arXiv:2603.02044v1 [math.FA] 2 Mar 2026

关于适用于多于三个范数的柯尔莫哥洛夫型不等式的说明

OLEG KOVALENKO

摘要。本文表明，利用标准方法，可以从柯尔莫哥洛夫问题的已知解中推出尖锐的柯尔莫哥洛夫型不等式。该问题研究的是是否存在一个函数，使其导数的范数取给定值；这些不等式通过函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的 k 阶导数的一致范数 $\|f^{(k)}\|$，以及函数 f 的一致范数和若干高阶导数的一致范数（$\|f^{(r)}\|$ 和 $\|f_{(r-1)}\|$，或 $\|f_{(r)}\|$ 和 $\|f_{(r-2)}\|$，或 $\|f_{(r)}\|$、$\|f^{(r-1)}\|$ 和 $\|f_{(r-2)}\|$）来估计该一致范数。

1. 引言

导数不等式是逼近论中的一个重要课题，有许多应用。1913年，兰道得到了第一个锐利不等式（即常数最小的不等式）。他证明，若 $a,b>0$ 且函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $|f(t)|\le a$ 和 $|f''(t)|\le b$ 对所有 $t\in\mathbb{R}$ 均成立，则

$$|f'(t)|\le\sqrt{2ab}, t\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

且常数 $\sqrt{2}$ 不能再减小。

用 L_∞ 表示可测本质有界函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的函数类，并令 $\|\cdot\|$ 为一致范数。对于 $r\in\mathbb{N}$，用 L_∞^r 表示具有 $r-1$ 阶导数的连续函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的函数类，其中 $f_{(r-1)}$ 局部绝对连续，且 $f^{(r)}\in L_\infty$。令 $L_{\infty,\infty}^r := L_\infty\cap L_\infty^r$。

用 $\varphi_r, r\in\mathbb{N}$ 表示欧拉完美样条，即函数 $\operatorname{sgn}\sin x$ 的第 r 阶周期原函数，其均值为零；对于 $\lambda>0$，令 $\varphi_{\lambda,\,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi(\lambda t),\quad t\in\mathbb{R}$。

2020 数学主题分类。 26D10, 41A44,41A17.关键词和短语。 导数不等式，柯尔莫哥洛夫型不等式，Kolmogorov问题，算子的连续模。

1938年，柯尔莫哥洛夫 [2] 证明，若 $0 < k < r$ 且 $f \in L^r_{\infty,\,\infty}$，则$f^{(k)} \in L_\infty$ 且

$$\|f^{(k)}\| \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|}{\|\varphi_r\|^{1-\frac{k}{r}}}\|f\|^{1-\frac{k}{r}}\|f^{(r)}\|^{\frac{k}{r}}, \tag{2}$$

并且常数 $\frac{\|\varphi_{r-k}\|}{\|\varphi_r\|^{1-\frac{k}{r}}}$ 不能再减小。这类关于导数的不等式通常称为柯尔莫哥洛夫型不等式或兰道–柯尔莫哥洛夫型不等式。对这些不等式已有大量研究，关于该领域许多结果的概述，可参见专著 [3], 综述 [4] 及其中的参考文献。

在不等式（2）的证明中，柯尔莫哥洛夫证明了比较定理，这一定理的重要性可以说丝毫不亚于不等式本身。对于 $f \in L^r_{\infty,\,\infty}$和 $0 \le k \le r$，令 $M_k(f) := \|f^{(k)}\|$。

定理1。 设 $f \in L^r_{\infty,\,\infty}$和 $a, \lambda > 0$满足 $M_0(f) \le M_0(a\varphi_{\lambda,\,r})$且 $M_r(f) \le M_r(a\varphi_{\lambda,\,r})$。如果,满足 $(\xi) = a\varphi_{\lambda,\,r}(\eta)$，那么

$$|f'(\xi)| \le |a\varphi'_{\lambda,r}(\eta)|.$$

设 $X \subset L^r_{\infty,\infty}$ 为某个非空集合，且 $0 < k < r$。量

$$\omega(D^k, X; \delta) = \omega(X; \delta) := \sup_{f \in X, M_0(f) \le \delta} M_k(f), \delta > 0 \tag{3}$$

