arXiv:2603.02037v1 [math.AG] 2 Mar 2026

向量丛的正性与优势

F. Laytimi 和 W. Nahm

Abstract. 设 E 为一个向量丛， S_a和 S_b 为与分拆 a 和 b相关的 Schur 函子。此前我们已证明，当 a在支配偏序中大于 b时， S_aE 的丰性蕴含 S_bE 的丰性。本文证明，这一结果可推广到 k-充足、半丰富和 nef向量丛。我们的证明利用了这三种性质共同的代数本质，并研究了 Littlewood-Richardson 规则。

1. Algebraic Positivities

线丛正性的各种形式已得到深入研究，但向量丛的一些基本问题仍未得到充分探索，尽管早期已有奠基性工作（[1], [2]），且此后随着 [3]出现了新一轮研究热潮。我们的研究动机源于连通性与消失定理 [4], ，但本文将探讨更基本的性质。

我们将考虑固定射影流形 X 上的向量丛 E 。由于我们参照 [2], ，我们使用复数，不过将其推广到其他特征零的域是直接的。除非另有说明，我们按照 Hartshorne 在 [1], 中的做法，将正性性质从线丛转移到向量丛；该做法受到格罗滕迪克在 EGA II 中方法的启发。因此， E 的一个正性性质定义为线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1)$ 的相应性质。 $\mathbb{P}E$ 的点由 X 中的一点 x 以及 E 在 x 上的纤维 E_x 中的一个超平面给出。我们将它们实现为由 $span(u)$ 零化的超平面，其中 u 是E_x^*中的一个向量。 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1)$ 在这样一点上的纤维可与 $span(u)^*$ 等同。当 E 是线丛 L 时， $\mathcal{O}_{\mathbb{P}L}(1)$ 与 L 有自然的等同，因为 $\mathbb{P}L$化为 X ，而 $span(u)$化为 L_x^*。

最常见的正性形式是丰性，但弱得多的半丰富性以及介于两者之间的 k-充足性（按 Sommese [2] 的定义）也相当值得关注。回顾一下，当某个正整数 n 使得线丛 L在 X 上的 L^n 由整体截面张成时，该线丛称为半丰富。这样的半丰富线丛

2020 数学主题分类。14F17。

若对应映射 $X \to \mathbb{P}(H^0(X,\ L^n))$ 的纤维维数至多为 k，则称其为 k-充足。因此，对于 $k = 0$，k-充足性等价于充足性；随着 k 增大，k-充足性逐渐减弱，直至当 k 等于 X的维数时退化为半丰富性。若某个正整数 n 使得向量丛E 的 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(n)$ 由整体截面张成，则称其为半丰富，依此类推。

我们将把丰性的若干性质推广到这类较弱形式的正性。为避免不必要的重复，我们引入一个一般概念。

定义 1.1. 设 $\mathcal{A}$ 是 X上向量丛同构类的一个性质。当 E 具有性质 $\mathcal{A}$ 时，我们记作 $\mathcal{A}(E)$。我们通过以下三个条件来定义代数性质 $\mathcal{A}$

可加性： $\mathcal{A}(E \oplus F)$ 当且仅当 $\mathcal{A}(E)$ 且 $\mathcal{A}(F)$**乘法性：** 若 $\mathcal{A}(E)$ 且 $\mathcal{A}(F)$，则 $\mathcal{A}(E \otimes F)$**指数消去：** 若 $\mathcal{A}(E^{\otimes n})$，则 $\mathcal{A}(E)$。

注意，由乘法性条件可知，$\mathcal{A}(E)$ 蕴含 $\mathcal{A}(E^{\otimes n})$。众所周知，丰性是代数的（[1], 参见 [5] 关于特征p）。

定理 1.2. 半丰富性、 k-丰性与数值有效性都是代数性质。

证明。对于指数消去，我们利用由 $u \mapsto u^n$ 给出的包含映射 j_n : $\mathbb{P}E \to \mathbb{P}E^{\otimes n}$，对此

$$j_n^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}E^{\otimes n}}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(n).$$

当 $\mathcal{A}$ 对线丛 L 成立，且对单射 j，$\mathcal{A}(L)$ 蕴含 $\mathcal{A}(j^*L)$ 时，$\mathcal{A}$ 的指数消去显然成立，因为此时利用 j_n^*，可由 $\mathcal{A}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}E^{\otimes n}}(1))$ 推出 $\mathcal{A}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1)^n)$。关于 k-丰性，([2], 推论 1.9) 中给出了这一结论。

下面给出半丰富性的论证。线丛 L 半丰富，意味着存在一个正整数次幂 L^l，其由截面生成。因此，$E^{\otimes n}$ 半丰富意味着 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}E^{\otimes n}}(l)$，从而其 j_n^* 像 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1)^{nl}$ 由截面生成。因此，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}E}(1)$ 以及按定义的 E 也都是半丰富的。对于 nef向量丛，所需性质已在 ([3], 定理 6.2.12) 中证明。

