标量奥恩斯坦–乌伦贝克桥退出时间概率的精确渐近

赵峰，[1,2,3,1,a)] 李阳、王建龙、刘显斌，[1,a)] 和金东平，[1)]航空航天结构力学及控制国家重点实验室，南京航空航天大学航空航天工程学院，中国南京御道街29号，邮编210016 2)南京理工大学自动化学院，中国南京孝陵卫街200号，邮编210094 3)温州大学机电工程学院，中国温州茶山大学城，邮编325035

（*电子邮箱：jindp@nuaa.edu.cn）

（*电子邮箱：xbliu@nuaa.edu.cn）

本文旨在推导标量奥恩斯坦-乌伦贝克（OU）桥退出时间概率的精确渐近估计。退出时间概率可表示为关于一个小参数的幂次渐近级数，该参数表征噪声输入的强度。研究表明，该级数在某些区域内有效，且其中所有项均为光滑函数。这些结果使人们能够准确计算相应 OU 过程在给定初始与终端状态的条件下，于指定时间之前逃离某一定义域的概率。

arXiv:2603.02054v1 [math.PR] 2 Mar 2026

奥恩斯坦–乌伦贝克（OU）桥是一种连续时间高斯–马尔可夫过程，其概率分布是对应OU过程在给定初始条件和终端条件下的条件概率分布。分析此类OU桥的性质，有助于全面刻画对应OU过程的诸多具体动力学特征。本文推导了标量OU桥退出时间概率的精确渐近展开。所得结果为对应OU过程在给定初始与终端状态的条件下，于指定时间之前逃离某一定义域的概率提供了精确估计。

I. 引言

固定$T>0$和$x_T\in\mathbb{R}$。设$D=(d_1,d_2)\subset\mathbb{R}$（其中$d_1<d_2$）为一个非空开区间。考虑一个标量奥恩斯坦–乌伦贝克桥[1–3] $\{x_t^\varepsilon\}_{t\in[s,T]}$，其终止于$x_T^\varepsilon=x_T$，并由以下随机微分方程（SDE）支配：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x_t^\varepsilon &= b(x_t^\varepsilon,t)\mathrm{d}t+\sqrt{\varepsilon}\mathrm{d}w_t,\quad 0\le s<t<T,\\ x_s^\varepsilon &= x\in D,\end{aligned}\tag{1}$$

with

$$b(x,t)=a_1\left[\frac{\left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right)-\left(x+\frac{a_0}{a_1}\right)\cosh(a_1(T-t))}{\sinh(a_1(T-t))}\right],\tag{2}$$

其中 w_t 是一维标准维纳过程，$a_0\in\mathbb{R}$，$a_1\neq 0$，且 $\varepsilon>0$ 是一个小参数。可以证明

其中 x^ε 是一个高斯–马尔可夫过程[4–6]，其均值函数为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{x,s}^\varepsilon(x_t^\varepsilon)=&\left(x+\frac{a_0}{a_1}\right)\frac{\sinh(a_1(T-t))}{\sinh(a_1(T-s))}+\left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right)\\&\times\frac{\sinh(a_1(t-s))}{\sinh(a_1(T-s))}-\frac{a_0}{a_1},\end{aligned}\tag{3}$$

和协方差函数

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(x_v^\varepsilon,x_t^\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{a_1}\frac{\sinh(a_1(v-s))\sinh(a_1(T-t))}{\sinh(a_1(T-s))},\tag{4}$$

当 $0\le s\le v\le t<T$时。

令 $\tau_{x,s}^\varepsilon\triangleq\inf\{t>s:x_t^\varepsilon\notin D\}$ 表示过程 x^ε 首次退出 D 的时间，并将退出时间概率函数定义为

$$q^\varepsilon(x,s)\triangleq\mathbb{P}_{x,s}^\varepsilon\left(\tau_{x,s}^\varepsilon\le T\right).\tag{5}$$

本文旨在推导 q^ε 关于 ε 的渐近展开，其形式为渐近级数:

$$q^\varepsilon=\exp\left(-u/\varepsilon-w\right)\left(1+\varepsilon\psi_1\cdots\varepsilon^m\psi_m+o(\varepsilon^m)\right),\tag{6}$$

当 $\varepsilon\to 0$时，在某些点（x，s）$\in D\times[0,T)$处成立，其中函数 u、w和 ψ_m 均为光滑函数。

Freidlin 和 Wentzell[7,8] 首先在这一问题上取得了关键成果。他们以大偏差原理为基础，证明了

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln q^\varepsilon=-u,\tag{7}$$

其中

$$u(x,s)\triangleq\inf_{\gamma\in\Gamma_{x,s}}I(\gamma)\triangleq\inf_{\gamma\in\Gamma_{x,s}}\frac{1}{2}\int_s^T[\dot\gamma(t)-b(\gamma(t),t)]^2\mathrm{d}t,\tag{8}$$

其中集合$\Gamma_{x,s}$ 定义为

$$\Gamma_{x,s}\triangleq\{\gamma\in\mathscr{C}([s,T],\mathbb{R}):\gamma(s)=x,\exists t\in(s,T]\,\mathrm{s.t.}\,\gamma(t)\in\partial D\}.$$

a)联系作者

ed

值得注意的是，这一结果也可以通过随机控制方法[9]和消失黏性技术[10]推导得出。

将（7）推广为形如（6）的完整渐近级数，这一工作归功于Fleming与James[11]。他们通过证明方程（6）在某些强正则区域$N \subset D \times [0,T)$的紧子集上成立，给出了该渐近级数的基于偏微分方程的证明。其原始表述针对一般的非退化扩散过程，并未对漂移项$b(x,t)$的形式施加特定限制。然而，在如此一般的情形下，无法保证$D \times [0,T)$中的所有点都是强正则的。事实上，强正则区域甚至可能为空（例如，参见 [12]的注记2.3）。这极大地限制了该渐近展开的实际效用。

当漂移项$b(x,t)$取某些特定形式时，已取得显著进展，如Baldi及其同事的工作[12–14]所示。一个突出的例子是布朗桥，它对应于在（2）中令$a_0 = 0$并取$a_1 \to 0$。在这一特定情形下，漂移项变为$b(x,t) = x_T - x$，它对x是仿射的。因此，函数u、w 和 ψ_m 均可显式求得。利用这一事实，Baldi[12] 推导了布朗桥退出时间概率的渐近结果，并证明所得级数对几乎所有的$(x,t) \in D \times [0,T)$成立。这些结果已成功应用于设计精确模拟布朗运动的数值算法，从而能够精确计算平均首次退出时间[12]。

本文将 Baldi 在 [12] 中的结果推广到奥恩斯坦-乌伦贝克桥的情形（即式（2）中的$a_0 \in \mathbb{R}$、$a_1 \neq 0$）。我们的目标是证明，对于几乎所有的（x，t）$\in D \times [0,T)$，q^ε的渐近展开同样成立。为此，后续分析分为两种不同情形：$x_T \notin [d_1, d_2]$和$x_T \in (d_1, d_2)$，分别对应$u \equiv 0$和$u \geq 0$的情况。对于每种情形，我们考察u的光滑性，以确定哪些点是强正则点，哪些不是。相应结果分别在第二节和第三节中给出。在$a_0 = 0$和$a_1 \to 0$的极限情形下，OU桥退化为布朗桥。因此，布朗桥的退出时间概率渐近结果可作为我们主要定理的推论得出，详见第四节。最后，第五节总结了本研究的结论。

II. 情形 A：$x_T \notin [d_1, d_2]$

为简单起见，我们假设 $x_T > d_2 > d_1$。对于 $d_2 > d_1 > x_T$ 的情形，也可以用类似方法处理。

设$x^0_{x,s}$ 表示确定性常微分方程（常微分方程）的解：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^0_{x,s}(t) &= b(x^0_{x,s}(t), t)\mathrm{d}t, \quad 0 \leq s < t < T, \\ x^0_{x,s}(s) &= x \in D. \end{aligned} \tag{9}$$

显然，

$$\begin{aligned} x^0_{x,s}(t) = \mathbb{E}^\varepsilon_{x,s}(x^\varepsilon_t) &= \left(x + \frac{a_0}{a_1}\right)\frac{\sinh(a_1(T-t))}{\sinh(a_1(T-s))} \\ &+ \left(x_T + \frac{a_0}{a_1}\right)\frac{\sinh(a_1(t-s))}{\sinh(a_1(T-s))} - \frac{a_0}{a_1}, \quad t \in [s,T]. \end{aligned} \tag{10}$$

$x^0_{x,s}$ 在 $[s,T]$ 上的单调性由以下引理刻画。

引理 II.1. 确定性轨迹 $x^0_{x,s}$ 在 $[s,T]$ 上非单调，当且仅当

$$\left(x_T + \frac{a_0}{a_1}\right) \neq 0 \quad and$$
$$\frac{\left(x + \frac{a_0}{a_1}\right)}{\left(x_T + \frac{a_0}{a_1}\right)} \in \left(\frac{1}{\cosh(a_1(T-s))}, \cosh(a_1(T-s))\right),$$

否则，该轨迹为单调轨迹。单调性的详细分类见表 I。

表 I：$x^0_{x,s}$ 在 $[s,T]$ 上的单调性。这里，t_1 是区间 (s,T) 内满足 $\dot{x}^0_{x,s}(t_1) = 0$ 的唯一点。

条件	$\dot{x}^0_{x,s}$的符号	$x^0_{x,s}$的单调性
$\left\{\left(x+\frac{a_0}{a_1}\right) > 0 a, \left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right) < 0\right\} a$	$\dot{x}^0_{x,s}(t) < 0, \quad \forall t \in [s,T]$	↘
$\left\{\left(x+\frac{a_0}{a_1}\right) < 0 a, \left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right) > 0\right\} a$	$\dot{x}^0_{x,s}(t) > 0, \quad \forall t \in [s,T]$	↗
$\left\{\left(x+\frac{a_0}{a_1}\right) > 0 a, \left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right) = 0\right\} a$	$\dot{x}^0_{x,s}(t) < 0, \quad \forall t \in [s,T]$	↘
$\left\{\left(x+\frac{a_0}{a_1}\right) = 0 a, \left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right) = 0\right\} a$	$\dot{x}^0_{x,s}(t) \equiv 0, \quad \forall t \in [s,T]$	常数
$\left\{\left(x+\frac{a_0}{a_1}\right) < 0 a, \left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right) = 0\right\} a$	$\dot{x}^0_{x,s}(t) > 0, \quad \forall t \in [s,T]$	↗
$\left\{\left(x+\frac{a_0}{a_1}\right) = 0 a, \left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right) > 0\right\} a$	$\dot{x}^0_{x,s}(t) > 0, \quad \forall t \in [s,T]$	↗
$\left\{\left(x+\frac{a_0}{a_1}\right) = 0 a, \left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right) < 0\right\} a$	$\dot{x}^0_{x,s}(t) < 0, \quad \forall t \in [s,T]$	↘
$\left\{\begin{array}{l}\left(x+\frac{a_0}{a_1}\right) > 0 a, \left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right) > 0 a, \\ \in \left(0, \frac{1}{\cosh(a(T s))}\right)\end{array}\right\}$	$\dot{x}^0_{x,s}(t) \geq 0, \quad \forall t \in [s,T]$	↗
$\left\{\begin{array}{l}\left(x+\frac{a_0}{a_1}\right) > 0 a, \left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right) > 0 a, \\ \in \left(\frac{1}{\cosh(a(T-s))}, \cosh(a(T-s))\right)\end{array}\right\}$	$\dot{x}^0_{x,s}(t) \begin{cases} \leq 0, & \forall t \in [s,t_1] \\ > 0, & \forall t \in (t_1,T] \end{cases}$	↘↗
$\left\{\begin{array}{l}\left(x+\frac{a_0}{a_1}\right) > 0 a, \left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right) > 0 a, \\ \in [\cosh(a_1(T-s)), \infty)\end{array}\right\}$	$\dot{x}^0_{x,s}(t) \leq 0, \quad \forall t \in [s,T]$	↘
$\left\{\begin{array}{l}\left(x+\frac{a_0}{a_1}\right) < 0 a, \left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right) < 0 a, \\ \in \left(0, \frac{1}{\cosh(a(T s))}\right)\end{array}\right\}$	$\dot{x}^0_{x,s}(t) \leq 0, \quad \forall t \in [s,T]$	↘
$\left\{\begin{array}{l}\left(x+\frac{a_0}{a_1}\right) < 0 a, \left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right) < 0 a, \\ \in \left(\frac{1}{\cosh(a(T-s))}, \cosh(a(T-s))\right)\end{array}\right\}$	$\dot{x}^0_{x,s}(t) \begin{cases} \geq 0, & \forall t \in [s,t_1] \\ < 0, & \forall t \in (t_1,T] \end{cases}$	↗↘
$\left\{\begin{array}{l}\left(x+\frac{a_0}{a_1}\right) < 0 a, \left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right) < 0 a, \\ \in [\cosh(a_1(T-s)), \infty)\end{array}\right\}$	$\dot{x}^0_{x,s}(t) \geq 0, \quad \forall t \in [s,T]$	↗

