac{1}{4}\left(R^{\lambda}{}_{0i0}[\gamma]h_{\lambda j} - R^{\lambda}{}_{ij0}[\gamma]h_{0\lambda}\right)\Big|_{\xi=0}\xi^i\xi^j + \frac{1}{4}\left(D_iD_0h_{j0} + D_0D_ih_{j0} - D_iD_jh_{00} - D_0D_0h_{ij}\right)\Big|_{\xi=0}\xi^i\xi^j. \tag{4.1.9}$$

到目前为止，所有结论都适用于一般背景。最终，我们感兴趣的是考虑牛顿极限下的背景度规，此时$\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - 2\phi\delta_{\mu\nu}$，其中 $\phi(x)$ 是与时间无关的引力势。在这种情况下，正如我们在第 1 章中所见，度规扰动 $h_{\mu\nu}$ 可以选取为满足 TT 规范条件[1] (1.4.30)，由此得到

$$R_{i0j0}[\gamma](\xi) = \partial_j\partial_i\phi(\xi). \tag{4.1.10}$$

将所有内容代回式（4.1.9）可得

$$\frac{1}{2}R_{i0j0}(t,0)\xi^i\xi^j = \left[\frac{1}{2}\partial_i\partial_j\phi + \frac{1}{4}\big(\partial^k\partial_i\phi\big)h_{kj} - \frac{1}{4}D_0D_0h_{ij}\right]\Big|_{\xi=0}\xi^i\xi^j. \tag{4.1.11}$$

最后一项中的协变导数与偏导数相差克里斯托费尔符号。由于这些符号是在测地线上计算的，根据费米第二条件，它们为零 [式（A.11.18）] 最后，相互作用项可写为

$$\frac{1}{2}R_{i0j0}(t,0)\xi^i\xi^j = -\left[\frac{1}{2}\Phi_{ij} + \frac{1}{4}\Phi^k{}_ih_{kj}(t,0) + \frac{1}{4}\ddot{h}_{ij}(t,0)\right]\xi^i\xi^j, \tag{4.1.12}$$

其中我们引入了**潮汐张量** $\Phi_{ij} = -(\partial_i\partial_j\phi)\big|_{\xi=0}$ [28, 58]。具体而言，对于靠近球对称（即使只是近似球对称）牛顿源（例如地球）的两个试验质量，较轻的那个受到以下

[1]由于我们只在 TT规范下进行研究，因此不使用上标“TT”。从现在开始，度规扰动场 h_{ij} 默认满足 TT规范条件，即式（1.4.30）。

引力势的作用：

$$\phi(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{M_N}{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{R}|}, \tag{4.1.13}$$

其中 M_N 为源质量，而$\mathbf{R}$ 为径矢，指向质量 M（我们坐标系的原点）到牛顿源中心的方向，因此 $|\mathbf{R}| \simeq R_N$表示其半径（图4.2）。由式（4.1.13）可以很容易地证明，潮汐张量的形式为

$$\begin{aligned}\Phi_{ij} &= -\left(\partial_i\partial_j\phi\right)\Big|_{\xi=0} = \frac{M_N}{R^3}\left(\frac{3R_iR_j}{R^2} - \delta_{ij}\right)\\ &= \frac{M_N}{R_N^3}(3\delta_{i3}\delta_{j3} - \delta_{ij}).\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

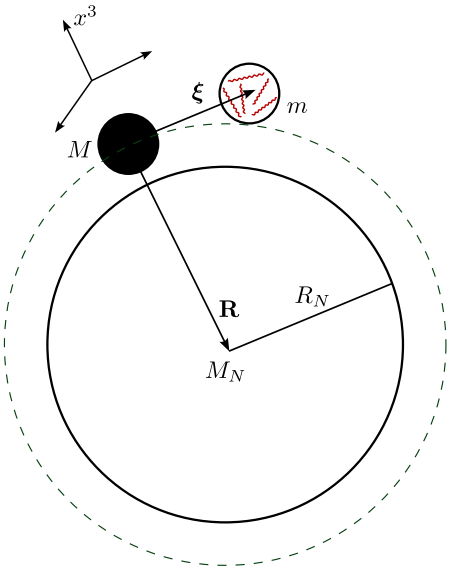


图 4.2：两个试验质量 M 和 m 位于一个体积大得多、质量也大得多的球形质量 M_N附近，该球形质量的半径为R_N，相对于质量 M位于 $\mathbf{R} \simeq R_N$^$\mathbf{e}_3$处。

注意，由式（4.1.12可知，只要满足 $\xi^2 \ll R_N^3/M_N$，且 $\xi^2 \ll \omega^{-2}$，度规在费米正规坐标中的展开就成立，其中 ω表示引力波的角频率。因此，我们需要为入射引力辐射引入一个量级为 $\Lambda \sim L_0^{-1}$的能量截断，其中L_0 是某个典型的测地线间距，有时我们也称其为“探测器尺寸”。

最后，利用方程（4.1.5）和（4.1.12），物质作用量变为

$$S_{\text{matter}} = \int \mathrm{d}t \left[\frac{1}{2}m\delta_{ij}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j + \mathscr{L}(\varrho, \dot{\varrho}\bar{t}) - \frac{1}{2}\mathscr{L}(\varrho, \dot{\varrho}\bar{t})\delta_{ij}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j\right]$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\, L_{\mathrm{rest}}(\varrho,\dot{\varrho}\bar{t})\Phi_{ij}\xi^i\xi^j \\
&-\frac{1}{4}\int \mathrm{d}t\, h_{ij}(t,0)\left\{L_{\mathrm{rest}}(\varrho,\dot{\varrho}\bar{t})\Phi^i{}_k\xi^k\xi^j+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[L_{\mathrm{rest}}(\varrho,\dot{\varrho}\bar{t})\xi^i\xi^j\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{4.1.15}
$$

这里我们略去了非动力学项，并在分部积分时舍去了边界贡献。

4.1.2 引力作用量

现在，对于引力场，我们在第 1 章看到，围绕牛顿背景展开度规，并令微扰处于 TT 规范时，度规对应的爱因斯坦-希尔伯特作用量由式（1.4.37）给出。为方便起见，我们在此重述如下：

$$
S_{\mathrm{EH}}=\frac{1}{64\pi}\int \mathrm{d}^4x\left(h_{ij}\Box h^{ij}+2\phi\, h_{ij}\delta_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu h^{ij}\right). \tag{4.1.16}
$$

请注意，引力辐射与经典牛顿势之间的相互作用为 $O(\phi h^2)$ 阶；而在式（4.1.15）中，它们同时通过 $O(\phi h)$ 阶的相互作用与系统耦合，因此在微扰理论中占主导地位。式（4.1.16）中的相互作用项导致引力子模之间发生耦合。事实上，我们在附录 B 中证明，该项在物理上与引力子散射有关，其微分截面表现为 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega \sim M_N^2\theta^{-4}$，其中 $\theta \ll 1$为散射角。由于该角度非常小，我们将忽略这一较弱的相互作用[2]，仅考虑式（$O(\phi h)$）中的贡献，见式（4.1.15）。

因此，我们认为引力子由其通常的平直时空拉格朗日量描述，

$$
S_{\mathrm{EH}}=-\frac{1}{64\pi}\int \mathrm{d}^4x\,\partial_\mu h_{ij}\partial^\mu h^{ij}, \tag{4.1.17}
$$

由此我们立即得到波动方程 $\Box h_{ij}=0$。一般解的形式为

$$
h_{ij}(t,\mathbf{x})=\int \mathrm{d}^3k\sum_{s=+,\times}\epsilon_{ij}^s(\mathbf{k})q_s(t,\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \tag{4.1.18}
$$

[2]这一相互作用项在文献 [29] 中同样被忽略，例如作者在该文献中计算了试验质量下落的量子引力修正。

其中 ϵ_{ij}^{s} 表示满足横向性和无迹条件（式（1.2.27））以及归一化条件（式（1.2.31））的偏振张量。此外， h_{ij} 的实性意味着

$$\epsilon_{ij}^{*s}(\mathbf{k})q_s^*(t,\mathbf{k}) = \epsilon_{ij}^{s}(-\mathbf{k})q_s(t,-\mathbf{k}). \tag{4.1.19}$$

将式（4.1.18）代入式（4.1.17），得到

$$\begin{aligned}
S_{\text{EH}} &= -\frac{1}{64\pi}\int \mathrm{d}^4x \int \mathrm{d}^3k\,\mathrm{d}^3k' \sum_{s,s'} \epsilon_{ij}^{s}(\mathbf{k})\epsilon_{s'}^{ij}(\mathbf{k}') \\
&\qquad \times [-\dot{q}_s(t,\mathbf{k})\dot{q}_{s'}(t,\mathbf{k}') - \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' q_s(t,\mathbf{k})q_{s'}(t,\mathbf{k}')]e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \\
&= -\frac{(2\pi)^3}{64\pi}\int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3k \sum_{s,s'} \epsilon_{ij}^{s}(\mathbf{k})\epsilon_{s'}^{ij}(-\mathbf{k}) \\
&\qquad \times \left[-\dot{q}_s(t,\mathbf{k})\dot{q}_{s'}(t,-\mathbf{k}) + \mathbf{k}^2 q_s(t,\mathbf{k})q_{s'}(t,-\mathbf{k})\right] \\
&= \frac{\pi^2}{4}\int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3k \sum_{s} \left[|\dot{q}_s(t,\mathbf{k})|^2 - \mathbf{k}^2|q_s(t,\mathbf{k})|^2\right] \\
&= \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3k \sum_{s} \frac{1}{2}\left[m_{\text{g}}|\dot{q}_s(t,\mathbf{k})|^2 - m_{\text{g}}\mathbf{k}^2|q_s(t,\mathbf{k})|^2\right],
\end{aligned} \tag{4.1.20}$$

其中，我们定义了 $m_{\text{g}} = \pi^2/2$，并使用了式（4.1.19）、归一化条件（1.2.31）以及恒等式 $\int \mathrm{d}^3x\, e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}+\mathbf{k}')$。

注意，作用量（4.1.20）具有如下形式 $S_{\text{EH}} = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3k \sum_s L_s(t,\mathbf{k})$，其中拉格朗日量为 $L_s(t,\mathbf{k})$，每个模描述一个质量为 m_{g}、频率为 $\omega = |\mathbf{k}|$的谐振子。相应的哈密顿量具有通常的形式

$$H_s(t,\mathbf{k}) = \frac{|p_s(t,\mathbf{k})|^2}{2m_{\text{g}}} + \frac{1}{2}m_{\text{g}}\mathbf{k}^2|q_s(t,\mathbf{k})|^2, \tag{4.1.21}$$

其中 $p_s(t,\mathbf{k}) = \frac{\partial L_s}{\partial \dot{q}_s(t,\mathbf{k})} = m_{\text{g}}\dot{q}_s(t,\mathbf{k})$。

4.1.3 总作用量

最后，将一般解（4.1.18）代入物质作用量（4.1.15）后，总作用量（4.1.1）取如下形式

$$S = S_{\text{sys}} + S_{\text{grav}} + S_{\text{s+g}}, \tag{4.1.22}$$

其中

$$S_{\text{sys}} = \int \mathrm{d}t \left[\frac{1}{2} m \delta_{ij} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j + \mathscr{L}(\varrho, \dot{\varrho}\bar{t}) - \frac{1}{2} \mathscr{L}(\varrho, \dot{\varrho}\bar{t}) \delta_{ij} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j - \frac{1}{2} L_{\text{rest}}(\varrho, \dot{\varrho}\bar{t}) \Phi_{ij} \xi^i \xi^j \right], \tag{4.1.23a}$$

$$S_{\text{grav}} = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3 k \sum_s \frac{1}{2} \left[m_{\text{g}} |\dot{q}_s(t, \mathbf{k})|^2 - m_{\text{g}} \mathbf{k}^2 |q_s(t, \mathbf{k})|^2 \right], \tag{4.1.23b}$$

$$S_{\text{s+g}} = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3 k \sum_s q_s(t, \mathbf{k}) X^s(t, \mathbf{k}), \tag{4.1.23c}$$

并且我们定义了

$$X^s(t, \mathbf{k}) = -\frac{1}{4} \epsilon^s_{ij}(\mathbf{k}) \left\{ L_{\text{rest}}(\varrho, \dot{\varrho}\bar{t}) \Phi^i{}_k \xi^k \xi^j + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \left[L_{\text{rest}}(\varrho, \dot{\varrho}\bar{t}) \xi^i \xi^j \right] \right\}. \tag{4.1.24}$$

作用量（4.1.22）描述了一个系统与牛顿背景中的经典引力辐射之间的相互作用，该系统由外部和内部自由度共同表征。这将作为我们描述此类系统与引力子相互作用的出发点。度规微扰场的量子化（我们在第1章中讨论过）可以通过按通常方式将场振幅提升为希尔伯特空间中的算符来实现。由于我们的最终目标是仅描述系统变量，因此应将弱量子化引力场视为环境；对于这种情况，我们将采用第2章所述的开放量子系统费曼-弗农影响泛函方法。事实上，从总作用量（4.1.22）可以预见，这与量子布朗运动颇为相似。

4.2 引力影响泛函

现在让我们将系统和引力自由度都量子化。假设在初始时间 $t = 0$，系统与引力子彼此不相关，且总密度矩阵可写为

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_{\text{sys}}(0) \otimes \hat{\rho}_{\text{grav}}(0), \tag{4.2.1}$$

其中，$\hat{}\rho_{\text{sys}}(t)$（$\hat{}\rho_{\text{grav}}(t)$）表示用于计算局域系统（引力）可观测量的约化密度矩阵。该矩阵通过对总密度矩阵分别关于引力（系统）变量取偏迹得到。

对于 $t > 0$，系统与引力场相互作用，通常总态会变得纠缠。由于我们不关心引力子的末态，因此必须对引力变量进行积分，使系统变得

实际上是开放的，而弱量子引力场则被视为环境。此描述通过使用费曼-弗农影响泛函（第 2 章）来实现，其形式为

$$\mathcal{F}[X, X'] = e^{iS_{\mathrm{IF}}[X,X',t]}, \tag{4.2.2}$$

其中 S_{IF} 是影响作用量， X 和 X' 表示系统变量的两条不同历史。借助影响泛函，系统约化密度矩阵的时间演化由下式给出

$$\rho_{\mathrm{sys}}(X, X', t) = \int \mathrm{d}X_0 \mathrm{d}X_0' \, \mathcal{J}_{\mathrm{sys}}(X, X', t|X_0, X_0', 0)\rho_{\mathrm{sys}}(X_0, X_0', 0), \tag{4.2.3}$$

其中$\rho_{\mathrm{sys}}(X, X', t) = \langle X|\hat{\rho}_{\mathrm{sys}}(t)|X'\rangle$，约化密度矩阵的演化算符为

$$\mathcal{J}_{\mathrm{sys}}(X, X', t|X_0, X_0', 0) \equiv \int_{\substack{X(0)=X_0 \\ X'(0)=X_0'}}^{\substack{X(t)=X \\ X'(t)=X'}} \mathcal{D}X\mathcal{D}X' \, e^{i(S_{\mathrm{sys}}[X]-S_{\mathrm{sys}}[X'])}\mathcal{F}[X, X'], \tag{4.2.4}$$

with

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[X, X'] = &\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\mathrm{d}q_0\mathrm{d}q_0' \, \rho_{\mathrm{grav}}(q_0, q_0', 0) \\ &\times \int_{\substack{q(0)=q_0 \\ q'(0)=q_0'}}^{q(t)=q'(t)=q} \mathcal{D}q\mathcal{D}q' \, e^{i\left(S_{\mathrm{grav}}[q]+S_{\mathrm{s+g}}[X,q]-S_{\mathrm{grav}}[q']-S_{\mathrm{s+g}}[X',q']\right)},\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

其中 q 和 q' 表示引力环境变量的两条不同历史。

影响作用量编码了环境对系统的全部影响。在我们的情形中，系统与无限多个引力子模相耦合。由于每个模（及偏振）都独立于所有其他模，它们可以分别处理，从而使总影响作用量等于对应于每个模的作用量之和[3]（及偏振）。这是因为，对于与统计独立且动力学独立的环境耦合的系统，总影响泛函只是各个单独影响泛函的乘积 [式（2.2.20）]。此外，我们注意到环境作用量（爱因斯坦-希尔伯特作用量）对场振幅是二次的，而与系统变量 X^s（t，$\mathbf{k}$）是线性的。

[3]请注意，如果我们在引力子作用量中保留了散射项，这一点将不再成立。

这因此是线性耦合模型的一个特例，该模型在第2.2.3节中有详尽描述，其路径积分可以解析计算。将该节的结果用式（4.1.22）所描述的变量来转写，便得到影响作用量

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{IF}}[X,X'] = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}t' \sum_s \int \mathrm{d}^3k \left[X^s(t,\mathbf{k}) - X'^s(t,\mathbf{k})\right] d_s(t,t',\mathbf{k}) \\ \times \left[X^s(t',\mathbf{k}) + X'^s(t',\mathbf{k})\right] \\ + \frac{i}{2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}t' \sum_s \int \mathrm{d}^3k \left[X^s(t,\mathbf{k}) - X'^s(t,\mathbf{k})\right] n_s(t,t',\mathbf{k}) \\ \times \left[X^s(t',\mathbf{k}) - X'^s(t',\mathbf{k})\right], \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

其中

$$d_s(t,t',\mathbf{k}) = i\left\langle [\hat{q}_s(t,\mathbf{k}), \hat{q}_s(t',\mathbf{k})]\right\rangle_{\mathrm{g}} \theta(t-t') \tag{4.2.7a}$$

$$n_s(t,t',\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\left\langle \{\hat{q}_s(t,\mathbf{k}), \hat{q}_s(t',\mathbf{k})\}\right\rangle_{\mathrm{g}} \tag{4.2.7b}$$

是耗散和噪声核。在方程（4.2.7）中，$\hat{}q$表示海森堡绘景中的位置算符，而 $\theta(x)$ 是赫维赛德阶跃函数。带下标“g”的期望值是相对于引力子的初态计算的。

影响作用量（4.2.6）中的两项都具有如下的一般形式

$$\begin{aligned} I(t,t') = \int \mathrm{d}t\mathrm{d}t' \sum_s \int \mathrm{d}^3k \left[X^s(t,\mathbf{k}) - X'^s(t,\mathbf{k})\right] j_s(t,t',\mathbf{k}) \\ \times \left[X^s(t',\mathbf{k}) \pm X'^s(t',\mathbf{k})\right], \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

其中 $j_s(t,\ t',\ \mathbf{k})$ 表示某个核（耗散核或噪声核），而 $X^s(t,\ \mathbf{k})$ 定义见方程（4.1.24）。经过一些代数运算，对时间变量分部积分并舍去牛顿势的二阶项后，可将其改写为

$$I(t,t') = \int \mathrm{d}t\mathrm{d}t' \left[x_{ij}(t) - x'_{ij}(t)\right] J^{ijkl}(t,t')[x_{kl}(t') \pm x'_{kl}(t')], \tag{4.2.9}$$

其中

$$x_{ij}(t) = L_{\mathrm{rest}}(\varrho, \dot{\varrho}\bar{t})\xi_i(t)\xi_j(t) \tag{4.2.10}$$

and

$$J_{ijkl}(t,t') = \frac{1}{16}\sum_s \int \mathrm{d}^3k \left[\epsilon_{ij}(\mathbf{k})\epsilon_{kl}(\mathbf{k})\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t'^2} j_s(t,t',\mathbf{k})\right.$$

$$+\epsilon_{ij}(\mathbf{k})\epsilon_{nl}(\mathbf{k})\Phi^{n}{}_{k}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}j_s(t,t',\mathbf{k})+\epsilon_{nj}(\mathbf{k})\epsilon_{kl}(\mathbf{k})\Phi^{n}{}_{i}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t'^2}j_s(t,t',\mathbf{k})\Big]. \tag{4.2.11}$$

然后，将所有内容合并后，我们得到影响作用量为

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{IF}}[x,x']=\int \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\Big\{&\frac{1}{2}\big[x_{ij}(t)-x'_{ij}(t)\big]D_{\mathrm{g}}^{ijkl}(t,t')[x_{kl}(t')+x'_{kl}(t')]\\&+\frac{i}{2}\big[x_{ij}(t)-x'_{ij}(t)\big]N_{\mathrm{g}}^{ijkl}(t,t')[x_{kl}(t')-x'_{kl}(t')]\Big\},\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

其中我们定义了引力耗散和噪声核，

$$\begin{aligned}D_{\mathrm{g}}^{ijkl}(t,t')=\frac{1}{16}\sum_s\int \mathrm{d}^3k\,\Big[&\epsilon^{ij}(\mathbf{k})\epsilon^{kl}(\mathbf{k})\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t'^2}d_s(t,t',\mathbf{k})\\&+\epsilon^{ij}(\mathbf{k})\epsilon^{nl}(\mathbf{k})\Phi_n{}^{k}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}d_s(t,t',\mathbf{k})+\epsilon^{nj}(\mathbf{k})\epsilon^{kl}(\mathbf{k})\Phi_n{}^{i}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t'^2}d_s(t,t',\mathbf{k})\Big],\end{aligned} \tag{4.2.13a}$$

$$\begin{aligned}N_{\mathrm{g}}^{ijkl}(t,t')=\frac{1}{16}\sum_s\int \mathrm{d}^3k\,\Big[&\epsilon^{ij}(\mathbf{k})\epsilon^{kl}(\mathbf{k})\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t'^2}n_s(t,t',\mathbf{k})\\&+\epsilon^{ij}(\mathbf{k})\epsilon^{nl}(\mathbf{k})\Phi_n{}^{k}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}n_s(t,t',\mathbf{k})+\epsilon^{nj}(\mathbf{k})\epsilon^{kl}(\mathbf{k})\Phi_n{}^{i}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t'^2}n_s(t,t',\mathbf{k})\Big],\end{aligned} \tag{4.2.13b}$$

其中 $d_s(t,\ t',\ \mathbf{k})$ 和 $n_s(t,\ t',\ \mathbf{k})$ 定义见方程（4.2.7）。

现在，以与我们在第2.4节中相同的方式，将噪声核贡献表示为随机变量 $\mathcal{N}_{ij}(t)$，并使用高斯泛函恒等式 [27]

$$\begin{aligned}&e^{-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\left[x_{ij}(t)-x'_{ij}(t)\right]N_{\mathrm{g}}^{ijkl}(t,t')\left[x_{kl}(t')-x'_{kl}(t')\right]}\\&\quad=\mathcal{C}\int\mathcal{D}\mathcal{N}\,e^{-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\,\mathcal{N}_{ij}(t)(N_g^{-1})^{ijkl}(t,t')\mathcal{N}_{kl}(t')}e^{i\int \mathrm{d}t\,\mathcal{N}^{ij}(t)\left[x_{ij}(t)-x'_{ij}(t)\right]},\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

其中 $\mathcal{C}$ 是归一化常数，$\mathcal{D}\mathcal{N}$ 表示随机变量 $\mathcal{N}_{ij}(t)$的路径积分测度。随后使用高斯概率密度 $\mathscr{P}[\mathcal{N}]$计算随机平均，对此我们有

$$\left\langle\mathcal{N}^{ij}(t)\right\rangle_{\mathrm{sto}}=\int\mathcal{D}\mathcal{N}\,\mathscr{P}[\mathcal{N}]\mathcal{N}^{ij}(t)=0, \tag{4.2.15a}$$

$$\left\langle\mathcal{N}^{ij}(t)\mathcal{N}^{kl}(t')\right\rangle_{\mathrm{sto}}=\int\mathcal{D}\mathcal{N}\,\mathscr{P}[\mathcal{N}]\mathcal{N}^{ij}(t)\mathcal{N}^{kl}(t')=N_{\mathrm{g}}^{ijkl}(t,t'). \tag{4.2.15b}$$

引力影响泛函随后变为

$$e^{iS_{\mathrm{IF}}[x,x']} = \int \mathcal{D}\mathcal{N}\, \mathscr{P}[\mathcal{N}]\, e^{i\int \mathrm{d}t\, \mathcal{N}^{ij}(t)\left[x_{ij}(t)-x'_{ij}(t)\right]} \times e^{\frac{i}{2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}t' \left[x_{ij}(t)-x'_{ij}(t)\right] D_{\mathrm{g}}^{ijkl}(t,t') \left[x_{kl}(t')+x'_{kl}(t')\right]}. \tag{4.2.16}$$

现在请注意，式（4.2.16）中包含耗散核的项为 $O(\xi^4)$，因为 x_{ij} 本身已为 $O(\xi^2)$。因此，主要贡献来自包含噪声核的项，我们可以将式（4.2.16）近似为

$$e^{iS_{\mathrm{IF}}[x,x']} \simeq \int \mathcal{D}\mathcal{N}\, \mathscr{P}[\mathcal{N}]\, e^{i\int \mathrm{d}t\, \mathcal{N}^{ij}(t)\left[x_{ij}(t)-x'_{ij}(t)\right]}. \tag{4.2.17}$$

这意味着我们只考虑噪声核所编码的引力场的影响。正如第2章所述，噪声核负责描述退相干，其显式形式取决于引力子的初态。在附录C中，我们通过考虑四种可能的初态——真空、热态、相干态和压缩态——得到了引力噪声核的显式表达式。

4.3 外部自由度密度矩阵

粒子（包括外部和内部自由度）的总密度矩阵在时间 t 时为

$$\rho_{\mathrm{sys}}(\xi,\varrho,\xi',\varrho',t) = \int \mathrm{d}\xi(0)\mathrm{d}\xi'(0)\mathrm{d}\varrho(0)\mathrm{d}\varrho'(0)\, \rho_{\mathrm{sys}}(\xi(0),\varrho(0),\xi'(0),\varrho'(0),0) \times \int \mathcal{D}\xi\mathcal{D}\xi'\mathcal{D}\varrho\mathcal{D}\varrho'\, e^{i(S_{\mathrm{sys}}[\xi,\varrho]-S_{\mathrm{sys}}[\xi',\varrho'])} e^{iS_{\mathrm{IF}}[\xi,\varrho,\xi',\varrho']}, \tag{4.3.1}$$

其中 $e^{iS_{\mathrm{IF}}}$ 由方程（4.2.16）以变量 $x_{ij}(t)$ 表示，该变量定义于方程（4.2.10），并且

$$S_{\mathrm{sys}}[\xi,\varrho] = \frac{1}{2}m\int \mathrm{d}t \left(\delta_{ij}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j + \Phi_{ij}\xi^i\xi^j\right) + \int \mathrm{d}t\, \mathscr{L}(\varrho,\dot{\varrho}\bar{t}) - \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\, \mathscr{L}(\varrho,\dot{\varrho}\bar{t})\left(\delta_{ij}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j + \Phi_{ij}\xi^i\xi^j\right). \tag{4.3.2}$$

对 $\xi(t)$ 的路径积分取自 $\xi(0)$ 到 ξ，其他项同理。

现在，在近似（4.2.17）下，我们得到

$$\rho_{\rm sys}(\xi,\varrho,\xi',\varrho',t)=\int \mathrm{d}\xi(0)\mathrm{d}\xi'(0)\mathrm{d}\varrho(0)\mathrm{d}\varrho'(0)\,\rho_{\rm sys}(\xi(0),\varrho(0),\xi'(0),\varrho'(0),0)\\ \times\int \mathcal{D}\xi\mathcal{D}\xi'\mathcal{D}\varrho\mathcal{D}\varrho'\mathcal{D}\mathcal{N}\;\mathscr{P}[\mathcal{N}]\,e^{i(S_{\rm eff}[\xi,\varrho,\mathcal{N}]-S_{\rm eff}[\xi',\varrho',\mathcal{N}])},\tag{4.3.3}$$

其中

$$S_{\rm eff}[\xi,\varrho,\mathcal{N}]=\int \mathrm{d}t\left[\frac{1}{2}m\delta_{ij}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j+m\left(\frac{1}{2}\Phi_{ij}-\mathcal{N}_{ij}\right)\xi^i\xi^j\right]+\int \mathrm{d}t\,\mathscr{L}(\varrho,\dot{\varrho}\bar{t})\\ -\int \mathrm{d}t\,\mathscr{L}(\varrho,\dot{\varrho}\bar{t})\left[\frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j+\left(\frac{1}{2}\Phi_{ij}-\mathcal{N}_{ij}\right)\xi^i\xi^j\right],\tag{4.3.4}$$

其中 $\mathcal{N}_{ij}(t)$ 为满足式（4.2.15）的高斯随机变量。现在我们注意到，潮汐张量可被吸收到随机变量中，只需令$\mathcal{N}_{ij}(t)\to\mathcal{N}_{ij}(t)-\frac{1}{2}\Phi_{ij}$于式（4.3.3）中。由于这是一个线性变换，新变量仍然是高斯的，其随机平均为

$$\left\langle\mathcal{N}^{ij}(t)\right\rangle_{\rm sto}=-\frac{1}{2}\Phi_{ij},\tag{4.3.5a}$$

$$\left\langle\mathcal{N}^{ij}(t)\mathcal{N}^{kl}(t')\right\rangle_{\rm sto}=N_{\rm g}^{ijkl}(t,t')+O(\phi^2).\tag{4.3.5b}$$

有效系统作用量（4.3.4）于是变为

$$S_{\rm eff}[\xi,\varrho,\mathcal{N}]=\int \mathrm{d}t\left(\frac{1}{2}m\delta_{ij}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j-m\mathcal{N}_{ij}\xi^i\xi^j\right)+\int \mathrm{d}t\,\mathscr{L}(\varrho,\dot{\varrho}\bar{t})\\ -\int \mathrm{d}t\,\mathscr{L}(\varrho,\dot{\varrho}\bar{t})\left(\frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j-\mathcal{N}_{ij}\xi^i\xi^j\right).\tag{4.3.6}$$

现在我们只考虑系统的外部自由度，因为我们关心的是来自内部自由度以及引力场量子涨落的噪声效应。为此，我们必须计算相关自由度的约化密度矩阵，同时对其余所有自由度求迹。我们假设系统的外部和内部自由度在初始时也不相关，从而意味着

$$\rho_{\rm sys}(\xi(0),\varrho(0),\xi'(0),\varrho'(0),0)=\rho_{\rm ext}(\xi(0),\xi'(0),0)\rho_{\rm int}(\varrho(0),\varrho'(0),0),\tag{4.3.7}$$

其中 $\hat{}\rho_{\rm ext}$ ($\hat{}\rho_{\rm int}$) 表示外部（内部）自由度密度矩阵。时间演化将外部和内部变量耦合起来，因此我们得到总密度矩阵（4.3.3）。约化的外部自由度密度矩阵通过以下方式得到：

取偏迹

$$\rho_{\text{ext}}(\xi,\xi',t)=\int \mathrm{d}\varrho\,\rho_{\text{sys}}(\xi,\varrho,\xi',\varrho,t), \tag{4.3.8}$$

从而得到

$$\begin{aligned}\rho_{\text{ext}}(\xi,\xi',t)=&\int \mathrm{d}\xi(0)\mathrm{d}\xi'(0)\,\rho_{\text{ext}}(\xi(0),\xi'(0),0)\\&\times\int \mathcal{D}\xi\mathcal{D}\xi'\mathcal{D}\mathcal{N}\,\mathscr{P}[\mathcal{N}]\,e^{i\left(S^{(1)}_{\text{eff}}[\xi,\mathcal{N}]-S^{(1)}_{\text{eff}}[\xi',\mathcal{N}]\right)}e^{S^{(\text{int})}_{\text{IF}}[\xi,\xi',\mathcal{N}]},\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

其中我们定义了新的影响泛函

$$\begin{aligned}e^{iS^{(\text{int})}_{\text{IF}}[\xi,\xi',\mathcal{N}]}=&\int \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varrho(0)\mathrm{d}\varrho'(0)\,\rho_{\text{int}}(\varrho(0),\varrho'(0),0)\\&\times\int \mathcal{D}\varrho\mathcal{D}\varrho'\,e^{i\left(S^{(2)}_{\text{eff}}[\xi,\varrho,\mathcal{N}]-S^{(2)}_{\text{eff}}[\xi',\varrho',\mathcal{N}]\right)},\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

with

$$S^{(1)}_{\text{eff}}[\xi,\mathcal{N}]=\int \mathrm{d}t\left(\frac{1}{2}m\delta_{ij}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j-m\mathcal{N}_{ij}\xi^i\xi^j\right), \tag{4.3.11a}$$

and

$$S^{(2)}_{\text{eff}}[\xi,\varrho,\mathcal{N}]=\int \mathrm{d}t\,\mathscr{L}(\varrho,\dot{\varrho}\bar{t})-\int \mathrm{d}t\,\mathscr{L}(\varrho,\dot{\varrho}\bar{t})\left(\frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j-\mathcal{N}_{ij}\xi^i\xi^j\right). \tag{4.3.11b}$$

因此，我们本质上面临一个与第4.2节所处理的问题类似的问题，即一个与量子环境相互作用的系统。因此，我们将再次计算费曼-弗农影响泛函。值得指出的是，总影响泛函（引力子加上内部自由度）并非各个泛函的简单乘积，因为引力场与描述该系统的所有变量相耦合。当把感兴趣的系统视为外部自由度时，我们实际上得到两个既与该系统相互作用、又彼此相互作用的环境。在这种情况下，多个环境的影响作用量的可加性不再成立。

为了继续进行，让我们假设描述内部自由度的拉格朗日量具有如下形式

$$\mathscr{L}(\varrho,\dot{\varrho}\,\bar{t})=\sum_{\alpha}\left[\frac{1}{2}\mu_{\alpha}(\dot{\varrho}_{\alpha}\,\bar{t})^2-\mathcal{V}(\varrho_{\alpha})\right], \tag{4.3.12}$$

其中 μ_{α} 表示系统的约化质量， $\mathcal{V}$ 是坐标的函数。由于我们只想保留位置

和速度坐标中的二阶项，因此可以写成

$$\mathscr{L}(\varrho,\dot{\varrho}\,\bar{t}) \simeq \sum_{\alpha}\left(\frac{1}{2}\mu_{\alpha}\dot{\varrho}_{\alpha}^{2}-\vartheta_{\alpha}\varrho_{\alpha}-\frac{1}{2}\mu_{\alpha}\varpi_{\alpha}^{2}\varrho_{\alpha}^{2}\right), \tag{4.3.13}$$

其中，ϑ_{α} 和 ϖ_{α} 均为常数。于是，方程（4.3.11b）变为

$$S_{\text{eff}}^{(2)}=\sum_{\alpha}\left[\int \mathrm{d}t\left(\frac{1}{2}\mu_{\alpha}\dot{\varrho}_{\alpha}^{2}-\frac{1}{2}\mu_{\alpha}\varpi_{\alpha}^{2}\varrho_{\alpha}^{2}\right)+\vartheta_{\alpha}\int \mathrm{d}t\, Y(t)\varrho_{\alpha}(t)\right], \tag{4.3.14}$$

with

$$Y(t)=\frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{\xi}^{i}\dot{\xi}^{j}-\mathcal{N}_{ij}\xi^{i}\xi^{j}-1. \tag{4.3.15}$$