称为微分算子 D^k 在函数类 X上的连续模。关于柯尔莫哥洛夫型不等式与相关问题之间联系的讨论，包括求算子的连续模这一问题，请参阅 [3, 第 7]章。注意，不等式 (2) 在 $L^r_{\infty,\infty}$ 上成立且为锐的这一事实，等价于等式

$$\omega(D^k, W^r_{\infty,\infty}; \delta) = \frac{\|\varphi_{r-k}\|}{\|\varphi_r\|^{1-\frac{k}{r}}}\delta^{1-\frac{k}{r}}, \delta > 0,$$

其中 $W^r_{\infty,\infty} = \{f \in L^r_{\infty,\infty} : \ M_r(f) \le 1\}$。若存在

$$X = \{f \in L^r_{\infty,\infty} : p(f) \le 1\}$$

某个非负泛函 p，使得对所有$f \in L^r_{\infty,\infty}$、所有 $c > 0$ 以及某个 $\alpha \in \mathbb{R}$，均有 $p(c \cdot f) = c^\alpha p(f)$，那么对所有满足 $p(f) \ne 0$ 的 f，均有

$$\|f^{(k)}\| = p^{\frac{1}{\alpha}}(f)\left\|\frac{f^{(k)}}{p^{\frac{1}{\alpha}}(f)}\right\| \le p^{\frac{1}{\alpha}}(f) \cdot \omega\left(D^k, X; \frac{\|f\|}{p^{\frac{1}{\alpha}}(f)}\right). \tag{4}$$

特别地，如果 $p(f) = 0 \iff f = 0$ 并且我们知道函数 ω，则不等式（4）对所有 $f \in L^r_{\infty,\infty}$ 成立，并且可以视为一个

抽象柯尔莫哥洛夫型不等式，它用量 $\|f\|$ 和 $p(f)$ 来估计值 $\|f^{(k)}\|$ 。

另一个相关问题由柯尔莫哥洛夫于1926年提出（我们称之为Kolmogorov问题），其表述如下。设给定一组整数

$$0 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_d \le r, \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)$$

数。问题是要找出正数 M_{k_1}、……、M_{k_d}, $M_{\mathbf{k}} = (M_{k_1}$、……、$M_{k_d})$ 所需满足的充要条件，以保证存在一个函数 $f \in L^r_{\infty,\,\infty}$ 使得

$$M_{\mathbf{k}}(f) = M_{\mathbf{k}}, \text{ where } M_{\mathbf{k}}(f) = (M_{k_1}(f), \ldots, M_{k_d}(f)).$$

柯尔莫哥洛夫的文章 [2] 实际上致力于解决这一问题在 $d = 3$, $k_1 = 0$, $k_2 = k$, $k_3 = r$ 情形下的解答。在这种情况下，所需的充要条件是不等式

$$M_k \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|}{\|\varphi_r\|^{1-\frac{k}{r}}} M_0^{1-\frac{k}{r}} M_r^{\frac{k}{r}}.$$

关于Kolmogorov问题已知结果的综述，可参见文章 $[5, 6]$ 。文献 [5] 提出了Kolmogorov问题的一种方便的替代表述。给定一个固定向量 $\mathbf{k}$（如上所述，由导数阶数组成），求一个最小（按某种意义而言）的族 $F_{\mathbf{k}} \subset L^r_{\infty,\,\infty}$ ，使得

$$M_{\mathbf{k}}(L^r_{\infty,\infty}) = M_{\mathbf{k}}(F_{\mathbf{k}}), \tag{5}$$

其中，对于集合 $X \subset L^r_{\infty,\infty}$ 我们使用记号

$$M_{\mathbf{k}}(X) = \{M_{\mathbf{k}}(f) \colon f \in X\}.$$

在这些记号下，柯尔莫哥洛夫的结果可表述如下。对于 $\mathbf{k} = (0, k, r)$, $0 < k < r$，有

$$F_{\mathbf{k}} = \{a \cdot \varphi_{\lambda,r} + b \colon a, \lambda > 0, b \ge 0\},$$