证明。 直接考察导数的符号即可得出该结果

$$\begin{aligned} \dot{x}^0_{x,s}(t) &= -\left(x + \frac{a_0}{a_1}\right)\frac{a_1\cosh(a_1(T-t))}{\sinh(a_1(T-s))} \\ &+ \left(x_T + \frac{a_0}{a_1}\right)\frac{a_1\cosh(a_1(t-s))}{\sinh(a_1(T-s))}, \quad t \in [s,T]. \end{aligned}$$

□

注记 II.1。 当 $x_T + a_0 a_1 \neq 0$ 时， $\mathbb{R}\times[0,T)$ 中的两条曲线尤其值得关注：

$$Cur_I \triangleq \left\{(x,s): x+\frac{a_0}{a_1} = \left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right)\Big/\cosh(a_1(T-s))\right\},$$

$$Cur_{II} \triangleq \left\{(x,s): x+\frac{a_0}{a_1} = \left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right)\cosh(a_1(T-s))\right\}.$$

这些曲线具有以下性质：

- $CurI = \{(x,s)\in\mathbb{R}\times[0,T): b(x,s)=0\}$，也就是说，$CurI$ 与向量场 $(b(x,s),1)^\top$ 的零流线重合。对于任意 $(x,s)\in CurI$，$x^0_{x,s}$ 满足 $\dot{x}^0_{x,s}(s)=0$，且在 $[s,T]$ 上单调。

- 对于任意 $(x,s)\in CurII$，$x^0_{x,s}$ 在 $[s,T]$ 上单调，并满足 $\dot{x}^0_{x,s}(T)=0$。此外，整条积分曲线（或整幅图像） $\{(x^0_{x,s}(t),t): t\in[s,T)\}$ 都位于 $CurII$ 上，也就是说，对所有 $t\in[s,T)$，都有 $(x^0_{x,s}(t),t)\in CurII$。

- 曲线 $CurI$ 和 $CurII$ 充当分界曲线。从这些曲线两侧出发的轨迹表现出不同的单调性行为。具体而言，当且仅当（x,s）位于这两条曲线之间的区域时，$x^0_{x,s}$ 才是非单调的；这恰好对应于引理 *II.1* 中所述的条件，即：

$$(x,s)\in\Omega \triangleq \left\{(x,s): \frac{1}{\cosh(a_1(T-s))} < \frac{(x+a_0/a_1)}{(x_T+a_0/a_1)} < \cosh(a_1(T-s))\right\}.$$

在 Ω 之外，所有轨迹都是单调的。

现在，我们根据 $-a_0/a_1, d_1, d_2,$ 和 x_T 的相对位置，将情形 A 细分为七个子情形进行分析：

- Case A_I: $-a_0/a_1 > x_T > d_2 > d_1$;
- Case A_{II}: $-a_0/a_1 = x_T > d_2 > d_1$;
- Case A_{III}: $x_T > -a_0/a_1 > d_2 > d_1$;
- Case A_{IV}: $x_T > -a_0/a_1 = d_2 > d_1$;
- Case A_V: $x_T > d_2 > -a_0/a_1 > d_1$;
- Case A_{VI}: $x_T > d_2 > -a_0/a_1 = d_1$;
- Case A_{VII}: $x_T > d_2 > d_1 > -a_0/a_1$;

根据以下两点进一步细化分类：（i）交集 $D\times[0,T)\cap\Omega$ 是否为空；（ii）是否存在点 $(x,s)\in D\times[0,T)$，使得 $\{(x^0_{x,s}(t),t): t\in[s,T]\}$ 与 $\partial D\times[0,T)$ 相交于多个点：

- 情形 A_I、A_V 和 A_{VI} 各自细分为两个子情形，分别记为 $A_{i,I}$ 和 $A_{i,II}$，其中 $i\in\{I,V,VI\}$。
- 情形 A_{II}、情形 A_{III} 和情形 A_{IV} 未再细分。
- 情形 A_{VII} 细分为三个子情形：$A_{VII,\,I}$、$A_{VII,\,II}$ 以及 $A_{VII,\,III}$。

对于每个由此得到的（子）情形，$x^0_{x,s}$ 关于 $[s,T]$ 在 $(x,s)\in D\times[0,T)$ 上的单调性可由引理 II.1 直接得出。下文将给出详细刻画。

推论 II.2. 如表 *II* 所总结，以下单调性性质成立：

（*a*）在情形 $A_{I,I}$、A_{II}、A_{III}、A_{IV}、$A_{V,I}$、$A_{VI,I}$ 和 $A_{VII,I}$ 中，交集 $D\times[0,T)\cap\Omega$ 为空。因此，对于所有 $(x,s)\in D\times[0,T)$，$x^0_{x,s}$ 在 $[s,T]$ 上单调递增。

（*b*）在情形 $A_{I,II}$、$A_{V,II}$、$A_{VI,II}$、$A_{VII,II}$ 和 $A_{VII,III}$ 中，交集非空。因此，对于任意 $(x,s)\in D\times[0,T)\setminus\Omega$，$x^0_{x,s}$ 在 $[s,T]$ 上单调递增；而对于任意 $(x,s)\in D\times[0,T)\cap\Omega$，则非单调。

表 II：$\{x^0_{x,\,s}(t): t\in[s,\,T]\}$ 当 $(x,\,s)\in D\times[0,T)$ 属于情形 A 时的单调性。

情形		$x^0_{x,\,s}$ 的单调性	
A_I	$A_{I,\,I}$: $\{d_2+a_i^0 \le (a\,x_T+a_i^0)/a\text{双曲余弦}(a_1T)\}$	↗,	$\forall(x,s)\in D\times[0,T)$
	$A_{I,\,II}$: $\{d_2+a_i^0 > (a\,x_T+a_i^0)/a\text{双曲余弦}(a_1T)\}$	↗↘ / ↗	$\forall\,(x,s)\in D\times[0,T)\cap\Omega\,(xs)D$ $T),(xs)D\,T)$ / $\forall\,(x,s)\in D\times[0,T)\setminus\Omega$
A_{II}, A_{III}, A_{IV}	$A_{V,\,I}$, $A_{VI,\,I}$: $\{d_2+a_i^0 \le (a\,x_T+a_i^0)/a\cosh(a_1T)\}$	↗,	$\forall(x,s)\in D\times[0,T)$
A_V, A_{VI}	$A_{V,II}$, $A_{VI,II}$: $\{d_2+a_i^0 > (a\,x_T+a_i^0)/a\cosh(a_1T)\}$	↘↗ / ↗	$\forall\,(x,s)\in D\times[0,T)\cap\Omega\,(xs)\,D\,T),(xs)\,D\,T)$ / $\forall\,(x,s)\in D\times[0,T)\setminus\Omega$
A_{VII}	$A_{VII,\,I}$: $\{d_2+a_i^0 \le (a\,x_T+a_i^0)/a\text{双曲余弦}(a_1T)\}$	↗,	$\forall(x,s)\in D\times[0,T)$
	$A_{VII,\,II}$: $\{d_2+a_i^0 > (a\,x_T+a_i^0)/a\text{双曲余弦}(a_1T)$ 且 $d_1+a_i^0 \le (a\,x_T+a_i^0)/a\text{双曲余弦}(a_1T)\}$	↘↗, / ↗,	$\forall(x,s)\in D\times[0,T)\cap\Omega$ / $\forall(x,s)\in D\times[0,T)\setminus\Omega$
	$A_{VII,\,III}$: $\{d_1+a_i^0 > (a\,x_T+a_i^0)/a\text{双曲余弦}(a_1T)\}$	↘↗, / ↗,	$\forall(x,s)\in D\times[0,T)\cap\Omega$ / $\forall(x,s)\in D\times[0,T)\setminus\Omega$

令 $\tau^0_{x,s} \triangleq \inf\{t>s: x^0_{x,s}(t)\notin D\}$ 为 $x^0_{x,s}$ 离开 D 的首次退出时间。以下结果可直接由推论 II.2 得出。

推论 *II.3. (a)* 在情形 A_I, 情形 A_{II}, 情形 A_{III}, 情形 A_{IV}, 情形 A_V, 情形 A_{VI}, 情形 $A_{VII,I}$，以及情形 $A_{VII,II}$ 中，对于任意 $(x,s)\in D\times[0,T)$，$\{(x^0_{x,s}(t),t): t\in[s,T]\}$ 与 $\partial D\times[0,T)$ 横截地相交于唯一点 $(d2,\tau^0_{x,s})$。首次退出时间 $\tau^0_{x,s}$ 是满足 $x^0_{x,s}(\tau^0_{x,s})=d_2$ 的 (s,T) 中唯一时刻。

(b) 相比之下，情形 $A_{VII,III}$ 表现出不同的行为。令 t_2 为满足以下条件的 $(0,T)$ 中的唯一时刻

$$d_1+\frac{a_0}{a_1} = \left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right)\Big/\cosh(a_1(T-t_2)),$$

并将临界轨迹 $x^{0,*}$ 定义为

$$x^{0,*}(t) \triangleq x^0_{d_1,t_2}(t) = \left(d_1+\frac{a_0}{a_1}\right)\cosh(a_1(t_2-t)) - \frac{a_0}{a_1}, \quad t\in[0,T].$$