请注意，我们实际上是将内部自由度描述为一组彼此独立、与外部自由度线性耦合的谐振子。在这种情况下，内部自由度的影响泛函（4.3.10）是高斯型的，这意味着我们可以将影响作用量写为

$$\begin{aligned}S_{\text{IF}}^{(\text{int})}[Y,Y']=\int \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\Big\{&\frac{1}{2}[Y(t)-Y'(t)]D_{\text{int}}(t,t')[Y(t')+Y'(t')]\\&+\frac{i}{2}[Y(t)-Y'(t)]N_{\text{int}}(t,t')[Y(t')-Y'(t')]\Big\},\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

with

$$D_{\text{int}}(t,t')=i\sum_{\alpha}\vartheta_{\alpha}^{2}\left\langle[\hat{\varrho}_{\alpha}(t),\hat{\varrho}_{\alpha}(t')]\right\rangle_{\text{int}}\theta(t-t') \tag{4.3.17a}$$

and

$$N_{\text{int}}(t,t')=\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\vartheta_{\alpha}^{2}\left\langle\{\hat{\varrho}_{\alpha}(t),\hat{\varrho}_{\alpha}(t')\}\right\rangle_{\text{int}} \tag{4.3.17b}$$

它们分别是内部自由度的耗散核和噪声核。现在，$\hat{}\varrho(t)$ 是海森堡绘景中的算符，下标为“int”的期望值是相对于内部自由度的初态计算的。

与我们处理引力影响泛函中含噪声核的项时类似，我们可以利用相同的高斯泛函恒等式，将 $S^{(\text{int})}{}_{\text{IF}}$ 中的噪声项表示为一个随机变量。这样，内部自由度影响泛函中的这一项将产生一个高斯概率密度以及一个关于 Y 变量的线性项。因此，与引力情形一样，主导阶贡献来自噪声项，我们可以取

$$e^{iS_{\text{IF}}^{(\text{int})}[Y,Y']}\simeq e^{-\frac{1}{2}\int dtdt'\,[Y(t)-Y'(t)]N_{\text{int}}(t,t')[Y(t')-Y'(t')]}, \tag{4.3.18}$$

由此得到

$$\rho_{\text{ext}}(\xi,\xi',t) = \int \mathrm{d}\xi(0)\mathrm{d}\xi'(0)\,\rho_{\text{ext}}(\xi(0),\xi'(0),0)\int \mathcal{D}\xi\mathcal{D}\xi'\,e^{\frac{i}{2}m\delta^{ij}\int \mathrm{d}t\left(\dot{\xi}_i\dot{\xi}_j-\dot{\xi}'_i\dot{\xi}'_j\right)} \times \int \mathcal{D}\mathcal{N}\,\mathscr{P}[\mathcal{N}]\,e^{-im\int \mathrm{d}t\,\mathcal{N}^{ij}\left(\xi_i\xi_j-\xi'_i\xi'_j\right)}e^{-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\,[Y(t)-Y'(t)]N_{\text{int}}(t,t')[Y(t')-Y'(t')]}. \tag{4.3.19}$$

现在可以使用式（4.3.5）中给出的随机平均，前提是我们处于微扰区域（舍弃关于 ξ 和 ϕ的高阶项）。由此，我们得到外部自由度密度矩阵：

$$\begin{aligned}\rho_{\text{ext}}(\xi,\xi',t) = &\int \mathrm{d}\xi(0)\mathrm{d}\xi'(0)\,\rho_{\text{ext}}(\xi(0),\xi'(0),0)\int \mathcal{D}\xi\mathcal{D}\xi'\,e^{i(S_{\text{ext}}[\xi]-S_{\text{ext}}[\xi'])}\\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{4}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\,\delta^{ij}\left[\frac{1}{2}\delta^{kl}y_{ij}(t)N_{\text{int}}(t,t')y_{kl}(t')+\Phi^{kl}y_{ij}(t)N_{\text{int}}(t,t')w_{kl}(t')\right]\right\}\\ &\times \exp\left\{-\int \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\,w_{ij}(t)\left[\frac{m^2}{2}+N_{\text{int}}(t,t')\right]N_{\text{g}}^{ijkl}(t,t')w_{kl}(t')\right\},\end{aligned} \tag{4.3.20}$$

其中

$$S_{\text{ext}}[\xi] = \frac{m}{2}\int \mathrm{d}t\left(\delta^{ij}\dot{\xi}_i\dot{\xi}_j+\Phi^{ij}\xi_i\xi_j\right), \tag{4.3.21}$$

并且我们定义

$$w_{ij}(t) = \xi_i(t)\xi_j(t)-\xi'_i(t)\xi'_j(t) \tag{4.3.22a}$$

and

$$y_{ij}(t) = \dot{\xi}_i(t)\dot{\xi}_j(t)-\dot{\xi}'_i(t)\dot{\xi}'_j(t). \tag{4.3.22b}$$

约化密度矩阵（4.3.20）是本章的主要结果。请注意，由于与环境的相互作用，其时间演化并非幺正。时间演化的非幺正部分由引力噪声核 $N_{\text{g}}^{ijkl}(t,t')$ 和内部自由度噪声核 $N_{\text{int}}(t,t')$ 决定。我们还在附录 C 中通过考虑一个内部热浴计算了这两个噪声核。在接下来的章节中，我们将探讨这种非幺正时间演化的影响。

第5章

复合粒子的引力子诱导的退相干

在第4章中，我们已经描述了牛顿背景下复合粒子与引力子浴的相互作用。接下来，我们将求出质心变量量子叠加态的时间演化。我们的出发点是约化密度矩阵（4.3.20），它是通过对引力自由度和内部系统自由度积分得到的。在此，我们将考虑系统处于两条经典可区分路径的叠加态，并研究与两个环境相互作用所产生的退相干。在第5.1节中，我们定义退相干函数，并计算叠加态的两种可能构型对应的函数值。在第5.2 节中，我们假设引力子最初处于真空态，分析该函数的行为并计算退相干时间。在第5.3节中，我们将分析扩展到其他可能的状态。最后，在第5.4节中，我们将讨论长时间尺度下发生引力复相干的可能性。

5.1 退相干函数

考虑这样一个特殊情形：复合粒子只能沿两条经典可区分路径运动 $\xi^{(1)}(t)$ 和 $\xi^{(2)}(t)$。那么，方程（4.3.20）可写为

$$\begin{aligned}\rho_{\text{ext}}(\xi,\xi',t) = &\int \mathrm{d}\xi_0 \mathrm{d}\xi_0' \rho_{\text{ext}}(\xi_0,\xi_0',0) \\ &\times \sum_{m,n=1}^{2} e^{i\left\{S_{\text{ext}}\left[\xi^{(m)}\right]-S_{\text{ext}}\left[\xi^{(n)}\right]\right\}} e^{-\Gamma\left[\xi^{(m)},\xi^{(n)},t\right]}\Bigg|_{\substack{\xi^{(m)}(t)=\xi,\ \xi^{(n)}(t)=\xi' \\ \xi^{(m)}(0)=\xi_0,\ \xi^{(n)}(0)=\xi_0'}},\end{aligned} \tag{5.1.1}$$

其中我们引入了泛函

$$\begin{aligned}\Gamma\big[\xi^{(m)},\xi^{(n)},t\big] = \int \mathrm{d}t\mathrm{d}t' \Big\{ &\frac{1}{8}\delta^{ij}\delta^{kl}\Big[\dot{\xi}_i^{(m)}(t)\dot{\xi}_j^{(m)}(t) - \dot{\xi}_i^{(n)}(t)\dot{\xi}_j^{(n)}(t)\Big]N_{\text{int}}(t,t') \\ &\times \Big[\dot{\xi}_k^{(m)}(t')\dot{\xi}_l^{(m)}(t') - \dot{\xi}_k^{(n)}(t')\dot{\xi}_l^{(n)}(t')\Big] \\ &+ \frac{1}{4}\delta^{ij}\Phi^{kl}\Big[\dot{\xi}_i^{(m)}(t)\dot{\xi}_j^{(m)}(t) - \dot{\xi}_i^{(n)}(t)\dot{\xi}_j^{(n)}(t)\Big]N_{\text{int}}(t,t') \\ &\times \Big[\xi_k^{(m)}(t')\xi_l^{(m)}(t') - \xi_k^{(n)}(t')\xi_l^{(n)}(t')\Big] \\ &+ \Big[\xi_i^{(m)}(t)\xi_j^{(m)}(t) - \xi_i^{(n)}(t)\xi_j^{(n)}(t)\Big]\Big[\frac{m^2}{2} + N_{\text{int}}(t,t')\Big] \\ &\times N_{\text{g}}^{ijkl}(t,t')\Big[\xi_k^{(m)}(t')\xi_l^{(m)}(t') - \xi_k^{(n)}(t')\xi_l^{(n)}(t')\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

这是路径 $\xi^{(1)}(t)$ 和 $\xi^{(2)}(t)$ 的一个泛函，它满足

$$\Gamma\big[\xi^{(m)},\xi^{(n)},t\big] = \Gamma\big[\xi^{(n)},\xi^{(m)},t\big], \tag{5.1.3a}$$

and

$$\Gamma\big[\xi^{(m)},\xi^{(m)},t\big] = 0. \tag{5.1.3b}$$

由于这些性质，我们只需考虑 $\Gamma\big[\xi^{(1)},\xi^{(2)},t\big] \equiv \Gamma(t)$。当 $\Gamma(t) \geq 0$ 时，这个函数描述了密度矩阵非对角元的衰减，因此我们称之为**退相干函数**。

为简单起见，设 $\xi_i^{(m)}(t) = \xi^{(m)}(t)\delta_{i3}$，即沿 x^3- 方向的一维路径。现在，考虑这样一种方案：两条路径都从同一点 $\xi_0 = \xi_0'$ 出发，并都在另一点 $\xi = \xi'$ 结束。这是典型情形：一个最初局域化的量子系统经历路径叠加，并在时间 t_f 后重新汇合，以便分析其干涉图样。

我们来定义这些变量

$$\Xi(t) \equiv \frac{1}{2}\big[\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)\big], \quad \Delta\xi(t) \equiv \xi^{(1)}(t) - \xi^{(2)}(t), \tag{5.1.4a}$$

and

$$V(t) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Xi(t), \quad \Delta v(t) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta\xi(t), \tag{5.1.4b}$$

因此我们可以写成

$$\begin{aligned}\Gamma(t_f) = &\frac{1}{2}\int_0^{t_f} \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\, V(t)\Delta v(t)N_{\text{int}}(t,t')V(t')\Delta v(t') \\ &+ \Phi_{zz}\int_0^{t_f} \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\, V(t)\Delta v(t)N_{\text{int}}(t,t')\Xi(t')\Delta\xi(t')\end{aligned}$$

$$+4\int_0^{t_f}\mathrm{d}t\mathrm{d}t'\,\Xi(t)\Delta\xi(t)\left[\frac{m^2}{2}+N_{\rm int}(t,t')\right]N_{\rm g}(t,t')\Xi(t')\Delta\xi(t'), \tag{5.1.5}$$

其中 $N_{\rm g}(t,t')\equiv N_{\rm g}^{3333}(t,t')$。

在附录 C中，通过将内部自由度视为由耦合常数 $N_{\rm int}(t,\ t')$ 描述的欧姆浴，并令其处于高温 η 热平衡状态，计算了噪声核 $T_{\rm int}\gg|t-t'|$。具体地，利用公式（C.2.5），可得

$$\begin{aligned}\Gamma(t_f)=&\frac{1}{2}\eta\pi T_{\rm int}\int_0^{t_f}\mathrm{d}t\left[V(t)\Delta v(t)\right]^2+\eta\pi T_{\rm int}\Phi_{zz}\int_0^{t_f}\mathrm{d}t\,V(t)\Delta v(t)\Xi(t)\Delta\xi(t)\\&+2m^2\int_0^{t_f}\mathrm{d}t\mathrm{d}t'\,\Xi(t)\Delta\xi(t)N_{\rm g}(t,t')\Xi(t')\Delta\xi(t')\\&+4\eta\pi T_{\rm int}\int_0^{t_f}\mathrm{d}t\left[\Xi(t)\Delta\xi(t)\right]^2N_{\rm g}(t),\end{aligned} \tag{5.1.6}$$

其中，$N_{\rm g}(t)\equiv$极限$_{t'\to t}N_{\rm g}(t,\ t')$。

函数 $\Gamma(t)$ 通过变量（5.1.4）依赖于叠加态的特定构型，同时也依赖于附录 $N_{\rm g}(t,\ t')$中计算得到的引力噪声核 C。在本文中，为了探究叠加态的时间演化，我们将考虑与文献 [30, 150] 中相同的构型路径。不过，出于说明目的，我们还将展示另一种构型下退相干函数如何发生变化。

5.1.1 构型 1

对于第一种构型，我们称其为 构型 *1*，我们选择

$$\Xi(t)=\Xi=\text{constant in time} \tag{5.1.7a}$$

and

$$\Delta\xi(t)=\begin{cases}2vt & \text{for } 0<t\le t_f/2\\ 2v(t_f-t) & \text{for } t_f/2<t<t_f\end{cases}, \tag{5.1.7b}$$

对于某个恒定速度 v。注意，这意味着 $V(t)=\mathrm{d}\Xi/\mathrm{d}t=0$。于是我们有

$$\begin{aligned}\Gamma_1(t_f)=8m^2\Xi^2v^2\Bigg[&\int_0^{t_f/2}\mathrm{d}t\mathrm{d}t'\,tt'N_{\rm g}(t,t')+\int_{t_f/2}^{t_f}\mathrm{d}t\mathrm{d}t'\,(t_f-t)(t_f-t')N_{\rm g}(t,t')\\&+2\int_0^{t_f/2}\mathrm{d}t\int_{t_f/2}^{t_f}\mathrm{d}t'\,t(t_f-t')N_{\rm g}(t,t')\Bigg]\end{aligned}$$

$$+16\eta\pi T_{\text{int}}\Xi^2 v^2\left[\int_0^{t_f/2}\mathrm{d}t\,t^2 N_{\text{g}}(t)+\int_{t_f/2}^{t_f}\mathrm{d}t\,(t_f-t)^2 N_{\text{g}}(t)\right]. \tag{5.1.8}$$

下一步是使用引力噪声核的各种表达式，显式计算函数 $\Gamma_1(t)$。这些表达式可在附录 C 中找到，适用于初始处于真空、热态、相干态和压缩态的引力子。尽管计算过程较长，但并不复杂，因此我们直接给出函数 $\Gamma_1(t)$的最终结果。

首先，让我们回顾一下式（4.1.14），其中 $\Phi_{zz}=2M_N/R_N^3$。此外，我们还将恢复普适常数 $\hbar$， c， G 和 k_B，以便用国际单位制而非普朗克单位制表示结果。

引入指标 A，其取值可以是 v、t、c 或 s，分别表示真空、热态、相干态和压缩态。于是，函数 $\Gamma_1(t)$ 的结果可归纳为以下表达式：

$$\begin{aligned}\Gamma_1^{(A)}(t)=\,&b_A(1-\delta_{A,\text{v}})\Gamma_1^{(\text{v})}(t)\\&+\frac{8\Xi^2v^2m^2}{5\pi E_{\text{P}}^2}K_{1,A}\left\{\left(\frac{\Lambda_A}{\hbar}\right)^2\left[f_A^{(I)}\left(\frac{\Lambda_A t}{\hbar}\right)+\frac{\kappa_A}{E_{\text{rest}}^2}f_A^{(II)}\left(\frac{\Lambda_A t}{\hbar}\right)\right]\right.\\&\left.-\frac{GM_N}{R_N^3}\left[f_A^{(III)}\left(\frac{\Lambda_A t}{\hbar}\right)+\frac{\kappa_A}{E_{\text{rest}}^2}f_A^{(IV)}\left(\frac{\Lambda_A t}{\hbar}\right)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{5.1.9}$$

其中，

$$b_A=\begin{cases}1 & \text{for } A\neq \text{s}\\ \cosh 2r & \text{for } A=\text{s}\end{cases}, \tag{5.1.10a}$$

$$\Lambda_A=\begin{cases}\Lambda & \text{for } A\neq \text{t}\\ \pi k_B T_{\text{g}} & \text{for } A=\text{t}\end{cases}, \tag{5.1.10b}$$

and

$$\kappa_A=\eta\pi k_B T_{\text{int}}\Lambda_A. \tag{5.1.10c}$$

此外， $E_{\text{rest}}=mc^2$ 和 E_{P} 分别为静止能量和普朗克能量。常数 Λ 为引力子能量截断， T_{g} 为初始热态的引力子温度， r 为初始压缩态的实压缩参数。常数 $K_{1,\ A}$为

$$K_{1,\text{v}}=2, \tag{5.1.11a}$$

$$K_{1,\text{t}}=\frac{4}{3}, \tag{5.1.11b}$$

$$K_{1,\text{c}}=\frac{\alpha^2}{3}, \tag{5.1.11c}$$

$$K_{1,\mathrm{s}} = -\frac{2}{3}\sinh 2r, \tag{5.1.11d}$$

其中 α 为初始相干态的位移参数。对于所有状态，函数 $f_A^{(I)}$ 描述仅由引力子产生的退相干贡献，而函数 $f_A^{(II)}$ 描述引力子与系统内部自由度相互作用所产生的贡献。函数 $f_A^{(III)}$ 和 $f_{(IV)\,A}$ 分别表示来自引力子以及引力子与内部自由度的贡献，同时也包含牛顿势的贡献。请注意，在此构型中，不存在仅由内部自由度产生的贡献；而在没有量子时空涨落的情况下，不会发生退相干（对于构型 1）。各种函数 f_A 列举如下：

真空态

$$f_{\mathrm{v}}^{(I)}(x) = 1+\frac{2}{3x}\left[\sin x - 8\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]+\frac{1}{x^2}\left[\frac{2}{3}\cos x - \frac{32}{3}\cos\left(\frac{x}{2}\right)+10\right], \tag{5.1.12a}$$

$$f_{\mathrm{v}}^{(II)}(x) = \frac{1}{108}x^3, \tag{5.1.12b}$$

$$f_{\mathrm{v}}^{(III)}(x) = 8\gamma_E - \frac{4}{3}\ln 4 - \frac{32}{3}\mathrm{Ci}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{8}{3}\mathrm{Ci}(x)+8\ln\left(\frac{x}{2}\right), \tag{5.1.12c}$$

$$f_{\mathrm{v}}^{(IV)}(x) = \frac{1}{18}x^3. \tag{5.1.12d}$$

热态

$$f_{\mathrm{t}}^{(I)}(x) = \frac{1+16e^x+26e^{2x}+16e^{3x}+e^{4x}}{(e^{2x}-1)^2} - \frac{15}{x^2}, \tag{5.1.13a}$$

$$f_{\mathrm{t}}^{(II)}(x) = \frac{4}{189}x^3, \tag{5.1.13b}$$

$$f_{\mathrm{t}}^{(III)}(x) = 4\ln\left[\frac{2(e^x-1)^3}{x^3(e^x+1)}\right] - 4x, \tag{5.1.13c}$$

$$f_{\mathrm{t}}^{(IV)}(x) = \frac{2}{45}x^3. \tag{5.1.13d}$$

相干态

$$f_{\mathrm{c}}^{(I)}(x) = \frac{7}{2}+\frac{1}{6x}\left\{3\sin(2x) - 16\left[9\sin\left(\frac{x}{2}\right) - 3\sin x + \sin\left(\frac{3x}{2}\right)\right]\right\}$$

$$+\frac{1}{36x^2}\left[1495-1728\cos\left(\frac{x}{2}\right)+288\cos x-64\cos\left(\frac{3x}{2}\right)+9\cos(2x)\right], \tag{5.1.14a}$$

$$f_{\mathrm{c}}^{(II)}(x)=\frac{x^3}{36}+\frac{1}{8x^3}\left[49+24(x^2-2)\cos x+(2x^2-1)\cos(2x)\right.$$
$$\left.-4x(12-2x^2+\cos x)\sin x\right], \tag{5.1.14b}$$

$$f_{\mathrm{c}}^{(III)}(x)=28\gamma_E+4\ln\left(\frac{81x^7}{2^{17}}\right)-48\mathrm{Ci}\left(\frac{x}{2}\right)+32\mathrm{Ci}(x)-16\mathrm{Ci}\left(\frac{3x}{2}\right)+4\mathrm{Ci}(2x), \tag{5.1.14c}$$

$$f_{\mathrm{c}}^{(IV)}(x)=\frac{x^3}{6}+4\sin x+\frac{2}{x}(2\cos x+\cos^2 x-3). \tag{5.1.14d}$$

压缩态

$$f_{\mathrm{s}}^{(I)}(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}\left[\sin(2x)+12\sin x-16\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{16}{3}\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{36x^2}\left[415-576\cos\left(\frac{x}{2}\right)+216\cos x-64\cos\left(\frac{3x}{2}\right)+9\cos(2x)\right], \tag{5.1.15a}$$

$$f_{\mathrm{s}}^{(II)}(x)=\frac{1}{8x^3}\left[49+24(x^2-2)\cos x+(2x^2-1)\cos(2x)\right.$$
$$\left.-4x(12-2x^2+\cos x)\sin x\right], \tag{5.1.15b}$$

$$f_{\mathrm{s}}^{(III)}(x)=4\gamma_E+4\ln\left(\frac{81x}{2^9}\right)-16\mathrm{Ci}\left(\frac{x}{2}\right)+24\mathrm{Ci}(x)-16\mathrm{Ci}\left(\frac{3x}{2}\right)+4\mathrm{Ci}(2x), \tag{5.1.15c}$$

$$f_{\mathrm{s}}^{(IV)}(x)=4\sin x+\frac{2}{x}(2\cos x+\cos^2 x-3). \tag{5.1.15d}$$

这里，$\gamma_E\simeq 0.577$ 是欧拉-马歇罗尼常数，而 $\mathrm{Ci}(z)=-\int_z^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ 是余弦积分函数。

5.1.2 构型 2

我们可以考虑叠加态的另一种构型；例如，由具有不同恒定速度的线性路径描述的构型，$\xi^{(m)}=v_m t$。在这种情况下，我们称之为构型2</style}，有

$$\Xi(t)=Vt,\quad \Delta\xi(t)=\Delta v t, \tag{5.1.16a}$$

and

$$V = \frac{v_1 + v_2}{2}, \quad \Delta v = v_1 - v_2. \tag{5.1.16b}$$

对于构型 2，可得

$$\begin{aligned}\Gamma_2(t_f) = \frac{1}{4}\eta\pi T_{\text{int}}\left(v_1^2 - v_2^2\right)^2\left[\frac{t_f}{2} + \frac{\Phi_{zz}t_f^3}{3} + 4\int_0^{t_f} \mathrm{d}t\, t^4 N_{\text{g}}(t)\right] \\ + \frac{m^2}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right)^2\int_0^{t_f} \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\,(tt')^2 N_{\text{g}}(t,t').\end{aligned} \tag{5.1.17}$$

正如我们对构型 1 所做的那样，下一步任务是将噪声核的表达式代入式（5.1.17），以得到 Γ_2（t）的显式表达式。我们再次只总结这一冗长但直接的计算的结果，该结果给出（在再次恢复普适常数之后）

$$\Gamma_2^{(A)}(t) = \frac{\pi\eta k_B T_{\text{int}}}{4\hbar}\frac{\left(v_1^2 - v_2^2\right)^2}{c^4}\left(\frac{t}{2} + \frac{2}{3}\frac{GM_N}{R_N^3}t^3\right) + \Gamma_{2(g)}^{(A)}(t), \tag{5.1.18a}$$

with

$$\begin{aligned}\Gamma_{2(g)}^{(A)}(t) = b_A(1-\delta_{A,\text{v}})\Gamma_{2(g)}^{(\text{v})}(t) \\ + \frac{m^2\left(v_1^2 - v_2^2\right)^2}{15\pi E_{\text{P}}^2}K_{2,A}\left\{g_A^{(I)}\left(\frac{\Lambda_A t}{\hbar}\right) + \frac{\kappa_A}{E_{\text{rest}}^2}g_A^{(II)}\left(\frac{\Lambda_A t}{\hbar}\right)\right. \\ \left. - \left(\frac{\hbar}{\Lambda_A}\right)^2\frac{GM_E}{R_E^3}\left[g_A^{(III)}\left(\frac{\Lambda_A t}{\hbar}\right) + \frac{\kappa_A}{E_{\text{rest}}^2}g_A^{(IV)}\left(\frac{\Lambda_A t}{\hbar}\right)\right]\right\},\end{aligned} \tag{5.1.18b}$$

其中 b_A、Λ_A 和 κ_A 由式（5.1.10）定义。常数 $K_{2,\ A}$ 为

$$K_{2,\text{v}} = 1, \tag{5.1.19a}$$

$$K_{2,\text{t}} = 12, \tag{5.1.19b}$$

$$K_{2,\text{c}} = \alpha^2, \tag{5.1.19c}$$

$$K_{2,\text{s}} = -\sinh 2r. \tag{5.1.19d}$$

函数 g_A 与函数 f_A 对于导致其产生贡献的物理机制，具有相同的诠释。然而，与构型 1 不同，构型 2 的退相干函数呈现的贡献仅来自内部自由度，这与 Pikovski 等人提出的引力退相干机制理念相同。 [35, 36]（第 3.3节）。由于我们将重点分析量子时空涨落导致的退相干，因此在本文余下部分中，我们将采用构型 1。

尽管如此，出于说明目的（并作为未来某些可能工作的参考），下面列出了各种函数 g_A：

真空态

$$g_{\mathrm{v}}^{(I)}(x) = \frac{x^4}{4} + 8\gamma_E - 12 - 8\mathrm{Ci}(x) + 8\ln x + 4x\sin x + 12\cos x, \tag{5.1.20a}$$

$$g_{\mathrm{v}}^{(II)}(x) = \frac{x^5}{15}, \tag{5.1.20b}$$

$$g_{\mathrm{v}}^{(III)}(x) = 2x^4 - 8x^2 + 16\cos x + 16x\sin x - 16, \tag{5.1.20c}$$

$$g_{\mathrm{v}}^{(IV)}(x) = \frac{2}{5}x^5. \tag{5.1.20d}$$

热态

$$g_{\mathrm{t}}^{(I)}(x) = 1 - \frac{2x}{3} + \frac{x^4}{90} + \frac{2}{3}\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right) - \frac{x}{3}\left[\frac{\sinh(2x)+x}{\sinh^2 x}\right], \tag{5.1.21a}$$

$$g_{\mathrm{t}}^{(II)}(x) = \frac{8}{945}x^5, \tag{5.1.21b}$$

$$g_{\mathrm{t}}^{(III)}(x) = \frac{x^4}{9} + \frac{4}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x^2\ln\left(1-e^{2x}\right) - \frac{4}{3}x\mathrm{Li}_2(e^{2x}) + \frac{2}{3}\mathrm{Li}_3(e^{2x}) - \frac{2}{3}\zeta(3), \tag{5.1.21c}$$

$$g_{\mathrm{t}}^{(IV)}(x) = \frac{4}{225}x^5. \tag{5.1.21d}$$

相干态

$$g_{\mathrm{c}}^{(I)}(x) = \frac{x^4}{8} + 2\gamma_E - \frac{59}{16} + \frac{1}{16}(59-22x^2)\cos(2x) - 2\mathrm{Ci}(2x) - 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 4\ln x + \frac{x}{8}(27-2x^2)\sin(2x), \tag{5.1.22a}$$

$$g_{\mathrm{c}}^{(II)}(x) = \frac{x^5}{30} + \frac{1}{8x}\left[15 + \left(-15 + 18x^2 - 2x^4\right)\cos(2x)\right] + (x^2-3)\sin(2x), \tag{5.1.22b}$$

$$g_{\mathrm{c}}^{(III)}(x) = x^4 - \frac{7}{2}x^2 - 4 + \left(4 - \frac{9}{2}x^2\right)\cos(2x) - x(x^2-8)\sin(2x), \tag{5.1.22c}$$

$$g_{\mathrm{c}}^{(IV)}(x) = \frac{3}{2}x + \frac{x^5}{5} + x\left(\frac{9}{2} - x^2\right)\cos(2x) + 3(x^2-1)\sin(2x). \tag{5.1.22d}$$

压缩态

$$g_{\mathrm{s}}^{(I)}(x) = \frac{37}{8} - 4\gamma_E - 12\cos x + \frac{1}{8}(59-22x^2)\cos(2x) + 8\mathrm{Ci}(x) - 4\mathrm{Ci}(2x) - 4\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\left[8 + (2x^2-27)\cos x\right]\sin x, \tag{5.1.23a}$$

$$g_{\mathrm{s}}^{(II)}(x)=\frac{1}{4x}\left[15+\left(-15+18x^{2}-2x^{4}\right)\cos(2x)\right]+2(x^{2}-3)\sin(2x), \tag{5.1.23b}$$

$$g_{\mathrm{s}}^{(III)}(x)=x^{2}+8-16\cos x+(8-9x^{2})\cos(2x)-4x\left[4+(x^{2}-8)\cos x\right]\sin x, \tag{5.1.23c}$$

$$g_{\mathrm{s}}^{(IV)}(x)=3x+x(9-2x^{2})\cos(2x)+6(x^{2}-1)\sin(2x). \tag{5.1.23d}$$

此处，$\zeta(z)$ 是黎曼ζ函数，而 $\mathrm{Li}_n(z)$ 是多重对数函数 .

5.2 初始真空态的退相干

对于初始处于真空态的引力子，退相干函数（针对配置 1）为

$$\Gamma_{1}^{(\mathrm{v})}(t)=\frac{16\Xi^{2}v^{2}m^{2}}{5\pi E_{\mathrm{P}}^{2}}\left\{\left(\frac{\Lambda}{\hbar}\right)^{2}\left[f_{\mathrm{v}}^{(I)}\left(\frac{\Lambda t}{\hbar}\right)+\frac{\kappa}{E_{\mathrm{rest}}^{2}}f_{\mathrm{v}}^{(II)}\left(\frac{\Lambda t}{\hbar}\right)\right]\right.$$
$$\left.-\frac{GM_{N}}{R_{N}^{3}}\left[f_{\mathrm{v}}^{(III)}\left(\frac{\Lambda t}{\hbar}\right)+\frac{\kappa}{E_{\mathrm{rest}}^{2}}f_{\mathrm{v}}^{(IV)}\left(\frac{\Lambda t}{\hbar}\right)\right]\right\}, \tag{5.2.1}$$

其中 $\kappa\equiv\kappa_{\mathrm{v}}$。函数 $f_{\mathrm{v}}(x)$ 的显式表达式列于第 5.1 节，其中一些相关性质见表 5.1 (另见图 5.1)。

真空态			
贡献	**函数**	$x\ll1$ **的行为**	$x\gg1$ **的行为**
G	$f_{\mathrm{v}}^{(I)}(x)$	$x^4/288$	1
G+I	$f_{\mathrm{v}}^{(II)}(x)$	$x^3/108$	$x^3/108$
G+N	$f_{\mathrm{v}}^{(III)}(x)$	$x^4/48$	$8\gamma_E-\frac{32}{3}\ln 2+8\ln\ x$
G+N+I	$f^{(IV)\mathrm{v}}(x)$	$x^3/18$	$x^3/18$

表5.1：考虑引力子最初处于**真空态**时，退相干函数的不同贡献。在“贡献”列中，“G”表示引力子，“I”表示内部自由度，“N”表示牛顿势。

由式（5.2.1）可见，引力子与系统内部自由度之间相互作用的贡献按以下比值缩放

$$\mathscr{R}=\frac{\kappa}{E_{\mathrm{rest}}^{2}}=\frac{\eta\pi k_{B}T_{\mathrm{int}}\Lambda}{m^{2}c^{4}}. \tag{5.2.2}$$

该比率取决于外部和内部自由度之间的无量纲耦合 η，也取决于内部温度；对于复杂分子，内部温度可达 $T_{\mathrm{int}}\sim10^{4}\,\mathrm{K}$ 量级 [156]。引力子截止 Λ 与

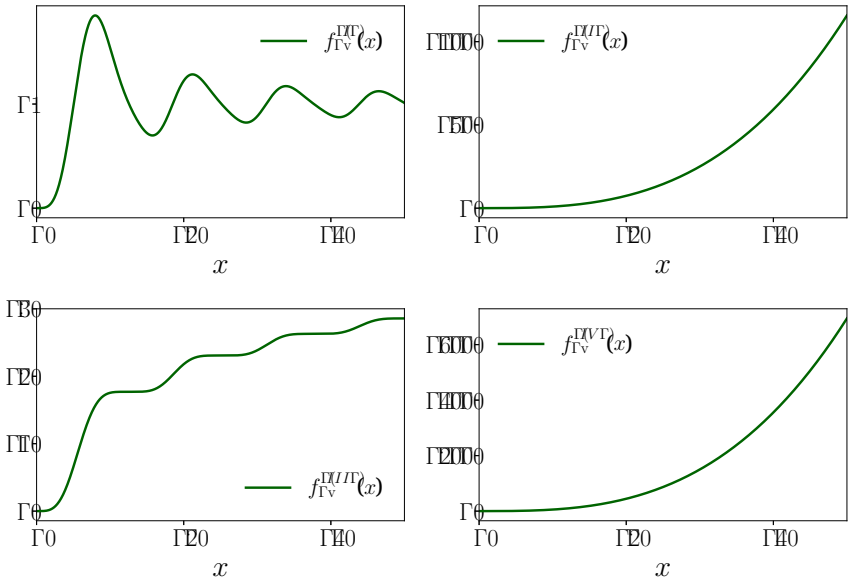


图 5.1：考虑引力子初始处于**真空态**时，退相干函数的不同贡献。

测地线偏离， L_0，正如第4章所指出的。我们取 $\Lambda = \hbar c/L_0$，并将L_0称为“探测器尺寸”。最后，该比率还取决于复合粒子的质量， m。正如我们在第3章讨论的那样，复杂分子的量子空间叠加已在质量高达 $m \sim 10^{-22}$ kg [151–153] 的复杂分子中被观测到。我们可以将比率（5.2.2）改写为

$$\mathscr{R} = \eta \frac{L(m, T_{\text{int}})}{L_0}, \tag{5.2.3}$$

其中 $L(m, T_{\text{int}})$ 是由系统的质量和内部温度决定的典型长度尺度。例如，若取 $T_{\text{int}} \sim 10^4$ K 和 $m \sim 10^{-22}$ kg，则得到 $L(m, T_{\text{int}}) \sim L_{\text{P}}$，即普朗克长度。因此，尽管可以通过增强外部和内部自由度之间的耦合，和/或减小探测器尺寸来增大比值 $\mathscr{R}$，但显然，对于典型系统，可以预期 $\mathscr{R} \ll 1$。不过，需要通过考察表 5.1 中所列函数的行为，来分析此类贡献的重要性。

5.2.1 短时极限

让我们先考虑较短的时间， $t \ll \hbar/\Lambda = L_0/c$。在这一极限下，我们可以使用表5.1 所示的展开，并将退相干函数写为

$$\Gamma_1^{(\text{v})}(t) = \frac{8\Xi^2 v^2 m^2}{15\pi E_{\text{P}}^2} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{\Lambda}{\hbar} \right)^2 - \frac{GM_N}{R_N^3} \right] \left(\frac{\Lambda t}{\hbar} \right)^3 \left(\frac{1}{8} \frac{\Lambda t}{\hbar} + \frac{1}{3} \frac{\kappa}{E_{\text{rest}}^2} \right). \tag{5.2.4}$$