在 [6] 中，我们证明了半丰富性的可加性和乘法性。对于 k-丰性，可加性和乘法性由 [2] 中的推论 1.10 给出。□

大性不是一种代数性质，因为它不具有可加性。事实上，若 E，F 是 X 上的向量丛，且 E 是大的，则 $E \oplus F$

是大的，对 F 不作任何条件限制。这是 [7] 中命题 3.4 的直接推论。

即使讨论半丰富性，也必须谨慎处理如何将线丛推广到向量丛。Demailly 对 E 的强半丰性的定义指出，某个对称幂 S^rE 由截面生成（[8], 1.1）。这一性质不是可加的。事实上，取 X 和 X 上的一个线丛 L，使得 L 没有截面，但 L^2 是平凡丛 I。那么 L 和当然 I 都是 Demailly 半丰的，但 $L \oplus I$ 不是。Demailly 半丰富性是比我们所用条件更强的假设，因为它指出，对 $S^rE_x^*$ 中任意非零的 U，都存在 S^rE 的一个截面 s，使得 $\langle s(x)\ U\rangle \neq 0$；而我们只要求对形如 u^r 且满足 $u \in E_x^*$ 的 U 成立。

正如 Demailly 的定义所示，使用对称幂与使用张量幂同样自然。在我们对代数性质的定义中，将 $E^{\otimes n}$ 替换为 S^nE 会得到等价的结果。一个方向上，在特征零的情形下，S^nE 是 $E^{\otimes n}$ 的一个直和项。因此，当 $\mathcal{A}$ 可加时，$\mathcal{A}(E^{\otimes n})$ 蕴含 $\mathcal{A}(S^nE)$。反过来，由乘法性可知，对任意正整数 N，$\mathcal{A}(S^nE)$ 蕴含 $\mathcal{A}((S^nE)^{\otimes N})$。对于合适的 N，我们将在主要结果定理 2.16 中证明，$\mathcal{A}((S^nE)^{\otimes N})$ 蕴含 $\mathcal{A}(E^{\otimes Nn})$。事实上，$\mathcal{A}((S^nE)^{\otimes N})$ 和 $\mathcal{A}(E^{\otimes Nn})$ 都可写成若干项的直和，其中各项同构于某个 S_aE；这些项对应于一个有限的 Schur函子集合 S_a，且其重数均非零。我们将证明，对于合适的 N，这两组 Schur函子完全相同。因此，当 $\mathcal{A}$ 可加时，$\mathcal{A}((S^nE)^{\otimes N})$ 与 $\mathcal{A}(E^{\otimes Nn})$ 等价。

我们回顾一些基本事实。Schur函子 S_a 由整数分拆 a标记。设 E 是 X 上的秩为 d 的向量丛。设 $a = (a_1, \ldots\ldots, a_r)$，其中 $a_i \geq a_{i+1}, a_r > 0$，是一个长度为 r 且满足$r \leq d$的分拆。那么，S_aE 是 X上的一个非平凡向量丛。回忆一下，a 的权由下式给出

$$|a| = \sum_{k=1}^{r} a_i,$$

即，对于 $r = 1$，有 $S_aE = S^{|a|}E$；对于 $a_1 = 1$，有 $S_aE = \Lambda^{|a|}E$。更一般地，对于任意 a，S_aE 同构于 $E^{\otimes|a|}$ 的一个直和项。

为便于记号，令 $a_k = 0$ for $k > r$。分拆按优势关系构成偏序，我们将此关系记作 $\succsim$。对于 a，b 权重相等的情形，$a \succsim b$ 表示

$$\sum_{k=1}^{l} a_i \geq \sum_{k=1}^{l} b_i$$

for $l = 1, \ldots, d$。对于任意 a, b，可以比较 $|b|a$ 和 $|a|b$，因为这两个分拆的权都是 $|a||b|$。当 $|b|a \gtrsim |a|b$ and $|a|b \gtrsim |b|a$ 时，$|b|a = |a|b$，因此 a 和 b 成比例，例如 $b = na$。

当 $|b|a \gtrsim |a|b$ 和 S_aE 充足时，S_bE 也充足，正如我们在 [6]中证明的那样。这里的主要结果是将这一事实推广到任意代数正性。

定理 1.3. 设 a, b 是分拆，使得 $|b|a \gtrsim |a|b$。当 $\mathcal{A}$ 是一个代数性质时，$\mathcal{A}(S_aE)$ 蕴含 $\mathcal{A}(S_bE)$。特别地，对于正整数 n, $\mathcal{A}(S_{na}E)$ 等价于 $\mathcal{A}(S_aE)$。