定义域 $D\times[0,T)$ 分为三个不同的子域：

$$\Sigma_1 \triangleq \{(x,s)\in D\times[0,T)\cap\Omega: x < x^{0,*}(s),\ s\in[0,T)\},$$

$$\Sigma_2 \triangleq \{(x,s)\in D\times[0,T)\cap\Omega : x = x^{0,*}(s),\ s\in[0,T)\},$$

$$\Sigma_3 \triangleq D\times[0,T)\setminus(\Sigma_1\cup\Sigma_2).$$

Then

- 对于任意 $(x,s)\in\Sigma_1$，$\{(x^0_{x,s}(t),t): t\in[s,T]\}$ 在时刻 $\tau^0_{x,s}$ 横截地穿过 $\{d_1\}\times[0,T)$ 退出 $D\times[0,T)$，之后在较晚时刻重新进入 $D\times[0,T)$，最后在另一时刻再次横截地穿过 $\{d_2\}\times[0,T)$ 退出。首次退出时间 $\tau^0_{x,s}$ 是 $x^0_{x,s}(\tau^0_{x,s})=d_1$ 在 (s,T) 中的最小解。

- 对于任意 $(x,s)\in\Sigma_2$，$\{(x^0_{x,s}(t),t): t\in[s,T]\}$ 从 $D\times[0,T)$ 经由 $\{d_1\}\times[0,T)$ 在时刻 $\tau^0_{x,s}$ 相切地退出，并在重新进入后，于稍后的时刻横截地经由 $\{d_2\}\times[0,T)$ 退出。首次退出时间 $\tau^0_{x,s}$ 是方程 $x^0_{x,s}(\tau^0_{x,s})=d1$ 在 (s,T) 内的唯一解，对应于相切的出口点。也就是说，$\tau^0_{x,s}=t2$。

- 对于任意 $(x,s)\in\Sigma_3$，$\{(x^0_{x,s}(t),t): t\in[s,T]\}$ 与 $\partial D\times[0,T)$ 横截相交于唯一点 $(d_2,\tau^0_{x,s})$，其中 $\tau^0_{x,s}$ 是方程 $x^0_{x,s}(\tau^0_{x,s})=d_2$ 在 (s,T) 内的唯一解。

- 此外，如图1(d)所示，首次退出时间 $\tau^0_{x,s}$ 在 $\Sigma_1\cup\Sigma_3$ 内是 (x,s) 的光滑函数，但当 (x,s) 横向穿过 Σ_2 时，则会出现不连续。

证明。通过考察向量场 $(b(x,t),1)^\top$ 在 $D\times[0,T)$ 中的方向，以及推论 II.2 中确立的 $x^0_{x,s}$ 的单调性，即可直接得出这些结论。为便于理解，图1给出了情形 A_{VII} 的图示。其余情形的结果也可用类似的推理得出。

□

注 II.2。需要注意的是 $\tau^0_{x,s}$ 沿 $(x^0_{x,s}(t),t)$ 保持不变。更确切地说，

$$\tau^0_{x^0_{x,s}(t),t} = \tau^0_{x,s},\quad \textit{for all } t\in[s,\tau^0_{x,s}].$$

显然，对于每个 $(x,s)\in D\times[0,T)$，都有 $\tau^0_{x,s}\in(s,T)$。

这些结果使我们能够显式计算函数 u，如下所述。

推论 II.4. $u(x,s)\equiv 0$ 对于每个 $(x,s)\in D\times[0,T)$，在所有情形下均成立。

证明。根据定义，$u(x,s)\geq 0$。要证明 $u\equiv 0$，只需证明反向不等式。以下不等式链（或等式链）即可得证：

$$\begin{aligned} u(x,s) &\leq \frac{1}{2}\int_s^T \left[\dot{x}^0_{x,s}(t) - b(x^0_{x,s}(t),t)\right]^2 \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_s^{\tau^0_{x,s}} \left[\dot{x}^0_{x,s}(t) - b(x^0_{x,s}(t),t)\right]^2 \mathrm{d}t \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

将 Fleming-James 定理（附录 A 中的定理 A.2）应用于这些情形，可得以下结果。

命题 II.5. *(a)* 在情形 A_I、情形 A_{II}、情形 A_{III}、情形 A_{IV}、情形 A_V、情形 A_{VI}、情形 $A_{VII,I}$ 以及情形 $A_{VII,II}$ 中，我们有

$$q^\varepsilon(x,s) = 1 + o(\varepsilon^m),\quad as\ \varepsilon\to 0, \tag{11}$$

对于每个 $m\geq 0$，在 $D\times[0,T)$ 的紧子集上一致地成立。

(b) 在情形 $A_{VII,III}$ 中，公式（*11*）对于每个 $m\geq 0$ 均成立，且在 $\Sigma_1\cup\Sigma_3$ 的紧子集上一致地成立。

证明。我们采用类似的图示方法，说明情形 A_{VII} 的证明。其余情形类似。

在情形 $\mathrm{A}_{VII,I}$ 和情形 $\mathrm{A}_{VII,II}$ 中，对于任意 $T'\in(0,T)$，定义

$$N_{T'} \triangleq \{(x,s)\in D\times[0,T) : \tau^0_{x,s}\in(0,T')\}.$$

如图 2(a) 和 2(b) 所示，区域 $N_{T'}$ 满足附录 A 中的假设（A）。应用特征线法（注 A.1）可得

$$w(x,s)\equiv 0,\quad \forall (x,s)\in N_{T'},$$

$$\psi_m\equiv 0,\quad \forall (x,s)\in N_{T'},\ m=1,2,\cdots.$$

因此，根据定理 A.2，公式（11）在 $N_{T'}$ 的每个紧子集上一致成立。

此外，对于任意紧子集 $K\subset D\times[0,T)$，我们可以选择 $T'\in(0,T)$，使得 $K\subset N_{T'}$。因此，渐近级数（11）在 $D\times[0,T)$ 的所有紧子集上一致有效。

对于情形 $\mathrm{A}_{VII,III}$ 以及任意 $T'\in(t_2,T)$，我们定义

$$N^{(1)}_{T'} \triangleq \Sigma_1,$$

and

$$N^{(2)}_{T'} \triangleq \{(x,s)\in\Sigma_3 : \tau^0_{x,s}\in(0,T')\}.$$

如图 2(c) 所示，每个 $N^{(i)}{}_{T'}$ $(i\in\{1,2\})$ 都满足假设（A）。因此，

$$w(x,s)\equiv 0,\quad \forall\,(x,s)\in N^{(1)}_{T'}\cup N^{(2)}_{T'},$$

$$\psi_m\equiv 0,\quad \forall\,(x,s)\in N^{(1)}_{T'}\cup N^{(2)}_{T'},\ m=1,2,\cdots.$$

由于对于适当的 $T'\in(t_2,T)$，每个紧子集 $K\subset\Sigma_1\cup\Sigma_3$ 都包含于 $N^{(1)}{}_{T'}\cup N^{(2)}{}_{T'}$，公式（11）在 $\Sigma_1\cup\Sigma_3$ 的所有紧子集上一致成立。证明完毕。

□

注 II.3。*(a)* 注意到

$$\mathbb{E}^\varepsilon_{x,s}(x^\varepsilon_T) = x_T\quad and\quad \mathbb{V}ar(x^\varepsilon_T) = \mathbb{C}ov(x^\varepsilon_T,x^\varepsilon_T) = 0.$$

由此可知，$x^\varepsilon_T = x_T$ 几乎必然成立。结合样本路径 x^ε 在 $[s,T]$ 上几乎必然连续这一事实（即 $x^\varepsilon\in\mathscr{C}([s,T],\mathbb{R})$ </style}几乎必然），我们得出，若 $x_T\notin D$，则

对于任意$(x, s) \in D \times [0,T)$，$x^\varepsilon$几乎必然会在某个时刻 $t \in [s, T]$退出 D。这意味着

$$q^\varepsilon(x,s) \equiv 1, \quad \forall\,(x,s) \in D \times [0,T), \textit{ provided } x_T \notin D. \quad (12)$$

因此，命题 *II.5* 的结论在情形 A 中显然成立。

(b) 然而，底层详细动力学远非平凡。根据大数定律（参见例如 *[8,* 第 *2* 章，定理 *1.2.]*），对每个 $T' \in (s,T)$和 $\delta > 0$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{P}^\varepsilon_{x,s}\left(\sup_{t\in[s,T']} \left|x^\varepsilon_t - x^0_{x,s}(t)\right| > \delta \right) = 0. \quad (13)$$

也就是说，当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，几乎每条样本路径都保持在确定性轨迹 $x^0_{x,s}$ 的 δ-管状邻域内。因此，当 $x_T > d_2 > d_1$，时，以下性质成立（参见 *[8,* 第 *2* 章，定理 *2.3.]*）：

- *In Cases A_I, A_{II}, A_{III}, A_{IV}, A_V, A_{VI}, $A_{VII,I}$, and $A_{VII,II}$, for any $(x,s) \in D \times [0,T)$ and $\eta > 0$,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{P}^\varepsilon_{x,s}\left(\left|\tau^\varepsilon_{x,s} - \tau^0_{x,s}\right| > \eta\right) = 0, \quad (14)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{P}^\varepsilon_{x,s}\left(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{x,s}} = x^0_{x,s}(\tau^0_{x,s})\right) = 1. \quad (15)$$

换言之，当 ε足够小时，样本路径 x^ε 极有可能经由边界点 $\{x^0_{x,s}(\tau^0_{x,s}) = d_2\}$ 离开 D，且退出时间接近确定性退出时间$\tau^0_{x,s}$。

- 在情形 *AVII, III* 中，方程 *(14)* 和 *(15)* 对所有$(x, s) \in \Sigma_1 \cup \Sigma_3$和 $\eta > 0$均成立。注意，对于$(x,s) \in \Sigma_1$，$x^0 x, s(\tau^0 x, s) = d_1$；而对于$(x, s) \in \Sigma_3$，$x^0 x, s(\tau^0 x, s) = d_2$。这表明，当$(x, s)$横截地穿过 Σ_2 时，首次退出位置 $x^\varepsilon_{\tau^{\varepsilon x,\ s}}$ 和首次退出时间 $\tau^\varepsilon x, s$ 会出现不连续性。

- 对于情形 *AVII, III*，当$(x,s) \in \Sigma_2$时，方程 *(13)* 表明，对充分小的 $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}^\varepsilon_{x,s}\left(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{x,s}} = d_1\right) \simeq \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}^\varepsilon_{x,s}\left(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{x,s}} = d_2\right) \simeq \frac{1}{2}.$$

也就是说，近一半的样本路径会在接近 t_2 的时刻经由 $\{d_1\}$ 离开 D。这些路径在 $\{d_1\}$ 附近振荡后，会重新进入 D，并最终在稍后接近 t_3 的时刻穿过 $\{d_2\}$。其余未在接近 t_2，的时刻离开的样本路径，更有可能在接近 t_3 的时刻直接经由$\{d_2\}$ 离开 D。这里，t_3 定义为满足 $x^{0,*}(t_3) = d_2,$，即，在 (t_2,T) 中的唯一时刻，

$$t_3 \triangleq \lim_{(x,s)\in\Sigma_3,\,(x,s)\to(d_1,t_2)} \tau^0_{x,s}.$$

III. 情形 B： $x_T \in (d_1,d_2)$

为简单起见，我们将情形 B 下的以下四个子情形一并处理：

- Case B_I: $-a_0/a_1 > d_2 > x_T > d_1$;
- Case B_{II}: $-a_0/a_1 = d_2 > x_T > d_1$;
- Case B_{III}: $d_2 > -a_0/a_1 > x_T > d_1$;
- Case B_{IV}: $d_2 > -a_0/a_1 = x_T > d_1$;