而定理1是证明等式(5)成立的关键结果。

最近，涉及多于三个范数的柯尔莫哥洛夫型不等式得到了研究。特别地，在 [7] 中，如下不等式

$$\|f'\| \le C_\eta \cdot \|f\|^{\frac{1+\eta}{2+\eta}} \cdot \|f''\|^{\frac{1-\eta}{2+\eta}} \cdot \|f'''\|^{\frac{\eta}{2+\eta}}, \tag{6}$$

连同显式求出的最佳常数 C_η、$\eta \in [0, 1]$，已被证明。

本文旨在说明，这类不等式可以由已知的柯尔莫哥洛夫问题解导出。具体而言，我们证明，通过 $\|f\|$, $\|f^{(r-1)}\|$ 和 $\|f^{(r)}\|$, $0 < k < r - 1$ 估计 $\|f^{(k)}\|$ 的尖锐柯尔莫哥洛夫型不等式，可由

已知的（见 [8]）$\mathbf{k} = (0, k, r-1, r)$ 柯尔莫哥洛夫问题解导出；通过 $\|f\|$, $\|f^{(r-2)}\|$ 和 $\|f^{(r)}\|$, $0 < k < r-2$ 估计 $\|f^{(k)}\|$ 的尖锐柯尔莫哥洛夫型不等式，可由已知的（见 [9]）$\mathbf{k} = (0, k, r-2, r)$ 柯尔莫哥洛夫问题解导出；通过 $\|f\|$, $\|f^{(r-2)}\|$, $\|f^{(r-1)}\|$ 和 $\|f^{(r)}\|$, $0 < k < r-2$ 估计$\|f^{(k)}\|$的尖锐柯尔莫哥洛夫型不等式，可由已知的（见 [10]）$\mathbf{k} = (0, k, r-2, r-1, r)$ 柯尔莫哥洛夫问题解导出。

2. 柯尔莫哥洛夫问题与柯尔莫哥洛夫型不等式之间的联系

2.1. 极值样条。 首先，我们定义一族在下列情形下对柯尔莫哥洛夫问题取极值的多项式样条函数$\mathbf{k} \in K$，其中

$$K = \{(0, k, r-1, r), (0, k, r-2, r), (0, k, r-2, r-1, r)\}; \tag{7}$$

这里 k, r是自然数，使得对于$\mathbf{k} = (0, k, r-1, r)$有 $k < r-1$，而对于集合 K中的另外两个元素有 $k < r-2$。对于所有 $a, b, c \geq 0$，令

$$\psi_0(a, b, c; t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, a], \\ 1, & t \in (a, a+b], \\ 0, & t \in (a+b, a+b+c]. \end{cases}$$

将 $\psi_0(a, b, c)$ 关于点 $a+b+c$ 作偶延拓，并关于点 $2(a+b+c)$ 作奇延拓；最后将函数 ψ_0 以 $4(a+b+c)$ 为周期作周期延拓至整条实数轴。设 $\psi_s = \psi_s(a, b, c)$ 是 ψ_0 的第 s 个均值为零的周期原函数， $s \geq 1$。这些函数由 Rodov [10] 引入。注意到

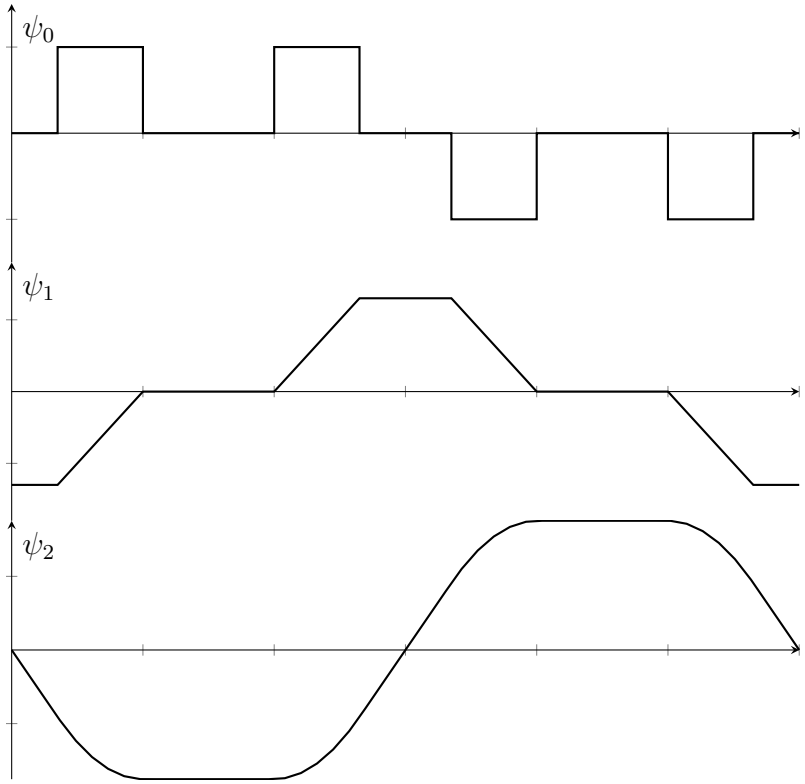
$$\psi_1(a, b, c; t) = \begin{cases} -b, & t \in [0, a], \\ t-a-b, & t \in (a, a+b], \\ 0, & t \in (a+b, a+b+c], \end{cases}$$