证明该定理时，我们将使用定理 2.16，它不依赖于本引言。设 M, N 是正整数，使得 $M|a|b = N|b|a$。由乘法性和可加性，代数性质 $\mathcal{A}(S_aE)$ 可传递到 $(S_aE)^{\otimes N}$ 的直和项。由定理 2.16，对于适当的 N，$(S_bE)^{\otimes M}$ 的任一直和项都同构于 $(S_aE)^{\otimes N}$的一个直和项。由可加性和指数消去，这就证明了 $\mathcal{A}(S_bE)$。

我们对 [6] 中所给出的丰性这一特殊性质的证明，基于 Littlewood-Richardson 规则的性质，并辅以上同调判据。我们的新证明仅基于 Littlewood-Richardson 规则，但需要对其结构作稍深入的探究。另一方面，它也涵盖了丰性的情形。定理 2.16 将在下一节中证明。

有些读者可能对组合学感兴趣，而对几何学不感兴趣。因此，第2节是自包含的，并不引用第1节。

2. Partitions and their algebra

设 $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$。本节采用以下特定约定。字母 $i, j, k, m, n, r, s, t, u$ 表示 $\mathbb{N}_0$中的元素。在它们仅表示 $\mathbb{N}$中元素的语境下，将予以明确说明。字母 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 表示 $\mathbb{N}$中的元素，但克罗内克符号 δ除外，其定义为：当 $m = n$ 时取 $\delta_{mn} = 1$，否则取 $\delta_{mn} = 0$。字母 l （表示“长度”）表示 $\mathbb{N}$ 中的元素。我们令 $L(l) = \mathrm{l}cm\{1, \ldots, l\}$。我们用 $\setminus$ 表示集合差，用 $\circ$表示与有限序列的串接，例如 $(2, 3) \circ (2, \ldots) = (2, 3, 2, \ldots)$。对于 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$中的单元素集合 $\{(\alpha, \beta)\}$，我们令 $\rho(\{(\alpha, \beta)\}) = \alpha$，其中 ρ 表示“行”。字母 I （表示“区间”）指 $\mathbb{N}$的非空子序列。当 $I = I_1 \circ \ldots \circ I_\sigma$时，我们称 $J = \{I_1, \ldots, I_\iota\}$ 为 I的细分。字母 ι 始终表示给定细分 J中项的个数。对于 $\alpha \in I$，我们定义 $J(\alpha)$ 为 $\alpha \in I_{J(\alpha)}$。

（无限长度的）分拆是 $\mathbb{N}_0$ 中的一个弱递减数列，且收敛于零。其严格长度是 $\mathbb{N}$中项的个数。分拆集合记作 $\mathcal{P}$。一般的分拆用大写字母表示，其元素用对应的小写字母表示，例如 $A=(a_1,a_2,\dots)$ 或 $A^\sim=(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\dots,..)$。字母 A,B,C,P 始终表示分拆。 $\mathcal{P}$ 在标准加法下构成半群，该运算记作 $+$。多个项相加时，通常用 Σ 表示； n 个相等项 A 相加得到 nA。 A 的杨表是集合 $Y(A)=\{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid 1\le j\le a_i\}$。鉴于 $Y(A)$，我们称 a_i 为 A的第 i 行的长度。 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$中的转置记作 $(i,j)^\sim=(j,i)$。我们将分拆 $A^\sim$ 定义为 $Y(A^\sim)=Y(A)^\sim$。 A 的第 i 列的长度为 $\tilde{a}_i$。

令 $\Lambda^r=(r,0,\dots)^\sim$。我们有

$$A=\sum_{i=1}^{\infty}(\tilde{a}_i,0,\dots)^\sim, \tag{2.1}$$

因此， $\mathcal{P}$由 $\Lambda^1,\Lambda^2,\dots$生成，构成一个半群。 A 的权 $|A|$是其基数 $|Y(A)|$。两个权重相等的分拆A,B之间的距离定义为 $|Y(A)\setminus Y(B)|$。我们将 $|A\setminus B|=|Y(A)\setminus Y(B)|$ 和 $\rho(A\setminus B)=\rho(Y(A)\setminus Y(B))$ 记作 $|A\setminus B|=1$。

对于 $l\in\mathbb{N}$， $\mathbb{N}_0$ 中由 l 个数构成的弱递减数列称为长度为 l 的分拆。它们构成半群 $\mathcal{P}(l)$，并自然单射到 $\mathcal{P}$中。通常，当分拆的长度不受限制、仅由直接上下文中的约束决定时，我们不会提及其长度。在这些约束中，诸如 $A+B$ 这样的表达式仅对长度相同的两个分拆有定义。

我们将分拆 A 对 I 的限制记为 $A[I]$，使得 $A[I_1\circ I_2]=A[I_1]\circ A[I_2]$。对于 $l=|I|$，存在一个从 $\mathcal{P}(l)$ 到从 I 到 $\mathbb{N}_0$ 的弱递减函数的自然双射。对于 $A\in\mathcal{P}(l)$，我们将对应的像记为 $A(I)$。