首先请注意，频率平方$(\Lambda/\hbar)^2$与 GM_N/R_N^3之间似乎存在竞争，只有前者大于后者时才会发生退相干。通常情况确实如此，正如表5.2所示；表中我们估算了不同探测器尺寸以及不同牛顿引力势源对应的这两个频率平方的数值。不过，原则上似乎也可能出现相反的情况：增大探测器尺寸，同时提高牛顿源的密度。当然，这样做时必须谨慎，不能违背我们的任何假设，例如牛顿近似；它限制了我们不能将源的密度增大到任意高的数值。例如，我们出于信息参考目的展示了中子星对应的潮汐频率平方结果，但不要忘记，我们是在微扰区域内进行计算，并舍弃了潮汐张量的高阶项。我们将在本章末尾回到这一讨论。

估算 $(\Lambda/\hbar)^2$	
L_0 [米]	$(\Lambda/\hbar)^2$ [秒$^{-2}$]
10^{-6}	9.0×10^{28}
10^{3}	9.0×10^{10}
10^{9}	9.0×10^{-2}

估算 GM_N/R^3_N	
源	GM_N/R_N^3 [s^{-2}]
Sun	3.9×10^{-7}
地球	1.5×10^{-6}
中子星	1.7×10^{8}

表5.2：典型的频率平方。左侧，我们估算了若干探测器尺寸 L_0 下$(\Lambda/\hbar)^2$ 的量级。右侧，我们估算了牛顿势的若干源的 GM_N/R_N^3 的量级。

让我们将退相干函数改写为

$$\Gamma_1^{(\mathrm{v})}(t)=\frac{4}{45\pi}\delta\Omega\left(\frac{\Xi}{L_0}\right)^2\left(\frac{v}{c}\right)^2\left(\frac{m}{M_{\mathrm{P}}}\right)^2\left(\frac{\Lambda t}{\hbar}\right)^3\left(\frac{1}{8}\frac{\Lambda t}{\hbar}+\frac{1}{3}\frac{\kappa}{E^2_{\mathrm{rest}}}\right), \tag{5.2.5}$$

其中 M_{P} 是普朗克质量，并且我们定义

$$\delta\Omega\equiv 1-6\left(\frac{\hbar}{\Lambda}\right)^2\frac{GM_N}{R_N^3}. \tag{5.2.6}$$

注意，$\delta\Omega\leq 1$ 通常有 $\delta\Omega\simeq 1$。

退相干函数取决于许多参数，其中包括比值 Ξ/L_0。请注意，L_0 表示相对于位于我们参考系中心、质量大得多的质量 M 而言的典型测地线偏离，而 Ξ基本上表示叠加态的大小。为简单起见，我们可以从

现在起假设其中一条路径足够接近参考质量 M，因此我们可以取 $\Xi \sim L_0$。

现在，根据方程（5.2.5）可知，只要 $t \gg (8/3)\eta t(m, T_{\text{int}})$，其中$t(m, T_{\text{int}}) = L(m, T_{\text{int}})/c$ 表示由系统性质决定的某个典型时间尺度，引力子与内部自由度相互作用所产生的贡献便可忽略不计。例如，对于我们之前讨论过的典型质量和内部温度取值，$t(m, T_{\text{int}}) \sim t_{\text{P}}$即普朗克时间。

总之，在

$$\frac{8}{3}\eta\frac{L(m, T_{\text{int}})}{c} \ll t \ll \frac{L_0}{c}, \tag{5.2.7}$$

只有与引力子浴的相互作用占主导地位的情况下，退相干函数变为

$$\Gamma_1^{(\text{v})}(t) = \frac{1}{90\pi}\delta\Omega\left(\frac{v}{c}\right)^2\left(\frac{m}{M_{\text{P}}}\right)^2\left(\frac{\Lambda t}{\hbar}\right)^4. \tag{5.2.8}$$

我们可以计算退相干时间 t_{dec}，其定义为 $\Gamma(t_{\text{dec}}) = 1$。可得[1]

$$t_{\text{dec}}^{(\text{v})} = \frac{\hbar}{\Lambda}\sqrt{\sqrt{\frac{90\pi}{\delta\Omega}}\frac{c}{v}\frac{M_{\text{P}}}{m}}. \tag{5.2.9}$$

一致性要求 $t^{(\text{v})}$ 退相干 $\ll \hbar/\Lambda$，因此，引力子诱导的退相干会发生在满足以下条件的系统中

$$mv \gg \sqrt{\frac{90\pi}{\delta\Omega}}M_{\text{P}}c, \tag{5.2.10}$$

这与 Kanno 等人得出的结论一致 [30]（第 3.2节）。对于$\delta\Omega \simeq 1$，这意味着我们必须有 $mv \gg 110$千克 $\cdot$ 米/秒。

式（5.2.10）表明，要观测到引力子诱导的退相干，必须制备宏观质量的空间量子叠加态。即使将我们的结果外推至超相对论极限 $v \simeq c$，退相干条件仍要求质量满足 $m \gg 3.7 \times 10^{-7}$ 千克。

总之，短时极限完全由引力子浴主导，而对于微观且在实验中通常可达到的质量，通常不会发生退相干。我们可以期待这种情况在长时间尺度下有所改善。然而，如果我们只考虑纯引力子贡献，从表 5.1 可以看出

[1]关于符号的说明：令 t_{dec} 表示在短时极限下计算的退相干时间，而τ_{dec} 表示在长时极限下计算的退相干时间。

$f_{\rm v}^{(I)}$趋于一个常数值，而 $t\to\infty$ 退相干函数达到饱和，其值为

$$\Gamma_{1,\rm sat}^{(\rm v)}=\frac{16}{5\pi}\delta\Omega\Big(\frac{v}{c}\Big)^2\Big(\frac{m}{M_{\rm P}}\Big)^2, \tag{5.2.11}$$

不再继续增加。因此，仅靠引力子浴无法使微观质量的空间叠加态退相干。当我们考虑引力子与其他贡献（内部自由度和牛顿势）之间的相互作用时，长时极限下的情况便会改变，因为其他函数不会表现出这种行为$t\to\infty$。接下来让我们重新关注式（5.2.1），并考察长时极限。

5.2.2 长时极限

从表5.1可以看出，对于 $x\gg 1$，包含内部自由度贡献的函数 $f_{(II)\rm v}(x)$ 和 $f^{(IV)}{}_{\rm v}(x)$ 按 x^3 的尺度变化，而 $f_{\rm v}^{(I)}(x)$ 保持恒定， $f_{\rm v}^{(III)}(x)$ 则以慢得多的对数速率增长。这意味着，无论比值 $\mathscr{R}=\kappa/E_{\rm rest}^2$ 有多小，总会存在某个时刻，无论需要等待多久，G+I 贡献都会占据主导地位。由于这些贡献会持续无限增长，最终将发生退相干。

在长时极限下，利用定义（5.2.6），并取 $\Xi\sim L_0$，方程（5.2.1）变为

$$\Gamma_1^{(\rm v)}(t)=\frac{4}{135}\delta\Omega\Big(\frac{v}{c}\Big)^2\left(\frac{\eta k_B T_{\rm int}\Lambda}{E_{\rm P}^2}\right)\left(\frac{\Lambda t}{\hbar}\right)^3. \tag{5.2.12}$$

有趣的是，我们发现退相干函数（5.2.12）似乎不显含复合粒子的质量。然而，这并不意味着该函数完全不依赖于质量，因为长时极限是根据比值 $\kappa/E_{\rm rest}^2$确定的，而该比值确实依赖于质量。此外，函数还可能通过无量纲耦合常数 η而显含 m。

根据方程（5.2.12），我们可以计算退相干时间，此时 $\Gamma(\tau_{\rm dec})=1$。计算结果为

$$\begin{aligned}\tau_{\rm dec}^{(\rm v)}&=\left[\frac{135}{4}\frac{1}{\delta\Omega}\Big(\frac{c}{v}\Big)^2\frac{\hbar^4c^5}{Gk_B}\frac{1}{\eta T_{\rm int}\Lambda^4}\right]^{1/3}\\&=\left[\frac{135}{4}\frac{1}{\delta\Omega}\Big(\frac{c}{v}\Big)^2\frac{cL_0^4}{Gk_B\eta T_{\rm int}}\right]^{1/3}\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

这仍然是一个相当长的时间。例如，考虑强耦合情形，并取 $\eta\sim 1$。此外，考虑 $T_{\rm int}\sim 10^4$ K，这是典型的分子速度，数量级为$v\sim 10^{-6}c$, $L_0\sim 10^{-9}$ m，以及 $\delta\Omega\sim 1$。于是得到 $\tau^{(\rm v)}{}_{\text{退相干}}\sim 10^5$ s（约为 1.2

天）。尽管如此，这表明当我们考虑引力子与系统内部自由度之间的相互作用时，最终确实会发生退相干；而这与只有引力子浴直接产生作用的情形不同。

本分析假设引力子的初态为真空态。然而，其他可能的状态可以显著缩短退相干时间，接下来我们将看到这一点。

5.3 初始热态、相干态和压缩态的退相干

现在，我们可以针对其他初态重复同样的分析，其退相干函数由式（5.1.9）给出。这些函数 f_A 均已在第5.1节列出，其中一些相关性质见表5.3、5.4和5.5（另见图5.2、5.3和5.4）。步骤基本相同，因此我们只列出结果。

热态		
函数	$x \ll 1$ **的行为**	$x \gg 1$ **的行为**
$f^{(I)}{}_{\mathrm{t}}(x)$	$x^4/126$	1
$f^{(II)}{}_{\mathrm{t}}(x)$	$4x^3/189$	$4x^3/189$
$f^{(III)}{}_{\mathrm{t}}(x)$	$x^4/60$	$4\ln 2 + 4x - 12\ln x$
$f^{(IV)}{}_{\mathrm{t}}(x)$	$2x^3/45$	$2x^3/45$

表5.3：引力子初始处于**热态**时，退相干函数的不同贡献。

相干态		
函数	$x \ll 1$**的行为**	$x \gg 1$**的行为**
$f_{\mathrm{c}}^{(I)}(x)$	$x^4/48$	$7/2$
$f_{\mathrm{c}}^{(II)}(x)$	$x^3/18$	$x^3/36 + \sin x$
$f_{\mathrm{c}}^{(III)}(x)$	$x^4/8$	$28\gamma_E + 16\ln 3 - 68\ln 2 + 28\ln x$
$f^{(IV)}{}_{\mathrm{c}}(x)$	$x^3/3$	$x^3/6 + 4\sin x$

表 5.4：假设引力子初始处于**相干态**时，退相干函数的不同贡献。

与考虑初始真空态的情况一样，我们首先考察短时极限。对于 $t \ll \hbar/\Lambda_A$，我们可以使用表中所示的函数$f_A(x)$ 在 $x = 0$ 附近的展开式，见表5.3、5.4和5.5。再次，纯粹的

压缩态		
函数	$x \ll 1$**的行为**	$x \gg 1$**的行为**
$f_{\mathrm{s}}^{(I)}(x)$	$x^4/96$	$1/2$
$f_{\mathrm{s}}^{(II)}(x)$	$x^3/36$	$\sin\, x$
$f_{\mathrm{s}}^{(III)}(x)$	$x^4/16$	$4\gamma_E + 4\ln\,(81/2^9) \; + 4\ln\, x$
$f^{(IV)}{}_{\mathrm{s}}\;(x)$	$x^3/6$	$4\,\sin x$

表5.5：考虑引力子最初处于**压缩态**时，退相干函数的不同贡献。

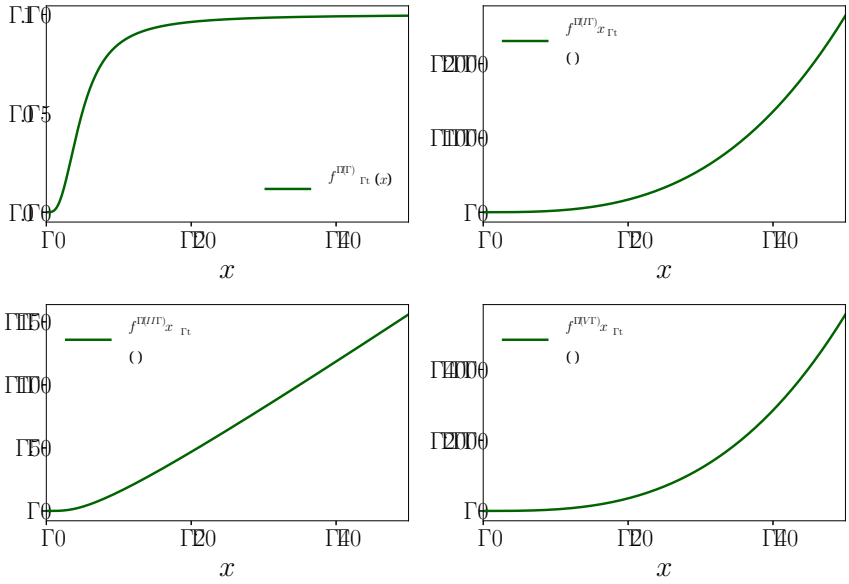


图5.2：假设引力子初始处于**热态**时，对退相干函数的不同贡献。

在此范围内，引力子热浴的贡献占主导地位，退相干时间为

$$t_{\mathrm{dec}}^{(\mathrm{t})} = \left[1 + \frac{32}{21}\delta\Omega_{\mathrm{t}}\frac{(\pi k_B T_{\mathrm{g}})^6}{\Lambda^6}\right]^{-1/4} t_{\mathrm{dec}}^{(\mathrm{v})}, \tag{5.3.1a}$$

$$t_{\mathrm{dec}}^{(\mathrm{c})} = \left(1+\alpha^2\right)^{-1/4} t_{\mathrm{dec}}^{(\mathrm{v})}, \tag{5.3.1b}$$

$$t_{\mathrm{dec}}^{(\mathrm{s})} = e^{-r/2} t_{\mathrm{dec}}^{(\mathrm{v})}, \tag{5.3.1c}$$

其中

$$\delta\Omega_{\mathrm{t}} \equiv 1 + 6\left(\left(\frac{\hbar}{\Lambda}\right)^2 - \frac{7}{20}\left(\frac{\hbar}{\pi k_B T_{\mathrm{g}}}\right)^2\right)\frac{GM_N}{R_N^3}, \tag{5.3.2}$$

并且由 $t^{(\mathrm{v})}{}_{\mathrm{dec}}$ 由公式（5.2.9）给出。请注意，考虑此类状态时，退相干时间会缩短，其中 t_{dec} 甚至对于

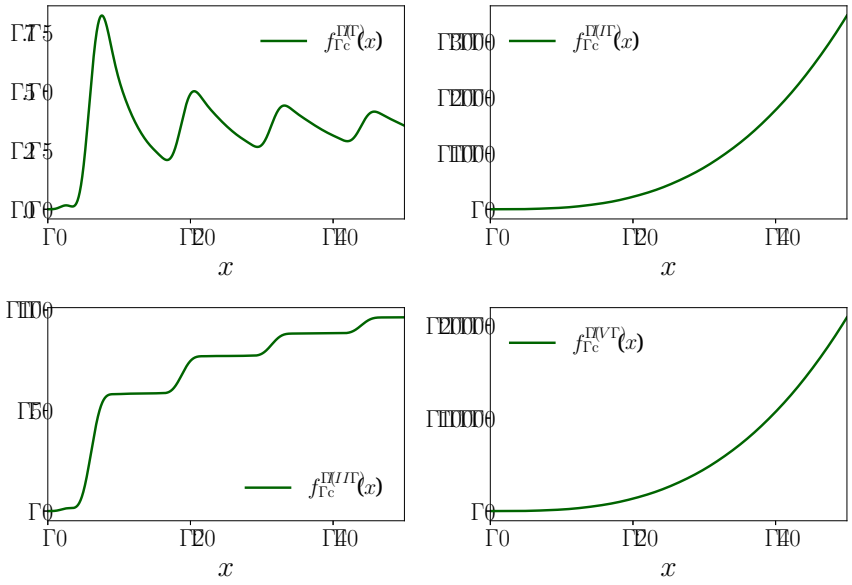


图 5.3：假设引力子初始处于**相干态**时，退相干函数的不同贡献。

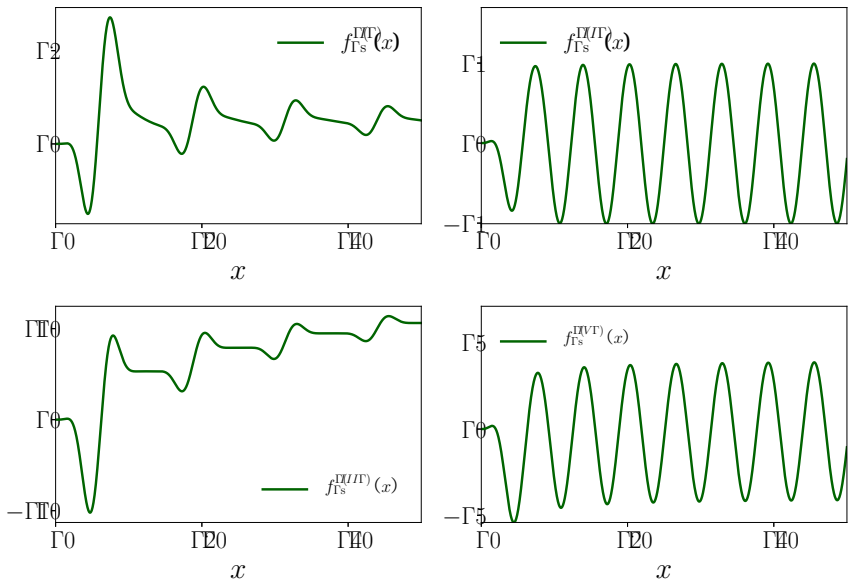


图 5.4：假设引力子初始处于**压缩态**时，退相干函数的不同贡献。

压缩态。

接下来，我们转向长时极限。与初始真空态的情况类似，从表 5.3 和 5.4 可以看出，对于热态和相干态，涉及内部自由度的贡献会随着 $\Lambda_A t/\hbar \gg 1$ 持续增大，而其他贡献则趋于饱和，或呈现较缓慢的对数行为。然后，利用表中的表达式，我们可以在长时极限下求得退相干时间

表示为

$$\tau_{\rm dec}^{(\rm t)} = \left[1 + \frac{32}{21}\delta\Omega_{\rm t}\frac{(\pi k_B T_{\rm g})^6}{\Lambda^6}\right]^{-1/3}\tau_{\rm dec}^{(\rm v)}, \tag{5.3.3a}$$

$$\tau_{\rm dec}^{(\rm c)} = \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)^{-1/3}\tau_{\rm dec}^{(\rm v)}, \tag{5.3.3b}$$

其中 $\tau^{(\rm v)}$ 退相干 由式（5.2.13）给出。

然而，对于初始压缩态，情况则截然不同。内部自由度的贡献表现为正弦函数，因此不会持续增大。由于比值 $\mathscr{R} = \kappa/E_{\rm rest}^2$通常较小，这意味着仅来自引力子浴的贡献在长时极限下也占主导地位[2]。现在，$f_{\rm s}^{(I)}(x)$会饱和于一个常数值。此外，尽管 $f_{\rm s}^{(III)}(x)$呈对数增长，但这仍远小于真空情形下的变化，如第 $\sim x^3$ 节所示，其变化规律为 5.2。因此，长时极限可简单写为

$$\Gamma_1^{(\rm s)}(t) = (\cosh 2r)\Gamma_1^{(\rm v)}(t), \tag{5.3.4}$$

其中 $\Gamma_1^{(\rm v)}(t)$由式（5.2.12）给出。最后，退相干时间为

$$\tau_{\rm dec}^{(\rm s)} = (\cosh 2r)^{-1/3}\tau_{\rm dec}^{(\rm v)}. \tag{5.3.5}$$

我们可以看到，即使在长时极限下，相对于真空态，退相干时间也会呈指数衰减。文献[157], 中的作者认为，遗迹引力子现在应处于压缩态，并估算其压缩参数约为 $r \sim 10^2$；对于该参数，$(\cosh 2r)^{-1/3} \sim 10^{-29}$，这会显著缩短引力子诱导退相干时间。

5.4 引力再相干的可能性

在结束本章之前，我们来讨论一下第 5.2 节提出的一个疑问。我们在式（5.2.11）中看到，当我们只考虑真空态退相干函数中的 G贡献时，它会达到饱和，不再变化。加入牛顿势后，情况略有不同，因为 G+N贡献不会饱和到某个固定值，而是会随时间不断增大。那么，现在我们来考虑一个没有内部自由度（或内部自由度被冻结）的粒子。此时，

[2]需要指出的是，我们仅指压缩态退相干函数的额外贡献。应当记住，对于所有态，这一项都加在真空项之上；对于真空项，长时间下 G+I 贡献占主导，如第 5.2 节所示。

真空态的退相干函数可简化为

$$\Gamma_1^{(\mathrm{v})}(t)=\frac{16\Xi^2v^2m^2}{5\pi E_{\mathrm{P}}^2}\left\{\left(\frac{\Lambda}{\hbar}\right)^2 f_{\mathrm{v}}^{(I)}\left(\frac{\Lambda t}{\hbar}\right)-\frac{GM_N}{R_N^3}f_{\mathrm{v}}^{(III)}\left(\frac{\Lambda t}{\hbar}\right)\right\}. \tag{5.4.1}$$

我们已经看到，在短时极限下，这会化为方程（5.2.8）。但现在没有内部自由度在长时区间占主导，因此人们可能会担心：G贡献保持不变，而带负号的G+N贡献却持续随时间增加。从表5.1中我们看到，$f_{\mathrm{v}}^{(I)}(x)\sim 1$和$f_{(III)\mathrm{v}}(x)\sim 8\ln x$ for $x\gg 1$，退相干函数变为

$$\Gamma_1^{(\mathrm{v})}(t)\simeq\frac{16}{5\pi}\left(\frac{v}{c}\right)^2\left(\frac{m}{M_{\mathrm{P}}}\right)^2\left[1-8\left(\frac{\hbar}{\Lambda}\right)^2\frac{GM_N}{R_N^3}\ln\left(\frac{\Lambda t}{\hbar}\right)\right]. \tag{5.4.2}$$

这意味着，当不存在能够保证引力退相干的内部自由度时，函数不仅会停止随时间增加，还会开始减小（尽管速度非常缓慢）。鉴于这种行为，人们可能会担心“退相干”函数最终会变成负值。原则上，这是可能发生的，我们可以计算出达到这一状态所需的时间。快速分析表明，$\Gamma_1^{(\mathrm{v})}(t)<0$ for

$$t\gtrsim\frac{\hbar}{\Lambda}\exp\left[\frac{1}{8}\left(\frac{\Lambda}{\hbar}\right)^2\frac{R_N^3}{GM_N}\right]. \tag{5.4.3}$$

现在，即使叠加尺度达到公里量级，即 $L_0\sim 10^3\,\mathrm{m}$，我们发现 $\left(\frac{\Lambda}{\hbar}\right)^2\frac{R_N^3}{GM_N}\sim 10^{16}$ 在地球附近。对这个数取指数，我们显然是在说，要经过无限长的时间，这种再相干才可能发生。

对于相干态和压缩态，情况相当类似，因为这两种情况下的 G+N 项在 $t\gg\hbar/\Lambda$ 时也会按 $\ln(\Lambda t/\hbar)$ 增长。然而，对于热态，表 5.3 显示，$f^{(III)}{}_{\mathrm{t}}(x)\sim 4x$，其增长速度快于对数函数。在不存在内部自由度且处于长时极限的情况下，热态退相干函数为

$$\Gamma_1^{(\mathrm{t})}(t)\simeq\frac{16}{5\pi}\left(\frac{v}{c}\right)^2\left(\frac{m}{M_{\mathrm{P}}}\right)^2\left[1+\left(\frac{\pi k_BT_{\mathrm{g}}}{\Lambda}\right)^2\left(1-\frac{4\hbar}{\pi k_BT_{\mathrm{g}}}\frac{GM_N}{R_N^3}t\right)\right]. \tag{5.4.4}$$

在这种情况下，条件 $\Gamma_1^{(\mathrm{t})}(t)<0$ 可通过以下方式实现

$$t\gtrsim\frac{\pi k_BT_{\mathrm{g}}}{4\hbar}\frac{R_N^3}{GM_N}\left[1+\left(\frac{\Lambda}{\pi k_BT_{\mathrm{g}}}\right)^2\right]. \tag{5.4.5}$$

对于 $T_{\mathrm{g}} \sim 1\,\mathrm{K}$，我们有$\frac{\pi k_B T_{\mathrm{g}}}{4\hbar}\frac{R_N^3}{GM_N} \sim 10^{17}\,\mathrm{s}$（地球附近），这大约相当于宇宙年龄。

总之，牛顿势的存在似乎会略微减缓退相干机制，最终可能导致系统再相干。虽然原则上有可能发生，但对于典型参数而言，这种情况并不常见。即便如此，正如我们在前几节中所看到的，当考虑系统自身内部结构的相互作用时，退相干仍不可避免地占据主导。

不过，我们应当指出，在开放量子系统的非马尔可夫模型中可能会出现再相干机制，例如在描述宇宙学背景中的量子场时（参见文献 [158]）。记忆（非马尔可夫）效应与再相干之间的联系在文献 [159]中进行了探讨。

第6章

引力子诱导的熵产生

我们再次考虑一个与引力子浴耦合的开放系统，不过这次加入一个外部施力者，在给定的时间区间内按照某种力协议对系统施加作用$f(t)$ 。由于系统与环境耦合，而环境的末态并不重要，因此系统的动力学演化由确定性力 $f(t)$ 与随机力项的共同作用决定；后者包含了环境的影响，正如第2.4 节从更一般的角度所讨论的那样。对环境进行这种粗粒化描述不可避免地会导致耗散。接下来，我们探讨当试图使系统穿过引力子浴时，有多少功会被耗散；为回答这一问题，我们将验证涨落定理如何适用于当前问题（关于涨落定理，或更确切地说，克鲁克斯涨落定理和Jarzynski 等式的简要回顾，请参见附录 D ）。

涨落定理是在文献 [42], 中针对受相对论时间膨胀影响的量子系统建立的，后来被推广以纳入经典时空曲率 [43]的效应，并应用于量子场 [44]。尽管这些文献将时空视为经典实体，但本文旨在将涨落定理应用于受量子时空涨落影响的系统。

建立量子涨落定理面临的主要概念难题之一是功的定义。尽管人们似乎普遍认同通过双时刻测量方案来定义 [160] 封闭系统中的功，但开放量子系统的恰当定义仍存在争议。在这里，我们遵循文献 [119] 中的提议，像在经典系统中那样，通过赋予量子力学中的轨迹概念以意义来定义功。为此，我们将转向在第退相干（或一致）历史形式体系，我们在第2.5节中对此进行了讨论。正如我们在该节中所见，朗之万

方程描述了系统的轨迹，前提是以 $\sim N^{-1}$量级的精度追踪这些轨迹，其中 N 是环境的噪声核。于是，我们的想法是利用这些解来定义对开放系统所做的功。

由于我们需要朗之万方程解的表达式，因此先在第 6.1 节讨论这些解。然后，在第 6.2 节中，我们利用这些解来定义功并建立涨落定理，从而量化熵产生。

6.1 含引力子噪声的朗之万方程

我们先回到方程（4.3.19），该方程描述了一个同时与引力自由度和自身内部自由度耦合的量子系统的外部自由度密度矩阵。正如我们在第 4 章所讨论的，含有内部自由度噪声核的项也可以改写为高斯随机变量的形式，就像我们对引力噪声核所做的那样。实际上，方程（4.3.19）等价于

$$\begin{aligned}\rho_{\text{ext}}(\xi,\xi',t) = \int \mathrm{d}\xi(0)\mathrm{d}\xi'(0)\,\rho_{\text{ext}}(\xi(0),\xi'(0),0)\int \mathcal{D}\xi\mathcal{D}\xi'\, e^{\frac{i}{2}m_0\delta^{ij}\int \mathrm{d}t\left(\dot\xi_i\dot\xi_j-\dot\xi'_i\dot\xi'_j\right)}\\ \times\int \mathcal{D}\mathcal{N}\,\mathscr{P}[\mathcal{N}]\mathscr{P}[\mathcal{N}_{\text{int}}]\,e^{-im\int \mathrm{d}t\,\mathcal{N}^{ij}\left(\xi_i\xi_j-\xi'_i\xi'_j\right)}e^{-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}t\,\mathcal{N}_{\text{int}}\left(\dot\xi_i\dot\xi_j-\dot\xi'_i\dot\xi'_j\right)}\\ \times e^{i\int \mathrm{d}t\,\mathcal{N}_{\text{int}}\mathcal{N}^{ij}\left(\xi_i\xi_j-\xi'_i\xi'_j\right)},\end{aligned} \tag{6.1.1}$$

其中，$\mathscr{P}$ 表示高斯概率密度，$\mathcal{N}$（$\mathcal{N}_{\text{int}}$）是描述与引力子（内部自由度）相互作用的随机变量。

该系统随后由以下随机有效作用量描述：

$$\begin{aligned}S_{\text{SEA}}[\xi,\xi'] = S_{\text{p}}[\xi]-S_{\text{p}}[\xi']-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\,\mathcal{N}_{\text{int}}\left(\dot\xi_i\dot\xi_j-\dot\xi'_i\dot\xi'_j\right)\\ -\int \mathrm{d}t\,(m-\mathcal{N}_{\text{int}})\mathcal{N}^{ij}\left(\xi_i\xi_j-\xi'_i\xi'_j\right),\end{aligned} \tag{6.1.2}$$

with

$$S_{\text{p}}[\xi] = \int \mathrm{d}t\left[\frac{1}{2}m\,\delta_{ij}\dot\xi^i\dot\xi^j - V(\xi)\right], \tag{6.1.3}$$

我们还引入了势函数 $V(\xi)$，以考虑外部主体作用于系统的可能性。

按通常方式令 $\delta S_{\text{SEA}}=0$，即可得到运动方程

$$[m-\mathcal{N}_{\text{int}}(t)]\ddot\xi_i(t)+\frac{\partial V}{\partial\xi^i}-\dot{\mathcal{N}}_{\text{int}}(t)\dot\xi_i(t)+2[m-\mathcal{N}_{\text{int}}(t)]\mathcal{N}_{ij}(t)\xi^j(t)=0. \tag{6.1.4}$$

要解析求解关于测地线偏差 $\xi(t)$ 的二阶微分方程并非易事。由于我们需要解的显式形式，为简化起见，将忽略内部自由度的贡献，仅分析引力子产生的效应。此外，我们选择在 $\xi_i(t)$ 的微扰区域内进行研究。然后，取 $\mathcal{N}_{\text{int}} \to 0$，即可得到[1]

$$m\ddot{\xi}_i(t) = f_i(t) + 2m\mathcal{N}_{ij}(t)\xi_0^j(t), \tag{6.1.5}$$

其中，f_i的定义满足 $V(\xi) = -f_i(t)\xi^i(t)$，而 ξ_0^i是 $m\ddot{\xi}_0^i = f^i$的解。

式（6.1.5）是朗之万方程，描述了受到随机力项影响的系统的时间演化，该随机力项源自与引力子浴的相互作用。这种随机噪声的影响也在参考文献[24–30]中进行了分析。

初始条件为 $\xi^i(0) = \dot{\xi}^i(0) =$0时，朗之万方程的解为

$$\xi_i(t) = \frac{1}{m}\int_0^t \mathrm{d}t'\,(t-t')f_i(t') + 2\int_0^t \mathrm{d}t'\,(t-t')\mathcal{N}_{ij}(t')\xi_0^j(t'). \tag{6.1.6}$$

这可以看作两个试验质量之间测地线间距的经典极限，其中随机行为源于引力场的量子涨落。然而，正如我们在本章开头所讨论的，对于精度由噪声核确定的路径，我们可以像处理经典系统那样，利用朗之万方程的解为量子系统定义功，而这在很大程度上依赖于空间中轨迹这一概念。这将使我们能够为量子系统建立涨落定理；我们还将看到，当外部施力者试图推动系统穿过引力子浴时，耗散是如何产生的。

6.2 耗散功与熵

为了讨论涨落定理的有效性，我们按照参考文献[119]中的方法进行。这里所说的涨落定理是指 Jarzynski 等式，它是克鲁克斯涨落定理的积分形式[45–50]（见附录 D）。对于封闭量子系统，定理的推导依赖于整个系统处于初始热态这一假设。然而，我们对与引力子浴相互作用的量子粒子的分析，是基于初始直积态这一假设建立的，而它显然不是热态。为了绕过这一问题，我们将初始时间设为 $t_0 = -\infty$。在这一时刻，我们假设总态由以下张量积描述：

[1]为方便起见，我们改变了噪声项的符号，这是允许的，因为这只是在路径积分中进行变量替换。

系统由张量积 $\hat{\rho}(-\infty) = \hat{\rho}_{\text{sys}}(-\infty) \otimes \hat{\rho}_{\text{grav}}(-\infty)$ 描述，其中 $\hat{\rho}_{\text{grav}}$ 是引力子的热态。随后，我们令系统按照总作用量演化，其中 $f^i(t) = f^i(0)$，持续时间为 $t < 0$，从而在 $t = 0$ 时得到总热态。接着，驱动力开始按照某个任意方案变化，直至给定时刻 $t = \tau$。外部施力者在时间区间 $[0, \tau]$ 内对系统所做的功定义为

$$W \equiv -\int_0^\tau \mathrm{d}t\, \dot{f}_i(t)\xi^i(t), \tag{6.2.1}$$

其中 $\xi^i(t)$ 是式（6.1.6）中给出的朗之万方程的解。利用解的显式形式，我们可以写出

$$W = -\frac{1}{m}\int_0^\tau \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\, \dot{f}^i(t)g(t-t')f_i(t') - 2\int_0^\tau \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\, \dot{f}^i(t)g(t-t')\mathcal{N}_{ij}(t')\xi_0^j(t'), \tag{6.2.2}$$

其中 $g(t-t') = (t-t')\theta(t-t')$。

由式（6.2.2）可以看出，对系统所做的功关于 $\mathcal{N}_{ij}(t)$ 是线性的，而它是一个高斯随机过程。因此，W 本身也必定是一个高斯随机变量，其统计性质由前两阶矩 $\langle W\rangle$和 $\sigma_W^2 = \langle W^2\rangle - \langle W\rangle^2$ 确定。于是我们可以写出功的概率密度函数

$$\mathscr{P}(W) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_W^2}} e^{-(W-\langle W\rangle)^2/2\sigma_W^2}. \tag{6.2.3}$$

在本章中，括号表示以高斯概率密度进行的随机平均。

在继续之前，值得强调的是，由于 W 与 $\mathcal{N}_{ij}(t)$ 之间存在线性依赖，使用 $\mathscr{P}(W)$ 得到的平均值与使用 $\mathscr{P}(\mathcal{N})$ 得到的随机平均相同。在经典涨落定理的通常表述中，并不考虑这种随机力，作用于系统的功所具有的概率性源于初始热态这一假设。每次从初态进行抽样都会产生一条轨迹，而平均值则是在这类实现构成的系综上进行的。对于量子涨落定理，初态固有的量子不确定性进一步带来了概率性。然而，我们选择采用一种等价的初态制备方法，即为总系统选取乘积初态。这一选择以噪声统计的性质取代了系统对初态的依赖，因此最终只剩下一个概率性因素，而不是两个 [119]。