关于点 $a+b+c$ 为奇函数，关于 $2(a+b+c)$ 为偶函数；

$$\psi_2(a, b, c; t) = \begin{cases} -bt, & t \in [0, a], \\ \frac{(t-a-b)^2}{2} - ab - \frac{b^2}{2}, & t \in (a, a+b], \\ -ab - \frac{b^2}{2}, & t \in (a+b, a+b+c], \end{cases} \tag{8}$$

关于 $a+b+c$ 为偶函数，关于 $2(a+b+c)$ 为奇函数。

函数 ψ_0, ψ_1 和 ψ_2 的一个周期绘制于下图。



上述公式意味着

$$\|\psi_0(a,b,c)\| = 1; \|\psi_1(a,b,c)\| = b; \|\psi_2(a,b,c)\| = ab + \frac{b^2}{2}. \tag{9}$$

我们还注意到，对于 $r \in \mathbb{N}$ 和 $b > 0$，$\psi_r(0, b, 0)$ 是欧拉完美样条 $\varphi_{r,\lambda}$，其中参数 λ 经过适当选取。

定义样条函数族

$$S_{(0,k,r-2,r-1,r)} = \{\alpha \cdot \psi_r(a,b,c) \colon b, \alpha > 0, a, c \geq 0\},$$
$$S_{(0,k,r-1,r)} = \{\alpha \cdot \psi_r(a,b,0) \colon b, \alpha > 0, a \geq 0\},$$

and

$$S_{(0,k,r-2,r)} = \{\alpha \cdot \psi_r(0,b,c) \colon b, \alpha > 0, c \geq 0\}.$$

文章 [8–10]中的柯尔莫哥洛夫问题的解现在可以用以下另一种形式表述：对于 $\mathbf{k} \in K$

$$F_{\mathbf{k}} = \{\psi + d \colon \psi \in S_{\mathbf{k}}, d \geq 0\}. \tag{10}$$

下文使用以下记号：$(0, k, r-2, r-1, r)^{\uparrow} = (r-2, r-1, r)$, $(0, k, r-1, r)^{\uparrow} = (r-1, r)$, $(0, k, r-2, r)^{\uparrow} = (r-2, r)$，因此，对于向量 $\mathbf{k} \in K$，向量 $\mathbf{k}^{\uparrow}$ 表示高阶导数构成的向量。我们用 $|\mathbf{k}|$表示向量 $\mathbf{k}$ 的坐标个数，因此对每个 $\mathbf{k} \in K$，都有 $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}^{\uparrow}| + 2$。稍作

记号滥用，我们写作 $s \in \mathbf{k}$，表示 s 是向量 $\mathbf{k}$的某个坐标，而用 $\min \mathbf{k}$ 表示 $\mathbf{k}$的最小坐标。

引理 1. 对每个 $\mathbf{k} \in K$ 以及非零的 $f \in L^r_{\infty,\infty}$ 可以构造一个单参数样条函数族 $\psi_{\mathbf{k}}(\beta) \in S_{\mathbf{k}}$，$\beta \geq 0$ 使得$M_{\mathbf{k}^\uparrow}(f) = M_{\mathbf{k}^\uparrow}(\psi_{\mathbf{k}})$ 对所有 β 成立，并且 $M_s(\psi_{\mathbf{k}}(\beta))$ 当 $\beta \to \infty$、$0 \leq s < \min \mathbf{k}^\uparrow$ 时连续增加到∞ 。