其余情形可类似地得出。

根据 $\{(x^0_{x,s}(t),t) : t \in [s,T]\}$ 与 $\partial D \times [0,T)$ 是否相交，情形 B_I分为两个子情形：$B_{I,\,I}$和 $B_{I,\,II}$。以下结果与第 II 节中的结果（推论 II.2、II.3、II.4 和命题 II.5）相对应。由于证明过程类似，故略去证明。

推论 III.1。如表 *III* 所示，以下单调性性质成立：

(a) 在情形 B_I、B_{II} 和 B_{III} 中，条件 $d_1 < x_T < d_2$确保 $D \times [0, T) \cap \Omega$非空。因此，对于任意 $(x, s) \in D \times [0,T) \setminus \Omega$，$x^0_{x,s}$在 $[s, T]$上单调；而对于任意 $(x,s) \in D \times [0,T) \cap \Omega$，它非单调。

(b) 对于情形 B_{IV}，等式 $x_T + a_0 a_1 = 0$ 给出 $\Omega = /0$。因此，对于所有 $(x, s) \in D \times [0,T)$，$x^0_{x,s}$在 $[s, T]$上单调。

表 III：情形 B 中 $\{x^0_{x,s}(t) : t \in [s,T]\}$ 关于 $(x,s) \in D \times [0,T)$ 的单调性。

情形	子情形	单调性 $x^0_{x,\ s}$
B_I	$B_{I,I}$: $\left\{d_2 + a_1^0 \geq \left(a\,x_T + a_1^0\right)/a$双曲余弦$(a_1 T)\right\}$	$\begin{cases} \nearrow, & \forall (x,\ s) \in D \times [0,T) \cap \Omega \\ \nearrow$或$\searrow, & \forall\ (x,\ s)\ \in D \times [0,T)\ \setminus \Omega \\ \searrow, & \forall\ (x,\ s)\ \in D \times [0,T)\ \cap \Omega \\ \nearrow$或$\searrow, & \forall (x,s) \in D \times [0,T) \setminus \Omega \end{cases}$
	$B_{I,II}$: $\left\{d_2 + a_1^0 < \left(a\,x_T + a_1^0\right)/a\cosh(a_1 T)\right\}$	
$B_{II},\ B_{III}$	——	$\forall\ (x,s)\ \in D \times [0,T)\ \cap \Omega$ $\forall\ (x,\ s) \in D \times [0,T)\ \setminus \Omega$
B_{IV}	——	$\begin{cases} \nearrow$或$\searrow, & \text{如果} \\ \text{常数}, & x\,x a_0/a$或$,\text{否则} \end{cases}$

推论 III.2. *(a)* 在情形 $B_{I,I}$、B_{II}、B_{III} 和 B_{IV} 中，对任意 $(x,s) \in D \times [0,T)$，我们有 $x^0_{x,s}(t) \in D$，对所有 $t \in [s, T]$。

（*b*）相比之下，情形 $B_{I,\,II}$ 表现出截然不同的特征。令 t_4为满足下式的唯一时刻 $(0,\ T)$：

$$d_2 + \frac{a_0}{a_1} = \left(x_T + \frac{a_0}{a_1}\right) \Big/ \cosh(a_1(T - t_4)),$$

并定义另一条临界轨迹 $x^{0,\ **}$ 如下：

$$x^{0,**}(t) \triangleq x^0_{d_2,t_4}(t) = \left(d_2 + \frac{a_0}{a_1}\right)\cosh(a_1(t_4 - t)) - \frac{a_0}{a_1}, \quad t \in [0,T].$$

定义域 $D \times [0,T)$ 可划分为三个不同的子域：

$$\Lambda_1 \triangleq \{(x,s) \in D \times [0,T) \cap \Omega : x > x^{0,**}(s),\ s \in [0,T)\},$$

$$\Lambda_2 \triangleq \{(x,s)\in D\times[0,T)\cap\Omega : x = x^{0,**}(s),\ s\in[0,T)\},$$

$$\Lambda_3 \triangleq D\times[0,T)\setminus(\Lambda_1\cup\Lambda_2).$$

Then

- 对于任意 $(x,s)\in\Lambda_1$, $\{(x^0_{x,s}(t),t): t\in[s,T]\}$ 在时刻 $\tau^0_{x,s}$ 横截地退出定义域 $D\times[0,T)$，随后在较晚时刻重新进入该定义域，并留在 $D\times[0,T)$ 内，直至到达 (x_T,T)。首次退出时间 $\tau^0_{x,s}$ 是 $x^0_{x,s}(\tau^0_{x,s})=d_2$ 在 (s,T) 中的最小解。
- 对于任意 $(x,s)\in\Lambda_2$, $\{(x^0_{x,s}(t),t): t\in[s,T]\}$ 在时刻 $\tau^0_{x,s}$ 通过 $\{d_2\}\times[0,T)$ 与 $D\times[0,T)$ 相切地离开，重新进入后一直留在定义域内，直到到达 (x_T,T)。首次退出时间 $\tau^0_{x,s}$ 是方程 $x^0_{x,s}(\tau^0_{x,s})=d_2$ 在 (s,T) 内的唯一解，对应于相切的出口点，即 $\tau^0_{x,s}=t_4$。
- 对于任意 $(x,s)\in\Lambda_3$, $\{(x^0_{x,s}(t),t): t\in[s,T]\}$ 在 $D\times[0,T)$ 内保持不动，直到到达 (x_T,T)。（在这种情况下，我们采用约定 $\tau^0_{x,s}=+\infty$，使首次退出时间 $\tau^0_{x,s}$ 有定义。）

命题 III.3. 在情形 $B_{I,\,II}$ 中，对所有 $(x,s)\in\Lambda_1\cup\Lambda_2$，我们有 $u(x,s)\equiv 0$。因此，Λ_1 满足假设（A），并由 *Fleming-James* 定理，

$$q^\varepsilon(x,s) = 1+o(\varepsilon^m),\quad as\ \varepsilon\to 0, \tag{16}$$

对每个 $m\geq 0$，在 Λ_1 的每个紧子集上一致地成立。

注 III.1.（*16*）中的无穷小项 $o(\varepsilon^m)$不能省略，因为定理 *A.2* 中的渐近级数本质上光滑但非解析。为说明这一点，令 $\Gamma^C_{x,\,s}$ 表示$\Gamma_{x,\,s}$的补集，即

$$\begin{aligned}\Gamma^C_{x,s} &\triangleq \{\gamma\in\mathscr{C}([s,T],\mathbb{R}) : \gamma(s)=x\}\setminus\Gamma_{x,s}\\ &= \{\gamma\in\mathscr{C}([s,T],\mathbb{R}) : \gamma(s)=x,\ \gamma(t)\in D, \forall t\in[s,T]\}.\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^\varepsilon_{x,s}\left(\tau^\varepsilon_{x,s}\leq T\right) &= 1-\mathbb{P}^\varepsilon_{x,s}\left(\tau^\varepsilon_{x,s}>T\right)\\ &= 1-\mathbb{P}^\varepsilon_{x,s}\left(x^\varepsilon\in\Gamma^C_{x,s}\right).\end{aligned}$$

根据大偏差原理的 *Borovkov* 刻画（参见 *[8,* 第 *3* 章，定理 *3.4]*），对每个 $(x,s)\in\Lambda_1$，存在常数 $C_1>C_2>0$（由最小值$\inf_{\gamma\in\Gamma^C_{x,\,s}} I(\gamma)$确定），使得对所有充分小的 ε，

$$\exp(-C_1/\varepsilon)\leq\mathbb{P}^\varepsilon_{x,s}\left(x^\varepsilon\in\Gamma^C_{x,s}\right)\leq\exp(-C_2/\varepsilon).$$

这意味着

$$q^\varepsilon(x,s)\simeq 1-\exp(-C/\varepsilon)$$

对某个 $C>0$ 成立。由于函数 $\exp(-C/\varepsilon)$ 在 ε 处的 $\varepsilon=0$ 光滑但非解析，因此无法展开为收敛的泰勒级数。因此，尽管方程 *(16)* 对每个 $m\geq 0$ 都成立，但不能忽略 $o(\varepsilon^m)$ 项，因为它代表一个指数小贡献。这与情形 A 的情况形成对比（参见注释 *II.3(a)*）。

现在我们继续推导其余点（x,s）处 q^ε 的渐近级数，其中 $u(x,s)\neq 0$。对于这类点，函数 u 可表示如下。

引理 III.4. 在情形 B_I、B_{II}、B_{III} 和 B_{IV} 中，我们有

$$u(x,s) = \inf_{d\in\partial D}\inf_{s<t\leq T} u(x,s;d,t), \tag{17}$$

对每个 $(x,s)\in D\times[0,T)$，其中

$$\begin{aligned}u(x,s;d,t) &\triangleq \inf_{\gamma\in\mathscr{C}([s,T],\mathbb{R}),\,\gamma(s)=x,\,\gamma(t)=d} I(\gamma)\\ &= \frac{a_1\sinh(a_1(T-s))\left(d-x^0_{x,s}(t)\right)^2}{2\sinh(a_1(T-t))\sinh(a_1(t-s))}.\end{aligned} \tag{18}$$

证明。固定 $d\in\partial D$ 以及 $t\in(s,T]$。令 γ表示一条包含在 $\Gamma_{x,s}$ 中的路径，使得 $\gamma(s)=x$ 且 $\gamma(t)=d$。对这类路径而言，式 (18) 中的约束优化问题是一个具有固定端点的标准变分法问题。相应的哈密顿方程为

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}v}=\frac{\partial H}{\partial\alpha},\quad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}v}=-\frac{\partial H}{\partial\gamma},\quad s<v<t,$$

边界条件为 $\gamma(s)=x$、$\gamma(t)=d$，哈密顿函数为

$$H(\gamma,\alpha,v)\triangleq b(\gamma,v)\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2.$$

对于每个 $(d,t)\in\partial D\times(s,T]$,，都存在唯一的光滑解 $\gamma_{x,s;d,\,t}\in\mathscr{C}^\infty([s,t],\mathbb{R})$，其表达式为

$$\begin{aligned}\gamma_{x,s;d,t}(v) &= \left(x+\frac{a_0}{a_1}\right)\frac{\sinh(a_1(t-v))}{\sinh(a_1(t-s))}\\ &\quad+\left(d+\frac{a_0}{a_1}\right)\frac{\sinh(a_1(v-s))}{\sinh(a_1(t-s))}-\frac{a_0}{a_1},\quad v\in[s,t].\end{aligned}$$

现在令 γ: $[s,\ T]\to\mathbb{R}$为一条定义如下的路径

$$\gamma(v)=\begin{cases}\gamma_{x,s;d,t}(v), & v\in[s,t]\\ x^0_{d,t}(v), & v\in(t,T].\end{cases}$$

于是，

$$\begin{aligned}u(x,s;d,t) &= \frac{1}{2}\int_s^T[\dot\gamma(v)-b(\gamma(v),v)]^2\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{2}\int_s^t[\dot\gamma_{x,s;d,t}(v)-b(\gamma_{x,s;d,t}(v),v)]^2\mathrm{d}v,\end{aligned}$$