功分布的各阶矩可按如下方式计算。首先，由于$\langle \mathcal{N}^{ij}(t)\rangle = \frac{1}{2}\Phi_{ij}$，其中$\Phi_{ij}$为潮汐张量[2],我们有

$$\langle W\rangle = -\frac{1}{m}\int_0^\tau \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\, \dot{f}^i(t)g(t-t')f_i(t') - \Phi_{ij}\int_0^\tau \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\, \dot{f}^i(t)g(t-t')\xi_0^j(t'). \quad (6.2.4)$$

此外，通过使用[3] $\left\langle \mathcal{N}^{ij}(t)\mathcal{N}^{kl}(t')\right\rangle = N^{ijkl}(t,\ t')$，即引力子的噪声核，我们还可得到

$$\sigma_W^2 = \int_0^\tau \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\, \dot{f}^i(t)\sigma_{ij}(t,t')\dot{f}^j(t'), \quad (6.2.5)$$

其中

$$\sigma_{ij}(t,t') = 4\int_0^\tau \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\, g(t-t_1)g(t'-t_2)N_{ijkl}(t_1,t_2)\xi_0^k(t_1)\xi_0^l(t_2). \quad (6.2.6)$$

注意，尽管$\langle W\rangle$与引力子的噪声核无关，但二阶矩σ_W^2则与之相关。

有了功的一阶矩和二阶矩的表达式，概率分布便完全确定了。现在可以计算

$$\left\langle e^{-\beta W}\right\rangle = \int \mathcal{D}W\, \mathscr{P}(W)e^{-\beta W}, \quad (6.2.7)$$

其中β是引力子浴的逆温度。正如本节开头所述，Jarzynski 等式对整个系统成立，因此我们必须有

$$\left\langle e^{-\beta W}\right\rangle = e^{-\beta\Delta F}, \quad (6.2.8)$$

其中 $\Delta F = F(\tau) - F(0)$ 是时刻 $t=0$ 与 $t=\tau$ 之间的自由能差，针对总系统以量子力学方式计算。

直接计算将式（6.2.7）化为

$$\left\langle e^{-\beta W}\right\rangle = e^{-\beta\left(\langle W\rangle - \beta\sigma_W^2/2\right)}, \quad (6.2.9)$$

根据与方程（6.2.8）比较，我们可以将总系统的自由能差确定为

$$\Delta F = \langle W\rangle - \beta\sigma_W^2/2. \quad (6.2.10)$$

[2]回顾一下，我们改变了随机噪声变量的符号。[3]我们去掉了下标 g，因为在本节中，不会与来自任何其他环境的噪声核相混淆。

最后，我们将耗散功 W_{diss} 确定为

$$\begin{aligned} W_{\text{diss}} &= \langle W \rangle - \Delta F = \beta \sigma_W^2 / 2 \\ &= 2\beta \int_0^\tau \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_4 \, \dot{f}^i(t_1) \dot{f}^j(t_2) g(t_1 - t_3) g(t_2 - t_4) N_{ijkl}(t_3, t_4) \xi_0^k(t_3) \xi_0^l(t_4). \end{aligned} \tag{6.2.11}$$

对于沿 z–方向的运动，我们计算了噪声核 $N(t,t') = N_{3333}(t,t')$ 见附录C（自然地，在这种情况下，我们关注的是引力子的初始热态）。

最后，我们得出结论：系统中存在由下式给出的熵产生

$$\langle \Sigma \rangle = \beta W_{\text{diss}} = \frac{\beta^2 \sigma_W^2}{2}. \tag{6.2.12}$$

请注意，当不存在引力子，或当 $f = 0$ 时，我们有 $\sigma_W^2 = 0$，因此不会产生熵。此外，我们指出，这种熵的热力学解释与将参数 β 解释为本征温度有关，详见第 3.1 节。最后，我们指出，由于式（6.2.12）源于涨落时空，因此可以预期，这种熵产生是受驱动（经典和量子）系统普遍且不可避免的特征。

结论与未来工作

时空量子涨落无论多么微弱，都无法避免，因为时空是物质传播和相互作用的背景。在这里，我们量化了这一认识对空间叠加态退相干和熵产生的影响。我们首先考虑一个复合量子系统，它处于由经典静态牛顿势和量子引力辐射自由度描述的时空中。这样的时空还会使质心变量与复合系统的内部自由度发生相互作用。由于我们关注的是质心变量的空间叠加态，因此将引力辐射自由度和系统自身的内部变量都积分消去。我们采用影响泛函方法描述这一与两个彼此相互作用的环境耦合的开放量子系统，并据此得到了质心变量处于两条经典可区分路径叠加态时的退相干函数。

我们发现，尽管仅与引力子的相互作用并不能使微观系统的空间叠加态退相干（这与文献中先前的结果一致 [30]），引力子与系统内部结构之间的相互影响将不可避免地导致退相干，即便这一过程通常发生在很长的时间尺度上。研究发现，此类退相干时间取决于引力子的初态。事实上，对于初始处于热态、相干态和压缩态的引力子，退相干时间相对于考虑初始真空态时所得到的数值有所缩短。这种缩短可能相当显著，尤其是对于预期用以描述遗迹引力子的初始压缩态 [157]。

除了由适当选择初始引力子态所带来的引力退相干增强之外，我们强调引力与系统内部自由度之间的相互影响在导致退相干中的作用，即使在完全不预期会发生退相干的情形中亦是如此。可以将系统的内部结构视为一种环境：由于引力的普适性，它充当量子时空涨落效应的中介与放大器。这开启了考虑更一般情形的可能性，即系统同时与引力环境和非引力环境发生相互作用。由于这些环境将不可避免地与彼此

发生相互作用，我们不禁要问，这种相互影响对系统会产生何种效应。非引力环境能否像系统的内部结构那样被用来中介并放大引力退相干，是未来研究的课题。

在这项工作中，我们还分析了通过引力子浴驱动量子系统所产生的熵产生。我们采用量子力学的退相干历史方法进行分析，该方法使我们能够赋予空间中轨迹这一概念以意义，并为作用于开放量子系统的功提供了恰当的定义，与经典力学完全类似。基于这一功的定义，我们以 Jarzynski 等式的形式确立了涨落定理，并据此估算了熵产生。我们指出，这种熵产生具有普适性，它源自普适引力辐射的量子自由度。

尽管我们考虑了外部施力者通过引力子浴驱动系统时产生的熵，但研究驱动者为时空本身的情形也很有意义。例如，可以分析引力涨落所产生的随机力所做的功。然而，这种功分布预计不会是高斯分布，这将使分析更加复杂。

一般而言，探究这些结果如何应用于相对论粒子乃至量子场，将会很有意义。例如，可以研究引力子诱导的退相干如何影响中微子传播中的波包色散（并依照前文讨论的思路，研究其他非引力环境，例如物质效应，如何放大这种退相干并改变中微子振荡概率公式）。最后，研究不同的时空如何影响我们的结果也很有意义。在这里，我们在牛顿极限下围绕一个度规展开了引力场，但对于爱因斯坦方程的任何其他经典解，也可以采用同样的方法，例如施瓦西解或罗伯逊-沃克膨胀宇宙。这些弯曲背景是否会显著影响引力子诱导的退相干和熵产生，仍有待研究。

第三部分

附录

附录 A

微分几何

本附录的主要目的是简要回顾广义相对论背后的数学基础，即微分几何。这绝不是对该主题全面或完整的介绍，许多数学概念和证明都未涉及。我们的方法主要参考了数学物理教材，例如[161, 162], 以及一些非常优秀的广义相对论著作 [54–56, 61]。如需了解更严谨的数学方法，请参阅参考文献 [163]。

A.1 可微流形

我们从微分几何中可能最基础的概念——可微流形（有时我们只写“流形”，将“可微”一词省略不提）——开始。关于流形，最基本的直观理解是：它是一种空间，在足够小的区域内看起来是平坦的，但整体上可能是弯曲的，也可能不是。整个流形由这些区域平滑地拼接而成。现在，为了给这一想法赋予精确的数学含义，我们需要先介绍一些定义。

我们需要的第一个基本定义是拓扑空间的定义。一个**拓扑空间** $(X, \mathcal{T})$由集合 X 以及 X 的子集族 $\mathcal{T}$组成，并满足以下三个性质：

1. 如果 $O_\alpha \in \mathcal{T}$对于 α，那么
$$\bigcup_\alpha O_\alpha \in \mathcal{T}. \tag{A.1.1}$$
2. 如果 O_1，…， $O_n \in \mathcal{T}$（n 是有限个），那么
$$\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{T}. \tag{A.1.2}$$
3. 全集 X 和空集 $\emptyset$ 都属于 $\mathcal{T}$。

集合 $\mathcal{T}$ 称为 X 上的**拓扑**，而集合 $\mathcal{T}$ 中列出的 X 的子集称为**开集**。

另一个不可或缺的概念是度量空间。**度规** $d: X \times X \to \mathbb{R}$ 是一个满足以下条件的函数：

- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, y) \geq 0$，其中等号成立当且仅当 $x = y$，并且
- $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$,

对所有 $x, y, z \in X$。如果 X 赋有度规 d, X 就成为一个拓扑空间，其开集由以每个点 x为中心的开圆盘给出，

$$O_\epsilon(x) = \{y \in X | d(x, y) < \epsilon\}, \tag{A.1.3}$$

以及它们所有可能的并。由此定义的拓扑 $\mathcal{T}$称为由 d确定的**度量拓扑**。拓扑空间$(X, \mathcal{T})$称为**度量空间**。

若$(X, \mathcal{T})$与$(Y, \mathcal{J})$是拓扑空间，则称映射 $f: X \to Y$为**连续**，如果 Y中每个开集 O的原像 $f^{-1}(O) = \{x \in X | f(x) \in O\}$是 X中的开集。若$(X, \mathcal{T})$与$(Y, \mathcal{J})$是拓扑空间，则映射 $f: X \to Y$是**同胚**，如果它连续，并且有一个同样连续的逆$f^{-1}: Y \to X$。若 X与 Y之间存在同胚，则称 X **同胚**于 Y，反之亦然。

现在我们可以给出可微流形的精确定义。集合M 是 n–维**可微流形**，如果

- M连同它的一族子集构成一个拓扑空间；
- M 配备了一族有序对 $\{(O_i, \phi_i)\}$，满足 $\{O_i\}$ 是一族覆盖 M的开集，也就是说，$\bigcup_i O_i = M$ 且 ϕ_i 是从 O_i 到 U_i 的一个开子集上的同胚 $\mathbb{R}^n$ (图A.1)；
- 给定 O_i 和 O_j，使得对于 $i \neq j$，映射 $\psi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$:$\phi_j(O_i \cap O_j) \mapsto \phi_i(O_i \cap O_j)$ 是无穷可微的。

有序对 (O_i, ϕ_i) 称为一个**坐标图**或**坐标系**，而整个集合$\{(O_i, \phi_i)\}$ 构成一个**图册**。子集 O_i 称为**坐标邻域**，而 ϕ_i 称为**坐标函数**。给定一点 $p \in M$，同胚ϕ_i 可由坐标组 $\{x^\mu(p)\} = \{x^0(p)....., x^{n-1}(p)\}$表示。

保持上述微分结构不变的变换称为微分同胚。更准确地说，设 $f: M \to M'$ 是一个同胚，ϕ 和 ψ 是坐标函数，其中 M 和

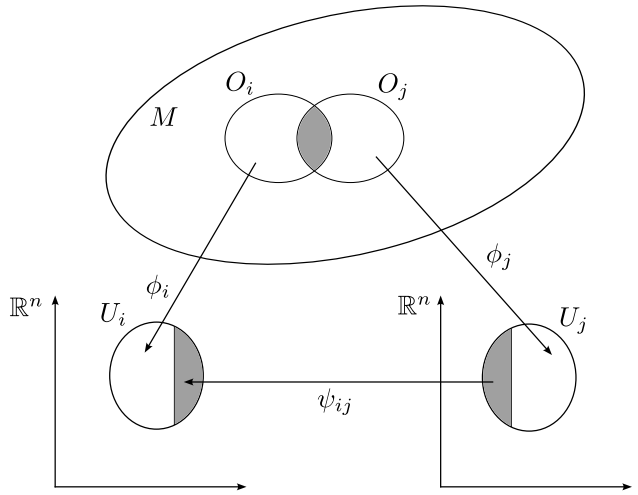


图 A.1：同胚 ϕ_i 和 ϕ_j 将流形 M 上的开集 O_i 和 O_j映射到欧几里得空间上的开集 U_i 和 U_j。

M' 分别为 n 和 n'（图 A.2）。如果 $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ 可逆，且$y = \psi \circ f \circ \phi^{-1}(x)$ 和 $x = \phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(y)$ 均为 C^∞（无穷可微），则称映射 f 为**微分同胚**，并称 M 和 M' 是**微分同胚的**，记作 $M \equiv M'$。由此可知，若 $M \equiv M'$，则 $n = n'$。事实上，两个微分同胚的流形被视为同一个流形。

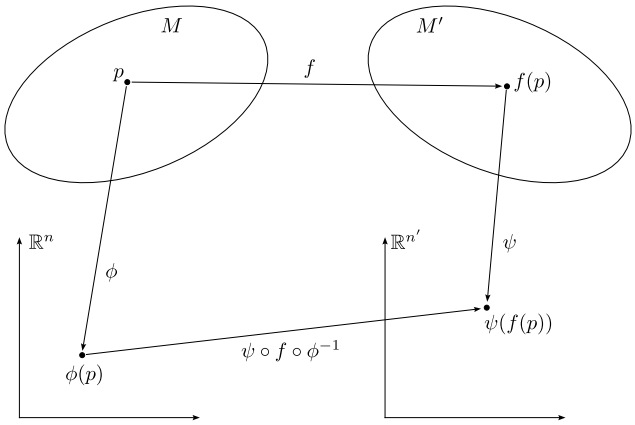


图 A.2：映射 $f:\ M \to M'$ 的坐标表示为 $\psi \circ f \circ \phi^{-1}:$ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n'}$。

由于向量的概念，尤其是张量的概念，在物理学中非常有用，因此在流形上定义向量空间将会很有意义。为此，我们需要定义一类非常特殊的映射，称为曲线。n–维流形 M 上的开曲线是映射 $c: (a, b) \to M$，其中 (a, b) 是 $\mathbb{R}$ 中的一个开区间，使得 $a < 0 < b$（图 A.3）。在坐标系 (O, ϕ) 上，曲线 $c(t)$ 的坐标表示为 $x = \phi \circ c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$。

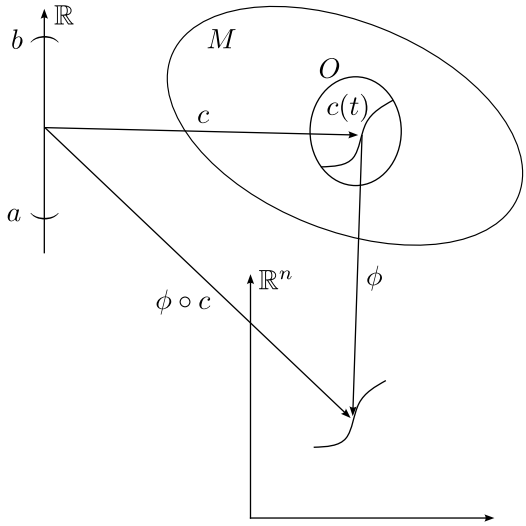


图 A.3： c 在 M中的一条曲线，由 t参数化，其坐标表示为 $\phi \circ c$。

最后，我们将 M 上的**函数** 定义为从 M 到 $\mathbb{R}$的光滑映射。在坐标系 (O, ϕ) 上，我们可以将 f 的坐标表示构造为 $f \circ \phi^{-1}$:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，它是一个以 n 个变量为自变量的实值函数。 M上的光滑函数集合记作 $\mathcal{F}(M)$。

现在我们可以在流形上引入张量的概念了。

A.2 张量

我们先从较为常见的一类张量开始，即向量。为了给出精确定义，考虑一条曲线 $c : (a, b) \to M$和一个函数 $f \colon M \to \mathbb{R}$，其中 (a, b) 是 $\mathbb{R}$ 中包含点 $t = 0$ 的一个开区间，且 t 是该曲线的任意参数化（图A.4）。选取一个局部坐标函数 ϕ 并使用链式法则，函数 f 在 $t = 0$处沿曲线 c 的变化率为

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}f(c(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ c)\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ c)\right]\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}(\phi \circ c)^\mu}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}x^\mu(c(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \partial_\mu f, \end{aligned} \tag{A.2.1}$$

with

$$\partial_\mu f = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \equiv \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^\mu}. \tag{A.2.2}$$

这意味着，变化率（$\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$）$\big|_{t=0}$可通过应用微分算符得到

$$X = X^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \quad \text{with} \quad X^\mu = \left. \frac{\mathrm{d}x^\mu(c(t))}{\mathrm{d}t} \right|_{t=0} \tag{A.2.3}$$

对于映射 f，也就是说

$$\left. \frac{\mathrm{d}f(c(t))}{\mathrm{d}t} \right|_{t=0} = X^\mu \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right) \equiv X(f). \tag{A.2.4}$$

于是我们定义 X 为**切向量**，其 M 在点 $c(0)$ 沿曲线所给定的方向 $c(t)$，如图A.4所示。

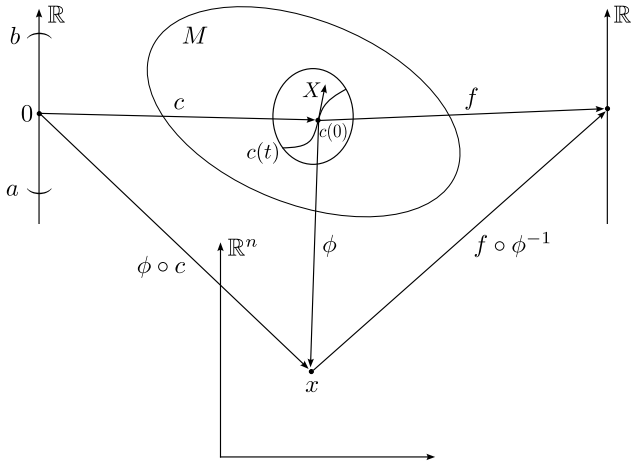


图 A.4：曲线 c、函数 f和局部坐标系 ϕ 共同定义流形 M上一点处的切向量 X，其方向由 $c(t)$确定。

总之，经过 p的每条曲线都会在 $\mathcal{F}$上定义一个算符，即切向量，它将 $f \mapsto$ 映射为在 p处的 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ 。基本上，我们将流形 M 上每一点处的向量定义为该点处的方向导数。因此，点 $p \in M$ 处的切向量 X是一个映射 $X: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$，它是线性的并遵循莱布尼茨法则，

- $X(af + bg) = aX(f) + bX(g), \forall f, g \in \mathcal{F}, \forall a, b \in \mathbb{R}$;
- $X(fg) = g(p)X(f) + f(p)X(g), \forall f, g \in \mathcal{F}$.

若 $X_1 = \mathrm{d}/\mathrm{d}t_1$ 和 $X_2 = \mathrm{d}/\mathrm{d}t_2$ 分别表示沿着经过 p的两条曲线 $x^\mu(t_1)$ 和 $x^\nu(t_2)$ 求导，则可以定义一个新算符 $Y = aX_1 + bX_2, a, b \in \mathbb{R}$。它显然是线性的，而且很容易证明它满足莱布尼茨法则。因此，$p \in M$ 的所有切向量构成的集合 T_pM 是一个向量空间，称为 M 在 p处的切空间，其维数与 M相同。由式 (A.2.3) 可知，$\hat{\mathrm{e}}_\mu \equiv \partial_\mu$ 是一个基向量。基 $\{\hat{\mathrm{e}}_\mu\}$ 称为坐标基。

现在我们可以看出，当改变坐标时，向量的分量如何变化。设 $p \in O_i \cap O_j$ 和 $\phi_i(p)$、$\phi_j(p)$分别是由坐标集合 x^μ 和 $x^{\mu'}$表示的两个坐标函数。由于坐标系 x^μ 中的基向量为 $\hat{\mathbf{e}}_\mu = \partial_\mu$，新坐标系 $x^{\mu'}$ 中的基向量为

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu. \tag{A.2.5}$$

向量 $X = X^\mu \partial_\mu$ 本身必须在基变换下保持不变，因此

$$X^\mu \partial_\mu = X^{\mu'} \partial_{\mu'} = X^{\mu'} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu, \tag{A.2.6}$$

因此，由于矩阵 $\partial x^{\mu'} / \partial x^\mu$ 是矩阵 $\partial x^\mu / \partial x^{\mu'}$ 的逆矩阵，

$$X^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} X^\mu. \tag{A.2.7}$$

分量变换规则（A.2.7）就是我们所称的向量变换律。

如果一个向量在流形的每个点上都能光滑地定义，我们就称其为**向量场**。换言之，对于任意 $f \in \mathcal{F}$（M），如果 X满足 $X[f] \in \mathcal{F}$（M），则 X是一个向量场。

由于 T_pM 是一个向量空间，因此存在一个与 T_pM 对应的对偶向量空间，其元素是从 T_pM到 $\mathbb{R}$的线性函数。该对偶空间称为 p处的**余切空间**，记作 T_p^*M。T_p^*M中的元素 ω：$T_pM \to \mathbb{R}$称为**对偶向量**或**余切向量**。函数 $f \in \mathcal{F}$（M）的微分 $\mathrm{d}f$ 是对偶向量的一个例子，其对 $V \in T_pM$ 的作用定义为

$$\langle \mathrm{d}f, V \rangle \equiv V(f) = V^\mu \partial_\mu f \in \mathbb{R}. \tag{A.2.8}$$

就坐标 $x = \phi(p)$ 而言，$\mathrm{d}f$表示为 $\mathrm{d}f = (\partial f / \partial x^\mu)\mathrm{d}x^\mu$，其中 ϕ 是一个坐标函数。自然可以将 $\{\mathrm{d}x^\mu\}$ 视为 T_p^*M 的一组基；事实上，它是一组对偶基，因为

$$\left\langle \mathrm{d}x^\nu, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\rangle = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \delta^\nu_\mu. \tag{A.2.9}$$

任意对偶向量 ω 随后可写为

$$\omega = \omega_\mu \mathrm{d}x^\mu, \tag{A.2.10}$$

其中 ω_μ 是 ω 的分量。

对偶向量的概念使我们能够定义内积。例如，

取一个向量 $V = V^\mu \partial_\mu$ 和一个对偶向量 $\omega = \omega_\mu \mathrm{d}x^\mu$。**内积** $\langle , \rangle$: $T_p^* M \times T_p M \to \mathbb{R}$ 可通过以下方式得到

$$\langle \omega, V \rangle = \omega_\mu V^\nu \left\langle \mathrm{d}x^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle = \omega_\mu V^\nu \delta^\mu_\nu = \omega_\mu V^\mu \equiv \omega(V). \tag{A.2.11}$$

接下来，令 $p \in O_i \cap O_j$ 和 $\phi_i(p)$ 以及 $\phi_j(p)$ 分别为由坐标集合 x^μ 和 $x^{\mu'}$表示的两个坐标函数。因此，我们有

$$\omega = \omega_\mu \mathrm{d}x^\mu = \omega_{\mu'} \mathrm{d}x^{\mu'}. \tag{A.2.12}$$

根据 $\mathrm{d}x^{\mu'} = \left(\partial x^{\mu'} / \partial x^\mu\right) \mathrm{d}x^\mu$这一事实，我们可以写出对偶向量 ω 分量的变换律:

$$\omega_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \omega_\mu. \tag{A.2.13}$$

最后，类型为 (q, r) 的**张量**是一种多重线性对象，它将 $T_p^* M$ 中的 q 个元素和 $T_p M$ 中的 r 个元素映射为一个实数,

$$T : \left[\times^q T_p^* M\right] [\times^r T_p M] \to \mathbb{R}, \tag{A.2.14}$$

其中，符号 $\times^q T_p^* M$表示空间 $T_p^* M$ q次笛卡尔积，向量空间 $T_p M$也有类似定义。在 $p \in M$处所有类型为 (q, r) 的张量组成的集合记为 $T^q_{r,p}(M)$。坐标基中张量 $T \in T^q_{r,p}(M)$ 的分量可以通过将该张量作用于基底对偶向量和向量来获得,

$$T^{\mu_1 \cdots \mu_q}{}_{\nu_1 \ldots \nu_r} = T(\mathrm{d}x^{\mu_1}, \ldots, \mathrm{d}x^{\mu_q}, \partial_{\nu_1}, \ldots, \partial_{\nu_r}). \tag{A.2.15}$$

这等价于展开式

$$T = T^{\mu_1 \cdots \mu_q}{}_{\nu_1 \ldots \nu_r} \partial_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\mu_q} \otimes \mathrm{d}x^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{\nu_r}, \tag{A.2.16}$$

其中 $\otimes$ 表示张量积。现在令 $V_i = V_i^\mu \partial_\mu$ $(1 \le i \le r)$ 和 $\omega_i = \omega_{i\mu} \mathrm{d}x^\mu$ ($1 \le i \le q$)。 T对它们的作用得到数值

$$T(\omega_1, \ldots, \omega_q; V_1, \ldots, V_r) = T^{\mu_1 \cdots \mu_q}{}_{\nu_1 \ldots \nu_r} \omega_{1\mu_1} \ldots \omega_{q\mu_q} V_1^{\nu_1} \ldots V_r^{\nu_r}. \tag{A.2.17}$$

如果 $p \in O_i \cap O_j$和 $\phi_i(p)$ 与 $\phi_j(p)$ 分别是由坐标集合 x^μ 和 $x^{\mu'}$ 表示的两个坐标函数，则张量 T 的分量

变化为

$$T^{\mu'_1\cdots\mu'_q}{}_{\nu'_1\cdots\nu'_r} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\mu'_q}}{\partial x^{\mu_q}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_r}}{\partial x^{\nu'_r}}\,T^{\mu_1\cdots\mu_q}{}_{\nu_1\cdots\nu_r}, \tag{A.2.18}$$

这就是张量的一般变换律。

我们将类型为（q，r）的**张量场** 定义为：对每个点 $p\in M$，光滑地赋予一个 $T^q_{r,\,p}(M)$ 中的元素。M 上所有类型为（q，r）的张量场构成的集合记为 $T^q_r(M)$。例如，$T^0_1(M)$ 是对偶向量场的集合。

由于张量本身是不依赖于坐标系的对象，因此用张量方程表示物理定律是很有用的（虽然并非绝对必要）。然而，物理定律通常涉及导数，而遗憾的是，一般而言，张量的偏导数并不是一个新的张量。例如，考虑对偶向量 $\partial_\mu\omega_\nu$ 的偏导数，并将其变换到一个新的坐标系中：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}}\omega_{\nu'} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\omega_\nu\right)\\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\omega_\nu\right)+\omega_\nu\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\right).\end{aligned} \tag{A.2.19}$$

如果 $\partial_\mu\omega_\nu$ 按照（0，2）型张量变换，第二项就不应该出现。因此，我们需要引入一个坐标无关的微分算子。为此，我们首先需要了解张量场如何通过流形之间的映射进行传递。

A.3 流形之间的映射

考虑两个流形 M 和 N，其维数分别为 m 和 n，坐标系分别为 x^μ 和 y^α。考虑映射 $\phi:\ M\to N$ 和函数$f:\ N\to\mathbb{R}$。我们将 f 通过 ϕ的**拉回**定义为 ϕ^*f，即

$$\phi^*f = (f\circ\phi): M\to\mathbb{R}. \tag{A.3.1}$$

我们将 ϕ^* 看作将函数 f 从 N“拉回”到 M（图 A.5）。

如果 $V(p)$ 是流形 M上点 p 处的一个向量，我们通过规定其对 N上的函数的作用，在 $\phi(p)$点、流形 N 上定义**推前**向量 ϕ_*V，

$$(\phi_*V)(f) = V(\phi^*f). \tag{A.3.2}$$

基本上，ϕ_*V对函数 f 的作用，就是 V对 ϕ^*f的作用。

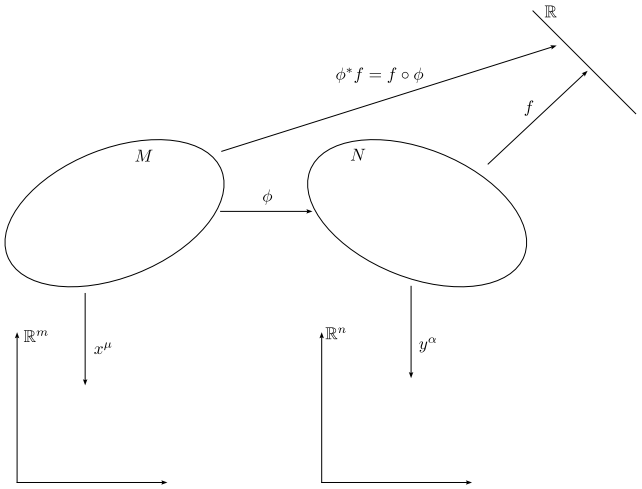


图 A.5：映射 $\phi: M \to N$ 对函数 f 的拉回。

由于 M 上的向量的一组基由偏导数集合 $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ 给出，而 N 上的一组基由偏导数集合 $\partial_\alpha = \partial/\partial y^\alpha$给出，我们可以通过将推前向量作用于一个测试函数，并运用偏导数的链式法则，将 $V = V^\mu \partial_\mu$ 的分量与 $(\phi_* V) = (\phi_* V)^\alpha \partial_\alpha$ 的分量联系起来，

$$(\phi_* V)^\alpha \partial_\alpha f = V^\mu \partial_\mu (\phi^* f) = V^\mu \partial_\mu (f \circ \phi) = V^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \partial_\alpha f. \tag{A.3.3}$$

因此，推前运算 ϕ_* 可以看作矩阵算子 $(\phi_* V)^\alpha = (\phi_*)^\alpha{}_\mu V^\mu$，其矩阵为

$$(\phi_*)^\alpha{}_\mu = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}. \tag{A.3.4}$$

对偶向量 ω 在 N 上的拉回 $\phi^* \omega$，由其对 M 上向量 V 的作用定义：它等于 ω 对 V 的推前的作用，

$$(\phi^* \omega)(V) = \omega(\phi_* V). \tag{A.3.5}$$

由此表达式可得

$$(\phi^* \omega)(V) = \omega_\alpha (\phi_* V)^\alpha = \omega_\alpha (\phi_*)^\alpha{}_\mu V^\mu = (\phi_*)_\mu{}^\alpha \omega_\alpha V^\mu. \tag{A.3.6}$$

其中 $(\phi_*)_\mu{}^\alpha = \partial y^\alpha / \partial x^\mu$。它与推前所用的矩阵相同（A.3.4），但矩阵作用以拉回对偶向量时，缩并的指标不同。

我们可以拉回具有任意数量下指标的张量。由于 $(0, r)$ 张量是从 r 向量的直积到 $\mathbb{R}$ 的线性映射，我们将

此类张量的拉回定义为原张量作用于推前向量所得的结果，

$$(\phi^* T)(V^{(1)}, \ldots, V^{(r)}) = T(\phi_* V^{(1)}, \ldots, \phi_* V^{(r)}), \tag{A.3.7}$$

其中，$T_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$是 N上的 (0，r) 张量。类似地，我们可以通过让任意 (q，0) 张量 $S^{\mu_1 \cdots \mu_q}$ 作用于拉回的对偶向量上，将其从 M 推前，

$$(\phi_* S)(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(q)}) = S(\phi^* \omega^{(1)}, \ldots, \phi^* \omega^{(q)}). \tag{A.3.8}$$

对于 (0，r) 张量拉回的矩阵表示，我们有

$$(\phi^* T)_{\mu_1 \ldots \mu_r} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial x^{\mu_r}} T_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}, \tag{A.3.9}$$

而对于 (q，0) 张量的推前，

$$(\phi_* S)^{\alpha_1 \ldots \alpha_q} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_q}}{\partial x^{\mu_q}} S^{\mu_1 \ldots \mu_q}. \tag{A.3.10}$$

一般而言，同时具有上指标和下指标的张量既不能被推前，也不能被拉回，因为矩阵 $\partial y^\alpha / \partial x^\mu$ 可能不可逆。然而，如果它可逆，那么 ϕ 定义了 M 与 N之间的一个微分同胚，从而允许我们定义任意张量的推前和拉回。具体而言，对于 M上的 (q，r) 张量场 $T^{\mu_1 \cdots \mu_q}{}_{\nu_1 \ldots \nu_r}$，我们将推前定义为

$$\begin{aligned}(\phi_* T)&(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(q)}, V^{(1)}, \ldots, V^{(r)}) \\ &= T(\phi^* \omega^{(1)}, \ldots, \phi^* \omega^{(q)}, [\phi^{-1}]_* V^{(1)}, \ldots, [\phi^{-1}]_* V^{(r)}).\end{aligned} \tag{A.3.11}$$

用分量表示，这变为

$$(\phi_* T)^{\alpha_1 \ldots \alpha_q}{}_{\beta_1 \ldots \beta_r} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_q}}{\partial x^{\mu_q}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial y^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_r}}{\partial y^{\beta_r}} T^{\mu_1 \cdots \mu_q}{}_{\nu_1 \ldots \nu_r}. \tag{A.3.12}$$

请注意，这与坐标系之间的张量变换律相似，见式（A.2.18）。正因如此，我们可以将微分同胚视为一种“主动”坐标变换。

微分同胚还提供了一种比较流形上不同点处张量的方法，我们可以用它来定义张量导数的计算方式。

A.4 李导数

给定一个微分同胚 $\phi\colon M \to M$和一个张量场 $T^{\mu_1 \cdots \mu_q}{}_{\nu_1 \ldots \nu_r}(x)$，我们可以定义张量在某点 p 处的值与其值之间的差

在 $\phi(p)$ 处拉回到 p后的值， $\phi^*[T^{\mu_1\cdots\mu_q}{}_{\nu_1\ldots\nu_r}(\phi(p))]$。因此，我们可以定义某种作用于张量场的导数算子，这需要一个单参数微分同胚族 ϕ_t。这个族可以视为一个光滑映射 $\mathbb{R}\times M\to M$，使得对每个 $t\in\mathbb{R}$，都有一个微分同胚 ϕ_t，满足

$$\phi_s\circ\phi_t=\phi_{s+t}. \tag{A.4.1}$$

请注意，这个条件意味着 ϕ_0 是恒等映射。

对于整个族 ϕ_t，一个点 p 描绘出 M 中的一条曲线，使得所有点对应的这些曲线覆盖整个流形。于是，我们可以将向量场 $V^\mu(x)$ 定义为在 $t=0$ 处求值时，各点处这些曲线的切向量所构成的集合。然而，这一整套思路也可以反过来理解；将单参数微分同胚族视为由向量场本身定义，会很有用。具体而言，给定任意一个 $V^\mu(x)$，我们将满足以下方程的曲线定义为它的**积分曲线** $x^\mu(t)$：