定义 2.1. 我们定义支配偏序如下： $A\succ B$ 当且仅当$|A|=|B|$，$A\neq B$且 $|A[(1,\dots,r)]|\ge|B[(1,\dots,r)]|$ 对所有 $r\in\mathbb{N}$均成立。

由于当 r 大于A的严格长度时， $|A[(1,\dots,r)]|=|A|$，任何 $A\succ B$ 的陈述都可归结为有限个不等式。我们有 $\Lambda^{|A|}\preccurlyeq A$。

引理*2.2.* 对于 $A\succ B$、 $|A\setminus B|=k$，存在一个插值序列P^0、P^1、…、P^k，由权重相等的分拆组成，且相邻项之间的距离为*1*，并且 $P^0=A$、$P^k=B$。对于 $0\le i<j\le k$，有$Y(A^i)\setminus Y(A^j)\subset Y(A)\setminus Y(B)$，且 $Y(A^j)\setminus Y(A^i)\subset Y(B)\setminus Y(A)$。

证明。对于 $k = 1$ ，该结论显然成立。我们对 k使用归纳法。设 α 为使 $a_\alpha < b_\alpha$成立的最小整数。设 β 为 $\{1, \ldots, \alpha\}$ 中使 $a_\beta > b_\beta$成立的最大整数。令 A^1 由 $a^1_\beta = a^0_\beta - 1$、$a^1_\alpha = a^0_\alpha + 1$ 和 $a^1_\gamma = a^0_\gamma$ 定义，其中 γ 不同于 α，β。于是 $A^0 \succ A^1 \succ B$、$|A^1 \setminus B| = k-1$，因此可以使用归纳假设。对于最后一个结论，注意到 $Y(A^1)\setminus Y(B) \subset Y(A)\setminus Y(B)$，且 $Y(B) \setminus Y(A^1) \subset Y(B) \setminus Y(A)$。□

我们需要了解一些关于 Littlewood-Richardson 代数 $\mathcal{L}$ 的众所周知的事实，现汇集于此以供参考，并介绍本文的记号。 $\mathcal{L}$ 是一个交换的 $\mathbb{Z}$-代数， $\mathcal{P}$ 是其自由基， Λ^0 是其单位元。分拆 Λ^r、 $r \in \mathbb{N}$ 作为代数生成 $\mathcal{L}$ 。为简便起见， $\mathcal{P}$ 到 $\mathcal{L}$ 的嵌入将不再写出。

记号 2.3。 $\mathcal{L}$ 中的加法和乘法分别记为 $\oplus$、 $\otimes$。我们写作 $\mathcal{M} \lhd \mathcal{N}$，当且仅当对所有满足 $\mathcal{M} = \oplus_{A\in\mathcal{P}} m_A A$、 $\mathcal{N} = \oplus_{A\in\mathcal{P}} n_A A$ 的 $A \in \mathcal{P}$，都有 $0 \le m_A \le n_A$。整数 m_A 称为 $\mathcal{M}$ 中 A 的重数。 $\mathcal{M} \rhd \mathcal{N}$ 表示 $\mathcal{N} \lhd \mathcal{M}$。我们定义映射 $\bullet\colon \mathbb{N}_0 \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$，使得 $a \bullet \mathcal{M} = \oplus_{A\in\mathcal{P}} m'_A (a) \circ A$，其中当且仅当 $(a) \circ A \in \mathcal{P}$ 时， $m'_A = m_A$；否则为 $m'_A = 0$ 。有时我们需要将 $+$ 扩展为 $\mathcal{L}$ 中关于 $\oplus$ 分配的运算。对此运算，我们记作 $\dot{+}$，例如 $A \dot{+} (B \oplus C) = (A + B) \oplus (A + C)$。关于 $\oplus$ ， A 的 N 重和可记为 $A^{\oplus N}$，但本文不会用到。记号 NA 指的是上文所述的 $+$。

$\mathcal{L}$中的乘法递归地定义为

$$A \otimes \Lambda^r = (a_1 + 1) \circ (A_2 \otimes \Lambda^{r-1}) \oplus (a_1) \bullet (A_2 \otimes \Lambda^r), \tag{2.2}$$

其中 $A \in \mathcal{P}$， $A = (a_1) \circ A_2$， $r > 0$。回顾 $A \otimes \Lambda^0 = A$。

注意， $A \otimes \Lambda^r$ 等于 $A + \Lambda^r$ ，至多再加上在支配偏序中较小的项。由于方程式(2.1)，这意味着方程式(2.2)确定了 $\mathcal{L}$中的所有乘积。以下事实是 $\otimes$这一定义的推论。