证明。所需样条函数族的存在性由 (9) 得出。对于 $\mathbf{k} = (0, k, r-2, r)$，可以考虑族 $\alpha\psi_r(0, b, \beta)$，$\beta \geq 0$，其中 $\alpha = M_r(f)$ 且 $b = \sqrt{\frac{2M_{r-2}}{M_r}}(f)\,(f)$。类似地，在 $\mathbf{k} = (0, k, \overline{r-1, r})$ 的情形下，可以考虑族 $\alpha\psi_r(\beta, b, 0)$，$\beta \geq 0$，其中$\alpha = M_r(f)$ 且 $b = {}^{M_{r-2}}(f)\,{}_{M_r}(f)$。在 $\mathbf{k} = (0, k, r-2, r-1, r)$ 的情形下，所需的族为 $\alpha\psi_r(a, b, \beta)$，$\beta \geq 0$，其中 $\alpha = M_r(f)$，$b = {}^{M_{r-2}}(f)\,{}_{M_r}(f)$ 以及 $a = \frac{M_{r-2}}{M_{r-1}} - \frac{M_{r-1}}{2M_r}$。$a \geq 0$ 这一事实由兰道不等式 (1) 得出。

关于范数 $M_s(\psi_{\mathbf{k}}(\beta))$ 的陈述可由样条函数的定义推出。□

下面的比较定理是定理1的推广。

定理2。 设 $f \in L^r_{\infty,\infty}$、$K$ 由(7)定义，$\mathbf{k} \in K$ 和 $\psi_{\mathbf{k}} \in S_{\mathbf{k}}$满足

$$M_s(f) \leq M_s(\psi_{\mathbf{k}}), s \in \mathbf{k}^\uparrow \ or \ s = 0.$$

若 ξ、$\eta \in \mathbb{R}$ 满足 $f(\xi) = \psi_{\mathbf{k}}(\eta)$，则

$$|f'(\xi)| \leq |\psi'_{\mathbf{k}}(\eta)|.$$

该定理的证明包含在 [9,定理 2] 的$\mathbf{k} = (0,\ k,\ r-2,\ r)$ 情形中，而其他两种情形也可使用类似的论证加以证明。

同样，这一比较定理或许比$\mathbf{k} \in K$情形下柯尔莫哥洛夫问题的解更为重要。比较定理不仅是解决柯尔莫哥洛夫问题的关键结果，还可以利用标准论证得到各种其他极值问题的解。参见 [11,第 3] 章和 [12, 第 2], 章，那里给出了具有给定比较函数的函数类上的各种极值问题的解。

2.2. **极值样条函数的存在性。** 以下结果表明，对于通过对其高阶导数的一致范数施加某些限制来定义的函数类，微分算子 D^k 的连续模 (3) 在

样条函数上取到其值。这基本上是柯尔莫哥洛夫问题解 (10) 的直接推论。

定理 3. 设 K 由(7)定义，$\mathbf{k} \in K$ 且

$$X = M_{\mathbf{k}^\uparrow}^{-1}(A) = \{f \in L^r_{\infty,\infty} \colon M_{\mathbf{k}^\uparrow}(f) \in A\},$$

其中 $A \subset (0,\infty)^{|\mathbf{k}^\uparrow|}$ 是一个非空集合，满足以下性质：若序列 $\left\{a^n = \left(a_1^n, \dots, a_{|\mathbf{k}^\uparrow|}^n\right)\right\} \subset A$ 满足 $a_{|\mathbf{k}^\uparrow|}^n \to \infty$，则存在某个 $1 \le i < |\mathbf{k}^\uparrow|$ 使得 $a_i^n \to 0$, $n \to \infty$。若 $\delta > 0$满足 $\{f \in X\colon \ M_0(f) \le \delta\} \ne \emptyset$，则连续模定义(3) 中的上确界可在某个样条函数 $\psi_{\mathbf{k}} \in S_{\mathbf{k}} \cap X$ 处取得，该样条函数满足 $M_0(\psi_{\mathbf{k}}) = \delta$。