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}=V^\mu. \tag{A.4.2}$$

向量场 $V^\mu(x)$ 称为该微分同胚的**生成元**。

因此，给定一个向量场 $V^\mu(x)$，我们就有了一个以 t 为参数的微分同胚族，并可以考察张量沿积分曲线变化的速率。对于每个 t，我们可以将这种变化定义为张量拉回到 p 后的值与其在 p 处的原值之差，

$$\Delta_t T^{\mu_1\cdots\mu_q}{}_{\nu_1\ldots\nu_r}(p)=\phi_t^*[T^{\mu_1\cdots\mu_q}{}_{\nu_1\ldots\nu_r}(\phi_t(p))]-T^{\mu_1\cdots\mu_q}{}_{\nu_1\ldots\nu_r}(p). \tag{A.4.3}$$

注意，右侧的两项在 p 处都是张量。于是，我们将沿向量场对张量的**李导数**定义为

$$\mathcal{L}_V T^{\mu_1\cdots\mu_q}{}_{\nu_1\ldots\nu_r}=\lim_{t\to0}\left(\frac{\Delta_t T^{\mu_1\cdots\mu_q}{}_{\nu_1\ldots\nu_r}}{t}\right). \tag{A.4.4}$$

李导数是从 (q,r) 张量场到 (q,r) 张量场的映射，显然与坐标无关。它是线性的，

$$\mathcal{L}_V(aT+bS)=a\mathcal{L}_V T+b\mathcal{L}_V S, \tag{A.4.5a}$$

并遵循莱布尼茨法则，

$$\mathcal{L}_V(T\otimes S)=(\mathcal{L}_V T)\otimes S+T\otimes(\mathcal{L}_V S), \tag{A.4.5b}$$

其中 S和 T是张量， a和 b是常数。此外，李导数作用于函数时会简化为普通方向导数，

$$\mathcal{L}_V f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\partial_\mu f = V^\mu \partial_\mu f = V(f). \tag{A.4.5c}$$

向量场 $U(x)$ 关于 $V(x)$ 的李导数可表示为

$$\mathcal{L}_V U^\mu = [V,U]^\mu = V^\nu \partial_\nu U^\mu - U^\nu \partial_\nu V^\mu. \tag{A.4.6}$$

这个对易子称为**李括号**。注意， $\mathcal{L}_V U = -\mathcal{L}_U V$。

最后，用给定坐标系中的分量表示，任意张量场的李导数为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_q}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r} &= V^\sigma \partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_q}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r} \\ &- (\partial_\lambda V^{\mu_1}) T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_q}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r} - (\partial_\lambda V^{\mu_2}) T^{\mu_1\lambda\ldots\mu_q}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r} - \ldots \\ &+ (\partial_{\nu_1} V^\lambda) T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_q}{}_{\lambda\nu_2\ldots\nu_r} + (\partial_{\nu_2} V^\lambda) T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_q}{}_{\nu_1\lambda\ldots\nu_r} + \ldots .\end{aligned} \tag{A.4.7}$$

尽管这个表达式并未显式呈现张量性，但可以证明它是协变的（参见第A.6节）。

李导数是我们寻求坐标无关的导数算子所取得的一项成功成果。然而，可以认为这个算子缺乏一定的普遍性，因为它依赖于向量场的指定。因此，定义另一种导数算子，即协变导数，将会很有用。不过，在此之前，让我们稍作停顿，讨论微分几何中一个极其重要的张量——度规张量。

A.5 度规张量

度规张量是数学对象，它赋予流形上路径长度的概念，我们也将其称为线元

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu. \tag{A.5.1}$$

我们也可以用度规表示两个向量 V^μ 和 W^ν的内积

$$\mathrm{d}s^2(V,W) = g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu = V_\nu W^\nu. \tag{A.5.2}$$

我们将内积为零的两个向量称为**正交**，而向量与自身的内积称为它的**范数**。

度规是一种对称张量，也就是说，$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$。通过要求度规的行列式不为零，即 $\det(g_{\mu\nu}) \equiv g \neq 0$，我们可以适当地定义度规的逆度规 $g^{\mu\nu}$，使得

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = g_{\lambda\sigma} g^{\lambda\mu} = \delta^{\mu}_{\sigma}. \tag{A.5.3}$$

$g_{\mu\nu}$ 的对称性意味着 $g^{\mu\nu}$ 也具有对称性。我们可以用度规的逆来表示两个对偶向量 ω_μ 和 ζ_ν 的内积：

$$\mathrm{d}s^2(\omega, \zeta) = g^{\mu\nu} \omega_\mu \zeta_\nu = \omega^\nu \zeta_\nu. \tag{A.5.4}$$

方程（A.5.2）和（A.5.4）说明了通常所说的：度规用于升降指标。

将 $g_{\mu\nu}$ 化为其**典范形式**，即可刻画度规。在这种形式下，度规分量为

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(-1, -1, \ldots, -1, +1, +1, \ldots, +1, 0, \ldots, 0). \tag{A.5.5}$$

度规的**号差** 指正特征值和负特征值的数量；例如，对于闵可夫斯基空间，我们称其度规的号差为“负正正正”，因为

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(-1, +1, +1, +1) \tag{A.5.6}$$

这对整个流形都成立（在笛卡尔坐标中）。如果任何特征值为零，度规就是退化的，逆度规将不存在；如果度规连续且非退化，那么它在每一点的号差都相同。如果所有符号均为正，度规称为**欧几里得** 或**黎曼** （或简称正定）；如果只有一个负号，则称为**洛伦兹** 或**伪黎曼**；而同时具有若干个 $+1$和若干个 -1的度规则称为不定度规。

对于洛伦兹度量，向量的范数并非正定。若V^μ $g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu < 0$，则称其为**类时**；若 $g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = 0$，则称其为**类光**或**零**；若 $g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu > 0$，则称其为**类空**。

在单个点 p 上，可以从 $g_{\mu\nu}$的任意一组分量开始，将矩阵对角化，然后重新缩放基向量，使度规分量满足（A.5.5）。闵可夫斯基时空只是一个带有洛伦兹度规的四维流形，因此可以在单个坐标系（即笛卡尔坐标系）中全局完成这一过程。我们称其为平坦流形（或者在更具物理意义的语境中称为平直时空）。然而，对于一般度规而言，这并不成立。不过，在单个点处，总可以选择使度规张量呈现

平直形式的坐标，但通常对于不同的点，必须使用不同的坐标系来完成这一点。我们称这样的时空是弯曲的。接下来，了解如何从度规张量中提取曲率信息将会很有意义。下一节将从协变导数的概念开始，说明如何以与坐标无关的方式沿曲线对向量进行平行移动，同时考虑到流形的曲率。

A.6 协变导数

我们将**协变导数** ∇ 定义为一个映射，它将 (q,r) 张量场映射为 $(q,r+1)$ 张量场，并满足以下性质：

1.（线性） $\nabla(T+S) = \nabla T + \nabla S$；2.（莱布尼茨法则）
$\nabla(T\otimes S) = (\nabla T)\otimes S + T\otimes(\nabla S)$；3.（与缩并可交换）
$\nabla_\mu(T^\lambda{}_{\lambda\rho}) = (\nabla T)_\mu{}^\lambda{}_{\lambda\rho}$；4.（对标量退化为偏导数）
$\nabla_\mu\phi = \partial_\mu\phi$。

这里，ϕ 是一个标量场，T和 S 是任意秩的张量场。对于向量 V^μ的协变导数，容易验证，以下一般表达式满足上述所有要求：

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda, \tag{A.6.1}$$

其中，集合 n 矩阵$(\Gamma_\mu)^\nu{}_\lambda$ （每个 $n\times n$ 对应一个矩阵 μ，其中 n 是流形的维数）称为**联络系数**。方程（A.6.1）右侧的第二项可以看作是由于流形曲率而对向量偏导数所作的修正。我们可以通过要求方程（A.6.1）左侧为一个(1,1)张量，来确定 $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ 的变换性质。由此可知，在新的坐标系中，

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\Gamma^\nu_{\mu\lambda} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}. \tag{A.6.2}$$

这显然不是张量变换律，因此联络系数并不是真正的张量。

与向量的推理类似，对偶向量 ω_μ 的协变导数也可以表示为偏导数加上某种线性变换。为了找出这种线性变换，我们应用所需的

标量 $\omega_\mu V^\mu$ 的协变导数性质，由此可知 ω_μ 的协变导数必定具有以下形式

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\omega_\lambda. \tag{A.6.3}$$

任意秩张量的协变导数可推广为

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r} = {}& \partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r} \\ & + \Gamma^{\mu_1}_{\sigma\lambda} T^{\lambda\mu_2\ldots\mu_q}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r} + \Gamma^{\mu_2}_{\sigma\lambda} T^{\mu_1\lambda\ldots\mu_q}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r} + \ldots \\ & - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu_1} T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}{}_{\lambda\nu_2\ldots\nu_r} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu_2} T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}{}_{\nu_1\lambda\ldots\nu_r} - \ldots .\end{aligned} \tag{A.6.4}$$

为了定义协变导数，我们需要在流形上引入联络。联络在某个坐标系中由一组系数 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ 指定。这种指定通常并不唯一。然而，在广义相对论中，我们使用一种特殊的联络系数，它是在要求满足以下两个额外性质时得到的：

- （无挠） $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$；
- （度规相容性） $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$。

给定一个度规 $g_{\mu\nu}$，存在一个与其相容的唯一导数算符[55],使得

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \tag{A.6.5}$$

方程（A.6.5）给出的联络称为**克里斯托费尔联络**，相应的联络系数称为**克里斯托费尔符号**。

更一般地，设 $\nabla^{(1)}_\mu$和 $\nabla^{(2)}_\mu$是两个不同的协变导数，分别与不同的度规张量 $g^{(1)}_{\mu\nu}$ 和 $g^{(2)}_{\mu\nu}$相容。那么， $\nabla^{(1)}_\mu$对任意张量场的作用用 $\nabla^{(2)}_\mu$和张量场 $C^\sigma{}_{\mu\nu}$ 表示，可写为 [55]

$$\begin{aligned}\nabla^{(1)}_\sigma T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r} = {}& \nabla^{(2)}_\sigma T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r} \\ & + C^{\mu_1}{}_{\sigma\lambda} T^{\lambda\mu_2\ldots\mu_q}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r} + C^{\mu_2}{}_{\sigma\lambda} T^{\mu_1\lambda\ldots\mu_q}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r} + \ldots \\ & - C^\lambda{}_{\sigma\nu_1} T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}{}_{\lambda\nu_2\ldots\nu_r} - C^\lambda{}_{\sigma\nu_2} T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}{}_{\nu_1\lambda\ldots\nu_r} - \ldots .\end{aligned} \tag{A.6.6}$$

度规相容性意味着

$$C^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}_{(1)}\big(\nabla^{(2)}_\mu g^{(1)}_{\nu\rho} + \nabla^{(2)}_\nu g^{(1)}_{\rho\mu} - \nabla^{(2)}_\rho g^{(1)}_{\mu\nu}\big). \tag{A.6.7}$$

我们可以利用协变导数，得到李导数作用的一个明显协变的表达式。首先，注意向量场 $V^\mu(x)$ 与 $U^\mu(x)$ 的李括号可以写成

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V U^\mu &= [V,U]^\mu = V^\nu \partial_\nu U^\mu - U^\nu \partial_\nu V^\mu \\ &= V^\nu \nabla_\nu U^\mu - U^\nu \nabla_\nu V^\mu .\end{aligned} \tag{A.6.8}$$

这对任意无挠协变导数都成立，因为对易子涉及反对称化，它会抵消偏导数变换律中的非张量部分。因此，我们可以将李导数作用于张量的形式（式 A.4.7）写成显式协变的形式：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r} &= V^\sigma \nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r} \\ &\quad - (\nabla_\lambda V^{\mu_1}) T^{\lambda\mu_2\ldots\mu_q}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r} - (\nabla_\lambda V^{\mu_2}) T^{\mu_1\lambda\ldots\mu_q}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r} - \cdots \\ &\quad + (\nabla_{\nu_1} V^\lambda) T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}{}_{\lambda\nu_2\ldots\nu_r} + (\nabla_{\nu_2} V^\lambda) T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}{}_{\nu_1\lambda\ldots\nu_r} + \cdots .\end{aligned} \tag{A.6.9}$$

例如，度规张量的李导数为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} &= V^\sigma \nabla_\sigma g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu V^\lambda) g_{\lambda\nu} + (\nabla_\nu V^\lambda) g_{\mu\lambda} \\ &= \nabla_\mu V_\nu + \nabla_\nu V_\mu .\end{aligned} \tag{A.6.10}$$

这个表达式对于研究线性化引力的规范不变性尤其有用。

有了导数算子的恰当定义，我们现在可以介绍张量平行移动的概念，由此将引出流形上曲率的最终概念。

A.7 平行移动与测地线

让我们从最简单的非平凡张量场例子——向量场——开始。我们可能会想要比较并计算定义在不同点处的向量之间的运算，就像我们在基础的“平直空间物理”中通常所做的那样。然而，定义在不同点处的向量属于不同的向量空间。如果时空是平直的，这并不是问题，因为我们只需将向量移动到同一点，使它们属于同一个切空间，然后在那里相互比较即可。这就是我们所说的平行移动，基本上意味着我们在移动向量的同时保持它“恒定”。平行移动也可以定义在弯曲流形上，但问题在于，通常情况下，沿着一条路径平行移动张量后得到的结果

将取决于我们对曲线本身的选择。

给定一条曲线 $x^\mu(\lambda)$，在平直空间中，张量 $T^{\mu_1\cdots\mu_q}{}_{\nu_1\ldots\nu_r}$ 沿该曲线保持不变的条件为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}T^{\mu_1\cdots\mu_q}{}_{\nu_1\ldots\nu_r}=\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\mu}T^{\mu_1\cdots\mu_q}{}_{\nu_1\ldots\nu_r}=0. \tag{A.7.1}$$

在一般流形中，我们需要用协变导数替代偏导数。于是，我们将**方向协变导数**定义为

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\nabla_\mu. \tag{A.7.2}$$

这是一个仅沿路径定义的映射，它将 (q,r) 张量映射为 (q,r) 张量。张量 T 沿路径 $x^\mu(\lambda)$ 的**平行移动**定义为

$$\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\lambda}T\right)^{\mu_1\cdots\mu_q}{}_{\nu_1\ldots\nu_r}\equiv\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda}\nabla_\sigma T^{\mu_1\cdots\mu_q}{}_{\nu_1\ldots\nu_r}=0. \tag{A.7.3}$$

这是一个张量方程，称为**平行移动方程**。对于向量，它的形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}V^\mu+\Gamma^\mu_{\sigma\rho}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda}V^\rho=0. \tag{A.7.4}$$

平行移动的思想为我们提供了一种理解张量协变导数的方法：它量化了张量场的瞬时变化率，并以该张量若经过平行移动时的状态为参照 [54]。

平行移动取决于联络，因为不同的联络定义了不同的协变导数，从而决定了张量移动方式的差异。这里我们采用度量相容联络，在这种联络下，度规始终保持平行移动，

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\lambda}g_{\mu\nu}=\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda}\nabla_\sigma g_{\mu\nu}=0. \tag{A.7.5}$$

由此可知，两个经平行移动的向量的内积保持不变，并且相对于度量相容联络的平行移动会保持向量的范数。

将自身切向量平行移动的路径 $x^\mu(\lambda)$ 称为**测地线**。这样的平行移动条件写作

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2}+\Gamma^\mu_{\sigma\rho}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\lambda}=0. \tag{A.7.6}$$

这就是**测地线方程**。它再现了通常的直线概念，如果

联络系数是欧几里得空间中的克里斯托费尔符号。特别地，对于任意给定的空间，如果式（A.7.6）中的联络是克里斯托费尔联络，则测地线也是两点之间的最短距离，也就是说，它使长度取极值

$$l = \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}} \, \mathrm{d}\lambda \tag{A.7.7}$$

由于若一条曲线在某点的切向量是类时、零或类空的，就称该曲线在该点是类时、零或类空，因此根据度规相容性可知，测地线保持其自身的号差。零曲线的长度为零，而对于类时曲线，我们需要改变上面平方根中的符号，并使用术语**固有时**，

$$\tau = \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}} \, \mathrm{d}\lambda. \tag{A.7.8}$$

有时，将曲线参数指定为固有时本身会很有用。此时，对于常数 α 和 β，任何形如 $\tau \to \lambda = \alpha\tau + \beta$ 的变换都会使测地线方程保持不变。任何与上述固有时存在所述关系的参数 λ 都称为**仿射参数**。

A.8 黎曼曲率张量

我们现在可以引入曲率的测度了。回想一下，张量沿某一方向的协变导数衡量的是，该张量相对于沿该方向被平行移动后本应具有的值发生了多大变化。两个协变导数的对易子则衡量先沿一个方向再沿另一个方向对张量进行平行移动，与相反顺序之间的差异（图 A.6）。这一差异在平坦空间中预期并不存在，因而与流形的曲率相关。

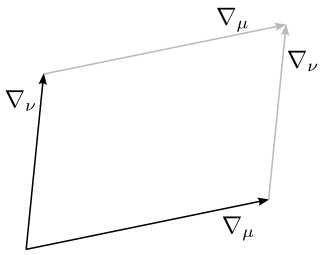


图 A.6：两个协变导数的对易子。

对于向量场 V^ρ，我们可以计算

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = \nabla_\mu(\nabla_\nu V^\rho) - \nabla_\nu(\nabla_\mu V^\rho). \tag{A.8.1}$$

经过一系列代数运算后，可得

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}V^\sigma, \tag{A.8.2}$$

其中我们将**黎曼张量** 定义为

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \tag{A.8.3}$$

这也可以证明与向量沿闭合回路平行移动后所经历的变化有关[55]。

一般而言，$[\nabla_\rho, \nabla_\sigma]$ 的作用量可作用于任意秩的张量，其计算方式为

$$\begin{aligned}[\nabla_\rho, \nabla_\sigma]X^{\mu_1\ldots\mu_q}{}_{\nu_1\ldots\nu_r} &= R^{\mu_1}{}_{\lambda\rho\sigma}X^{\lambda\mu_2\ldots\mu_q}{}_{\nu_1\ldots\nu_r} + R^{\mu_2}{}_{\lambda\rho\sigma}X^{\mu_1\lambda\ldots\mu_q}{}_{\nu_1\ldots\nu_r} + \ldots \\ &\quad - R^\lambda{}_{\nu_1\rho\sigma}X^{\mu_1\ldots\mu_q}{}_{\lambda\nu_2\ldots\nu_r} - R^\lambda{}_{\nu_2\rho\sigma}X^{\mu_1\ldots\mu_q}{}_{\nu_1\lambda\ldots\nu_r} - \ldots .\end{aligned} \tag{A.8.4}$$

黎曼张量满足以下性质：

1. $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$，
2. $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}$，
3. $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$，
4. $R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0$,

其中 $R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda}R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu}$。此外，它还满足一个非常重要的微分恒等式，称为**比安基恒等式**：

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0. \tag{A.8.5}$$

广义相对论中还有一些其他有用的张量，它们由黎曼张量得到。例如，我们可以进行缩并，构造**里奇张量**：

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}, \tag{A.8.6}$$

它是对称的。里奇张量的迹就是我们所说的**里奇标量**或**曲率标量**：

$$R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \tag{A.8.7}$$

现在，对比安基恒等式（A.8.5）进行两次缩并，可得

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\nu\sigma}g^{\mu\lambda}(\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu}) \\ &= \nabla^\mu R_{\rho\mu} - \nabla_\rho R + \nabla^\nu R_{\rho\nu}, \end{aligned} \tag{A.8.8}$$

or

$$\nabla^\mu R_{\rho\mu} = \frac{1}{2}\nabla_\rho R. \tag{A.8.9}$$

这促使我们将**爱因斯坦张量** 定义为

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \tag{A.8.10}$$

这样，二次缩并的比安基恒等式（A.8.9）便等价于

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \tag{A.8.11}$$

这意味着，与流形曲率有根本联系的爱因斯坦张量是守恒的。

A.9 测地线偏离

现在我们来讨论曲率的另一种重要表现，即违反欧几里得第五公设。该公设基本上指出，最初平行的直线在整个空间中始终保持平行。在弯曲空间中，情况并非如此；由于直线的推广概念是测地线，这种违反可由测地线偏离方程定量描述。

考虑一个由单参数构成的测地线族，$\gamma_s(t)$，也就是说，对于每个 $s \in \mathbb{R}$，γ_s 都是以参数 t为参数化的测地线。这些曲线构成的集合定义了一个光滑的二维曲面；只要我们选取的测地线族彼此不相交，就可以选择 s和 t作为坐标（图 A.7）。整个曲面就是点的集合 $x^\mu(s,t) \in M$。那么，接下来考虑两个向量场：测地线的切向量，

$$T^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}, \tag{A.9.1}$$

以及偏离向量

$$S^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s}. \tag{A.9.2}$$

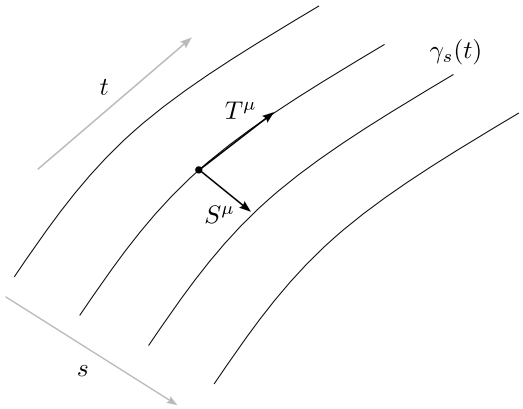


图 A.7：一组测地线 $\gamma_s(t)$，其切向量为 T^μ，偏离向量为 S^μ。

我们将测地线的相对速度定义为

$$V^\mu = T^\rho \nabla_\rho S^\mu, \tag{A.9.3}$$

以及测地线的相对加速度

$$A^\mu = T^\rho \nabla_\rho V^\mu. \tag{A.9.4}$$

由于 S 和 T 是适用于某个坐标系的基向量，它们的对易子为零 [54], 这意味着

$$S^\rho \nabla_\rho T^\mu = T^\rho \nabla_\rho S^\mu. \tag{A.9.5}$$

直接计算可得

$$A^\mu = \frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{d}t^2} S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho S^\sigma, \tag{A.9.6}$$

这称为**测地线偏离方程**。它表明，两条相邻测地线之间的相对加速度与曲率成正比。

A.10 局部惯性坐标

讨论了可微流形中的曲率之后，现在让我们说明如何构造一组坐标，使一个小区域在局部看起来是平坦的。在广义相对论中，这与等效原理有关。粗略地说，等效原理涉及一个问题：能否通过局部实验探测到时空曲率 [54]。这里我们将说明如何在流形中的一点构造这样的参考系

。下一节中，我们将说明如何在一整条曲线上做到同样的事，所考虑的区域要足够小。

对于给定点 $p \in M$，我们可以为包含 p 的小区域定义一组局部平坦坐标，称为**局部惯性坐标**。为了构造这样的坐标系，设 k^μ 是 p 处的一个切向量，满足$\lambda(p) = 0$,

$$k^\mu = \left.\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}. \tag{A.10.1}$$

该切向量定义了一条经过 p 的测地线。由于我们指定了初始条件 $x^\mu(\lambda = 0)$ 和 $k^\mu(\lambda = 0)$，而测地线方程是一个二阶微分方程，因此这条测地线是唯一的。具体来说，在 M 中存在唯一一点满足 $\lambda = 1$。然后，我们将 p 处的**指数映射** $\exp_p : T_pM \to M$ 定义为

$$\exp_p(k) = x^\nu(\lambda = 1), \tag{A.10.2}$$

其中 $x^\nu(\lambda)$ 是在初始条件（A.10.1）下满足测地线方程的解 .

由于从同一点出发的不同测地线最终可能相交，指数映射不一定是一一映射。然而，可以证明，总存在 p 的一个足够小的邻域，使得在该邻域上指数映射是一一映射 [164]。这一事实使我们能够利用指数映射构造局部惯性坐标。

我们已经说明，对于任意给定的点 $p \in M$，都可以找到基向量 $\{\hat{\mathbf{e}}_\mu\}$，使得 T_pM 的度规分量具有典范形式,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \tag{A.10.3}$$

在 p 处。我们的下一个任务是找到一个坐标系 x^μ，使基向量 $\{\hat{\mathbf{e}}_\mu\}$构成坐标基，$\hat{\mathbf{e}}_\mu = \partial_\mu$，并且满足 $\partial_\sigma g_{\mu\nu} = 0$。为此，我们考虑一个足够接近 p 的点 $q \in M$，并将坐标$x^\mu(q)$定义为切向量 $k = k^\mu \hat{\mathbf{e}}_\mu$ 的分量，其中该切向量通过指数映射 $\exp_p$ 映射到 q。这些坐标称为 p 处的**黎曼正规坐标**。

现在，对于某个固定向量 k^μ，形如 λk^μ 的一组参数化向量经指数映射后会映射到测地线上的点。因此，在黎曼正规坐标中，经过 p 的任意测地线都可以表示为

$$x^\mu(\lambda) = \lambda k^\mu, \tag{A.10.4}$$

对于它，我们有

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} = 0 \tag{A.10.5}$$

沿着经过 p 的任意测地线，在这个坐标系中。测地线方程（A.7.6）进而意味着

$$\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}(p) = 0, \tag{A.10.6}$$

由此度规相容性给出

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu} = 0 \tag{A.10.7}$$

在 p。该结果与（A.10.3）一起构成了局部惯性坐标的所需性质。

A.11 费米正规坐标

既然我们已经看到如何在单个点的小邻域内构造局部惯性坐标，现在让我们证明，可以在（伪）黎曼流形中任意一条曲线附近引入坐标，使得度规沿整条曲线呈直角形式。这些坐标称为**费米正规坐标**，此处我们感兴趣的是该曲线为测地线 γ的情形。这些坐标将被构造以满足所谓的费米条件，

$$g_{\mu\nu}\Big|_{\gamma} = \eta_{\mu\nu}, \tag{A.11.1a}$$

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Big|_{\gamma} = 0, \tag{A.11.1b}$$

沿给定的测地线。首先我们将说明这种构造如何实现，然后进而写出测地线邻域内度规张量在费米正规坐标下的分量。本节我们遵循文献 [165]的展开（另见文献 [57, 59, 166]）。

A.11.1 构造费米正规坐标

我们先在时空流形中任取一点 p_0 作为坐标系的原点，并选取一组正交归一向量 $\hat{\mathbf{e}}_0, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_3$ atp_0 来确定坐标轴。现在令 γ 为唯一一条从 p_0 出发、在该点以切向量 $\hat{\mathbf{e}}_0$ 为切向量的类时测地线。我们用 t 表示其上的固有时，使得 $p_0 = \gamma(t = 0)$。原点处的正交归一向量组记为$\hat{\mathbf{e}}_0(0) \ldots, \hat{\mathbf{e}}_3(0)$。现在我们知道，测地线上任意两点处的切向量都通过沿 γ平行移动而相互关联。因此，向量 $\hat{\mathbf{e}}_0(t)$在任意点 $p = \gamma(t)$处都将与该测地线相切；同理，向量 $\hat{\mathbf{e}}_i(0)$将

经平行移动后得到 $\hat{\mathbf{e}}_i(t)$，位于 p处。为简单起见，我们假设 $\hat{\mathbf{e}}_0$ 是类时矢量，而所有 $\hat{\mathbf{e}}_i$都是类空的。

现在考虑点 q，它不一定是测地曲线 γ 上的一点，其费米正规坐标记为 x^μ。我们在点 $p=\gamma(x^0=t)$ 处构造单位矢量

$$\mathbf{v}(x^0)=v^i\hat{\mathbf{e}}_i(x^0),\qquad v^i=\frac{x^i}{s}, \tag{A.11.2}$$

其中 $s=\sqrt{x^jx_j}$。通过改变 v^i，我们可以构造一族与 γ 在 p 处正交的类空测地线 $\beta(x^0,\ v^i)$。于是，有一条唯一的测地线在 p 处与 γ 正交，与向量 $\mathbf{v}$ 相切，并经过点 q，其固有距离为 s，

$$q=\beta(x^0,v^i,s). \tag{A.11.3}$$

如果点 q 用某个坐标系中的坐标值 $x^{\mu'}(q)$ 表示，且该坐标系中的度规分量 $g_{\mu'\nu'}(x^{\sigma'})$已知，则式（A.11.3）可用这些坐标写成

$$x^{\mu'}=x^{\mu'}(x^0,v^i,s). \tag{A.11.4}$$

由于测地线方程不会因仿射参数 λ 的重新缩放而改变，因此

$$x^{\mu'}(x^0,v^i,s\lambda)=x^{\mu'}(x^0,sv^i,\lambda). \tag{A.11.5}$$

特别地，回想一下 $x^i=sv^i$，我们得到

$$x^{\mu'}(x^0,v^i,s)=x^{\mu'}(x^0,sv^i,1)=x^{\mu'}(x^0,x^i,1)=x^{\mu'}(x^\mu), \tag{A.11.6}$$

这给出了任意坐标 $x^{\mu'}$ 与费米正规坐标 x^μ 之间的变换律。

在 $x^{\mu'}$ 坐标中，测地线 $\beta(x^0,\ v^i,\ s)$ 的切向量为

$$v^{\mu'}=\frac{\mathrm{d}x^{\mu'}}{\mathrm{d}s}, \tag{A.11.7}$$

沿着 γ 计算可得

$$v^{\mu'}\Big|_\gamma=\frac{\mathrm{d}x^{\mu'}}{\mathrm{d}s}\Big|_\gamma=\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^i}\Big|_{s=0}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^i}\Big|_{s=0}v^i. \tag{A.11.8}$$

直接比较方程（A.11.2）和（A.11.8）即可得到

$$(\hat{\mathbf{e}}_i)^{\mu'}=\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^i}\Big|_\gamma. \tag{A.11.9}$$

此外，由于 γ 处于 $p=\gamma(x^0)$ 的切向量为 ∂_0，我们发现，沿着 γ，

$$(\hat{\mathbf{e}}_\mu)^{\mu'}=\left.\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}\right|_\gamma, \tag{A.11.10}$$

或 $\hat{\mathbf{e}}_\mu(t)=\partial_\mu|_\gamma$。

费米正规坐标中的度规分量x^μ 与任意坐标中的度规分量 $x^{\mu'}$ 之间的关系为

$$g_{\mu\nu}=\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}g_{\mu'\nu'}. \tag{A.11.11}$$

在测地线 γ 上对其求值，并利用方程（A.11.10），可得

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu}\Big|_\gamma&=\left.\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}\right|_\gamma\left.\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\right|_\gamma g_{\mu'\nu'}=(\hat{\mathbf{e}}_\mu)^{\mu'}(\hat{\mathbf{e}}_\nu)^{\nu'}g_{\mu'\nu'}=(\hat{\mathbf{e}}_\mu)^{\mu'}(\hat{\mathbf{e}}_\nu)_{\mu'}\\&=\eta_{\mu\nu},\end{aligned} \tag{A.11.12}$$

由于向量 $\hat{\mathbf{e}}^\mu$ 彼此正交，并且我们选择 $\hat{\mathbf{e}}_0$ （$\hat{\mathbf{e}}_i$）为类时（类空）向量。因此，费米第一条件（A.11.1a）沿测地线 γ得到满足。

接下来，回顾一下，曲线 $x^0=t, x^i=v^is$ 满足测地线方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^\mu_{\sigma\rho}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}s}=0, \tag{A.11.13}$$

这意味着

$$\Gamma^\mu_{ij}v^iv^j=0, \tag{A.11.14}$$

其中 Γ^μ_{ij} 取决于 t 和 $x^i=v^is$。但沿着 γ，$s=0$ 对 v^i的依赖消失。于是，为了使方程（A.11.14）成立，我们必须有

$$\left.\Gamma^\mu_{ij}\right|_\gamma=0. \tag{A.11.15}$$

现在来看其他符号，我们回想一下，向量 $\hat{\mathbf{e}}_0(t)$，其在费米正规坐标中的分量为$(\hat{\mathbf{e}}_0)^\mu=\delta^\mu_0$ 根据方程（A.11.10），必须满足沿着 γ的平行移动方程，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{\mathbf{e}}_0)^\mu+\Gamma^\mu_{\sigma\rho}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}t}(\hat{\mathbf{e}}_0)^\rho=0\implies\Gamma^\mu_{\sigma\rho}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}t}\delta^\rho_0=0, \tag{A.11.16}$$

由此可得

$$\left.\Gamma^\mu_{\sigma0}\right|_\gamma=\left.\Gamma^\mu_{0\sigma}\right|_\gamma=0. \tag{A.11.17}$$

综合方程（A.11.15）和（A.11.17），可得费米第二条件，

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Big|_{\gamma} = 0. \tag{A.11.18}$$

因此，给定一条测地线，可以在其附近引入费米正规坐标$x^{\mu} = (t,\ x^{i})$，使克里斯托费尔符号沿该测地线消失，其中 t 为测地线固有时。此外，沿着 γ，$x^{i} = 0$。

A.11.2 度规分量

现在我们要推导度规张量在测地线 γ附近的分量表达式，并将其写成关于 x^{i} 的二阶幂级数展开。

由于 $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = 0$ 对 $x^{i} = 0$处的所有 x^{0} 均成立，我们可以对其关于x^{0} 求微分，得到

$$\partial_0\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Big|_{\gamma} = 0. \tag{A.11.19}$$

根据克里斯托费尔符号的定义，这意味着

$$\partial_0\partial_\sigma g_{\mu\nu}\Big|_{\gamma} = 0. \tag{A.11.20}$$

由费米条件（A.11.1）可知，零阶项为闵可夫斯基度规，而线性项消失。然后，利用方程（A.11.20），我们可以写出

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\partial_i\partial_j g_{\mu\nu}\Big|_{\gamma} x^{i}x^{j} + O(x^{3}). \tag{A.11.21}$$

黎曼曲率张量为

$$\begin{aligned} R_{\rho\sigma\mu\nu}\Big|_{\gamma} &= g_{\rho\lambda}\big(\partial_\mu\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\big)\Big|_{\gamma} \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\mu\partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma g_{\rho\mu} + \partial_\nu\partial_\rho g_{\mu\sigma})\Big|_{\gamma}. \end{aligned} \tag{A.11.22}$$

由此方程可立即得到

$$R_{i0j0}\Big|_{\gamma} = -\frac{1}{2}\,\partial_i\partial_j g_{00}\Big|_{\gamma}. \tag{A.11.23}$$

此外，由公式（A.11.19）可知

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu0}\Big|_{\gamma} = \partial_\mu\Gamma^{\rho}_{\sigma0}\Big|_{\gamma}. \tag{A.11.24}$$

为了求得度规的其他二阶导数，我们需要使用测地线偏离方程，

$$\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{d}s^2}n^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}s}n^\sigma, \tag{A.11.25}$$

这里我们现在用 n^μ 表示偏离矢量。该方程可改写为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}n^\mu + 2\Gamma^\mu_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}n^\sigma + \big(\partial_\nu\Gamma^\mu_{\rho\sigma} - \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}\Gamma^\lambda_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\rho\sigma} - R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}\big)\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}s}n^\sigma = 0. \tag{A.11.26}$$