$A \otimes B \rhd C$ 蕴含 $|A| + |B| = |C|$，因此 $\mathcal{L}$ 按权分次。

对于 $r \le s$ ，有

$$\Lambda^r \otimes \Lambda^s = \oplus_{k=0}^{r} (\Lambda^{r-k} + \Lambda^{s+k}). \tag{2.3}$$

$$If \quad A_i \lhd B_i \otimes C_i \quad for \quad i = 1, 2, \quad then$$
$$A_1 + A_2 \lhd (B_1 + B_2) \otimes (C_1 + C_2). \tag{2.4}$$

后一关系可立即推广到多重求和。对于 $C_2 = \Lambda^0$ ，可得到这一有用的特例

$$(A + B) \otimes C \rhd A \dot{+} (B \otimes C). \tag{2.5}$$

对于 $B=\Lambda^0$，可得

$$A\otimes C\rhd A+C$$

因此

$$\Sigma_{i=1}^{k}A^i\lhd\otimes_{i=1}^{k}A^i. \tag{2.6}$$

当 $A\otimes C\rhd(A+C)\oplus P$ 时，$P\prec(A+C)$。一些这样的分拆如下所示。

引理 2.4. 设 $A^1\succ A^2$, $C^1\succ C^2$，其距离为 $|A^1\diagdown A^2|=1$ 和$|C^1\diagdown C^2|=1$。设 $\rho(A^1\setminus A^2)\geq\rho(C^2\setminus C^1)$ 以及 $\rho(C^1\setminus C^2)\geq\rho(A^2\setminus A^1)$。那么

$$A^1\otimes C^1\rhd A^2+C^2.$$

证明。由公式（2.4）可知，只需考虑 A^1 与 A^2 不同的两列，以及 C^1 与 C^2不同的两列。因此，必须证明

$$(\Lambda^{\alpha_1}+\Lambda^{\alpha_2-1})\otimes(\Lambda^{\gamma_1}+\Lambda^{\gamma_2-1})\rhd(\Lambda^{\alpha_1-1}+\Lambda^{\alpha_2}+\Lambda^{\gamma_1-1}+\Lambda^{\gamma_2}),$$

其中 $\alpha_1>\alpha_2$, $\gamma_1>\gamma_2$, $\alpha_1\geq\gamma_2$, $\gamma_1\geq\alpha_2$。由公式（2.4），这立即可由公式（2.3）推出。□

根据 $\otimes$ 的定义，有 $Y(A\otimes B)\supseteq Y(A)$。因此，对于任意$l\in\mathbb{N}_0$, 严格长度大于 l 的分拆张成 $\mathcal{L}$的一个理想。我们将相应的商代数记为 $\mathcal{L}(l)$。$\mathcal{P}(l)$的元素构成 $\mathcal{L}(l)$的一个自由基。在 $\mathcal{L}(l)$中，Λ^r 的像（其中 $0<r\leq l$）仍记为 Λ^r。作为代数，$\mathcal{L}(l)$由这些元素生成。

记号 2.5。</style对于 Λ^l 在 $\mathcal{P}(l)$中的像，我们也使用记号$D(l)$，其中 D 表示“行列式”。对于 $\mathbb{N}$ 的子序列 I，我们将相应的序列记为 $D[I]$。

$$(D(l)+A)\otimes B=D(l)\dot{+}(A\otimes B). \tag{2.7}$$

支配偏序也适用于 $\mathcal{P}(l)$。对于满足 $s<l$ 的 $|A|=nl+s$，有 $A\succcurlyeq nD(l)+\Lambda^s$。

设 $J=(I_1,\ \ldots\ldots)$是 $\{1,\ldots,l\}$ 的一个细分，并令 $B,\ C\in\mathcal{P}(l)$。当 $A_i\lhd B[I_i]\otimes C[I_i]$ 对于 $i=1,\ \ldots\ldots,\ \iota$成立时，则 $A_1\circ\ldots\circ A_\iota\in\mathcal{P}(l)$并且

$$A_1\circ\ldots\circ A_\iota\lhd B\otimes C. \tag{2.8}$$

这立即推广到多重乘积。

记号 2.6。对于 $A \in \mathcal{P}(l)$ 令

$$\chi(A) = (-a_l, \ldots, -a_1).$$

当 J 是 $\{1, \ldots, l\}$ 的细分时，令 $\chi_J(A) = \chi(A[I_1]) \circ \ldots \circ \chi(A[I_\iota])$。

引理 2.7。当 $A + \chi(B)$ 是一个分拆时，则

$$(A + \chi(B)) \otimes B \rhd A.$$

证明。由方程式（2.7）和（2.5）可得

$$b_1 D(l) \dot{+} (A + \chi(B)) \otimes B \rhd A \dot{+} (b_1 D(l) + \chi(B)) \otimes B.$$