证明。假设 $f_1, \dots, f_n, \dots$ 是来自 X 的函数序列，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$M_0(f_n) \le \delta$，且 $\lim_{n\to\infty} M_k(f_n) = \omega(X;\delta)$。根据 (10)，对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们可以选取一个样条函数 $\psi_n \in S_{\mathbf{k}}$ 和一个数 $d_n \ge 0$，使得 $M_{\mathbf{k}}(f) = M_{\mathbf{k}}(\psi_n + d_n)$。这尤其意味着 $M_0(f) \ge M_0(\psi_n)$，因此可以增大（或保持不变）样条函数 ψ_n 的参数 β（见引理 1 及其证明），从而使得到的样条函数 ψ_n^* 满足 $M_{\mathbf{k}^\uparrow}(f) = M_{\mathbf{k}^\uparrow}(\psi_n^*)$（因此 $\psi_n^* \in X$），$M_0(\psi_n^*) = \delta$，且 $M_k(\psi_n^*) \ge M_k(\psi_n) = M_k(\psi_n + d_n)$。于是

$$\lim_{n\to\infty} M_k(\psi_n^*) = \omega(X;\delta). \tag{11}$$

令 $\psi_n^* = \alpha_n \psi_r(a_n, b_n, c_n) \in S_{\mathbf{k}}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$成立。现在只需证明，从序列 $\{\alpha_n\}$、$\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 中，都可以分别抽取收敛子列，使其收敛到数 α, a, b, c，并且满足 $\alpha, b > 0$。

首先证明序列 α_n 与零保持正距离。反设不然，必要时取子列后，不妨设 $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$。然而，由柯尔莫哥洛夫不等式 (2)，可得对某个 $C > 0$

$$M_k(\psi_n^*) \le C \cdot \delta^{1-\frac{k}{r}} \cdot \alpha_n^{\frac{k}{r}} \to 0, n \to \infty,$$

这与 (11) 矛盾。

接下来证明序列 α_n 有上界。同样，反设不然，可设 $\alpha_n \to \infty$, $n \to \infty$。于是，根据集合 A 的假设，序列 $M_{r-1}(\psi_n^*)$ 或 $M_{r-2}(\psi_n^*)$ 中至少有一个在 $n \to \infty$ 时趋于零；再次利用柯尔莫哥洛夫不等式，得到 $M_k(\psi_n^*) \to 0$,$n \to \infty$，这不可能。

因此，我们可以假设 $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha > 0$。

采用与上述类似的论证，我们得到 $M_{r-1}(\psi_n^*)$不可能趋于 0，当 $n \to \infty$ 时（否则 $M_k(\psi_n^*) \to 0, n \to \infty$，这是不可能的）；此外，根据柯尔莫哥洛夫不等式， $M_0(\psi_n^*)$和$M_r(\psi_n^*)$有界意味着 $M_{r-1}(\psi_n^*) = \alpha_n \cdot b_n$有界。因此，如有必要，转而取一个子序列，我们可以假设 $b_n \to b > 0, n \to \infty$。

最后，序列 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 也必须是有界的，否则范数 $M_0(\psi_n^*)$将是无界的。因此，这两个序列都具有收敛（到非负数）的子序列。□

2.3. 定理 3 的应用。 接下来我们证明，利用定理 3 中的观察，可以得到不等式（6）。考虑到不等式（4），只需能够计算值$\omega(X, D^1; \delta)$，$\delta > 0$ 在函数类 $X = \{f \in L^3_{\infty,\infty}$ 上： $p_\eta(f) \le 1\}$，其中$p_\eta(f)$ $= \|f''\|^{1-\eta} \cdot \|f'''\|^\eta, \eta \in (0,1)$。在定理 3 的记号下，该函数类由集合 $A = \{(x,y)$： $x, y > 0, x^{1-\eta} y^\eta \le 1\}$ 定义，该集合满足定理 3 的假设。

由于对于 $\lambda > 1$ 和 $f \in L^3_{\infty,\infty}$，有 $g(t) := f(\lambda t) \in L^3_{\infty,\infty}$，$M_0(f) = M_0(g)$，$M_k(g) > M_k(f)$ and $p_\eta(g) = \lambda^{2+3\eta} p_\eta(f)$，定义 (3) 中的上确界可以取遍满足 $p_\eta(f) = 1$ 的函数 f。