回顾一下，测地线族 $\beta(x^0, v^i, s)$ 在费米正规坐标中由 $x^0 = t$、$x^i = v^i s$ 描述，因此偏离向量为

$$n^\mu_{(i)} = \frac{\partial x^\mu}{\partial v^i} = s\delta^\mu_i, \tag{A.11.27}$$

满足 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}n^\mu_{(i)} = \delta^\mu_i$ 且 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}n^\mu_{(i)} = 0$。对于这种情况，测地线偏离方程（A.11.26）给出

$$2\Gamma^\mu_{ji}v^j + s\big(\partial_j\Gamma^\mu_{ki} - \Gamma^\mu_{\lambda i}\Gamma^\lambda_{jk} + \Gamma^\mu_{j\lambda}\Gamma^\lambda_{ki} - R^\mu{}_{jki}\big)v^j v^k = 0. \tag{A.11.28}$$

在第一项中，我们可以将克里斯托费尔符号展开为

$$\Gamma^\mu_{ji} = \Gamma^\mu_{ji}\Big|_\gamma + s\,\partial_k\Gamma^\mu_{ji}\Big|_\gamma v^k + O(s^2), \tag{A.11.29}$$

因此，将方程两边除以 s，然后取极限 $s \to 0$，可得

$$\big(\partial_j\Gamma^\mu_{ki} + 2\partial_k\Gamma^\mu_{ji} - R^\mu{}_{jki}\big)\Big|_\gamma v^j v^k = 0, \tag{A.11.30}$$

or

$$\big(\partial_k\Gamma^\mu_{ij} + \partial_j\Gamma^\mu_{ik}\big)\Big|_\gamma = \frac{1}{3}(R^\mu{}_{jki} + R^\mu{}_{ikj})\Big|_\gamma. \tag{A.11.31a}$$

我们也可以写出由上式经过循环置换得到的表达式，

$$\big(\partial_i\Gamma^\mu_{jk} + \partial_k\Gamma^\mu_{ji}\big)\Big|_\gamma = \frac{1}{3}(R^\mu{}_{kij} + R^\mu{}_{jik})\Big|_\gamma. \tag{A.11.31b}$$

and

$$\big(\partial_j\Gamma^\mu_{ki} + \partial_i\Gamma^\mu_{kj}\big)\Big|_\gamma = \frac{1}{3}(R^\mu{}_{ijk} + R^\mu{}_{kji})\Big|_\gamma. \tag{A.11.31c}$$

将式（A.11.31b）加到式（A.11.31a）上，再从中减去式（A.11.31c），最终得到

$$\partial_k \Gamma^{\mu}_{ij}\Big|_{\gamma} = \frac{1}{3}(R^{\mu}{}_{jki} + R^{\mu}{}_{ikj})\Big|_{\gamma}. \tag{A.11.32}$$

现在，对于度规的二阶导数，我们将度量相容条件 $\nabla_l g_{\mu\nu} = 0$ 写为

$$\partial_l g_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{l\mu} g_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{l\nu} g_{\mu\lambda} = 0, \tag{A.11.33}$$

对其关于 x^k 求微分，并沿 γ 计算，得到

$$\partial_k \partial_l g_{\mu\nu}\Big|_{\gamma} = \partial_k \Gamma^{\lambda}_{l\mu}\Big|_{\gamma} \eta_{\lambda\nu} + \partial_k \Gamma^{\lambda}_{l\nu}\Big|_{\gamma} \eta_{\mu\lambda}. \tag{A.11.34}$$

然后，利用方程（A.11.24）和（A.11.32）可得

$$\begin{aligned}
\partial_k \partial_l g_{0i}\Big|_{\gamma} &= \partial_k \Gamma^{\lambda}_{l0}\Big|_{\gamma} \eta_{\lambda i} + \partial_k \Gamma^{\lambda}_{li}\Big|_{\gamma} \eta_{0\lambda} \\
&= R_{ilk0}\Big|_{\gamma} + \frac{1}{3}(R_{0ikl} + R_{0lki})\Big|_{\gamma} \\
&= \frac{1}{3}(3R_{0kli} - R_{0kli} - R_{0lik} + R_{0lki})\Big|_{\gamma} \\
&= \frac{2}{3}(R_{0kli} + R_{0lki})\Big|_{\gamma},
\end{aligned} \tag{A.11.35}$$

其中用到了黎曼张量的性质。同样，利用方程（A.11.32）可得

$$\begin{aligned}
\partial_k \partial_l g_{ij}\Big|_{\gamma} &= \partial_k \Gamma^{\lambda}_{li}\Big|_{\gamma} \eta_{\lambda j} + \partial_k \Gamma^{\lambda}_{lj}\Big|_{\gamma} \eta_{i\lambda} \\
&= -\frac{1}{3}(R_{ikjl} + R_{iljk})\Big|_{\gamma}.
\end{aligned} \tag{A.11.36}$$

将公式（A.11.23）、（A.11.35）和（A.11.36）中的结果代入度规展开式（A.11.21），最终得到

$$g_{00} = -1 - R_{i0j0}\Big|_{\gamma} x^i x^j + O(x^3), \tag{A.11.37a}$$

$$g_{0i} = -\frac{2}{3} R_{0jik}\Big|_{\gamma} x^j x^k + O(x^3), \tag{A.11.37b}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{ikjl}\Big|_{\gamma} x^k x^l + O(x^3). \tag{A.11.37c}$$

这些就是所需的以费米正规坐标表示的度规分量 x^μ，精确到二阶。

现在，在结束本节之前，让我们快速讨论一下度规展开有效的“足够小区域”这一概念。式（A.11.37）清楚地表明，该展开仅在 x^i取较小值时有效，但随之而来的自然问题是：相对于 什么而言较小?

为回答这一问题，请注意度规张量是无量纲的，并且由于黎曼张量包含 $g_{\mu\nu}$的二阶导数，其量纲为长度平方的倒数。于是，我们可以引入度规的典型变化尺度这一概念，记为 R_0，使得 $R_{\rho\sigma\mu\nu} \sim O\left(1/R_0^2\right)$。例如，可以通过黎曼张量的完全缩并来对其进行精确定义，$R_0^{-4} \propto R^{\rho\sigma\mu\nu}R_{\rho\sigma\mu\nu}$，但对于我们的目的而言，这样精确的定义并非必要。重要的是，R_0 度量了度规发生显著变化所跨越的尺度。从这个意义上说，度规展开（A.11.37）实际上是对比值 x/R_0的各次幂进行展开。这意味着，只要 $x \ll R_0$，费米正规坐标就仍然有效；也就是说，正是曲率本身决定了该区域需要“小到什么程度”。曲率越强，R_0 就越小，因此对于使式（A.11.37）仍然有效的 x^i 取值而言，允许的值也越小。

附录 B

引力子被牛顿势散射

在本附录中，我们显式计算引力子被牛顿源散射的微分截面。

B.1 S–矩阵

在第1 章中，我们证明描述引力辐射与经典牛顿势之间相互作用的作用量由式（1.4.37）给出。这里我们将只处理TT规范下的度规微扰场，即式（1.4.30），因此我们将它记为 $h_{\mu\nu}$，而不使用显式记号 $h^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu}$，因为不会引起混淆。此外，我们将重新标度场 $h_{\mu\nu} \to \kappa_{\mathrm{g}} h_{\mu\nu}$，其中 $\kappa_{\mathrm{g}} = \sqrt{32\pi}$，使其正则归一化。因此，作用量写为

$$S_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x \left(h_{ij}\Box h^{ij} + 2\phi\, h_{ij}\delta_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu h^{ij}\right), \tag{B.1.1}$$

其中 ϕ**(x)**表示由质量为 M_N的牛顿质量源产生的与时间无关的引力势。我们现在的目标是求出引力子以角度 θ被散射的概率。

如第1章所述，引力辐射的（正则）量子化是通过写出场算符来完成的

$$\hat{h}_{\mu\nu}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\sum_s \left[\epsilon^s_{\mu\nu}(p)\hat{a}_{p,s}e^{ipx} + \epsilon^s_{\mu\nu}{}^*(p)\hat{a}^\dagger_{p,s}e^{-ipx}\right], \tag{B.1.2}$$

其中，$p^\mu = (\omega_p,\ \mathbf{p})$，$\epsilon^s_{\mu\nu}$ 表示偏振张量。湮灭与产生算符满足对易关系

$$\left[\hat{a}_{p,s}, \hat{a}^\dagger_{p',s'}\right] = (2\pi)^3\delta_{ss'}\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}'). \tag{B.1.3}$$

现在，考虑一个初始单引力子态 $|i\rangle$，其位于 $t=-\infty$，动量为p_1，偏振为 s_1，且距离引力势的源ϕ足够远。相互作用之后，得到一个最终单引力子态 $|f\rangle$，其位于 $t=+\infty$，动量为 p_2，偏振为 s_2。假设势 ϕ 在无穷远处足够快地趋于零，因此我们可以认为相互作用动力学发生在某个有限的时间区间内，并且在 $t\to\pm\infty$理论是自由的。跃迁概率的形式为

$$P_{\text{transition}}=\frac{|\langle f|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle\,\langle i|i\rangle}, \tag{B.1.4}$$

其中重叠 $\langle f|i\rangle$ 是一个 S–矩阵元，且

$$|i\rangle=\sqrt{2\omega_{p_1}}\hat{a}^\dagger_{p_1,s_1}(-\infty)\,|\Omega\rangle\,, \tag{B.1.5a}$$
$$|f\rangle=\sqrt{2\omega_{p_2}}\hat{a}^\dagger_{p_2,s_2}(+\infty)\,|\Omega\rangle\,, \tag{B.1.5b}$$

而 $|\Omega\rangle$ 是相互作用理论的真空态。具体而言，我们有

$$\langle f|i\rangle=\sqrt{2\omega_{p_1}}\sqrt{2\omega_{p_2}}\,\langle\Omega|\hat{a}_{p_2,s_2}(+\infty)\hat{a}^\dagger_{p_1,s_1}(-\infty)|\Omega\rangle\,. \tag{B.1.6}$$

值得注意的是，方括号内的算符按时间排序，因此我们可以将该表达式改写为更方便的形式：

$$\begin{aligned}\langle f|i\rangle=&\sqrt{2\omega_{p_1}}\sqrt{2\omega_{p_2}}\\&\times\langle\Omega|\mathrm{T}\big\{[\hat{a}_{p_2,s_2}(+\infty)-\hat{a}_{p_2,s_2}(-\infty)]\big[\hat{a}^\dagger_{p_1,s_1}(-\infty)-\hat{a}^\dagger_{p_1,s_1}(+\infty)\big]\big\}|\Omega\rangle\,,\end{aligned} \tag{B.1.7}$$

其中 T 表示通常的时间排序运算。这与我们此前得到的表达式基本相同，因为时间排序会将不需要的 $\hat{a}_{p_2,\ s_2}(-\infty)$移到左边，使其湮灭 $|\Omega\rangle$；并将不需要的 $\hat{a}^\dagger_{p_1,\ s_1}(+\infty)$移到右边，使其湮灭 $\langle\Omega|$。这个新表达式将证明很有用，因为我们可以将它与场算符联系起来，如下所示。

假设场在 $\mathbf{x}=\pm\infty$ 处衰减至零，我们可以写成

$$\begin{aligned}i\int\mathrm{d}^4x\,e^{-ipx}\Box\hat{h}_{\mu\nu}(x)&=i\int\mathrm{d}^4x\,e^{-ipx}\big(-\partial_t^2+\nabla^2\big)\hat{h}_{\mu\nu}(x)\\&=-i\int\mathrm{d}^4x\,e^{-ipx}\big(\partial_t^2+\omega_p^2\big)\hat{h}_{\mu\nu}(x),\end{aligned} \tag{B.1.8}$$

其中 $\omega_p^2 = \mathbf{p}^2$ 适用于引力子这类无质量粒子。现在请注意，

$$\begin{aligned}\partial_t\Big[e^{-ipx}(i\partial_t+\omega_p)\hat{h}_{\mu\nu}(x)\Big] &= \big[i\omega_p e^{-ipx}(i\partial_t+\omega_p)+e^{-ipx}\big(i\partial_t^2+\omega_p\partial_t\big)\big]\hat{h}_{\mu\nu}(x)\\ &= ie^{-ipx}\big(\partial_t^2+\omega_p^2\big)\hat{h}_{\mu\nu}(x),\end{aligned} \tag{B.1.9}$$

因此，

$$\begin{aligned}&i\int \mathrm{d}^4x\, e^{-ipx}\Box\hat{h}_{\mu\nu}(x) = -\int \mathrm{d}^4x\,\partial_t\Big[e^{-ipx}(i\partial_t+\omega_p)\hat{h}_{\mu\nu}(x)\Big]\\
&= -\,e^{i\omega_p t}\int \mathrm{d}^3x\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}(i\partial_t+\omega_p)\hat{h}_{\mu\nu}(x)\Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty}\\
&= -e^{i\omega_p t}\int \mathrm{d}^3x\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\sum_r\Bigg[\left(\frac{\omega_k+\omega_p}{\sqrt{2\omega_k}}\right)\epsilon^r_{\mu\nu}(\mathbf{k})\hat{a}_{k,r}(t)e^{ik\cdot x}\\
&\qquad +\left(\frac{-\omega_k+\omega_p}{\sqrt{2\omega_k}}\right)\epsilon^r_{\mu\nu}{}^*(\mathbf{k})\hat{a}^\dagger_{k,r}(t)e^{-ik\cdot x}\Bigg]\Bigg|_{t=-\infty}^{t=+\infty}\\
&= -\sqrt{2\omega_p}\sum_r\epsilon^r_{\mu\nu}(\mathbf{p})[\hat{a}_{p,r}(+\infty)-\hat{a}_{p,r}(-\infty)].\end{aligned} \tag{B.1.10}$$

这里我们利用了这一事实：$\partial_t\hat{a}_{k,\ r}(t)\big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} = 0$ 因为假设该理论在 $t\to\pm\infty$ 处是自由的。最后，如果将上式两边与 $\epsilon_s^{\mu\nu}(p)$作缩并，并利用偏振张量的正交归一条件（1.2.31），便得到

$$\sqrt{2\omega_p}[\hat{a}_{p,s}(+\infty)-\hat{a}_{p,s}(-\infty)] = -\frac{i}{2}\epsilon^s_{\mu\nu}(\mathbf{p})\int \mathrm{d}^4x\, e^{-ipx}\Box\hat{h}^{\mu\nu}(x). \tag{B.1.11}$$

将式（B.1.11）代入（B.1.7）可得

$$\begin{aligned}\langle f|i\rangle = &\left[-\frac{i}{2}\epsilon^{s_1}_{\mu\nu}{}^*(\mathbf{p}_1)\int \mathrm{d}^4x_1\, e^{ip_1x_1}\Box_1\right]\left[-\frac{i}{2}\epsilon^{s_2}_{\rho\sigma}(\mathbf{p}_2)\int \mathrm{d}^4x_2\, e^{-ip_2x_2}\Box_2\right]\\
&\times\langle\Omega|\mathrm{T}\Big\{\hat{h}^{\mu\nu}(x_1)\hat{h}^{\rho\sigma}(x_2)\Big\}|\Omega\rangle\,,\end{aligned} \tag{B.1.12}$$

其中 $\Box_j$ 表示关于[1] x_j的达朗贝尔算子。这就是引力子的**LSZ 约化公式**，它将 S–矩阵元（左边）与涉及量子场的格林函数（右边）联系起来 [65]。因此，为了计算跃迁概率，我们需要时间序二点函数。

[1]这里的指标 j 并非用于标记三维向量的分量，而只是表示不同的积分变量。

B.2 时间序二点函数

B.2.1 自由引力子传播子

我们将从最简单的情形开始，即自由理论的时间序二点函数，也称为引力子的**费曼传播子**。它定义为

$$D^{\mu\nu\rho\sigma}(x_1-x_2)=\langle 0|\mathrm{T}\Big\{\hat{h}_0^{\mu\nu}(x_1)\hat{h}_0^{\rho\sigma}(x_2)\Big\}|0\rangle\,, \tag{B.2.1}$$

ˆ其中 $h_0^{\mu\nu}(x)$ 是自由场算符，$|0\rangle$ 表示自由理论的真空。由场算符的平面波展开可得

$$\begin{aligned}\langle 0|\hat{h}_0^{\mu\nu}(x_1)\hat{h}_0^{\rho\sigma}(x_2)|0\rangle=&\int\frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3p_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{p_1}}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{p_2}}}\\&\times\sum_{s_1,s_2}\epsilon_{s_1}^{\mu\nu}(\mathbf{p}_1)\epsilon_{s_2}^{\rho\sigma *}(\mathbf{p}_2)\,\langle 0|\hat{a}_{p_1,s_1}\hat{a}^\dagger_{p_2,s_2}|0\rangle\,e^{i(p_1x_1-p_2x_2)},\end{aligned} \tag{B.2.2}$$

或者，利用产生与湮灭算符的对易关系，

$$\langle 0|\hat{h}_0^{\mu\nu}(x_1)\hat{h}_0^{\rho\sigma}(x_2)|0\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_p}A^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathbf{p})e^{ip(x_1-x_2)}, \tag{B.2.3}$$

其中

$$A^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathbf{p})\equiv\sum_s\epsilon_s^{\mu\nu}(\mathbf{p})\epsilon_s^{\rho\sigma *}(\mathbf{p}). \tag{B.2.4}$$

对于传播子，我们有

$$\begin{aligned}&D^{\mu\nu\rho\sigma}(x_1-x_2)=\langle 0|\mathrm{T}\Big\{\hat{h}_0^{\mu\nu}(x_1)\hat{h}_0^{\rho\sigma}(x_2)\Big\}|0\rangle\\&=\langle 0|\hat{h}_0^{\mu\nu}(x_1)\hat{h}_0^{\rho\sigma}(x_2)|0\rangle\,\theta(t_1-t_2)+\langle 0|\hat{h}_0^{\rho\sigma}(x_2)\hat{h}_0^{\mu\nu}(x_1)|0\rangle\,\theta(t_2-t_1)\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_p}\big[A^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathbf{p})e^{-i\omega_p\tau}\theta(\tau)+A^{\rho\sigma\mu\nu}(-\mathbf{p})e^{i\omega_p\tau}\theta(-\tau)\big]e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)},\end{aligned} \tag{B.2.5}$$

其中 $\tau\equiv t_1-t_2$和 $\theta(t)$ 是赫维赛德阶跃函数。现在，$\epsilon_{\mu\nu}(-\mathbf{p})=\epsilon^*_{\mu\nu}(\mathbf{p})$，因此

$$A^{\rho\sigma\mu\nu}(-\mathbf{p})=A^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathbf{p}). \tag{B.2.6}$$

我们还可以利用这一结果

$$e^{-i\omega_p\tau}\theta(\tau)+e^{i\omega_p\tau}\theta(-\tau)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-2\omega_p}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2-\omega_p^2+i\varepsilon}e^{i\omega\tau} \tag{B.2.7}$$

最终得出

$$D^{\mu\nu\rho\sigma}(x_1-x_2)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}A^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathbf{p})\frac{-i}{p^2+i\varepsilon}e^{-ip(x_1-x_2)}. \tag{B.2.8}$$

B.2.2 相互作用理论中的引力子传播子

在量子场论中，我们可以通过 [65, 96] 将相互作用理论中时间序乘积的真空期望值与自由理论中的真空期望值联系起来。

$$\langle\Omega|\mathrm{T}\Big\{\hat{h}^{\mu\nu}(x_1)\hat{h}^{\rho\sigma}(x_2)\Big\}|\Omega\rangle=\frac{\langle0|\mathrm{T}\Big\{\hat{h}_0^{\mu\nu}(x_1)\hat{h}_0^{\rho\sigma}(x_2)e^{i\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_{\mathrm{int}}[\hat{h}_0]}\Big\}|0\rangle}{\langle0|\mathrm{T}\Big\{e^{i\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_{\mathrm{int}}[\hat{h}_0]}\Big\}|0\rangle}, \tag{B.2.9}$$

其中，相互作用由拉格朗日密度 $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ 描述。就我们的情况而言，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{int}}[h(x)]&=\delta_{\mu\nu}\phi(\mathbf{x})h_{ij}(x)\partial^\mu\partial^\nu h^{ij}(x)\\&=\delta_{\mu\nu}\phi(\mathbf{x})\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}h^{\alpha\beta}(x)\partial^\mu\partial^\nu h^{\gamma\delta}(x),\end{aligned} \tag{B.2.10}$$

我们以一种更方便的形式写出了它。

现在，我们用 $D_{12}^{\mu\nu\rho\sigma}\equiv D^{\mu\nu\rho\sigma}(x_1-x_2)$ 表示自由引力子传播子。此外，令 $\int_x\equiv\int\mathrm{d}^4x$ 和 $\delta^4_{xy}\equiv\delta^4(x-y)$。于是我们可以写成

$$\begin{aligned}&\langle0|\mathrm{T}\Big\{\hat{h}_0^{\mu\nu}(x_1)\hat{h}_0^{\rho\sigma}(x_2)e^{i\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_{\mathrm{int}}[\hat{h}_0]}\Big\}|0\rangle=D_{12}^{\mu\nu\rho\sigma}\\&-i\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}\int_x\int_y\phi(\mathbf{x})\delta^4_{xy}\delta^{\mu_y\nu_y}\partial_{\mu_y}\partial_{\nu_y}\langle0|\mathrm{T}\Big\{\hat{h}_0^{\mu\nu}(x_1)\hat{h}_0^{\rho\sigma}(x_2)\hat{h}_0^{\alpha\beta}(x)\hat{h}_0^{\gamma\delta}(y)\Big\}|0\rangle,\end{aligned} \tag{B.2.11}$$

保留至 ϕ 的一阶。随后，我们可以利用维克定理重写时间序四点函数，从而得到 [65, 95, 96]

$$\begin{aligned}&\langle0|\mathrm{T}\Big\{\hat{h}_0^{\mu\nu}(x_1)\hat{h}_0^{\rho\sigma}(x_2)e^{i\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_{\mathrm{int}}[\hat{h}_0]}\Big\}|0\rangle=D_{12}^{\mu\nu\rho\sigma}\\&-i\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}\int_x\int_y\phi(\mathbf{x})\delta^4_{xy}\delta^{\mu_y\nu_y}\partial_{\mu_y}\partial_{\nu_y}\Big(D_{12}^{\mu\nu\rho\sigma}D_{xy}^{\alpha\beta\gamma\delta}+D_{1x}^{\mu\nu\alpha\beta}D_{2y}^{\rho\sigma\gamma\delta}+D_{1y}^{\mu\nu\gamma\delta}D_{2x}^{\rho\sigma\alpha\beta}\Big).\end{aligned} \tag{B.2.12}$$

同样，

$$\langle0|\mathrm{T}\Big\{e^{i\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_{\mathrm{int}}[\hat{h}_0]}\Big\}|0\rangle=1-i\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}\int_x\int_y\phi(\mathbf{x})\delta^4_{xy}\delta^{\mu_y\nu_y}\partial_{\mu_y}\partial_{\nu_y}D_{xy}^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{B.2.13}$$

式（B.2.12）第二行的第一项，与 $D_{12}^{\mu\nu\rho\sigma}$ 成正比，对应于一张包含通常所说的泡图的费曼图。然而，从式（B.2.13）以及 $\frac{1}{1+kx} = 1 - kx + O(k^2)$ 这一事实可以看出，泡图会被抵消，因此我们得到 ——

$$\begin{aligned}\langle\Omega|\mathrm{T}\Big\{\hat{h}^{\mu\nu}(x_1)\hat{h}^{\rho\sigma}(x_2)\Big\}|\Omega\rangle &= D_{12}^{\mu\nu\rho\sigma} \\ &- 2i\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}\int_x\int_y \phi(\mathbf{x})\delta^4_{xy}\delta^{\mu_y\nu_y}\partial_{\mu_y}\partial_{\nu_y}D_{1x}^{\mu\nu\alpha\beta}D_{2y}^{\rho\sigma\gamma\delta}.\end{aligned} \tag{B.2.14}$$

利用自由引力子传播子的表达式（式 B.2.8），我们得到[2]

$$\begin{aligned}\langle\Omega|\mathrm{T}\Big\{\hat{h}^{\mu\nu}(x_1)\hat{h}^{\rho\sigma}(x_2)\Big\}|\Omega\rangle &= \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}A^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathbf{p})\frac{-i}{p^2}e^{-ip(x_1-x_2)} \\ - 2i\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4p'}{(2\pi)^4}&\tilde{\phi}(-p-p')B^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathbf{p},\mathbf{p}')\frac{\omega'^2+\mathbf{p}'^2}{p^2p'^2}e^{-ipx_1}e^{-ip'x_2},\end{aligned} \tag{B.2.15}$$

其中

$$B^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathbf{p},\mathbf{p}') \equiv \eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}A^{\mu\nu\alpha\beta}(\mathbf{p})A^{\rho\sigma\gamma\delta}(\mathbf{p}') \tag{B.2.16}$$

$\tilde{}$，$\phi(q)$ 是牛顿势的四维傅里叶变换。

B.3 微分截面

有了时间序二点函数的表达式，现在让我们通过约化公式（式 $S-$）回到矩阵元。具体而言，

$$\begin{aligned}\langle f|i\rangle &= \frac{i}{4}\epsilon_{\mu\nu}^{s_1\,*}(\mathbf{p}_1)\epsilon_{\rho\sigma}^{s_2}(\mathbf{p}_2)\int\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\,e^{ip_1x_1}e^{-ip_2x_2}\Box_1\Box_2 \\ &\times\Big(i\,\langle\Omega|\mathrm{T}\Big\{\hat{h}^{\mu\nu}(x_1)\hat{h}^{\rho\sigma}(x_2)\Big\}|\Omega\rangle\Big) \\ &= \frac{i}{4}\epsilon_{\mu\nu}^{s_1\,*}(\mathbf{p}_1)\epsilon_{\rho\sigma}^{s_2}(\mathbf{p}_2)p_1^2A^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathbf{p}_1)(2\pi)^4\delta^4(p_1-p_2) \\ &+ \frac{i}{4}\epsilon_{\mu\nu}^{s_1\,*}(\mathbf{p}_1)\epsilon_{\rho\sigma}^{s_2}(\mathbf{p}_2)2\tilde{\phi}(p_2-p_1)B^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathbf{p}_1,-\mathbf{p}_2)(\omega_2^2+\mathbf{p}_2^2).\end{aligned} \tag{B.3.1}$$

然后，利用归一化条件（1.2.31），直接计算可得

$$\epsilon_{\mu\nu}^{s_1\,*}(\mathbf{p})\epsilon_{\rho\sigma}^{s_2}(\mathbf{p})A^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathbf{p}) = 4\delta_{s_1,s_2}, \tag{B.3.2a}$$

and

$$\epsilon_{\mu\nu}^{s_1\,*}(\mathbf{p}_1)\epsilon_{\rho\sigma}^{s_2}(\mathbf{p}_2)B^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathbf{p}_1,-\mathbf{p}_2) = 4\epsilon_{s_1}^{\mu\nu}(\mathbf{p}_1)\epsilon_{\mu\nu}^{s_2}(\mathbf{p}_2). \tag{B.3.2b}$$

[2]现在我们不再明确写出 $i\varepsilon$ 处方。

由于引力子没有质量，我们有 $p_1^2 = p_2^2 = 0$，因此

$$|\langle f|i\rangle|^2 = \left|4\tilde{\phi}(p_2 - p_1)\epsilon_{s_1}^{\mu\nu}(\mathbf{p}_1)\epsilon_{\mu\nu}^{s_2}(\mathbf{p}_2)\right|^2 \omega_2^4. \tag{B.3.3}$$

此外，我们知道

$$\langle i|i\rangle = 2\omega_1(2\pi)^3\delta^3(0) = 2\omega_1 V, \tag{B.3.4a}$$
$$\langle f|f\rangle = 2\omega_2(2\pi)^3\delta^3(0) = 2\omega_2 V, \tag{B.3.4b}$$

其中，我们将 $V = (2\pi)^3\delta^3(0)$ 记作一个（形式上无穷大的）正则化体积。因此，跃迁概率变为

$$P_{\text{transition}} = \frac{4}{V^2}\left|\tilde{\phi}(p_2 - p_1)\epsilon_{s_1}^{\mu\nu}(\mathbf{p}_1)\epsilon_{\mu\nu}^{s_2}(\mathbf{p}_2)\right|^2 \frac{\omega_2^3}{\omega_1}. \tag{B.3.5}$$

现在令牛顿势为 $\phi(r) = -M_N/r$。那么

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(p_2 - p_1) &= -M_N \int \mathrm{d}^4x\, \frac{1}{r} e^{i(p_1 - p_2)x} \\ &= -M_N \int \mathrm{d}t\, e^{-it(\omega_1 - \omega_2)} \int \mathrm{d}^3x\, \frac{1}{r} e^{i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\cdot\mathbf{x}} \\ &= -4\pi M_N \frac{1}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2}(2\pi)\delta(\omega_1 - \omega_2),\end{aligned} \tag{B.3.6}$$

and

$$P_{\text{transition}} = \frac{128\pi^3 T M_N^2}{V^2}\left|\frac{1}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2}\epsilon_{s_1}^{\mu\nu}(\mathbf{p}_1)\epsilon_{\mu\nu}^{s_2}(\mathbf{p}_2)\right|^2 \frac{\omega_2^3}{\omega_1}\delta(\omega_1 - \omega_2), \tag{B.3.7}$$

其中，$T = (2\pi)\delta(0)$（形式上无穷大）是散射过程的总时间。微分截面定义为

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{T}\frac{1}{\Phi}\mathrm{d}P, \tag{B.3.8}$$

其中，$\Phi = 1/V$ 是入射通量，$\mathrm{d}P$ 是量子力学微分概率，

$$\mathrm{d}P = P_{\text{transition}}\mathrm{d}\Pi, \tag{B.3.9}$$

而$\mathrm{d}\Pi$ 是我们所考察的末态动量区域。对于一个动量为$\mathbf{p}_2$, 的出射粒子，我们有

$$\mathrm{d}\Pi = \frac{V}{(2\pi)^3}\mathrm{d}^3p_2, \tag{B.3.10}$$

其定义使得 $\int \mathrm{d}\Pi = 1$。由于$\mathrm{d}^3 p_2 = |\mathbf{p}_2|^2 \mathrm{d}|\mathbf{p}_2|\mathrm{d}\Omega$，我们写成

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{V}{T}\int_0^\infty \mathrm{d}|\mathbf{p}_2|\,\frac{V}{(2\pi)^3}|\mathbf{p}_2|^2 P_{\text{transition}}(|\mathbf{p}_2|). \tag{B.3.11}$$

将式（B.3.7）代入（B.3.11），我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = 16M_N^2\int_0^\infty \mathrm{d}\omega_2 \frac{1}{(\omega_1^2+\omega_2^2-2\omega_1\omega_2\cos\theta)^2}\frac{\omega_2^5}{\omega_1}\delta(\omega_1-\omega_2)\\ \times\frac{1}{8}\sum_{s_1,s_2}\left|\epsilon^{\mu\nu}_{s_1}(\mathbf{p}_1)\epsilon^{s_2}_{\mu\nu}(\mathbf{p}_2)\right|^2,\end{aligned} \tag{B.3.12}$$

其中 θ 是$\mathbf{p}_1$ 与$\mathbf{p}_2$ 之间的夹角，我们对偏振取平均，以得到非偏振微分截面[3]。我们可以按如下方式计算对偏振的求和。

令 u 和 w 表示与传播方向正交的空间偏振单位矢量$\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$，则偏振张量可写为

$$\epsilon^+_{ij}(\mathbf{p}) = u_i u_j - w_i w_j, \tag{B.3.13a}$$
$$\epsilon^\times_{ij}(\mathbf{p}) = u_i w_j + w_i u_j. \tag{B.3.13b}$$

然后，我们显式地得到

$$\epsilon^{ij}_+(\mathbf{p}_1)\epsilon^+_{ij}(\mathbf{p}_2) = (u_1\cdot u_2)^2 + (w_1\cdot w_2)^2 - (u_1\cdot w_2)^2 - (w_1\cdot u_2)^2, \tag{B.3.14a}$$
$$\epsilon^{ij}_\times(\mathbf{p}_1)\epsilon^\times_{ij}(\mathbf{p}_2) = 2(u_1\cdot u_2)(w_1\cdot w_2) + 2(u_1\cdot w_2)(w_1\cdot u_2), \tag{B.3.14b}$$
$$\epsilon^{ij}_\times(\mathbf{p}_1)\epsilon^+_{ij}(\mathbf{p}_2) = 2(u_1\cdot u_2)(w_1\cdot u_2) - 2(u_1\cdot w_2)(w_1\cdot w_2), \tag{B.3.14c}$$
$$\epsilon^{ij}_+(\mathbf{p}_1)\epsilon^\times_{ij}(\mathbf{p}_2) = 2(u_1\cdot u_2)(u_1\cdot w_2) - 2(w_1\cdot u_2)(w_1\cdot w_2), \tag{B.3.14d}$$

其中 u_1、w_1（u_2、w_2）是与$\mathbf{p}_1$（$\mathbf{p}_2$）正交的单位矢量。

选择图 B.1 中表示的系统 $\left(u_1, w_1, \mathbf{p}_1\right)$ 和 $\left(u_2, w_2, \mathbf{p}_2\right)$，使 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_2$ 之间的角度为 θ，可得

$$u_1\cdot u_2 = \cos\theta, \tag{B.3.15a}$$
$$w_1\cdot w_2 = 1, \tag{B.3.15b}$$
$$u_1\cdot w_2 = w_1\cdot u_2 = 0, \tag{B.3.15c}$$

[3]请注意，由于我们的归一化约定$\sum_{s_1,\,s_2}\left|\epsilon^{\mu\nu}_{s_1}(\mathbf{p})\epsilon^{s_2}_{\mu\nu}(\mathbf{p})\right|^2 = 8$。

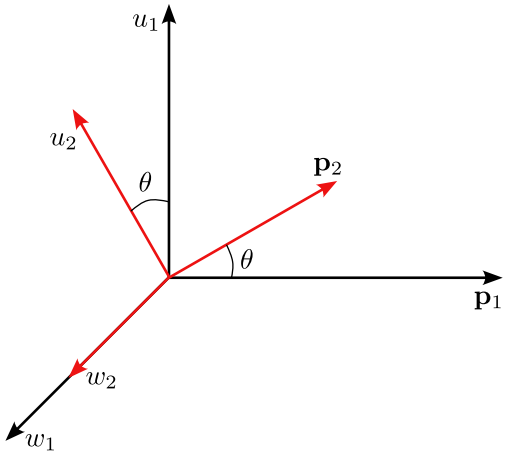


图 B.1：向量 $\mathbf{p}_1$ 和$\mathbf{p}_2$ 以及与之对应的空间偏振正交单位矢量。

因此，经过一些三角运算后，

$$\sum_{s_1,s_2} \left|\epsilon^{\mu\nu}_{s_1}(\mathbf{p}_1)\epsilon^{s_2}_{\mu\nu}(\mathbf{p}_2)\right|^2 = (1+\cos^2\theta)^2 + 4\cos^2\theta$$
$$= 8\left(\cos^8\frac{\theta}{2} + \sin^8\frac{\theta}{2}\right). \tag{B.3.16}$$