由方程式（2.1）和（2.4），只需证明

$$(D(l) + \chi(\Lambda^r)) \otimes \Lambda^r \rhd D(l).$$

这由公式（2.3）可得。 □

注 2.8。当 χ 扩展为 $\mathcal{P}(l) \otimes \mathbb{Z}$ 上的线性自同态时，它产生了 $\mathcal{P}(l)$ 的一个对称性，具体而言

$$(mD + \chi(A)) \otimes (nD + \chi(B)) = (m+n)D + \chi(A \otimes B)$$

只要 $(mD + \chi(A))$ 和 $(nD + \chi(B))$ 属于 $\mathcal{P}(l)$。读者可能会注意到，我们的许多陈述在相应地替换后，都具有这种对称性。特别地，当 $A \succ B$ 时，$mD + \chi(A) \prec mD + \chi(B)$。

引理 2.9. 对于任意 $A \in \mathcal{P}(l)$，
$|A|D(l) \lhd A^{\otimes l}$ 和 $|A|D(l) + \chi(A) \lhd A^{\otimes(l-1)}$。

证明。由方程式（2.1）和（2.4），只需考虑形如Λ^r 且满足 $1 \leq r \leq l$ 的 A。此时，通过反复应用公式（2.3），并始终保留支配偏序中唯一的最低项，即可得到结论。 □

介绍完这些一般性内容后，我们来进行证明所需的具体计算。

引理 2.10. 设 $r + s > 0$, $t + u > 0$, $r + t > 0$, $s + u > 0$, $r + t + s + u \leq l$。那么

$$(\Lambda^r + \Lambda^{l-t}) \otimes (\Lambda^s + \Lambda^{l-u}) \rhd D(l) + \Lambda^{r+s-1} + \Lambda^{l-t-u+1}. \tag{2.9}$$

证明。对于 $rstu = 0$，这由等式 (2.2) 和 (2.7) 立即得出。在这种情况下，所考察的乘积中右侧分拆的重数为

1。否则，我们使用 $\Lambda^s + \Lambda^{l-u} = (\Lambda^s \otimes \Lambda^{l-u}) \ominus (\Lambda^{s-1} \otimes \Lambda^{l-u+1})$。由 (2.2) 可得，

$$(\Lambda^r + \Lambda^{l-t}) \otimes \Lambda^s =$$
$$(\Lambda^{r+s-1} + \Lambda^{l-t} + \Lambda^1) \oplus (\Lambda^{r+s} + \Lambda^{l-t}) \oplus (\Lambda^{r+s-1} + \Lambda^{l-t+1}) \oplus \mathcal{R},$$

其中 $P \lhd \mathcal{R}$ 意味着 $|P[(1, \dots, r+s-1)]| < 2(r+s-1)$，或者意味着 $p_{r+s-1} = 1$。在这些情况下，$P \otimes \Lambda^{l-u}$ 不能对所考察的重数有所贡献。同样，

$$(\Lambda^r + \Lambda^{l-t}) \otimes \Lambda^{s-1} = (\Lambda^{r+s-1} + \Lambda^{l-t}) \oplus \mathcal{R}',$$

其中 $\mathcal{R}'$ 具有相同的性质。可得所需的重数为 $3-1$，且大于 0。□

定义 2.11. 设 J 是 $\{1, \dots, l\}$ 的一个细分。对于 $A \in \mathcal{P}(l)$，我们定义

$$G_J(A) = (L/|I_1|)|A[I_1]|D[I_1] \circ \dots \circ (L/|I_\iota|)|A[I_\iota]|D[I_\iota],$$

其中 $L = L(l)$。对于 $m, n \in \{1, \dots, \iota\}$，令

$$H_J(A, m, n) = G_J(A) + E_J(m) + F_J(n),$$

其中

$$E_J(m) = (\delta_{m1}\chi(\Lambda^1(I_1))) \circ \dots \circ (\delta_{m\iota}\chi(\Lambda^1(I_\iota)))$$
$$F_J(n) = (\delta_{n1}\Lambda^1(I_1)) \circ \dots \circ (\delta_{n\iota}\Lambda^1(I_\iota)).$$

注意，$G_J(A)$ 是一个分拆，而 $H_J(A, m, n)$ 未必是。

引理 2.12。

$$G_A(J) \lhd A^{\otimes L(l)}$$
$$G_A(J) + \chi_J(A) \lhd A^{\otimes (L(l)-1)}.$$

根据方程式 (2.8)，这是引理 (2.9) 的直接推论。□

引理 2.13. 设 J, A 与前一定义中的相同。设 $1 \le \delta < \beta$ 满足 $\tilde{a}_\beta > 0$ 且 $m = J(\tilde{a}_\beta)$，$n = J(\tilde{a}_\delta + 1)$。则 $H_J(A, m, n)$ 是一个分拆，并且

$$H_J(A, m, n) \lhd A^{\otimes L(l)}.$$

证明。在 $A[I_m]$ 中至少有一行，即行 $\tilde{a}_\beta$，比 $A[I_{m+1}]$ 中的行更长。因此 $|A[I_m]|/|I_m| > |A[I_{m+1}]|/|I_{m+1}|$。类似地，对于 $n > 1$，在 $A[I_n]$ 中至少有一行，即行 $\tilde{a}_\delta + 1$，比 $A[I_{n-1}]$ 中的行更短。因此 $H_J(A, m, n)$ 是一个划分。