考虑到 (8)，

$$\|\psi_3(a,b,0)\| = \left| \int_0^{a+b} \psi_2(a,b,0;t)dt \right| = \frac{a^2 b}{2} + ab^2 + \frac{b^3}{3}.$$

因此，在 $\mathbf{k} = (0, 1, 2, 3)$ 的情形下，利用 (9)，为了计算值 $\omega(D^1; X; \delta)$， $\delta > 0$，我们得到以下极值问题

$$\begin{cases} \alpha \left(ab + \frac{b^2}{2} \right) \to \sup, \\ \alpha \left(\frac{a^2 b}{2} + ab^2 + \frac{b^3}{3} \right) = \delta, \\ \alpha b^{1-\eta} = 1, \end{cases}$$

对于参数 α， a， b。因此，通过求解这个极值问题即可得到 (6) 中的最佳常数，这是一个标准的计算任务。

在$\mathbf{k} \in K$ 的一般情形下（ $0 < k < r$任意），连续模 ω 可通过类似的极值问题求得。特殊样条函数类（包括空间 $S_{\mathbf{k}}$、$\mathbf{k} \in K$）的范数表达式见 [13, 引理 2]。

参考文献

[1]E. Landau，关于二次可微函数的若干不等式，伦敦数学会会刊 13 (1913) 43–49。

[2] A. Kolmogorov，J. Hadamard关于函数各阶导数上界之间关系的推广，《法国科学院院报》36 (1938年) 764–765。[3] V. Babenko、N. P. Korneichuk、V. A. Kofanov、S. A. Pichugov，《导数不等式及其应用》，Naukova Du mka，2003年（俄文）。[4]V. Arestov，《有界算子对无界算子的逼近及相关极值问题》，《俄罗斯数学评论》51 (6) (1996) 1093。doi:10.1070/RM1996v051n06ABEH003001。[5] V. Babenko、Y. Babenko、O. Kovalenko，《多重单调函数类上的Kolmogorov问题》，《数学进展》280 (2015) 256–281。doi:10.1016/j.aim.2015.03.023。[6] V. Babenko、Y. Babenko、O. Kovalenko，《完全单调函数与多重单调函数的比较定理及其应用》，载于：M. Abell、E. Ia- cob、A. Stokolos、S. Taylor、S. Tikhonov、J. Zhu（编），《经典与现代分析专题：纪念胡英康》，施普林格国际出版公司，Cham，2019年，第47–64页。doi:10.1007/978-3-030-12277-5_3。[7] J. Miao、S. Dragomir，《一类兰道型不等式中的最佳常数》，《逼近理论杂志》317 (2026) 106285。doi:10.1016/j.jat.2026.106285。[8] V. Dzyadyk、V. Dubovik，《关于A. N. Kolmogorov提出的整条实轴上实函数导数上界之间关系的不等式》，《乌克兰数学杂志》27 (3) (1975) 233–240。doi:10.1007/BF01092079。[9] V. Babenko、O. Kovalenko，《函数范数对其 k、 $r-2$及 r阶导数范数的依赖关系》，《乌克兰数学杂志》64 (5) (2012) 672–679。doi:10.1007/s11253-012-0670-9。[10] A. Rodov，《实变函数导数上界之间的关系》，AMS译丛，美国数学学会，1950年。[11] N. Korneichuk，《逼近理论中的精确常数》，数学及其应用百科全书，剑桥大学出版社，1991年。[12] V. Babenko、V. Kofanov、P. Kogut、O. Kovalenko、N. Parfinovych，《分析及其应用中的极值问题》，数学与统计综合讲座，施普林格，Cham，2025年。doi:10.1007/978-3-031-94732-2。[13] V. Dzyadyk、V. Dubovik，《对Kolmogorov问题的贡献：整条实轴上实函数导数上界之间的关系》，《乌克兰数学杂志》26 (3) (1974) 246–259。doi:10.1007/BF01086215。

数学分析与优化系，乌克兰第聂伯罗奥列斯·洪恰尔第聂伯罗国立大学，乌克兰第聂伯罗电子邮件地址：olegkovalenko90@gmail.com