对积分求值后，即得到式 (18) 中的闭式表达式。

最后，根据u的定义，所有在时刻s 从x 出发并在时刻T之前到达 ∂D 的路径上，$I(\gamma)$ 的最小值等于 $(d,\ t)\in\partial D\times(s,\ T]$ 上$u(x,\ s;\ d,\ t)$ 的最小值。因此，式 (17) 得证。证明至此完成。□

注记 III.2. 在情形 $B_{I,\ II}$ 中，我们有

$$u(x,s)=u\left(x,s;x^0_{x,s}(\tau^0_{x,s}),\tau^0_{x,s}\right)\equiv 0,\quad\forall(x,s)\in\Lambda_1\cup\Lambda_2.$$

这与命题 *III.3* 一致。

注释 III.3。 *(a)* 对于任意 $v \in (s,t)$，令 $y = \gamma_{x,\,s;d,\,t}(v)$。可以验证

$$\gamma_{x,s;y,v}(\tau) = \gamma_{x,s;d,t}(\tau), \quad \forall \tau \in [s,v],$$

$$\gamma_{y,v;d,t}(\tau) = \gamma_{x,s;d,t}(\tau), \quad \forall \tau \in [v,t].$$

也就是说，$\gamma_{x,\,s;d,\,t}$ 的每一段都继承了与原路径相同的函数形式。

(b) 容易证明

$$u(x,s;d,t) \le u(x,s;y,v) + u(y,v;d,t), \quad \forall (y,v) \in \mathbb{R} \times (s,t),$$

等号成立当且仅当 $y = \gamma_{x,\,s;d,\,t}(v)$。

(c) 注意，对每个 $d \in \partial D$,

$$u(x,s;d,t) \simeq \frac{a_1 (d-x)^2}{2\sinh(a_1(t-s))} \to +\infty, \quad as\, t \to s, \qquad (19)$$

$$u(x,s;d,t) \simeq \frac{a_1 (d-x_T)^2}{2\sinh(a_1(T-t))} \to +\infty, \quad as\, t \to T. \qquad (20)$$

$u(x,s;\ d,t)$ 的下确界在 $\partial D \times (s,\ T)$ 中的一个或多个点处取得。因此，

$$u(x,s) = \min_{d \in \partial D} \min_{s<t<T} u(x,s;d,t) \qquad (21)$$

(d) 此外，根据推论 *III.2*，对于情形 $B_{I,\,I}$、B_{II}、B_{III}和B_{IV} 中的$(x,s) \in D \times [0,T)$（以及情形 $B_{I,\,II}$中的$(x,\,s) \in \Lambda_3$），我们有

$$u(x,s;d,t) > 0, \quad \forall (d,t) \in \partial D \times (s,T),$$

这意味着 $u(x,\,s) > 0$。

对于任意满足 $u(x,s) > 0$ 的 (x,s)，令 $(d_{x,s}, v_{x,s}) \in \partial D \times (s,T)$ 为使 $\mathrm{u}(x,s;\,d,t)$ 取得下确界的点。无论该点是否唯一，我们都将$d_{x,s}$ 称为最优退出位置，将$v_{x,s}$ 称为最优退出时间。相应的最优路径定义为

$$\gamma_{x,s}(t) \triangleq \gamma_{x,s;d_{x,s},v_{x,s}}(t), \quad \forall\, t \in [s, v_{x,s}],$$

显然，它在 $[s v_{x,s}]$ 上属于 $\mathscr{C}^\infty$ 类。

引理 III.5. 对于每个满足 $u(x,\,s) > 0$ 的$(x,\,s)$，以下性质成立：

(a) 当 $s \to T$ 时，$u(x,s) \to \infty$，且对 D 的每个紧子集中的 x 一致成立；

(b) 对每个 $T' \in [0,T)$，$u(x,s)$ 在 $D \times [0,T']$ 上有界；

(c) $v_{x,\ s} \to T$ 随 s 趋于 $\to T$，对 $x \in D$ 一致成立；

(d) 对每个 $T' \in [0,T)$，都存在 $\delta > 0$，使得 $v_{x,\ s} \in (s,\ T - \delta)$ 对所有 $(x,\,s) \in D \times [0,T']$ 均成立；

(e) 对每个紧致 $K \subset D \times [0,T)$，都存在 $\delta > 0$，使得 $v_{x,\ s} \in (s + \delta,\ T - \delta)$ 对所有 $(x,s) \in K$ 均成立。

(f) $u(x,\,s) \to 0$ 当 $dist(x\ \partial D) \to 0$时，对每个紧子集 $[0,T)$中的 s 一致成立；

(g) $v_{x,\ s} \to s$ 当 $dist(x\ \partial D) \to 0$时，对每个紧子集 $[0,T)$中的 s 一致成立；

(h) 对每个 $T' \in [0,T)$，$u(x,s)$ 在 $\bar{D} \times [0,T']$上是 *Lipschitz* 连续的。

证明. (a) 设 $E \subset D$为紧致的。由推论 III.2，$x^0_{x,s}(t) \in D$对所有 $t \in [s,T]$ 以及所有 $x \in E$在 $s \to T$时成立。因此，存在常数C 使得

$$\left|d - x^0_{x,s}(t)\right| > C > 0, \quad \forall\, t \in [s,T],\ \forall d \in \partial D,\ \forall\, x \in E.$$

那么，对于任意 $d \in \partial D$和 $t \in (s,T)$,

$$\begin{aligned} u(x,s;d,t) &\simeq \frac{(T-s)(d - x^0_{x,s}(t))^2}{2(T-t)(t-s)} \\ &\ge \frac{2C^2}{T-s} \to +\infty, \quad \forall\, x \in E,\ \text{as}\ s \to T, \end{aligned}$$

这就证明了 (a)。

(b) 固定$T' \in [0,T)$。设 $(x,s) \in D \times [0,T']$为一点，满足 $x^0_{x,s}(t) \in D$对所有$t \in [s,T]$均成立。则对任意$d \in \partial D$,

$$\begin{aligned} u(x,s) &\le u(x,s;d,(T+s)/2) \\ &= \frac{a_1 (d - x^0_{x,s}((T+s)/2))^2}{\tanh(a_1(T-s)/2)} \\ &\le \frac{a_1 (d_2 - d_1)^2}{\tanh(a_1(T-T')/2)} < \infty, \end{aligned}$$

这就证明了 (b)。

(c) 这直接由 $v_{x,s}$ 的定义得出，即对所有x属于D，$v_{x,s} \in (s,T)$。

(d) 设$M \triangleq \max_{(x,s) \in D \times [0,T']} u(x,s) + 1$。根据性质 (20)，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\begin{aligned} &u(x,s;d,t) > M, \\ &\forall (x,s) \in D \times [0,T'],\ \forall (d,t) \in \partial D \times [T - \delta, T). \end{aligned}$$

由于 $\mathrm{u(x,\ s)} = \mathrm{u(x,\ s;\ d}_{x,s}, v_{x,s}) < \mathrm{M}$，因此，$(\mathrm{d}_{x,s}, v_{x,s})$ 不可能属于 $\partial \mathrm{D} \times [\mathrm{T} - \delta, \mathrm{T})$。所以，$v_{x,s} \in (\mathrm{s,\ T} - \delta)$。

(e) 设 K是$D \times [0,T)$的一个紧子集，并令$M \triangleq \max_{(x,s) \in K} u(x,s) + 1$。由性质 (19)，我们可以选取 $\delta > 0$，使得

$$u(x,s;d,t) > M, \quad \forall (x,s) \in K,\ \forall (d,t) \in \partial D \times (s, s+\delta].$$

因此，$(d_{x,s}, v_{x,s}) \notin \partial D \times (s, s+\delta]$。结合 (d)，我们得出，对于所有 $(x,s) \in K$，$v_{x,s} \in (s+\delta, T-\delta)$。

(f) 由于 $\mathrm{dist}(x\ \partial D) \to 0$，取$d \in \partial D$，使得 $|x - d| \to 0$。于是

$$\begin{aligned} u(x,s) &\le u(x,s;d, s + |x-d|) \\ &\simeq [a_1(d + a_0/a_1)\cosh(a_1(T-s)) + \mathrm{sign}(d-x) \\ &\quad \times \sinh(a_1(T-s)) - a_1(x_T + a_0/a_1)]^2 \\ &\quad /[2\sinh^2(a_1(T-s))] \times |x-d| + o(|x-d|), \end{aligned}$$

当 $|x - d| \to 0$ 时，该量趋于零；对于s 取值于 $[0,T)$的任意紧子集时，这一收敛是一致的。这证明了 (f)。

(g) 固定 $\mathrm{T}' \in [0,\mathrm{T})$ 以及 $\delta \in (0, \mathrm{T} - \mathrm{T}')$。设 $(\mathrm{x,\ s}) \in \mathrm{D} \times [0,\mathrm{T}']$表示一点，使得对所有 $\mathrm{t} \in [\mathrm{s,\ T}]$，有 $\mathrm{x}^0_{x,s}(\mathrm{t}) \in \mathrm{D}$。由于 $\mathrm{dist(x\ \partial D)} \to 0$，我们选取 $\mathrm{d} \in \partial \mathrm{D}$，使得 $|\mathrm{x} - \mathrm{d}| \to 0$。由 $\mathrm{x}^0_{x,s}$ 对初始点 x 的连续依赖性可知，$\mathrm{x}^0_{d,s}(\mathrm{s}) = \mathrm{d} \in \partial \mathrm{D}$，且对所有 $\mathrm{t} \in (\mathrm{s,\ T})$，有 $\mathrm{x}^0_{d,s}(\mathrm{t}) \in \mathrm{D}$。定义

$$C_1(\delta) \triangleq \min_{t \in [s+\delta, T]} |d - x^0_{d,s}(t)| > 0.$$

选取 $\eta_1 > 0$ 充分小，使得对所有 $|x - d| < \eta_1$,

$$\max_{t\in[s+\delta,T]} |x^0_{x,s}(t) - x^0_{d,s}(t)| < C_1(\delta)/2.$$

那么，对于这样的 x,

$$\min_{t\in[s+\delta,T]} |d - x^0_{x,s}(t)| > C_1(\delta)/2.$$

定义

$$C_2 = \min_{t\in(s,T)} \frac{a_1 \sinh(a_1(T-s))}{2\sinh(a_1(T-t))\sinh(a_1(t-s))} = \frac{a_1}{\tanh(a_1(T-s)/2)}.$$

因此，对所有 $t \in [s+\delta, T)$ 以及所有 $|x - d| < \eta_1$,

$$u(x,s;d,t) > \frac{C_1^2(\delta)C_2}{4}.$$

由 (f)，当 $|x - d| \to 0$ 时，$u(x, s) \to 0$。因此，存在 $\eta_2 \in (0, \eta_1)$，使得只要 $|x - d| < \eta_2$，就有 $u(x,s) < C_1^2(\delta)C_2/4$。由于在任意时刻 $t \geq s + \delta$ 退出的代价 $u(x,s; d,t)$ 以这个正的常数为下界，达到较小代价 $u(x, s)$ 的最优退出时间 $\nu_{x,s}$ 必须对所有 $|x - d| < \eta_2$ 以及所有 $s \in [0, T']$ 满足 $\nu_{x,s} < s + \delta$。这就证明了 (g)。