根据公式（2.4），只需证明

$$H_J(A,m,n) \lhd (G_A(J)+\chi_J(A))\otimes A.$$

每当 $A=B+C$，那么

$$(G_A(J)+\chi_J(A)) = (G_B(J)+\chi_J(B))+(G_C(J)+\chi_J(C)), \tag{2.10}$$

$$H_J(A,m,n) = H_J(B,m,n)+(G_C(J)+\chi_J(C)). \tag{2.11}$$

根据公式（2.4），只需证明对于合适的 B

$$H_J(B,m,n) \lhd (G_B(J)+\chi_J(B))\otimes B.$$

将此关系限制到 I_r 且满足 $r<m$ 或 $r>n$ 时，结论显然成立，因此根据公式（2.8），我们只需考虑将其限制到$I_m\circ\ldots\circ I_n$。对于 $m=n$，我们取 $B=(\tilde{a}_\beta)^\sim$。由于 $\tilde{a}_\delta+1>\tilde{a}_\beta$，对于某个满足 $1\le t<|I_m|$的 t，有 $B[I_m]=\Lambda^t(I_m)$。我们需要考察 $\Lambda^{|I_m|-t}(I_m)\otimes\Lambda^t(I_m)$，并且通过选取公式（2.3）中含有 $k=r-1$ 的项即可验证该断言。对于 $m<n$，我们取 $B=(\tilde{a}_\delta)^\sim+(\tilde{a}_\beta)^\sim$，并将其限制到 $I_m\circ\ldots\circ I_n$。那么所需结果就是公式（2.9）中 $r+s=|I_m|$、$t+u=|I_n|$、$l=|I_m\circ\ldots\circ I_n|$ 的情形。□

引理 2.14. 设 J, A 如前。设 $H_J(A,m,n)$ 是一个分拆。设 $P\succ P'$，$|P\setminus P'|=1$，$J(\rho(P\setminus P'))\le m$和 $n\le J(\rho(P'\setminus P))$，并且 $m<n$ 或 $m=n$和 $|I_m|>1$成立。那么 $H_J(A,m,n)\otimes P\rhd G_J(A)+P'$.

证明。</style>有 $(,m,n)\succ G_J(A)$，$|H_J(A,m,n)\setminus G_J(A)|=1$，因此可以应用引理 (2.4)。□

引理 2.15. 设 J是 $\{1,\ldots,l\}$ 的一个细分，且 $A,B\in\mathcal{P}(l)$。设 $A\succ B$，$|A\setminus B|=k$。那么 $A^{\otimes kL(r)}\otimes A\rhd(kG_J(A)+B)$。

证明。设 $P^0,\ldots,P^k$ 是引理 (2.2) 中的插值序列，满足 $P^0=A$ 和 $P^k=B$。我们对 k 使用归纳法。$k=0$ 的情形是显然的。设 $Y(P^{k-1})\setminus Y(P^k)=\{(\alpha,\beta)\}$，$Y(P^k)\setminus Y(P^{k-1})=\{(\gamma,\delta)\}$,$m=J(\tilde{a}_\beta)$，$n=J(\tilde{a}_\delta+1)$。由于 $\{(\alpha,\beta)\}\in Y(A)$ 且 $\{(\gamma,\delta)\}\notin Y(A)$，我们得到 $J(\alpha)\le m$，$n\le J(\gamma)$。此外，$\tilde{a}_\beta\le\tilde{a}_\delta$，因此 $m<n$ 或 $m=n$ 和 $|I_m|\ge 2$。

由引理 (2.13)、归纳假设、方程式 (2.5) 和引理 (2.14)，我们得到

$$\begin{aligned} A^{\otimes kL(r)}\otimes A &\rhd H_J(A,m,n)\otimes A^{\otimes(k-1)L(r)}\otimes A \\ &\rhd H_J(A,m,n)\otimes((k-1)G_J(A)+P^{k-1}) \\ &\rhd (k-1)G_J(A)\dot{+}(H_J(A,m,n)\otimes P^{k-1}) \\ &\rhd kG_J(A)+P^k. \end{aligned}$$

□

定理 2.16. 对于任意 $A \in \mathcal{P}(l)$，存在 $N_A \in \mathbb{N}$，使得对于$n \geq N_A$ 以及任意满足 $B \preccurlyeq nA$ 的分拆 B，都有 $B \lhd A^{\otimes n}$。