将这一结果代入公式 (B.3.12)，并利用 δ 函数计算积分，最终得到微分截面

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{M_N^2}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\left(\cos^8\frac{\theta}{2} + \sin^8\frac{\theta}{2}\right). \tag{B.3.17}$$

注意到微分截面的量纲为面积，并令 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega \to (1/L_{\mathrm{P}}^2)\,\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ 和 $M_N \to M_N/M_{\mathrm{P}}$（其中普朗克长度和普朗克质量用普适常数表示），即可恢复 G 和 c 的因子。结果为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{G^2M_N^2}{c^4\sin^4\frac{\theta}{2}}\left(\cos^8\frac{\theta}{2} + \sin^8\frac{\theta}{2}\right). \tag{B.3.18}$$

该微分截面与牛顿势 [101]对经典引力波进行散射时计算得到的结果一致。

附录 C

噪声核的计算

C.1 引力噪声核

在本节中，我们计算由量子化引力场的影响所编码的噪声核，该噪声核由式（4.2.13b）定义，适用于不同的初态。以下我们将考虑一个非偏振各向同性引力波背景，其中位置算符与偏振及$\mathbf{k}$的方向无关，即$\hat{}q_s(t,\mathbf{k}) = \hat{}q_\omega(t)$，$\omega = |\mathbf{k}|$。在此假设下，我们可以将引力噪声核写为

$$N_{\mathrm{g}}^{ijkl}(t,t') = \frac{1}{32}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\omega^2\left[A_\Omega^{ijkl}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t'^2}G_\omega(t,t')\right.$$
$$\left.+A_\Omega^{ijnl}\Phi_n{}^k\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}G_\omega(t,t')+A_\Omega^{njkl}\Phi_n{}^i\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t'^2}G_\omega(t,t')\right], \tag{C.1.1}$$

其中

$$G_\omega(t,t') = \langle\{\hat{q}_\omega(t),\hat{q}_\omega(t')\}\rangle_{\mathrm{g}} \tag{C.1.2}$$

是哈达玛函数，而张量结构则由下式给出的角积分编码

$$A_\Omega^{ijkl} \equiv \int \mathrm{d}\Omega \sum_s \epsilon_s^{ij}(\mathbf{k})\epsilon_s^{kl}(\mathbf{k}). \tag{C.1.3}$$

我们先明确计算角积分，因为它不依赖于初始引力子态。首先，将偏振张量写成方程（1.2.29）中的形式，

$$\begin{aligned}\epsilon_{ij}^{+} &= \hat{\epsilon}_i^{(1)}\hat{\epsilon}_j^{(1)} - \hat{\epsilon}_i^{(2)}\hat{\epsilon}_j^{(2)}\\ \epsilon_{ij}^{\times} &= \hat{\epsilon}_i^{(1)}\hat{\epsilon}_j^{(2)} + \hat{\epsilon}_i^{(2)}\hat{\epsilon}_j^{(1)},\end{aligned} \tag{C.1.4}$$

其中，空间偏振单位矢量 $\hat{\epsilon}^{(1)}$ 和 $\hat{\epsilon}^{(2)}$ 与传播方向 $\hat{k} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ 正交。它们满足

$$\hat{\epsilon}_i^{(1)}\hat{\epsilon}_j^{(1)} + \hat{\epsilon}_i^{(2)}\hat{\epsilon}_j^{(2)} = \delta_{ij} - \hat{k}_i\hat{k}_j \equiv P_{ij}. \tag{C.1.5}$$

于是，经过直接计算可得

$$\sum_s \epsilon_s^{ij}\epsilon_s^{kl} = P^{ik}P^{jl} + P^{il}P^{jk} - P^{ij}P^{kl}. \tag{C.1.6}$$

我们可以利用三维空间中对立体角的如下积分：

$$\int \mathrm{d}\Omega\, \hat{k}_i\hat{k}_j = \frac{4\pi}{3}\delta_{ij}, \tag{C.1.7a}$$

$$\int \mathrm{d}\Omega\, \hat{k}_i\hat{k}_j\hat{k}_k\hat{k}_l = \frac{4\pi}{15}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \tag{C.1.7b}$$

从而得到

$$\int \mathrm{d}\Omega\, P_{ij}P_{kl} = \frac{8\pi}{5}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{4\pi}{15}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \tag{C.1.8}$$

最后，我们得到

$$A_\Omega^{ijkl} = \frac{8\pi}{15}\left[3\left(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}\right) - 2\delta^{ij}\delta^{kl}\right]. \tag{C.1.9}$$

在第 5 章中，我们指出，对于所研究的特定退相干函数，只有分量 $N_{\mathrm{g}}^{3333}(t,t') \equiv N_{\mathrm{g}}(t,t')$ 会受到关注，因此为简便起见，接下来我们将集中讨论这一分量。由式（C.1.9）可得 $A_\Omega^{3333} = 32\pi/15$，因此

$$N_{\mathrm{g}}(t,t') = \frac{\pi}{15}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\, \omega^2 \left\{ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t'^2}G_\omega(t,t') + \Phi_{zz}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}G_\omega(t,t') + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t'^2}G_\omega(t,t')\right]\right\}. \tag{C.1.10}$$

这里我们降低了潮汐张量的指标，并像往常一样省略了 ϕ中的高阶项。

接下来，我们来计算哈达玛函数。由于引力场每个模的自由哈密顿量都是谐振子的自由哈密顿量，即式（4.1.21），因此我们可以将海森堡绘景中的位置算符写为

$$\hat{q}_\omega(t) = \sqrt{\frac{1}{2m_{\mathrm{g}}\omega}}\left(\hat{a}_\omega e^{-i\omega t} + \hat{a}_\omega^\dagger e^{i\omega t}\right), \tag{C.1.11}$$

其中，$\hat{a}$（$\hat{a}^\dagger$）是湮灭（产生）算符，满足通常的对易关系。直接计算可得

$$G_\omega(t,t') = \frac{2}{m_{\rm g}\omega^2}\langle\hat{H}_\omega\rangle_{\rm g}\cos\omega(t-t') + \frac{1}{m_{\rm g}\omega}\left[\langle\hat{a}_\omega^2\rangle_{\rm g}\, e^{-i\omega(t+t')} + \langle\left(\hat{a}_\omega^\dagger\right)^2\rangle_{\rm g}\, e^{i\omega(t+t')}\right], \tag{C.1.12}$$

其中，H_ω 是频率为 ω 的谐振子的自由哈密顿算符。现在，我们可以计算引力场不同初态下的噪声核。

C.1.1 真空态

若初态为真空态，则有 $\langle\hat{a}_\omega^2\rangle_{\rm g} = \langle\left(\hat{a}_\omega^\dagger\right)^2\rangle_{\rm g} = 0$ 和 $\langle\hat{H}_\omega\rangle_{\rm g} = \omega/2$，因此

$$G_\omega^{(\rm vac)}(t,t') = \frac{1}{m_{\rm g}\omega}\cos\omega(t-t'). \tag{C.1.13}$$

将此哈达玛函数代入方程（C.1.10），得到

$$\begin{aligned} N_{\rm g}^{(\rm vac)}(t,t') &= \frac{2}{15\pi}\left[\int_0^\Lambda {\rm d}\omega\,\omega^5\cos\omega(t-t') - 2\Phi_{zz}\int_0^\Lambda {\rm d}\omega\,\omega^3\cos\omega(t-t')\right] \\ &= \frac{2\Lambda^4}{15\pi}\left\{\Lambda^2 F_5[\Lambda(t-t')] - 2\Phi_{zz}F_3[\Lambda(t-t')]\right\}, \end{aligned} \tag{C.1.14}$$

其中，Λ 是引力子能量截断（见第4.1节），并且我们使用了 $m_{\rm g} = \pi^2/2$。此外，我们定义

$$F_n(x) \equiv \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x {\rm d}y\, y^n\cos y. \tag{C.1.15}$$

具体而言，

$$F_5(x) = \frac{1}{x^6}\left[\left(5x^4 - 60x^2 + 120\right)\cos x + x\left(x^4 - 20x^2 + 120\right)\sin x - 120\right], \tag{C.1.16a}$$

and

$$F_3(x) = \frac{1}{x^4}\left[\left(3x^2 - 6\right)\cos x + \left(x^3 - 6x\right)\sin x + 6\right]. \tag{C.1.16b}$$

现在，由方程（4.3.20）可知，外部自由度密度矩阵中包含与引力噪声核和内部自由度噪声核乘积成正比的项。在第 C.2 节中，我们将把后者建模为白噪声，并对其进行显式计算。因此，我们将关注引力噪声核的重合极限 $t' \to t$。由

$$\lim_{x\to 0} F_n(x) = \frac{1}{n+1}, \tag{C.1.17}$$

可得

$$N_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{vac})}(t)=\lim_{t'\to t}N_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{vac})}(t,t')=\frac{\Lambda^4}{15\pi}\left(\frac{\Lambda^2}{3}-\Phi_{zz}\right). \tag{C.1.18}$$

C.1.2 热态

现在，假设引力子最初处于温度为$T_{\mathrm{g}}=\beta_{\mathrm{g}}^{-1}$的热态（正如我们在第3.1节所讨论的，温度不一定对应于精确的热力学定义）。在这种情况下，我们有$\langle\hat{a}_\omega^2\rangle_{\mathrm{g}}=\langle\big(\hat{a}_\omega^\dagger\big)^2\rangle_{\mathrm{g}}=0$ 再次，并且

$$\langle\hat{H}_\omega\rangle_{\mathrm{g}}=\omega\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\omega\beta_{\mathrm{g}}}-1}\right). \tag{C.1.19}$$

代入方程（C.1.12）可得

$$G_\omega^{(\mathrm{th})}(t,t')=G_\omega^{(\mathrm{vac})}(t,t')+\frac{2}{m_{\mathrm{g}}\omega}\frac{1}{e^{\omega/T_{\mathrm{g}}}-1}\cos\omega(t-t'). \tag{C.1.20}$$

噪声核为

$$\begin{aligned}N_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{th})}(t,t')&=N_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{vac})}(t,t')\\&\quad+\frac{4}{15\pi}\int_0^\infty\mathrm{d}\omega\left[\frac{\omega^5}{e^{\omega/T_{\mathrm{g}}}-1}\cos\omega(t-t')-2\Phi_{zz}\frac{\omega^3}{e^{\omega/T_{\mathrm{g}}}-1}\cos\omega(t-t')\right]\\&=N_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{vac})}(t,t')\\&\quad+\frac{8(\pi T_{\mathrm{g}})^4}{5\pi}\Big\{10(\pi T_{\mathrm{g}})^2F_1^{(\mathrm{th})}\left[\pi T_{\mathrm{g}}(t-t')\right]-\Phi_{zz}F_2^{(\mathrm{th})}\left[\pi T_{\mathrm{g}}(t-t')\right]\Big\},\end{aligned} \tag{C.1.21}$$

with

$$F_1^{(\mathrm{th})}(x)=\frac{1}{x^6}-\frac{1}{15\sinh^6x}\left(2\cosh^4x+11\cosh^2x+2\right), \tag{C.1.22a}$$

and

$$F_2^{(\mathrm{th})}(x)=\frac{1}{3\sinh^4x}\left(2\cosh^2x+1\right)-\frac{1}{x^4}. \tag{C.1.22b}$$

此外，利用 $\lim_{x\to0}F_{(\mathrm{th})\,1}(x)=2/945$ 以及 $\lim_{x\to0}F_2^{(\mathrm{th})}(x)=1/45$，我们得到

$$N_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{th})}(t)=\lim_{t'\to t}N_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{th})}(t,t')=N_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{vac})}(t)+\frac{8(\pi T_{\mathrm{g}})^4}{45\pi}\left(\frac{4}{21}\pi^2T_{\mathrm{g}}^2-\frac{1}{5}\Phi_{zz}\right). \tag{C.1.23}$$

C.1.3 相干态

在量子光学中，相干态是指其电场变分趋近于经典电磁波的那些态。它们之所以重要，是因为单模激光器通常会产生相干态激发 [167]。完全类比地，可以说相干引力子态是其性质最接近经典引力波的量子力学态。

对于量子谐振子，相干态定义为

$$|\alpha_\omega\rangle = \hat{\mathscr{D}}(\alpha_\omega)\,|0\rangle\,, \tag{C.1.24}$$

其中 $\mathscr{D}(\alpha_\omega)$ 称为相干态位移算符，定义为 [167]

$$\mathscr{D}(\alpha_\omega) = \exp\!\big(\alpha_\omega \hat{a}_\omega^\dagger - \alpha_\omega^* \hat{a}_\omega\big). \tag{C.1.25}$$

为简单起见，这里取位移参数与 ω、 $\alpha_\omega = \alpha$ 无关。位移算符满足若干性质，

$$\hat{\mathscr{D}}^\dagger(\alpha)\hat{\mathscr{D}}(\alpha) = 1, \tag{C.1.26a}$$
$$\hat{\mathscr{D}}^\dagger(\alpha)\hat{a}_\omega^n\hat{\mathscr{D}}(\alpha) = (\hat{a}_\omega + \alpha)^n, \tag{C.1.26b}$$
$$\hat{\mathscr{D}}^\dagger(\alpha)(\hat{a}_\omega^\dagger)^n\hat{\mathscr{D}}(\alpha) = (\hat{a}_\omega^\dagger + \alpha^*)^n, \tag{C.1.26c}$$

对于 $n \in \mathbb{N}$，由此可得

$$\langle \hat{a}_\omega^2\rangle_{\mathrm{g}} = \alpha^2, \tag{C.1.27a}$$
$$\langle (\hat{a}_\omega^\dagger)^2\rangle_{\mathrm{g}} = (\alpha^*)^2, \tag{C.1.27b}$$
$$\langle \hat{H}_\omega\rangle_{\mathrm{g}} = \omega\left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2}\right), \tag{C.1.27c}$$

这里我们还利用了相干态是湮灭算符 $\hat{a}_\omega\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$ 的本征态这一事实。

为简化起见，我们进一步假设位移参数为实数。在这种情况下，我们得到

$$G_\omega^{(\mathrm{coh})}(t,t') = G_\omega^{(\mathrm{vac})}(t,t') + \frac{\alpha^2}{m_{\mathrm{g}}\omega}\cos(\omega t)\cos(\omega t'). \tag{C.1.28}$$

对于噪声核，有

$$N_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{coh})}(t,t') = N_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{vac})}(t,t') + \frac{2\alpha^2}{15\pi}\left[\int_0^\Lambda \mathrm{d}\omega\,\omega^5\cos(\omega t)\cos(\omega t')\right.$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad -2\Phi_{zz}\int_0^{\Lambda} \mathrm{d}\omega\, \omega^3 \cos(\omega t)\cos(\omega t')\Big] \\
&= N_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{vac})}(t,t') + \frac{\alpha^2\Lambda^4}{15\pi}\left\{\Lambda^2[F_5(\Lambda(t+t')) + F_5(\Lambda(t-t'))]\right. \\
&\qquad \left. -2\Phi_{zz}[F_3(\Lambda(t+t')) + F_3(\Lambda(t-t'))]\right\}, \qquad \text{(C.1.29)}
\end{aligned}
$$

其中函数 $F_n(x)$ 在方程（C.1.15）中定义。利用方程（C.1.17），我们还可以得到

$$
\begin{aligned}
N_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{coh})}(t) &= \lim_{t'\to t} N_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{coh})}(t,t') \\
&= N_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{vac})}(t) + \frac{\alpha^2\Lambda^4}{15\pi}\left\{\Lambda^2\left[F_5(2\Lambda t) + \frac{1}{6}\right] - 2\Phi_{zz}\left[F_3(2\Lambda t) + \frac{1}{4}\right]\right\}.
\end{aligned} \qquad \text{(C.1.30)}
$$

C.1.4 压缩态

再次回到与量子光学的类比，压缩态是指电场在某些相位上的量子不确定性小于相干态最小不确定性的态。对于弱量子化引力场，有观点认为，在宇宙学演化过程中由量子涨落产生的引力子现在应处于强压缩态 [157]。

对于量子谐振子，压缩态定义为

$$
|\zeta_\omega\rangle = \hat{\mathscr{S}}(\zeta_\omega)\,|0\rangle\,, \qquad \text{(C.1.31)}
$$

ˆ其中 $\mathscr{S}(\zeta_\omega)$称为压缩算符，定义为 [167]

$$
\hat{\mathscr{S}}(\zeta_\omega) = \exp\left[\frac{1}{2}\zeta_\omega^*\hat{a}_\omega^2 - \frac{1}{2}\zeta_\omega(\hat{a}_\omega^\dagger)^2\right], \qquad \text{(C.1.32)}
$$

且 ζ_ω 为复压缩参数

$$
\zeta_\omega = r_\omega e^{i\varphi_\omega}. \qquad \text{(C.1.33)}
$$

这里我们假设压缩参数与 ω、$\zeta_\omega = \zeta$ 无关。压缩算符满足若干性质，

$$
\hat{\mathscr{S}}^\dagger(\zeta)\hat{\mathscr{S}}(\zeta) = 1, \qquad \text{(C.1.34a)}
$$

$$
\hat{\mathscr{S}}^\dagger(\zeta)\hat{a}_\omega^n\hat{\mathscr{S}}(\zeta) = (\hat{a}\cosh r - \hat{a}^\dagger e^{i\varphi}\sinh r)^n, \qquad \text{(C.1.34b)}
$$

$$
\hat{\mathscr{S}}^\dagger(\zeta)(\hat{a}_\omega^\dagger)^n\hat{\mathscr{S}}(\zeta) = (\hat{a}^\dagger\cosh r - \hat{a}\,e^{-i\varphi}\sinh r)^n, \qquad \text{(C.1.34c)}
$$

对于 $n \in \mathbb{N}$，由此可得

$$\langle \hat{a}_\omega^2 \rangle_{\mathrm{g}} = -e^{i\varphi} \sinh r \cosh r, \tag{C.1.35a}$$

$$\langle (\hat{a}_\omega^\dagger)^2 \rangle_{\mathrm{g}} = -e^{-i\varphi} \sinh r \cosh r, \tag{C.1.35b}$$

$$\langle \hat{H}_\omega \rangle_{\mathrm{g}} = \frac{\omega}{2} \cosh 2r, \tag{C.1.35c}$$

因此

$$G_\omega^{(\mathrm{sq})}(t,t') = (\cosh 2r) G_\omega^{(\mathrm{vac})}(t,t') - \frac{\sinh 2r}{m_{\mathrm{g}}\omega} \cos[\omega(t+t') - \varphi]. \tag{C.1.36}$$

为简便起见，以下假设压缩参数为实数（$\varphi = 0$），则噪声核变为

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{sq})}(t,t') &= (\cosh 2r) N_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{vac})}(t,t') \\ &\quad - \frac{2}{15\pi} \sinh 2r \left[\int_0^\Lambda \omega^5 \cos\omega(t+t') - 2\Phi_{zz} \int_0^\Lambda \omega^3 \cos\omega(t+t') \right] \\ &= (\cosh 2r) N_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{vac})}(t,t') \\ &\quad - \frac{2\Lambda^4}{15\pi} \sinh 2r \big\{ \Lambda^2 F_5[\Lambda(t+t')] - 2\Phi_{zz} F_3[\Lambda(t+t')] \big\}. \end{aligned} \tag{C.1.37}$$

此外，

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{sq})}(t) &= \lim_{t' \to t} N_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{sq})}(t,t') \\ &= (\cosh 2r) N_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{vac})}(t) - \frac{2\Lambda^4}{15\pi} \sinh 2r \big[\Lambda^2 F_5(2\Lambda t) - 2\Phi_{zz} F_3(2\Lambda t) \big]. \end{aligned} \tag{C.1.38}$$

C.2 内部自由度噪声核

本节将给出式（4.3.17b）中定义的内部自由度噪声核的显式表达式。回想一下，每个位置算符 $\hat{\varrho}_\alpha$ 的自由拉格朗日量都是谐振子的拉格朗日量。此外，我们假设初始内部态为温度为 $T_{\mathrm{int}} = \beta_{\mathrm{int}}^{-1}$ 的热态。在这种情况下，噪声核恰好就是我们在式（2.3.27b）中得到的结果，即

$$N_{\mathrm{int}}(t,t') = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathrm{d}\varpi \, J(\varpi) \coth\left(\frac{\varpi \beta_{\mathrm{int}}}{2} \right) \cos\varpi(t-t'), \tag{C.2.1}$$

其中

$$J(\varpi) = \sum_\alpha \frac{\vartheta_\alpha^2}{\mu_\alpha \varpi_\alpha} \delta(\varpi - \varpi_\alpha) \tag{C.2.2}$$

为谱密度。

如果我们考虑内部自由度由欧姆浴描述的简单情形，则有

$$J(\varpi) = \eta\varpi \tag{C.2.3}$$

对于某个有效耦合常数 η。对于欧姆浴，噪声核为

$$N_{\text{int}}(t,t') = \frac{1}{2}\eta\int_0^\infty \mathrm{d}\varpi\,\varpi\coth\left(\frac{\varpi\beta}{2}\right)\cos\varpi(t-t'). \tag{C.2.4}$$

在高温下，$T_{\text{int}} = \beta_{\text{int}}^{-1} \gg |t-t'|$，积分由低频主导（在这种情况下确实需要引入频率截断），因此我们得到

$$N_{\text{int}}(t,t') = \eta\pi T_{\text{int}}\delta(t-t'), \tag{C.2.5}$$

即白噪声。

附录 D

涨落定理

术语 涨落定理 指的是涨落的非平衡量的概率分布与给定热力学过程起点和终点的某种平衡信息之间的关系。在本附录中，我们遵循 Gavin E. Crooks [46], 的方法给出涨落定理，该方法进而导出 Jarzynski 等式 [45]。我们先介绍其经典版本，再介绍量子版本。读者可参阅文献 [50] 以了解该领域的综述及简要历史描述。

D.1 经典涨落定理

涨落定理基于两个基本假设：(i) 系统的初始状态由热态描述；(ii) 微观运动方程具有时间反演不变性。在陈述定理本身之前，我们先对后一假设作更精确的说明，并将其称为微观可逆性。我们假设系统遵循哈密顿动力学，不过这些结果对更一般的马尔可夫随机演化 [48, 168]仍然成立。

D.1.1 驱动经典系统的微观可逆性

考虑一个由哈密顿量描述的经典系统

$$H(\mathbf{z}, f) = H_0(\mathbf{z}) - f(t)X(\mathbf{z}), \tag{D.1.1}$$

其中， $H_0(\mathbf{z})$被称为未扰动哈密顿量， $f(t)$是时变外力，而 $X(\mathbf{z})$是其共轭坐标。此外，我们用$\mathbf{z} = (\mathbf{q},\mathbf{p})$表示相空间中的点，其中$\mathbf{q}$ 表示具有 n 个自由度的系统的广义坐标（$q_1, \ldots, q_n$），而$\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$表示其共轭动量。我们假设该力作用于时间区间 $[0, \tau]$ 内，且其瞬时值 $f(t)$由给定的力协议指定。

哈密顿运动方程的解将相空间中的每个初始点$\mathbf{z}(0)$映射到较晚时间$t \in [0,\tau]$的点$\mathbf{z}(t)$，该点由t之前所有时间的力协议取值决定，即

$$\mathbf{z}(t) = \varphi_{t,0}[\mathbf{z}(0); f], \tag{D.1.2}$$

其中φ表示相空间中的哈密顿流 [50]。

为了写出微观可逆性条件，我们需要描述时间反演过程，它是一条沿正向时间运行、且动量符号被反转的轨迹。我们首先假设未扰动哈密顿量H_0在时间反演下不变。此外，我们还假设共轭坐标X在时间反演下以确定的宇称$\epsilon_X = \pm 1$变换。现在，虽然流（D.1.2）描述了系统如何从$\mathbf{z}_0$在正向协议f（t）下演化，我们定义反向流

$$\varphi_{\tau-t}[\epsilon\mathbf{z}(\tau); \epsilon_X \tilde{f}] \tag{D.1.3}$$

即描述系统如何从时间反演末态$\epsilon\mathbf{z}(\tau)$演化的流，其中$\epsilon\mathbf{z} = \epsilon(\mathbf{q},\mathbf{p}) = (\mathbf{q}, -\mathbf{p})$，在反向协议$f(t) = f(\tau - t)$下。

微观可逆性原理指出，正向过程中所遵循的轨迹在时间反演后，必须与反向过程中所遵循的轨迹重合。因此，对正向轨迹施加时间反演操作可得 [50, 169]

$$\epsilon\varphi_{\tau-t,0}[\epsilon\mathbf{z}(\tau); \epsilon_X \tilde{f}] = \varphi_{t,0}[\mathbf{z}(0); f]. \tag{D.1.4}$$

D.1.2 Crooks 涨落定理

从$\mathbf{z}(0)$ $t = 0$移动到$\mathbf{z}(\tau)$ $t = \tau$时，对系统所做的功为[1]

$$W[\mathbf{z}(0); f] = H(\mathbf{z}(\tau), f(\tau)) - H(\mathbf{z}(0), f(0)). \tag{D.1.5}$$

我们注意到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(\mathbf{z}, f) &= \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) + \frac{\partial H}{\partial f}\dot{f} = \dot{f}(t)\frac{\partial H(\mathbf{z}, f)}{\partial f(t)} \\ &= -\dot{f}(t)X(\mathbf{z}(t)),\end{aligned} \tag{D.1.6}$$

[1]文献中将此定义称为包含功，以区别于由$W_0 = H_0(\mathbf{z}(\tau)) - H_0(\mathbf{z}(0))$定义的排他功。关于这两种方法之间的联系，请参阅参考文献 [47, 48]。

其中我们使用了哈密顿运动方程 [170]

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{D.1.7}$$

方程（D.1.5）于是可写为

$$W[\mathbf{z}(0); f] = \int_0^\tau \mathrm{d}t\, \dot{f}(t) \frac{\partial H(\mathbf{z}, f)}{\partial f(t)} = -\int_0^\tau \mathrm{d}t\, \dot{f}(t) X(\mathbf{z}(t)). \tag{D.1.8}$$

在 $t = 0$，我们假设系统处于逆温度为 β 的热平衡态，其正则分布形式为

$$\rho(\mathbf{z}(0)) = \frac{e^{-\beta H(\mathbf{z}(0), f(0))}}{Z_0}, \tag{D.1.9}$$

其中

$$Z_0 = \int \mathrm{d}\mathbf{z}(0)\, e^{-\beta H(\mathbf{z}(0), f(0))} \tag{D.1.10}$$

是经典配分函数。

初始条件从分布（D.1.9）中随机抽取，每组初始条件都会在相空间中产生一条从 $t = 0$ 到 $t = \tau$的轨迹。由于功的定义（D.1.8）取决于轨迹，因此考虑具有初始制备（D.1.9）的过程系综时，功便具有概率性。关于其统计特性的完整信息包含在功概率密度函数中

$$P[W; f] = \int \mathrm{d}\mathbf{z}(0) \rho(\mathbf{z}(0)) \delta[W - H(\mathbf{z}(\tau), f(\tau)) + H(\mathbf{z}(0), f(0))]. \tag{D.1.11}$$

与往常一样，我们将功的特征函数定义为功的概率密度函数的傅里叶变换，

$$\Phi[u; f] = \int \mathrm{d}W\, e^{iuW} P[W; f], \tag{D.1.12a}$$

with

$$P[W; f] = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}u\, e^{-iuW} \Phi[u; f]. \tag{D.1.12b}$$

利用式（D.1.11）、（D.1.9）和（D.1.5），特征函数变为

$$\begin{aligned} \Phi[u; f] &= \int \mathrm{d}\mathbf{z}(0)\, e^{iu[H(\mathbf{z}(\tau), f(\tau)) - H(\mathbf{z}(0), f(0))]} \frac{e^{-\beta H(\mathbf{z}(0), f(0))}}{Z_0} \\ &= \frac{1}{Z_0} \int \mathrm{d}\mathbf{z}(0)\, e^{iuW[\mathbf{z}(0); f]} e^{-\beta H(\mathbf{z}(\tau), f(\tau))} e^{\beta W[\mathbf{z}(0); f]} \end{aligned}$$

$$= \frac{Z_\tau}{Z_0} \int \mathrm{d}\mathbf{z}(0)\, e^{iuW[\varphi_{\tau,0}[\mathbf{z}(0);f]]} e^{\beta W[\varphi_{\tau,0}[\mathbf{z}(0);f]]} \rho(\mathbf{z}(\tau)), \tag{D.1.13}$$

其中 $Z_\tau = \int \mathrm{d}\mathbf{z}(\tau)\, e^{-\beta H(\mathbf{z}(\tau),f(\tau))}$。在上述表达式中，$W[\varphi_{\tau,0}[\mathbf{z}(0);\ f]]$ 表示在正向过程中从 $t=0$ 到 $t=\tau$ 对系统所做的功。利用微观可逆性条件（D.1.4）并作变量替换 $\mathbf{z}(0) \to \mathbf{z}(\tau)$（由于经典力学中的时间演化是正则变换，其雅可比行列式等于1），我们得到

$$\begin{aligned} Z_0\Phi[u;f] &= Z_\tau \int \mathrm{d}\mathbf{z}(\tau)\, e^{iuW\left[\epsilon\varphi_{\tau-t,0}[\epsilon\mathbf{z}(\tau);\epsilon_X\tilde{f}]\right]} e^{\beta W\left[\epsilon\varphi_{\tau-t,0}[\epsilon\mathbf{z}(\tau);\epsilon_X\tilde{f}]\right]} \rho(\mathbf{z}(\tau)) \\ &= Z_\tau \int \mathrm{d}\mathbf{z}(\tau)\, e^{i(u-i\beta)[H(\mathbf{z}(0),f(0))-H(\mathbf{z}(\tau),f(\tau))]} \rho(\mathbf{z}(\tau)), \end{aligned} \tag{D.1.14}$$

其中 $W\left[\epsilon\varphi_{\tau-t,0}[\epsilon\mathbf{z}(\tau);\ \epsilon_X\tilde{f}]\right] = H(\mathbf{z}(0)\ f(0)) - H(\mathbf{z}(\tau)\ f(\tau))$ 是从 $t=\tau$ 出发、初始状态为热分布 $\rho(\mathbf{z}(\tau))$ 时反向过程所做的功。通过引入 δ函数来恢复功的特征函数，我们得到

$$Z_0\Phi[u;f] = Z_\tau\Phi[-u+i\beta;\epsilon_X\tilde{f}]. \tag{D.1.15}$$

对等式两边应用逆傅里叶变换，得到

$$Z_0 P[W;f] = Z_\tau e^{\beta W} P[-W;\epsilon_X\tilde{f}], \tag{D.1.16}$$

or

$$\frac{P[W;f]}{P[-W;\epsilon_X\tilde{f}]} = \frac{Z_\tau}{Z_0} e^{\beta W}. \tag{D.1.17}$$

回想起亥姆霍兹自由能可由配分函数表示为 $F(t) = -\frac{1}{\beta}(-)\ln\ Z_t$ [116]，由此可将其改写为 –

$$\frac{Z_\tau}{Z_0} = \frac{e^{-\beta F(\tau)}}{e^{-\beta F(0)}} = e^{-\beta\Delta F}, \tag{D.1.18}$$

其中 $\Delta F = F(\tau) - F(0)$ 是初始点与终止点之间的自由能差。最后，我们可以写成

$$\frac{P[W;f]}{P[-W;\epsilon_X\tilde{f}]} = e^{\beta(W-\Delta F)}. \tag{D.1.19}$$

这就是克鲁克斯涨落定理，它表明，观测到正向过程的概率比观测到逆向过程的概率大一个指数倍。指数 $W_{\text{diss}} = W - \Delta F$ 被称为< стиль id='2'>耗散功，用于量化这种统计不可逆性。

D.1.3 Jarzynski 等式

我们可以将克鲁克斯涨落定理（D.1.19）写作

$$P[W; f]e^{-\beta W} = P[-W; \epsilon_X \tilde{f}]e^{-\beta \Delta F} \tag{D.1.20}$$

并对两边关于 W 积分，由此得到 Jarzynski 等式

$$\left\langle e^{-\beta W} \right\rangle = e^{-\beta \Delta F}, \tag{D.1.21}$$

其中，括号表示关于功的概率密度函数取平均。

Jarzynski 等式（D.1.21）指出，可以根据力协议 $f(t)$，通过对系统轨迹的多次实现进行非平衡功测量，推断出平衡自由能差。该结果在物理学、生物学、化学等领域有许多实际应用 [49, 50]。此外，我们还可以利用 Jensen 不等式描述热力学第二定律的统计性质[2]，

$$e^{-\beta \Delta F} = \left\langle e^{-\beta W} \right\rangle \geq e^{-\beta \langle W \rangle} \implies e^{-\beta(\langle W \rangle - \Delta F)} \leq 1. \tag{D.1.22}$$

这意味着，平均而言，熵产生始终为正

$$\langle \Sigma \rangle = \beta(\langle W \rangle - \Delta F) \geq 0. \tag{D.1.23}$$

此外，正如我们从公式（D.1.19）中看到的，$\langle \Sigma \rangle = 0$ 仅适用于可逆过程 s.