(h) 固定 $T' \in [0, T)$。由 (d)，存在 $\delta > 0$，使得对所有 $(x,s) \in D \times [0, T']$，有 $\nu_{x,s} \in (s, T - \delta)$。选取一个常数 η，满足 $0 < \eta < \delta/2$。任取满足 $|x_1 - x_2| + |s_1 - s_2| < \eta$ 的两个点 $(x_1, s_1), (x_2, s_2) \in D \times [0, T']$。则

$$|u(x_1,s_1) - u(x_2,s_2)| \leq |u(x_1,s_1) - u(x_1,s_2)| + |u(x_1,s_2) - u(x_2,s_2)|.$$

我们分别估计每一项。

第一项的估计：设 γ_{x_1,s_2} 是 (x_1, s_2) 的一条最优路径。定义平移路径 $\gamma^{(1)}$ 为

$$\gamma^{(1)}(t) \triangleq \gamma_{x_1,s_2}(t - s_1 + s_2), \quad t \in [s_1, \nu_{x_1,s_2} + s_1 - s_2].$$

Then

$$\gamma^{(1)}(s_1) = x_1, \quad \gamma^{(1)}(\nu_{x_1,s_2} + s_1 - s_2) = d_{x_1,s_2} \in \partial D, \quad \nu_{x_1,s_2} + s_1 - s_2 \in (s_1, T - \delta/2).$$

也就是说，$(\gamma^{(1)}(t), t)$ 是一条连接 (x_1, s_1) 与边界 $\partial D \times [0, T)$ 的轨迹。根据 u 的定义，我们有

$$u(x_1,s_1) \leq \frac{1}{2}\int_{s_1}^{\nu_{x_1,s_2}+s_1-s_2} [\dot\gamma^{(1)}(t) - b(\gamma^{(1)}(t), t)]^2 dt = \frac{1}{2}\int_{s_2}^{\nu_{x_1,s_2}} [\dot\gamma_{x_1,s_2}(v) - b(\gamma_{x_1,s_2}(v), v + s_1 - s_2)]^2 dv.$$

因此，

$$u(x_1,s_1) - u(x_1,s_2) \leq C_1|s_1 - s_2|,$$

其中

$$C_1 \triangleq L\left(\sqrt{2T \max_{(x,s)\in D\times[0,T']} u(x,s)} + LT\eta/2\right),$$

并且 $L < \infty$ 是 $b(x, s)$ 在紧致集 $\bar{D} \times [0, T - \delta/2]$ 上的 Lipschitz 常数。互换 s_1 和 s_2 的角色可得到相同的界。因此，

$$|u(x_1,s_1) - u(x_1,s_2)| \leq C_1|s_1 - s_2|.$$

第二项的估计：令 $\Delta \triangleq x_2 - x_1$，并考虑平移路径

$$\gamma^{(2)}(t) \triangleq \gamma_{x_1,s_2}(t) + \Delta, \quad t \in [s_2, \nu_{x_1,s_2}].$$

如果 $d_{x_1,s_2} + \Delta \notin D$，那么 $\gamma^{(2)}$ 会在 ν_{x_1,s_2} 之前的某个时刻离开 D。否则，我们在 ν_{x_1,s_2} 之后，将其延伸为从点 $(d_{x_1,s_2} + \Delta, \nu_{x_1,s_2})$ 到边界 $\partial D \times [0, T)$ 的一条最优延续。无论哪种情况，利用 (f) 的结果以及 b 的 Lipschitz 连续性，都可以证明

$$u(x_2,s_2) - u(x_1,s_2) \leq C_2|\Delta|,$$

其中 $C_2 < \infty$ 是一个常数，仅取决于 T'、η 以及 b 的 Lipschitz 常数。交换 x_1 和 x_2 即可得到对称的界，因此

$$|u(x_2,s_2) - u(x_1,s_2)| \leq C_2|x_2 - x_1|.$$

结合这两个估计，我们得到一个常数 $C \triangleq \max\{C_1, C_2\}$，使得

$$|u(x_1,s_1) - u(x_2,s_2)| \leq C(|s_1 - s_2| + |x_2 - x_1|),$$

对所有满足 $|x_1 - x_2| + |s_1 - s_2| < \eta$ 的 (x_1, s_1)、$(x_2, s_2) \in D \times [0, T']$，由于 η 仅取决于 T' 和 δ，这证明了 u 在 $D \times [0, T']$ 上局部 Lipschitz 连续。由于 u 连续延拓至 $\bar{D} \times [0, T']$，且 $u = 0$ 在 $\partial D \times [0, T']$ 上，且 $\bar{D} \times [0, T']$ 是紧集，我们得出 u 在 $\bar{D} \times [0, T']$ 上全局 Lipschitz 连续。证明至此完成。 □

强正则点的定义如下。

定义 III.1. 若一点 $(x, s) \in D \times [0, T)$ 满足 $u(x, s) > 0$，则称其为强正则点，当且仅当以下条件成立：

(a) $u(x,s;d,t)$ 在 $(d,t) \in \partial D \times (s, T)$ 上的最小值在唯一一点 $(d_{x,s}, \nu_{x,s}) \in \partial D \times (s, T)$ 处取得。*(b)* 函数 $t \mapsto u(x, s; d_{x,s}, t)$ 在 $t = \nu_{x,s}$ 处有一个非退化极小值，即其关于 t 的二阶导数在 $t = \nu_{x,s}$ 处为正。

注 III.4. 定义

$$f(x,s;d,t) \triangleq a_1 \sinh(a_1(T-s))\left(d - x^0_{x,s}(t)\right),$$

and

$$g(x,s;d,t) \triangleq a_1\left[\left(d + \frac{a_0}{a_1}\right)\sinh(a_1(2t - T - s)) + \left(x + \frac{a_0}{a_1}\right) \times \sinh(a_1(T-t)) - \left(x_T + \frac{a_0}{a_1}\right)\sinh(a_1(t-s))\right].$$

可以验证，

$$\frac{\partial u(x,s;d,t)}{\partial t} = \frac{f(x,s;d,t)g(x,s;d,t)}{2\sinh^2(a_1(t-s))\sinh^2(a_1(T-t))}.$$

对于任意 (x, s) 满足 $u(x,s) > 0$ 的情形，我们有

$$f(x,s;d,t) \neq 0, \quad \forall\,(d,t) \in \partial D \times [s,T].$$

因此，无论极小化点 $(d_{x,s}, v_{x,s})$ 是否唯一，$(d_{x,s}, v_{x,s})$ 的最优性都意味着

$$g(x,s;d_{x,s},t)|_{t=v_{x,s}} = 0.$$

此外，当定义 *III.1* 的条件 *(a)* 成立时，条件 *(b)* 等价于要求

$$\begin{cases} g(x,s;d_{x,s},t)|_{t=v_{x,s}} = 0, \\ \dfrac{\partial g(x,s;d_{x,s},t)}{\partial t}\Big|_{t=v_{x,s}} \neq 0. \end{cases}$$

由这些事实可得以下引理。

引理 III.6. 对于任意满足 $u(x, s) > 0$ 的(x, s)，以下性质成立：

(a) 无论 $u(x,s;d,t)$ 的最小值是否由唯一点取得，最优路径 $\gamma_{x,s}(t)$ 在所有 $t \in [s v_{x,s})$时都留在 D 内。此外，$\dot{\gamma}_{x,s}(v_{x,s}) \neq 0$。也就是说，$(\gamma_{x,s}(t),t)$以非切向方式穿过 $\partial D \times [0,T)$。

(b) 无论 $u(x, s; d,t)$ 的最小值是否由唯一点取得，对于每个满足 $v \in (s\, v_{x,s})$ 的点 $(y, v) = (\gamma_{x,s}(v),v)$，点对 $(d_{x,s},v_{x,s})$ 仍是最优退出位置和最优退出时间。此外，对于这样的 (y, v)，$u(y,v; d,t)$ 的最小值在 $(d_{x,s},v_{x,s})$ 处唯一取得，因此每个这样的点 (y, v) 都是强正则的。（换言之，最优退出位置和最优退出时间沿着图像 $(\gamma_{x,s}(t),t)$ 保持不变，这与注 *II.2* 类似。）

(c) 在 $u(x,s;d,t)$ 取得最小值且最小值唯一的点中，至多有一个点不满足定义 *III.1* 的条件 *(b)*（即为退化点）。

证明。(a) 反设存在 $t_0 \in [s v_{x,s})$，使得 $\gamma_{x,s}(t_0) \in \partial D$。那么

$$u(x,s) \leq u(x,s;\gamma_{x,s}(t_0),t_0) < u(x,s;d_{x,s},v_{x,s}),$$

这与 $(d_{x,s},v_{x,s})$ 的定义矛盾。

现在假设 $\dot{\gamma}_{x,s}(v_{x,s}) = 0$。该条件意味着

$$(d_{x,s} + a_0/a_1)\cosh(a_1(v_{x,s} - s)) = x + a_0/a_1,$$

因此，

$$\begin{aligned} g(x,s;d_{x,s},v_{x,s}) =& a_1 \sinh(a_1(v_{x,s}-s))[(d_{x,s}+a_0/a_1) \\ & \times \cosh(a_1(T-v_{x,s})) - (x_T + a_0/a_1)]. \end{aligned}$$

可以验证，这种情况只可能在情形 B 中 $d_{x,s} = d_2$ 时发生。在子情形 $B_{I,I}$中，对所有 $(x,s) \in D \times [0,T)$，不等式 $v_{x,s} > 0$ 成立，从而得到

$$\begin{aligned} g(x,s;d_{x,s},v_{x,s}) >& a_1 \sinh(a_1(v_{x,s}-s))[(d_{x,s}+a_0/a_1) \\ & \times \cosh(a_1 T) - (x_T + a_0/a_1)] \geq 0. \end{aligned}$$

然而，在子情形 $B_{I,\,II}$中，对于所有 $(x,\ s) \in \Lambda_3$，我们有 $v_{x,\,s} > t_4$。因此，

$$\begin{aligned} g(x,s;d_{x,s},v_{x,s}) >& a_1 \sinh(a_1(v_{x,s}-s))[(d_{x,s}+a_0/a_1) \\ & \times \cosh(a_1(T-t_4)) - (x_T + a_0/a_1)] = 0. \end{aligned}$$

在两个子情形中，我们都得到 $g(x,\ s;\, d_{x,\ s},\ v_{x,\ s}) > 0$，这与 $(d_{x,\ s},\ v_{x,\ s})$ 的定义矛盾。这就证明了 (a)。

(b) 假设 $(d_{x,s}, v_{x,s})$ 不是 u(y,v; d,t) 的最小值点。设 $(d_{y,v},v_{y,v})$ 是 (y, v) 的一个最优退出对。构造一条新曲线 $(\gamma(t),t)$，连接 (x, s) 与 $(d_{y,v},v_{y,v}) \in \partial D \times [0,T)$，如下：

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_{x,s}(t), & t \in [s,v), \\ \gamma_{y,v;d_{y,v},v_{y,v}}(t), & t \in [v, v_{y,v}]. \end{cases}$$

Then

$$\begin{aligned} I(\gamma) &= u(x,s;y,v) + u(y,v;d_{y,v},v_{y,v}) \\ &< u(x,s;y,v) + u(y,v;d_{x,s},v_{x,s}) \\ &= u(x,s;d_{x,s},v_{x,s}) \\ &= u(x,s), \end{aligned}$$