证明。满足 $B \preccurlyeq nA$ （对某个 $n \in \mathbb{N}_0$）的分拆 B 构成 $\mathbb{N}_0^l$ 中的一个锥 $\mathcal{C}(A)$。由方程（2.6），满足 $B \lhd A^n$ （对某个 n ）的分拆 B 构成 $\mathcal{C}(A)$ 的一个子半群 $\mathcal{C}'(A)$。令 $\mathcal{J}$ 为 $\{1, \ldots, l\}$ 的所有细分构成的集合。由引理（2.12），对于任意 $J \in \mathcal{J}$，有 $G_A(J) \in \mathcal{C}'(A)$。在（[6], 引理（3.11））中，我们证明了 $\mathcal{C}(A) \otimes \mathbb{Q}_{\geq 0}$ 由满足 $J \in \mathcal{J}$ 的 $G_A(J)$ 构成的集合生成。锥 $\mathcal{C}(A)$ 可写成有限个单纯锥的并。这些单纯锥由子集 $S \in \mathcal{J}$ 标记，使得满足 $J \in S$ 的序列 $G_J(A)$ 线性无关。此类单纯锥中的任意 B 都具有形式 $B = \sum_{J \in S} \kappa_J G_A(J)$，其中 κ_J 是有界分母的 $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ 中的数。记 $\kappa_J = \lfloor \kappa_J \rfloor + \lambda_J$。形式为 $\sum_{J \in S} \lambda_J G_A(J)$ 的分拆 P 构成 $\mathcal{C}(A)$ 的一个有限子集 Φ。为证明 $\mathcal{C}(A) \setminus \mathcal{C}'(A)$ 是有限集，只需证明对于任意 $P \in \Phi$ 和任意 $J \in \mathcal{J}$，存在一个整数 $N(P, J)$，使得 $N(P, J)G_A(J) + P \in \mathcal{C}'(A)$。事实上，此时只要对于至少一个 $J \in \mathcal{J}$ 有 $\rho_J \geq N(P, J)$，就有 $\sum_{J \in \Sigma} \rho_J G_A(J) \in \mathcal{C}'(A)$。令 $|P| = n_P |A| \natural |P \setminus n_P A| = k_P$。由于 $G_J(A) \preccurlyeq L(l)A$，因此有 $P \preccurlyeq n_P A$。由引理（2.15），有 $(k_P n_P G_J(A) + P) \lhd (n_P A)^{\otimes k_P} L(r) \otimes n_P A$，这里用到了 $G_J(n_P A) = n_P G_J(A)$。由方程式（2.6），$nA \lhd A^{\otimes n}$。因此，取 $N(P, J) = k_P n_P$ 即可，故定理在 $N_A = L(l)|\mathcal{J}|M$ 时成立，其中 M 是 $(k_P + 1)n_P$ 在 Φ 中所有 P 上的最大值。□

注 2.17. 小型例子和一些论证表明，对于 $\mathcal{P}(l)$中的所有 A， $N_A = l$ 都足够。这对 $l < 4$ 成立，但我们不知道是否存在一般性证明。当要求 $N_A < l$ 时，该定理的陈述就不再正确。指数 $N = 2$ 的情形已为人所知，但相当复杂。对于介于 2 和 l 之间的指数，很容易写出一个自然的插值陈述，但我们对组合学还没有足够的经验，无法沿着这条路继续推进。因此，我们采用了一种直接但不够精细的方法。

代表所有作者，对应作者声明不存在利益冲突。

References

[1] R. Hartshorne, 《丰向量丛》, Pub.math. IHES 29 (1966) 63-94。[2] A.J. Sommese, 《阿贝尔簇的子流形》（献给 Rebecca）, Math.Ann. 233 (1978) 229-256。[3] R. Lazarsfeld, 《代数几何中的正性 II》, Springer 2003。[4] F. Laytimi, 《关于退化轨迹》, Int.J.Math. 7 (1996) 745-754。

[5] C.M. Barton, 《特征 p 下丰向量丛的张量积》, 美国数学杂志 93 (1971) 429-438。[6] F. Laytimi, W. Nahm, 《向量丛的丰富性等价与优势》, Geometriae Dedicata 200 (2019) 77-84。[7] I. Biswas, F. Laytimi, D.S. Nagaraj, W. Nahm, 《关于反丰富向量丛及 nef 且大向量丛》, 几何与物理杂志 203 (2024) 105273。[8] J.-P. Demailly, 《丰向量丛张量幂的消灭定理》, 数学发明 91 (1988) 203-220。
F. L.: Mathématiques - bât. M2, Université Lille 1, F-59655 Vil-leneuve d'Ascq Cedex, France电子邮箱地址: fatima.laytimi@univ-lille1.fr
W. N.: Dublin Institute for Advanced Studies, 10 Burlington Road, Dublin 4, Ireland电子邮箱地址: wnahm@stp.dias.ie