D.2 量子涨落定理

在建立量子版涨落定理时，正如 Crooks 关系和 Jarzynski 等式所表达的那样，人们立即面临一个问题：如何定义对量子系统所做的功？功描述的是一个特定过程，而不是刻画系统的状态。因此，功不能由一个厄米算符表示，后者的特征值可以通过一次投影测量加以确定 [50, 160]。对于开放量子系统，恰当的定义仍在讨论之中；但对于如何根据两时刻测量方案定义对封闭量子系统所做的功，人们似乎已经达成共识。在这一方法中，我们对系统的能量进行两次测量，第一次在 $t = 0$，然后

[2]设 X 是一个实值可积随机变量，且 $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个凸函数，使得$Y = g(X)$也可积。那么 Jensen 不等式指出，$E[g(X)] \geq g(E[X])$，其中 $E[X]$表示 X的期望值。

在 $t=\tau$，即力协议的终点进行测量。这两次测量结果之差，就是某一特定实现中对系统所做的功。这不可避免地为功分布带来了第二个概率性方面，其来源是量子不确定性。

在使这些想法更加精确之前，我们沿用上一节的方法，现在转向受驱动的量子系统的微观可逆性问题。

D.2.1 量子微观可逆性

设 $U_f(t,0)$ 为量子系统在力协议 $f(t)$ 驱动下从 $t=0$ 到 $t=\tau$ 的幺正时间演化算符。为了写出量子微观可逆性条件，我们将时间区间划分为离散步骤，并将时间演化算符表示为时间有序乘积，

$$\hat{U}_{\tilde{f}}(\tau-t,0)=\lim_{N\to\infty} e^{-i\hat{H}(\tilde{f}(\tau-N\varepsilon))\varepsilon}\dots e^{-i\hat{H}(\tilde{f}(\varepsilon))\varepsilon}e^{-i\hat{H}(\tilde{f}(0))\varepsilon}, \tag{D.2.1}$$

其中 $\varepsilon=t/N$ 表示时间步长，$H(f(t))$ 为哈密顿算符。通过回顾 $f(t)=f(\tau-t)$，我们可以写出

$$\hat{U}_{\tilde{f}}(\tau-t,0)=\lim_{N\to\infty} e^{-i\hat{H}(f(N\varepsilon))\varepsilon}\dots e^{-i\hat{H}(f(\tau-\varepsilon))\varepsilon}e^{-i\hat{H}(f(\tau))\varepsilon}. \tag{D.2.2}$$

接下来，让我们引入时间反演算符 Θ，并假设在任意时间t，哈密顿量在时间反演下不变，

$$\left[\hat{H}(f(t)),\hat{\Theta}\right]=0. \tag{D.2.3}$$

那么，

$$\hat{\Theta}^\dagger\hat{U}_{\tilde{f}}(\tau-t,0)\hat{\Theta}=\lim_{N\to\infty}\hat{\Theta}^\dagger e^{-i\hat{H}(f(N\varepsilon))\varepsilon}\hat{\Theta}\hat{\Theta}^\dagger\dots\hat{\Theta}^\dagger e^{-i\hat{H}(f(\tau))\varepsilon}\hat{\Theta}, \tag{D.2.4}$$

其中我们插入了恒等式 $N-1\ 1=\hat{\Theta}\hat{\Theta}^\dagger$。由于 $\hat{\Theta}^\dagger e^{-i\hat{H}(f(t))\varepsilon}\hat{\Theta}=e^{iH(f(t))\varepsilon}$ 对于实数 ε [113]，我们有

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}^\dagger\hat{U}_{\tilde{f}}(\tau-t,0)\hat{\Theta}&=\lim_{N\to\infty} e^{i\hat{H}(f(N\varepsilon))\varepsilon}\dots e^{i\hat{H}(f(\tau))\varepsilon}\\&=\lim_{N\to\infty}\left[e^{-i\hat{H}(f(\tau))\varepsilon}\dots e^{-i\hat{H}(f(N\varepsilon))\varepsilon}\right]^\dagger=\hat{U}_f^\dagger(\tau,t)\end{aligned} \tag{D.2.5}$$

而微观可逆性条件为

$$\hat{U}_f(t,\tau) = \hat{\Theta}^\dagger \hat{U}_{\tilde{f}}(\tau - t, 0)\hat{\Theta}. \tag{D.2.6}$$

现在，注意到方程（D.2.6）可以改写为

$$\hat{U}_f(t,0) = \hat{\Theta}^\dagger \hat{U}_{\tilde{f}}(\tau - t, 0)\hat{\Theta}\hat{U}_f(\tau, 0), \tag{D.2.7}$$

其中我们使用了 $\hat{U}_f(t,\tau) = \hat{U}_f(t,0)\,\hat{U}_f(0,\tau) = \hat{U}_f(t,0)\,\hat{U}_f^\dagger(\tau,0)$。接下来，我们将此算符作用于纯初态 $|\psi_0\rangle$，

$$|\psi_t\rangle = \hat{U}_f(t,0)\,|\psi_0\rangle = \hat{\Theta}^\dagger \hat{U}_{\tilde{f}}(\tau - t, 0)\hat{\Theta}\hat{U}_f(\tau, 0)\,|\psi_0\rangle = \hat{\Theta}^\dagger \hat{U}_{\tilde{f}}(\tau - t, 0)\hat{\Theta}\,|\psi_\tau\rangle\,, \tag{D.2.8}$$

其中 $|\psi_\tau\rangle = U_f(\tau,0)\,|\psi_0\rangle$ 是末态。从左侧乘以 Θ，得到

$$\hat{\Theta}\,|\psi_t\rangle = \hat{U}_{\tilde{f}}(\tau - t, 0)\hat{\Theta}\,|\psi_\tau\rangle\,. \tag{D.2.9}$$

这使我们能够用态来诠释量子微观可逆性：在反向协议 f 所生成的演化下，时间反演末态 $\hat{\Theta}\,|\psi_\tau\rangle$ 从 0 演化到 $\tau - t$，到达态 $\Theta\,|\psi_t\rangle$ [50]。

D.2.2 功概率密度函数

考虑一个系统，其时间演化由哈密顿算符 $\hat{H}(f(t))$ 生成，初始状态由热密度矩阵描述

$$\hat{\rho}(0) = \frac{e^{-\beta \hat{H}(f(0))}}{Z_0}, \tag{D.2.10}$$

其中 $Z_0 = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \hat{H}(f(0))}$ 是配分函数，Tr 表示对系统希尔伯特空间取迹。哈密顿本征值方程可写为

$$\hat{H}(f(t))\,|\psi_{n,\alpha}(t)\rangle = E_n(t)\,|\psi_{n,\alpha}(t)\rangle\,, \tag{D.2.11}$$

其中 n 表示用于确定能量本征值的量子数，而 α表示所有其他量子数。

现在我们来描述双时刻测量方案，并据此定义施加于系统的功。在 $t = 0$，我们测量系统的能量，测得特征值 $E_n(0)$ 的概率为

$$p_n(0) = \mathrm{Tr}\left[\hat{\Pi}_n^0 \hat{\rho}(0)\right]. \tag{D.2.12}$$

这里，$\hat{\Pi}_n^0 = \sum_\alpha |\psi_{n,\ \alpha}(0)\rangle \langle \psi_{n,\ \alpha}(0)|$ 是投影到由与特征值 $E_n(0)$ 对应的特征向量张成的特征子空间上的投影算符。完成能量测量后，若测量结果为 $E_n(0)$，则系统由以下状态描述

$$\hat{\rho}_n = \frac{\hat{\Pi}_n^0 \hat{\rho}(0) \hat{\Pi}_n^0}{p_n(0)}. \tag{D.2.13}$$

由于我们考虑的是一个封闭系统，时间演化是幺正的，

$$\hat{\rho}_n(t; f) = \hat{U}_f(t, 0) \hat{\rho}_n \hat{U}_f^\dagger(t, 0). \tag{D.2.14}$$

在时间 $t = \tau$ a 进行第二次能量测量，得到特征值 $E_m(\tau)$ 的概率为

$$p_{m|n}^\tau[f] = \mathrm{Tr}\Big[\hat{\Pi}_m^\tau \hat{\rho}_n(\tau; f)\Big]. \tag{D.2.15}$$

对系统所做的功就是能量本征值 $w = E_m(\tau)$ 和 $-E_n(0)$ 之差。功的概率分布函数为

$$P[w; f] = \sum_{m,n} \delta[w - E_m(\tau) + E_n(0)] p_{m|n}^\tau[f] p_n^0. \tag{D.2.16}$$

D.2.3 Crooks 涨落关系和 Jarzynski 等式的量子版本

根据功的概率分布函数（D.2.16），我们将特征函数写作 [171]

$$\begin{aligned}
\Phi[u; f] &= \int \mathrm{d}w\, e^{iuw} P[w; f] \\
&= \sum_{m,n} e^{iuE_m(\tau)} e^{-iuE_n(0)} \mathrm{Tr}\Big\{\hat{\Pi}_m^\tau \hat{U}_f(\tau, 0) \hat{\rho}_n \hat{U}_f^\dagger(\tau, 0)\Big\} p_n^0 \\
&= \mathrm{Tr}\left\{ e^{iu\hat{H}(f(\tau))} \sum_m \hat{\Pi}_m^\tau \hat{U}_f(\tau, 0) e^{-iu\hat{H}(f(0))} \sum_n \hat{\rho}_n p_n^0 \hat{U}_f^\dagger(\tau, 0) \right\} \\
&= \mathrm{Tr}\Big\{ \hat{U}_f^\dagger(\tau, 0) e^{iu\hat{H}(f(\tau))} \hat{U}_f(\tau, 0) e^{-iu\hat{H}(f(0))} \hat{\rho}(0) \Big\},
\end{aligned} \tag{D.2.17}$$

其中我们利用了 $\sum_m \hat{\Pi}_m^\tau = 1$ 和 $\sum_n \hat{\rho}_n p_n^0 = \hat{\rho}(0)$ 这一事实；由于初始密度矩阵与 $t = 0$ 处的哈密顿量对易，该事实成立。

利用初始密度矩阵的显式形式，式（D.2.10），我们可以写成

$$Z_0 \Phi[u; f] = \mathrm{Tr}\Big\{ \hat{U}_f^\dagger(\tau, 0) e^{iu\hat{H}(f(\tau))} \hat{U}_f(\tau, 0) e^{-iu\hat{H}(f(0))} e^{-\beta\hat{H}(f(0))} \Big\}. \tag{D.2.18}$$

在量子微观可逆性条件（D.2.6）中令 $t=0$，得到

$$\hat{U}_f(0,\tau)=\hat{\Theta}^\dagger\hat{U}_{\tilde{f}}(\tau,0)\hat{\Theta} \implies \hat{U}_f^\dagger(\tau,0)=\hat{\Theta}^\dagger\hat{U}_{\tilde{f}}(\tau,0)\hat{\Theta},$$

$$\implies \hat{U}_f(\tau,0)=\hat{\Theta}^\dagger\hat{U}_{\tilde{f}}^\dagger(\tau,0)\hat{\Theta}. \tag{D.2.19}$$

将此表达式代回方程（D.2.18）可得

$$\begin{aligned}
Z_0\Phi[u;f] &= \mathrm{Tr}\Big\{\hat{\Theta}^\dagger\hat{U}_{\tilde{f}}(\tau,0)\hat{\Theta}e^{iu\hat{H}(f(\tau))}\hat{\Theta}^\dagger\hat{U}_{\tilde{f}}^\dagger(\tau,0)\hat{\Theta}e^{-iu\hat{H}(f(0))}e^{-\beta\hat{H}(f(0))}\Big\}\\
&= \mathrm{Tr}\Big\{\hat{\Theta}^\dagger\hat{U}_{\tilde{f}}(\tau,0)e^{-iu^*\hat{H}(f(\tau))}\hat{U}_{\tilde{f}}^\dagger(\tau,0)e^{iu^*\hat{H}(f(0))}e^{-\beta\hat{H}(f(0))}\hat{\Theta}\Big\}\\
&= \mathrm{Tr}\Big\{e^{-\beta\hat{H}(f(0))}e^{-iu\hat{H}(f(0))}\hat{U}_{\tilde{f}}(\tau,0)e^{iu\hat{H}(f(\tau))}\hat{U}_{\tilde{f}}^\dagger(\tau,0)\Big\}\\
&= \mathrm{Tr}\Big\{\hat{U}_{\tilde{f}}^\dagger(\tau,0)e^{i(-u+i\beta)\hat{H}(f(0))}\hat{U}_{\tilde{f}}(\tau,0)e^{-i(-u+i\beta)\hat{H}(f(\tau))}e^{-\beta\hat{H}(f(\tau))}\Big\}\\
&= Z_\tau\Phi[-u+i\beta;\tilde{f}],
\end{aligned} \tag{D.2.20}$$

其中我们利用了[3]的反线性 Θ。这一结果恰好与我们在经典情形下得到的恒等式相同，见方程（D.1.15）。按照之前相同的步骤，我们可以得到克鲁克斯涨落定理的量子版本：

$$\frac{P[w;f]}{P[-w;\tilde{f}]}=e^{\beta(w-\Delta F)}, \tag{D.2.21}$$

由此我们还可以得到量子 Jarzynski 等式

$$\left\langle e^{-\beta w}\right\rangle = e^{-\beta\Delta F}. \tag{D.2.22}$$

[3]对于任意迹类算子 $\hat{A}$，$\hat{\Theta}$ 的反线性意味着 $\mathrm{Tr}\left(\hat{\Theta}^\dagger\hat{A}\hat{\Theta}\right)=\mathrm{Tr}\,\hat{A}^\dagger$。

参考文献

[1] I. Basile、L. Buoninfante、F. Di Filippo、B. Knorr、A. Platania与A. Tokareva，“量子引力讲义”，SciPost Physics Lecture Notes（2025年）。[2] L. Buoninfante等人，“量子引力愿景”，SciPost Physics社区报告（2025年）。[3] K. Eppley与E. Hannah，“引力场量子化的必要性”，Foundations of Physics **7**，51–68（1977年）。[4] M. Albers、C. Kiefer与M. Reginatto，“测量分析与量子引力”，《物理评论D》**78**，064051（2008年）。[5] C. Kiefer，量子引力（国际物理学专著丛书）（Oxford Science Publications，2012年）。[6] R. Penrose，“论量子力学的引力化1：量子态约化”，Foundations of Physics **44**，557–575（2014年）。[7] J. Armas编，关于量子引力的对话（剑桥大学出版社，2021年）。[8] J. Oppenheim，“经典引力的后量子理论？”，Physical Review X **13**，041040（2023年）。[9] A. Salvio，“二次引力”，Frontiers in Physics **6**（2018年）。[10] J. F. Donoghue与G. Menezes，“论二次引力”，Il Nuovo Cimento C**45**，1–11（2022年）。[11] R. Percacci，协变量子引力与渐近安全导论（世界科学出版公司，2017年）。[12] M. Reuter，量子引力与函数重整化群：通向渐近安全之路，剑桥数学物理专著丛书（剑桥大学出版社，2019年）。[13] J. Ambjørn、A. Görlich、J. Jurkiewicz与R. Loll，“非微扰量子引力”，Physics Reports **519**，127–210（2012年）。[14] R. Loll，“来自因果动力学三角剖分的量子引力：综述”，《经典与量子引力》**37**，013002（2019年）。

[15] C. Rovelli，量子引力（剑桥大学出版社，2007年）。[16] A. Ashtekar与E. Bianchi，“圈量子引力简评”，《物理学进展报告》**84**，042001（2021年）。[17] J. Polchinski，弦论，第*1*卷：玻色弦导论（剑桥大学出版社，2005年）。[18] J. Polchinski，弦论，第*2*卷：超弦理论及其超越（剑桥大学出版社，2005年）。[19] B. P. Abbott等人，“双黑洞并合引力波的观测”，《物理评论快报》**116**（2016年）。[20] J. F. Donoghue，“牛顿势的领头量子修正”，《物理评论快报》**72**，2996–2999（1994年）。[21] F. Dyson，“引力子可探测吗？”，《现代物理学国际期刊A》**28**，1330041（2013年）。[22] S. Bose等人，“量子引力的自旋纠缠见证”，《物理评论快报》**119**（2017年）。[23] C. Marletto与V. Vedral，“两个有质量粒子之间由引力诱导的纠缠是引力中量子效应的充分证据”，《物理评论快报》**119**（2017年）。[24] M. Parikh、F. Wilczek与G. Zahariade，“引力子噪声”，《现代物理学国际期刊D》**29**，2042001（2020年）。[25] M. Parikh、F. Wilczek与G. Zahariade，“引力波的量子力学”，《物理评论快报》**127**（2021年）。[26] M. Parikh、F. Wilczek与G. Zahariade，“引力波探测器处引力量子化的特征”，《物理评论D》**104**（2021年）。[27] H.-T. Cho与B.-L. Hu，“引力子的量子噪声及测地线间距上的随机力”，《物理评论D》**105**，086004（2022年）。[28] H.-T. Cho与B.-L. Hu，“潮汐力与测地线汇上的引力子噪声”，《物理评论D》**107**（2023年）。[29] S. Chawla与M. Parikh，“苹果下落的量子引力修正”，《物理评论D》**107**（2023年）。[30] S. Kanno、J. Soda与J. Tokuda，“引力子引起的噪声与退相干”，《物理评论D》**103**（2021年）。[31] A. Bassi、A. Großardt与H. Ulbricht，“引力退相干”，《经典与量子引力》**34**，193002（2017年）。

[32] J.-T. Hsiang、H.-T. Cho 和 B.-L. Hu，《引力子物理：引力子量子场论、引力子噪声与引力退相干简明教程》，Universe **10**，306（2024年）。[33] M. P. Blencowe，《引力诱导退相干的有效场论方法》，《物理评论快报》**111**（2013年）。[34] C. Anastopoulos 和 B. L. Hu，《引力退相干主方程：探测时空纹理》，《经典与量子引力》**30**，165007（2013年）。[35] I. Pikovski、M. Zych、F. Costa 和 Č. Brukner，《引力时间膨胀导致的普适退相干》，《自然·物理》**11**，668–672（2015年）。[36] I. Pikovski、M. Zych、F. Costa 和 Č. Brukner，《量子系统中的时间膨胀与退相干》，New Journal of Physics **19**，025011（2017年）。[37] R. Feynman 和 F. Vernon，《与线性耗散系统相互作用的一般量子系统理论》，Annals of Physics **24**，118–173（1963年）。[38] R. P.Feynman 和 A. R. Hibbs，量子力学与路径积分（Dover Publications，2010年）。[39] E. A. Calzetta 和 B.-L. B. Hu，非平衡量子场论（剑桥大学出版社，2008年）。[40] J. Schwinger，《量子振子的布朗运动》，Journal of Mathematical Physics **2**，407–432（1961年）。[41] L. V. Keldysh，《非平衡过程的图解技术》，载于*Leonid V Keldysh* 论文选集（WORLD SCIENTIFIC，2023年11月），第47–55页。[42] M. L. W. Basso、J. Maziero 和 L. C. Céleri，《相对论时间膨胀的不可逆性》，《经典与量子引力》**40**，195001（2023年）。[43] M. L. W. Basso、J. Maziero 和 L. C. Céleri，《弯曲时空中的量子细致涨落定理：熵产生依赖于观察者的本质》，《物理评论快报》**134**，050406（2025年）。[44] R. L. S. Costa、M. L. W. Basso、J. Maziero 和 L. C. Céleri，《静态弯曲时空中量子场的功分布》，《物理评论D》**113**，025010（2026）。[45] C. Jarzynski，《自由能差的非平衡等式》，《物理评论快报》**78**，2690–2693（1997年）。

[46] G. E. Crooks, 《熵产生涨落定理与自由能差的非平衡功关系》, 《物理评论E》**60**, 2721–2726（1999年）。[47] J. Horowitz 和 C. Jarzynski, 《功涨落关系的比较》, Journal of StatisticalMechanics: Theoryand Experiment **2007**, P11002–P11002（2007年）。[48] C. Jarzynski, 《远离平衡态功关系的比较》, 《科学院院报：物理学》**8**, 495–506（2007年）。[49] C. Jarzynski, 《非平衡功关系：基础与应用》, The European Physical Journal B **64**, 331–340（2008年）。[50] M. Campisi、P. Hänggi 和 P. Talkner, 《量子涨落关系：基础与应用》, 《现代物理评论》**83**, 771–791（2011年）。[51] T. H. Moreira 和 L. C. Céleri, 《弱量子化引力场诱导的复合粒子退相干》, 《经典与量子引力》**41**, 015006（2023年）。[52] T. H. Moreira 和 L. C. Céleri, 《复合粒子的引力退相干与再相干：引力子与经典牛顿势之间的相互作用》, （2026）。[53] T. H. Moreira 和 L. C. Céleri, 《时空涨落导致的熵产生》, 《经典与量子引力》**42**, 025022（2024年）。[54] S. M. Carroll, 时空与几何：广义相对论导论（剑桥大学出版社，2019年）。[55] R. M. Wald, 广义相对论 （芝加哥大学出版社，1984年）。[56] S. L. Weinberg, 引力与宇宙学：广义相对论原理及应用（Wiley，2013年）。[57] C. W. Misner、K. S. Thorne 和 J. A. Wheeler, 引力 （普林斯顿大学出版社，2017年）。[58] J. B. Hartle, 引力：爱因斯坦广义相对论导论 （Addison-Wesley Professional，2003年）。[59] A. Zee, 爱因斯坦引力简明指南 （普林斯顿大学出版社，2013年）。[60] B. F. Schutz, 广义相对论入门，第3版（剑桥大学出版社，剑桥，2022年）。[61] J. Stewart, 高级广义相对论 （剑桥大学出版社，1993年）。

[62] M. Maggiore，《引力波》第一卷：理论与实验（牛津大学出版社，牛津，2007年）。[63] M. Maggiore，《引力波》第二卷：天体物理学与宇宙学（牛津大学出版社，牛津，2018年）。[64] D. J. Griffiths，《基本粒子导论》（Wiley-VCH，魏恩海姆，2008年）。[65] M. D. Schwartz，《量子场论与标准模型》（剑桥大学出版社，2013年）。[66] S. Navas 等，“粒子物理学综述”，《物理评论D》**110**（2024年）。[67] I. Pikovski、M. R. Vanner、M. Aspelmeyer、M. S. Kim 和 Č. Brukner，“利用量子光学探测普朗克尺度物理学”，《自然·物理》**8**，393–397（2012年）。[68] D. Carney、P. C. E. Stamp 和 J. M. Taylor，“量子引力桌面实验：实用指南”，《经典与量子引力》**36**，034001（2019年）。[69] C. Anastopoulos 和 B. L. Hu，“两个引力猫态的量子叠加”，《经典与量子引力》**37**，235012（2020年）。[70] H. Chevalier、A. J. Paige 和 M. S. Kim，“在存在未知相互作用时见证引力的非经典性质”，《物理评论A》**102**，022428（2020年）。[71] D. Carney、H. Müller 和 J. M. Taylor，“利用原子干涉仪推断引力纠缠生成”，《PRX量子》**2**，030330（2021年）。[72] J. S. Pedernales、K. Streltsov 和 M. B. Plenio，“利用有质量媒介粒子增强量子系统间的引力相互作用”，《物理评论快报》**128**，110401（2022年）。[73] D. L. Danielson、G. Satishchandran 和 R. M. Wald，“引力媒介纠缠：牛顿场与引力子”，《物理评论D》**105**（2022年）。[74] M. Christodoulou、A. D. Biagio、R. Howl 和 C. Rovelli，“引力纠缠、量子参考系与自由度”，《经典与量子引力》**40**，047001（2023年）。[75] M. Christodoulou、A. Di Biagio、M. Aspelmeyer、Č. Brukner、C. Rovelli 和 R. Howl，“线性化量子引力中的局域媒介纠缠”，《物理评论快报》**130**（2023年）。

[76] Y. Kaku、T. Fujita 和 A. Matsumura，“光机械实验中量子引力信号的增强”，《物理评论D》**108**，106014（2023年）。[77] S. Bose 等，“作为量子力学与引力接口的有质量量子系统”，《现代物理评论》**97**，015003（2025年）。[78] K. Beyer、M. S. Kim 和 I. Pikovski，见证引力动力学量子性的单侧判据，2025年。[79] J. Aziz 和 R. Howl，“经典引力理论会产生纠缠”，《自然》**646**，813–817（2025年）。[80] C. Marletto、J. Oppenheim、V. Vedral 和 E. Wilson，经典引力无法媒介纠缠，2025年。[81] E. Poisson，《相对论学家的工具箱：黑洞力学的数学》（剑桥大学出版社，剑桥，2004年）。[82] M. Isi，“引力波偏振的参数化”，《经典与量子引力》**40**，203001（2023年）。[83] É. É. Flanagan 和 S. A. Hughes，“引力波理论基础”，New Journal of Physics **7**，204–204（2005年）。[84] J. D. Jackson，《经典电动力学》，第3版（Wiley，1998年）。[85] C. Cahillane 和 G. Mansell，“先进LIGO引力波天文台综述：迈向第四次观测运行”，《星系》**10**，36（2022年）。[86] R. A. Hulse 和 J. H. Taylor，“在双星系统中发现脉冲星”，《天体物理学杂志》**195**，L51（1975年）。[87] J. Levin，《黑洞忧郁与其他来自外太空的歌曲》，第1版（Alfred A. Knopf，纽约，2016年）。[88] M. Bailes 等，“2020年代与2030年代的引力波物理学和天文学”，《自然评论：物理学》**3**，344–366（2021年）。[89] N. Jeevanjee，《物理学家张量与群论导论》（Birkhaus

er,

2015年）。[90] G. Costa 和 G. Fogli，《粒子物理学中的对称性与群论：时空与内部对称性导论》（Springer，2012年）。[91] M. Fierz 和 W. E. Pauli，“电磁场中任意自旋粒子的相对论性波动方程”，《伦敦皇家学会会刊A辑：数学与物理科学》**173**，211–232（1939年）。

[92] S. Weinberg, 《场的量子理论：基础》，第01卷（剑桥大学出版社，2005年）。[93] E. Wigner, “非齐次洛伦兹群的酉表示”, 《数学年刊》**40**, 149（1939年）。[94] S. Weinberg, 《场的量子理论：超对称性》，第03卷（剑桥大学出版社，2013年）。[95] M. Srednicki, 《量子场论》（剑桥大学出版社，2007年）。[96] M. E. Peskin 和 D. V. Schroeder, 《量子场论导论》（Westview出版社，2007年）。[97] D. Carney、V. Domcke 和 N. L. Rodd, “引力子探测与引力的量子化”, 《物理评论D》**109** （2024年）。[98] G. Tobar、S. K. Manikandan、T. Beitel 和 I. Pikovski, “利用量子传感探测单个引力子”, Nature Communications **15** （2024年）。[99] R. M. Wald, 《弯曲时空中的量子场论与黑洞热力学》，芝加哥物理学讲座（芝加哥大学出版社，1994年）。[100] N. D. Birrell 和 P. C. W. Davies, 《弯曲空间中的量子场》（剑桥大学出版社，1984年）。[101] P. J. Westervelt, “静态引力场对电磁波和引力波的散射：经典（广义相对论

)

以及量子场论结果”, 《物理评论D》 **3**，2319–2324（1971）。[102] S. Ragusa 和 L. C. Céleri, “快报：引力子的太阳引力偏折”, 《广义相对论与引力》 **35**，1125–1126（2003）。[103] O. Kübler 和 H. Zeh, “量子关联的动力学”, Annals of Physics**76**，405–418（1973）。[104] W. H. Zurek, “量子装置的指针基：波包塌缩成何种混合态？”, 《物理评论D》 **24**，1516–1525（1981）。[105] W. H. Zurek, “环境诱导超选择规则”, 《物理评论D》 **26**，1862–1880（1982）。[106] E. Joos 和 H. D. Zeh, “经典性质通过与环境的相互作用而涌现”, 《物理学杂志B：凝聚态》**59**，223–243（1985）。[107] W. H. Zurek, “退相干和从量子到经典的转变”, 《今日物理》 **44**，36–44（1991）。

[108] W. H. Zurek，“退相干、择定与经典的量子起源”，《现代物理评论》**75**，715–775（2003）。[109] M. A. Schlosshauer，退相干与量子到经典的转变（Spring er, 2008）。[110] H.-P. Breuer 和 F. Petruccione，开放量子系统理论（牛津大学出版社，2002）。[111] M. Schlosshauer，“退相干、测量问题与量子力学诠释”，《现代物理评论》**76**，1267–1305（2005）。[112] C. Cohen-Tannoudji、B. Diu 和 F. Laloë，量子力学，第 *1* 卷：基本概念、工具与应用（Wiley-VCH，2019）。[113] J. J. Sakurai 和 J. Napolitano，现代量子力学（剑桥大学出版社，2020）。[114] B. L. Hu、J. P. Paz 和 Y. Zhang，“一般环境中的量子布朗运动：具有非局域耗散和有色噪声的精确主方程”，《物理评论D》**45**，2843–2861（1992）。[115] R. Kubo、M. Toda 和 N. Hashitsume，统计物理学 *II*：非平衡统计力学，第 2 版（施普林格·自然，1995）。[116] R. K. Pathria 和 P. D. Beale，统计力学（学术出版社，2021）。[117] L. D. Landau、E. M. Lifshitz 和 L. P. Pitaevskii，统计物理学 *I*，第 3 版，第 5 卷，《理论物理学教程》（巴特沃思-海涅曼，1980）。[118] A. Caldeira 和 A. Leggett，“量子布朗运动的路径积分方法”，《物理学A：统计力学及其应用》**121**，587–616（1983）。[119] Y. Subaşı 和 B. L. Hu，“基于退相干历史和开放系统分析的量子与经典涨落定理”，《物理评论E》**85**（2012）。[120] R. B. Griffiths，“一致历史与量子力学的诠释”，《统计物理学杂志》**36**，219–272（1984）。[121] R. Omnès，“从希尔伯特空间到常识：量子力学诠释近期进展的综合”，Annals of Physics **201**，354–447（1990）。[122] R. Omnès，“量子力学的一致诠释”，《现代物理评论》**64**，339–382（1992）。[123] M. Gell-Mann 和 J. B. Hartle，复杂性、熵与信息物理学，W. H. Zurek 编（Addison-Wesley，1990）。

[124] H. F. Dowker 和 J. J. Halliwell，“历史的量子力学：量子力学中的退相干泛函”，《物理评论D》**46**，1580–1609（1992）。[125] C. Pfister 等，“引力退相干的普适性检验”，Nature Communications**7** （2016）。[126] F. Karolyhazy，“宏观物体的引力与量子力学”，Il Nuovo Cimento A **42**，390–402（1966）。[127] L. Diósi，“宏观物体的引力与量子力学局域化”，Physics Letters A **105**，199–202（1984）。[128] L. Diósi，“宏观量子涨落普适性约化模型”，《物理评论A》**40**，1165–1174（1989）。[129] A. Frenkel，“波函数的自发定位与经典行为”，Foundations of Physics **20**，159–188（1990）。[130] R. Penrose，“论引力在量子态约化中的作用”，《广义相对论与引力》**28**，581–600（1996）。[131] L. Diósi，“关于波函数局域化与退相干的若干新牛顿引力机制的札记”，Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**40**，2989–2995（2007）。[132] L. Diósi，“波函数坍缩产生的牛顿力：推测与检验”，Journal of Physics: Conference Series **504**，012020（2014）。[133] S. L. Adler，客观约化模型中的引力与所需噪声，2014年。[134] G. H. S. Aguiar 和 G. E. A. Matsas，“简单的引力自退相干模型”，《物理评论D》**112** （2025年）。[135] B. Linet 和 P. Tourrenc，“引力场中的相变：干涉探测的可能性”，Canadian Journal of Physics**54**，1129–1133（1976年）。[136] L. Stodolsky，“引力场中的物质与光波干涉测量”，《广义相对论与引力》**11**，391–405（1979年）。[137] Y. Q. Cai 和 G. Papini，“弱引力场中的粒子干涉测量”，《经典与量子引力》**6**，407–418（1989年）。[138] W. L. Power 和 I. C. Percival，“共形时空涨落与量子波包的相互作用所导致的退相干”，Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**456**，955–968（2000年）。

[139] S. Reynaud、B. Lamine、A. Lambrecht、P. M. Neto 和 M.-T. Jaekel，“HYPER与引力退相干”，《广义相对论与引力》**36**，2271–2288（2004年）。[140] B. Lamine、R. Hervé、A. Lambrecht 和 S. Reynaud，“物质波干涉测量的终极退相干边界”，《物理评论快报》**96**，050405（2006年）。[141] H.-P. Breuer、E. Göklü 和 C. Lämmerzahl，“度规涨落与退相干”，《经典与量子引力》**26**，105012（2009年）。[142] D. Arteaga、R. Parentani 和 E. Verdaguer，“在热态引力子背景中的传播”，《物理评论D》**70**，044019（2004年）。[143] V. D’Esposito 和 G. Gubitosi，“由中微子振荡对量子时空诱导的退相干施加的约束”，《物理评论D》**110**（2024年）。[144] A. Domi 等，“利用微观量子力学模型理解中微子振荡中引力诱导的退相干参数”，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》**2024**，006（2024年）。[145] M. Lagouvardos 和 C. Anastopoulos，“光子的引力退相干”，《经典与量子引力》**38**，115012（2021年）。[146] Z. Haba 和 H. Kleinert，“引力辐射阻尼的量子刘维尔方程与朗之万方程”，《国际现代物理学杂志 A》**17**，3729–3736（2002年）。[147] T. Oniga 和 C. H.-T. Wang，“光与物质的量子引力退相干”，《物理评论D》**93**，044027（2016年）。[148] M. J. Fahn 和 K. Giesel，“标量场的引力诱导退相干：探究单粒子扇区及其与重整化的相互作用”，《经典与量子引力》**42**，175019（2025年）。[149] H.-T. Cho 和 B.-L. Hu，“引力系统与引力退相干的非马尔可夫量子主方程和福克-普朗克方程”，《物理评论D》**112**（2025年）。[150] H.-P. Breuer 和 F. Petruccione，“通过发射轫致辐射破坏量子相干性”，《物理评论A》**63**，032102（2001年）。[151] S. Gerlich 等，“大型有机分子的量子干涉”，Nature Communications **2**（2011年）。[152] Y. Y. Fein 等，“超过25千道尔顿的分子的量子叠加”，《自然·物理》**15**，1242–1245（2019年）。

[153] S. Pedalino、B. E. Ramírez-Galindo、R. Ferstl、K. Hornberger、M. Arndt 和 S. Gerlich，“利用纳米粒子物质波干涉测量探究量子力学”，《自然》**649**，866–870（2026）。[154] M. Zych、Ł. Rudnicki 和 I. Pikovski，“复合系统的引力质量”，《物理评论D》**99**，104029（2019年）。[155] M. Carlesso 和 A. Bassi，“引力时间膨胀导致的退相干：竞争性退相干效应分析”，Physics Letters A **380**，2354–2358（2016年）。[156] K. Hornberger、S. Gerlich、P. Haslinger、S. Nimmrichter 和 M. Arndt，“专题讨论：团簇与分子的量子干涉”，《现代物理学评论》**84**，157–173（2012年）。[157] L. P. Grishchuk 和 Y. V. Sidorov，“残留引力子的压缩量子态与原初密度涨落”，《物理评论D》**42**，3413–3421（1990年）。[158] T. Colas、J. Grain 和 V. Vennin，“早期宇宙中的量子再相干”，《欧洲物理快报》**142**，69002（2023年）。[159] D. Kranas、J. Grain 和 V. Vennin，“高斯映射中的再相干、绝热性与马尔可夫性”，《物理评论D》**112**（2025年）。[160] P. Talkner、E. Lutz 和 P. Hänggi，“涨落定理：功并非可观测量”，《物理评论E》**75**（2007年）。[161] M. Nakahara，几何、拓扑与物理学，第二版（Taylor & Francis Group，2003年）。[162] A. S. T. Pires，面向物理学家的微分几何（Editora Livraria da Física，2015年）。[163] P. Petersen，黎曼几何（Springer，2006年）。[164] R. J. Crittenden 和 R. L. Bishop，流形几何（美国数学学会，2001年）。[165] F. K. Manasse 和 C. W. Misner，“费米正规坐标与微分几何中的若干基本概念”，Journal of Mathematical Physics **4**，735–745（1963年）。[166] A. C. Gutiérrez-Piñeres，引力牛顿近似下的费米正规坐标，2022年。[167] R. Loudon，光的量子理论（牛津大学出版社，2000年）。[168] R. Klages、W. Just 和 C. Jarzynski 编，小系统的非平衡统计物理：涨落关系及其他（Wiley，2013年2月）。

[169] R. L. Stratonovich, 《非线性非平衡热力学 II：进阶理论》（Springer，1994年）。[170] H. Goldstein、C. Poole 和 J. Safko, 《经典力学》（Pearson，2001年）。[171] P. Talkner、P.Hänggi 和 M. Morillo, “微正则量子涨落定理”, 《物理评论E》**77** （2008年）。