这与$\gamma_{x,s}$的最优性矛盾。

现在假设 $u(y,v;\, d,t)$ 的最小值不唯一取得。因此，除了 $(d_{x,s},v_{x,s})$ 之外，还存在另一个 $(d^*, v^*) \in \partial D \times [0,T)$，使得

$$u(y,v) = u(y,v;d_{x,s},v_{x,s}) = u(y,v;d^*,v^*).$$

定义

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_{x,s}(t), & t \in [s,v), \\ \gamma_{y,v;d^*,v^*}(t), & t \in [v, v^*]. \end{cases}$$

Then

$$\begin{aligned} I(\gamma) &= u(x,s;y,v) + u(y,v;d^*,v^*) \\ &= u(x,s;y,v) + u(y,v;d_{x,s},v_{x,s}) \\ &= u(x,s;d_{x,s},v_{x,s}) \\ &= u(x,s). \end{aligned}$$

这意味着 $\gamma(t)$ 也是 (x,s) 的最优路径。由于 $(d^*,v^*) \neq (d_{x,\,s},v_{x,s})$，我们有 $\dot{\gamma}_{x,s}(v) \neq \dot{\gamma}_{y,v;d^*,v^*}(v)$，因此 $\gamma(t)$ 在 $t = v$ 处不可微。这与最优路径的 $\mathscr{C}^\infty$-光滑性矛盾。

最后，假设（y，v）不是强正则的。那么

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(y,v;d_{x,s},t)}{\partial t}\Big|_{t=v_{x,s}} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 u(y,v;d_{x,s},t)}{\partial t^2}\Big|_{t=v_{x,s}} = 0. \end{cases}$$

对于 $v_{x,\ s}$ 附近的任意t，作用量的可加性（参见注释 III.3(b)）给出

$$u(x,s;d_{x,s},t) = u(x,s;\gamma_{x,s;d_{x,s},t}(v),v) + u(\gamma_{x,s;d_{x,s},t}(v),v;d_{x,s},t).$$

对该恒等式关于t求一阶和二阶导数，并在$t = v_{x,s}$ 处取值，得到

$$\frac{\partial u(x,s;d_{x,s},t)}{\partial t}\Big|_{t=v_{x,s}} = 0,$$

and

$$\frac{\partial^2 u(x,s;d_{x,s},t)}{\partial t^2}\Big|_{t=v_{x,s}} = \frac{-a_1\sinh(a_1(v-s))(\hat{\gamma}_{x,s}(v_{x,s}))^2}{\sinh(a_1(v_{x,s}-v))\sinh(a_1(v_{x,s}-s))} < 0.$$

这与 $v_{x,s}$ 是 $u(x,s;d_{x,s},t)$ 的局部极小值相矛盾。

(c) 假设 $u(x,s;d,t)$ 的最小值在 $(d^*,v^*)=(d_{x,s},v_{x,s})$ 处唯一取得，但定义 III.1 的条件 (b) 不成立。由于 $u(x,s;d^*,t)$ 关于 t 是解析的，v^* 的最优性蕴含存在一个整数 $m>1$ 使得

$$\begin{cases} g(x,s;d^*,t)|_{t=v^*}=0, \\ \dfrac{\partial g(x,s;d^*,t)}{\partial t}\Big|_{t=v^*}=0, \\ \dfrac{\partial^k g(x,s;d^*,t)}{\partial t^k}\Big|_{t=v^*}=0, \quad k=2,\cdots,2m-2, \\ \dfrac{\partial^{2m-1} g(x,s;d^*,t)}{\partial t^{2m-1}}\Big|_{t=v^*}\neq 0. \end{cases}$$

注意到对任意 $m>1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2m-2} g(x,s;d^*,t)}{\partial t^{2m-2}} =& a_1^{2m-1}(2^{2m-2}-1)(d^*+a_0/a_1) \\ &\times\sinh(a_1(2t-T-s))+a_1^{2m-2}g(x,s;d^*,t), \\ \frac{\partial^{2m-1} g(x,s;d^*,t)}{\partial t^{2m-1}} =& a_1^{2m}(2^{2m-1}-2)(d^*+a_0/a_1) \\ &\times\cosh(a_1(2t-T-s))+a_1^{2m-2}\frac{\partial g(x,s;d^*,t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

因此,

$$d^*+a_0/a_1\neq 0, \quad v^*=(T+s)/2, \quad m=2.$$

将它们代入方程 $g=0$ 与 $\partial g/\partial t=0$，得到

$$x=x_T, \quad d^*+a_0/a_1=(x_T+a_0/a_1)\cosh(a_1(T-s)/2).$$

可以验证：

- 这种情况仅当 $d^*=d1$ 在情形 B$_I$、B$_{II}$ 与 B$_{III}$ 中出现时才会发生；
- 上述方程至多有一个解（x，s）$\in D\times(-\infty,T)$。此外，解（x，s）只有在 $D\times[0,T)$ 中，且 x_T 充分接近 $d1$ 或 T 充分大时才存在；
- 若点（x，s）处 $u(x,s;d,t)$ 的最小值唯一取到，但定义 III.1 的条件 (b) 不成立，那么只有当该点满足上述方程、属于 $D\times[0,T)$，且满足以下条件时，这种情况才可能出现

$$\min_{t\in(s,T)} u(x,s;d_1,t) < \min_{t\in(s,T)} u(x,s;d_2,t).$$

证明至此完成。 □

下面的命题使我们能够确定函数 $u(x,s)\in\mathscr{C}^\infty$ 的哪些点 (x,s) 满足该性质。

命题 III.7. 设 $(x,s)\in D\times[0,T)$ 是一个强正则点。则存在一个包含 (x,s) 的开邻域 U，使得 U 中的每一点都是强正则点。此外，映射 $(y,v)\to(d_{y,v},v_{y,v})$ 和 $(y,v)\to u(y,v)$ 在 U 上 $\mathscr{C}^\infty$，并且

$$\frac{\partial u(y,v)}{\partial y} = -\frac{a_1(d_{y,v}-x^0_{y,v}(v_{y,v}))}{\sinh(a_1(v_{y,v}-v))}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2 u(y,v)}{\partial y^2} = \frac{a_1^3(d_{y,v}+a_0/a_1)[1-\cosh(2a_1(T-v_{y,v}))]}{\sinh(a_1(T-v))\frac{\partial g(y,v;d_{y,v},t)}{\partial t}|_{t=v_{y,v}}}. \tag{23}$$

证明。我们首先证明，在（x, s）的某个邻域 U_1 内，最优退出位置 $d_{y,v}$ 为常数。假设情况并非如此。则对（x, s）的每个 1/n-邻域 $V^{1/n}$，都存在点 $(y_n^{(1)},v_n^{(1)})$ 和 $(y_n^{(2)},v_n^{(2)})$ 属于 $V^{1/n}$，使得 $d_{y_n^{(1)},v(1)n}=d_1$ 且 $d_{y_n^{(2)},v(2)n}=d_2$。根据定义，这意味着存在参数 $t_n^{(1)}$ 和 $t_n^{(2)}$，使得

$$\begin{aligned} u(y_n^{(1)},v_n^{(1)}) &= u(y_n^{(1)},v_n^{(1)};d_1,t_n^{(1)}), \\ u(y_n^{(2)},v_n^{(2)}) &= u(y_n^{(2)},v_n^{(2)};d_2,t_n^{(2)}). \end{aligned}$$

由于 u 是 Lipschitz 连续的（引理 III.5(h)），我们有

$$\begin{aligned} |u(x,s)-u(y_n^{(1)},v_n^{(1)};d_1,t_n^{(1)})| &= O(1/n), \\ |u(x,s)-u(y_n^{(2)},v_n^{(2)};d_2,t_n^{(2)})| &= O(1/n). \end{aligned}$$

当 n 充分大时，引理 III.5(e) 保证 $t_n^{(1)}$ 和 $t_n^{(2)}$ 都位于紧区间 $[s+\delta,T-\delta]$ 内。因此，如有必要，取子列后，我们可以假设 $t_n^{(1)}\to t^{(1)}$ 且 $t_n^{(2)}\to t^{(2)}$，当 $n\to\infty$ 时成立，其中 $t^{(1)}$, $t^{(2)}\in(s,T)$。于是，由 $u(x,s;d,t)$ 的连续性可得

$$u(x,s)=u(x,s;d_1,t^{(1)})=u(x,s;d_2,t^{(2)}).$$

因此，我们得到从 (x,s) 出发的两条不同的最优轨迹 $(\gamma_{x,s;d_1,t^{(1)}}(t),t)$ 和 $(\gamma_{x,s;d_2,t^{(2)}}(t),t)$。这与 (x,s) 的强正则性矛盾。

现在考虑函数 g(y, v; $d_{y,v}$,t)，其中 (y, v) $\in U_1$ 且 t $\in(0,T)$。由于我们刚刚证明，对所有 (y, v) $\in U_1$,，$d_{y,v}=d_{x,s}$，因此对所有 (y, v) $\in U_1$ 以及所有 t $\in(0,T)$，有 g(y, v; $d_{y,v}$,t) =g(y, v; $d_{x,s}$,t)。由于 $t=v_{x,s}$ 是 u(x, s; $d_{x,s}$,t) 的局部极小值点，我们有

$$\begin{cases} g(x,s;d_{x,s},t)|_{t=v_{x,s}}=0, \\ \dfrac{\partial g(x,s;d_{x,s},t)}{\partial t}\Big|_{t=v_{x,s}}\neq 0. \end{cases}$$

根据隐函数定理及 $\partial g/\partial t$ 的连续性，存在 (x,s) 的邻域 $U_2\subset U_1$ 和 $(0,T)$ 的邻域 $W_1\subset v_{x,s}$，使得对于每个 $(y,v)\in U_2$，都存在唯一的 $v_{y,v}\in W_1$ 满足

$$\begin{cases} g(y,v;d_{y,v},t)|_{t=v_{y,v}}=g(y,v;d_{x,s},t)|_{t=v_{y,v}}=0, \\ \dfrac{\partial g(y,v;d_{y,v},t)}{\partial t}\Big|_{t=v_{y,v}}=\dfrac{\partial g(y,v;d_{x,s},t)}{\partial t}\Big|_{t=v_{y,v}}\neq 0. \end{cases}$$

$\mathscr{C}^\infty$-光滑性 $g(y,v;d_{x,s},t)$ 表明映射 $(y,v)\mapsto v_{y,v}$ 在 U_2，上是 $\mathscr{C}^\infty$

$$\frac{\partial v_{y,v}}{\partial y}=-\frac{\partial g(y,v;d_{y,v},t)}{\partial y}\Big|_{t=v_{y,v}}\Big/\frac{\partial g(y,v;d_{y,v},t)}{\partial t}\Big|_{t=v_{y,v}}.$$

由于 $t=v_{x,s}$ 是 $u(x,s;d_{x,s},t)$ 的唯一极小化点，对于 $v_{x,s}$ 的任意邻域 W_2，都存在 (x,s) 的一个邻域 $U_3\subset U_1$，使得对于每个 $(y,v)\in U_3$，$u(y,v;d_{y,v},t)$ 的最小值都在 W_2 内取得。因此，若 $(y,v)\in U_2\cap U_3$，则 $g(y,v;d_{y,v},t)=0$ 在 $W_1\cap W_2$ 内的唯一解与 $u(y,v;d_{y,v},t)$ 的极小化点重合。令 $U\triangleq U_2\cap U_3$。因此，U 内的每个点 $(y,v)\in$ 都是强正则的，其最优退出时间恰为 $v_{y,v}$。

最后，映射 $(y,v)\mapsto u(y,v;d_{y,v},v_{y,v})$ 是 $\mathscr{C}^\infty$，因为 $(y,v)\mapsto(d_{y,v},v_{y,v})$ 且 $(y,v,d,t)\mapsto u(y,v;d,t)$ 都是 $\mathscr{C}^\infty$。对恒等式 $u(y,v)=u(y,v;d_{y,v},v_{y,v})$ 分别关于 y 求一阶和二阶导数，便得到公式 (22) 和 (23)。至此证明完成。□

推论 III.8. 设 $(x,s)\in D\times[0,T)$ 是一个强正则点。那么，相应的最优路径 $\gamma_{x,s}(t)$ 满足方程 *(A6)*。

证明. 令 $\gamma=\gamma_{x,s}=\gamma_{x,s;d_{x,s},v_{x,s}}$ 表示唯一的最优路径。由于 γ 满足相应的约束哈密顿方程，我们有

$$\dot\gamma(t)=b(\gamma(t),t)+\alpha(t).$$

根据引理 III.6(b)，对于任意 $t\in[s,v_{x,s})$，点 $(\gamma(t),t)$ 都是强正则的，因此 $d_{\gamma(t),t}=d_{x,s}$ 以及 $v_{\gamma(t),t}=v_{x,s}$。因此，

$$\begin{aligned}\alpha(t)=&\dot\gamma(t)-b(\gamma(t),t)\\=&\frac{a_1(d_{x,s}-x^0_{\gamma(t),t}(v_{x,s}))}{\sinh(a_1(v_{x,s}-t))}\\=&\frac{a_1(d_{\gamma(t),t}-x^0_{\gamma(t),t}(v_{\gamma(t),t}))}{\sinh(a_1(v_{\gamma(t),t}-t))}\\=&-\frac{\partial u(y,v)}{\partial y}\Big|_{(y,v)=(\gamma(t),t)}.\end{aligned}$$

将该表达式代入哈密顿方程中的 $\alpha(t)$，即可得到

$$\dot\gamma(t)=b(\gamma(t),t)-\frac{\partial u}{\partial x}(\gamma(t),t),$$

这恰好就是方程 (A6)。 □

注释 III.5. 假设 (x,s) 不是强正则的。那么，$u(x,s;d,t)$ 的最小值要么不唯一取得，要么虽唯一取得，但定义 *III.1* 的条件 *(b)* 不成立。由此可得：

(a) 如果 $u(x,s;d,t)$ 的最小值不是唯一取得的，那么 $u(x,s)$ 在 (x,s) 处不可微。

事实上，假设 $u(x,s;d,t)$ 的最小值在两个不同的点 $(d^{(1)},t^{(1)})$ 和 $(d^{(2)},t^{(2)})$ 处取得，从而得到两条不同的最优路径 $\gamma^{(1)}=\gamma_{x,s;d^{(1)},t_{(1)}}$ 和 $\gamma^{(2)}=\gamma_{x,s;d^{(2)},t_{(2)}}$。根据引理 *III.6(b)*，对于所有 $t\in(s,s+\delta)$（其中某个 $\delta>0$），点 $(\gamma^{(1)}(t),t)$ 和 $(\gamma^{(2)}(t),t)$ 均为强正则。利用推论 *III.8* 中的结果，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(y,v)}{\partial y}\Big|_{(y,v)=(\gamma^{(1)}(t),t)}&=-\alpha^{(1)}(t),\\\frac{\partial u(y,v)}{\partial y}\Big|_{(y,v)=(\gamma^{(2)}(t),t)}&=-\alpha^{(2)}(t).\end{aligned}$$

令 $t\to s$，则有 $\gamma^{(1)}(t)\to x$，$\gamma^{(2)}(t)\to x$，并且

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(y,v)}{\partial y}\Big|_{(y,v)=(\gamma^{(1)}(t),t)}&\to-\alpha^{(1)}(s),\\\frac{\partial u(y,v)}{\partial y}\Big|_{(y,v)=(\gamma^{(2)}(t),t)}&\to-\alpha^{(2)}(s),\end{aligned}$$

但 $\alpha^{(1)}(s)\neq\alpha^{(2)}(s)$（如果二者相等，哈密顿方程解的唯一性将迫使 $\gamma^{(1)}=\gamma^{(2)}$）。因此，$u$ 在 (x,s) 处不可微。

(b) 如果 $u(x,s;d,t)$ 的最小值是唯一取得的，但定义 *III.1* 的条件 *(b)* 不成立，那么 $u(x,s)$ 在 (x,s) 处可微，但 $\partial^2u(y,v)/\partial y^2\to\infty$ 当 $(y,v)\to(x,s)$ 时，其中 (y,v) 是强正则的。

事实上，假设 (x,s) 满足 *(b)* 部分的假设。根据引理 *III.6(c)*，这种情形仅在 $d_{x,s}=d_1$ 出现在情形 B_I、B_{II} 和 B_{III} 时发生。因此，在所有这些情形中，$d_{x,s}+a_0/a_1\neq0$。引理 *III.6(b)* 表明，对于每个 $v\in(s,s+\delta)$（带有某个 $\delta>0$），点 $(\gamma_{x,s}(v),v)$ 都是强正则的。于是，公式 *(23)* 给出

$$\frac{\partial^2u(y,v)}{\partial y^2}\Big|_{(y,v)=(\gamma_{x,s}(v),v)}\neq0,\quad\forall\,v\in(s,s+\delta),$$

but

$$\frac{\partial^2u(y,v)}{\partial y^2}\Big|_{(y,v)=(\gamma_{x,s}(v),v)}\to\infty,\quad as\ v\to s,$$

因为

$$\frac{\partial g(\gamma_{x,s}(v),v;d_{x,s},t)}{\partial t}\Big|_{t=v_{x,s}}\to0,\quad as\ v\to s.$$

这补充了命题 *III.7*，说明 u 在非强正则点处如何失去光滑性。

推论 III.9。*(a)* 从拓扑角度看，对于情形 $B_{I,I}$、B_{II}、B_{III} 和 B_{IV}（以及对于情形 $B_{I,II}$，在 Λ_3 中），强正则点集在 $D\times[0,T)$ 中是开且稠密的。

(b) 从测度论意义上说，对于情形 $B_{I,I}$、B_{II}、B_{III} 和 B_{IV}（以及对于情形 $B_{I,II}$，在 Λ_3 中），$D\times[0,T)$ 中的几乎每个点都是强正则点。

证明。(a) 根据命题 III.7，强正则点集是开集。设 (x,s) 是 $D\times[0,T)$ 中情形 $B_{I,I}$、B_{II}、B_{III} 和 B_{IV} 的一个点（或是 Λ_3 中情形 $B_{I,II}$ 的一个点）。引理 III.6(b) 表明，(x,s) 的每个开邻域都包含强正则点。因此，该集合是稠密的。(a) 的证明至此完成。

(b) 结合注释 III.5(a)、u 的 Lipschitz 连续性（引理 III.5(h)）以及引理 III.6(c)，我们得出结论：不是强正则点的点集的勒贝格测度为零。因此，几乎每个满足 $u(x,s)>0$ 的点 (x,s) 都是强正则点，从而证明了 (b)。 □

注释 III.6. 定义

$$u_1(x,s)\triangleq u(x,s;d_1)\triangleq \min_{s<t<T} u(x,s;d_1,t),$$
$$u_2(x,s)\triangleq u(x,s;d_2)\triangleq \min_{s<t<T} u(x,s;d_2,t).$$

Then

$$u(x,s)=u_1(x,s)\wedge u_2(x,s).$$

以下性质可直接验证。

u_1 的性质：

- 对于情形 *BI,I*、*BII*、*BIII* 中的每个 $(x,s)\in D\times[0,T)$（以及情形 *BI,II* 中的每个 $(x,s)\in\Lambda_3$），方程 $g(x,s;d1,t)=0$ 在 (s,T) 中至少有一个、至多有三个解。对于情形 *BIV* 中的每个 $(x,s)\in D\times[0,T)$，该方程在 (s,T) 中有唯一解。无论解是否唯一，我们分别将最小解和最大解记为 $v(1m)x,s$ 和 $v(1M)x,s$。（当解唯一时，我们简记为 $v(1)x,s$，因此有 $v(1)x,s=v(1m)x,s=v(1M)x,s$。）

- 在情形 *BI, I*、*BI, II*、*BII*、*BIII* 中，当 $x\neq xT$ 时，$u(x,s;d_1,t)$ 的最小值在 (s,T) 内的唯一一点处取得。具体而言，

$$\arg\min_{s<t<T} u(x,s;d_1,t)=\begin{cases} v_{x,s}^{(1m)}<(T+s)/2, & if\ x<x_T,\\ v_{x,s}^{(1M)}>(T+s)/2, & if\ x>x_T,\end{cases}$$

and

$$\begin{cases}\left.\frac{\partial g(x,s;d_1,t)}{\partial t}\right|_{t=v_{x,s}^{(1m)}}<0, & if\ x<x_T,\\ \left.\frac{\partial g(x,s;d_1,t)}{\partial t}\right|_{t=v_{x,s}^{(1M)}}<0, & if\ x>x_T.\end{cases}$$

So,

$$u_1(x,s)=\begin{cases}u(x,s;d_1,v_{x,s}^{(1m)}), & if\ x<x_T,\\ u(x,s;d_1,v_{x,s}^{(1M)}), & if\ x>x_T.\end{cases}$$

相比之下，当 $x=x_T$ 时，情况表现得更为复杂。令 τ^* 为满足以下条件的唯一时刻 $(-\infty,T)$

$$d_1+\frac{a_0}{a_1}=\left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right)\cosh\left(a_1\frac{T-\tau^*}{2}\right).$$

Then

◇ *If* $s\in(\tau^*,T)$, *the equation* $g(x_T,s;d_1,t)=0$ *has the unique solution* $v_{x,s}^{(1)}=(T+s)/2$, *and*

$$\left.\frac{\partial g(x_T,s;d_1,t)}{\partial t}\right|_{t=(T+s)/2}<0.$$

◇如果 $s=\tau^*$，方程 $g(x_T,s;d_1,t)=0$ 有唯一解 $v_{x,s}^{(1)}=(T+s)/2$，但是

$$\left.\frac{\partial g(x_T,s;d_1,t)}{\partial t}\right|_{t=(T+s)/2}=0.$$

◇若 $s\in(-\infty,\tau^*)$，方程 $g(x_T,s;d_1,t)=0$ 有三个解 $v_{x,s}^{(1m)}$、$(T+s)/2$ 和 $v_{x,s}^{(1M)}$，其中 $v_{x,s}^{(1m)}$ 和 $v_{x,s}^{(1M)}$ 是以下方程的两个解

$$\cosh\left(a_1\left(t-\frac{T+s}{2}\right)\right)=\frac{\cosh\left(a_1\frac{T-s}{2}\right)}{\cosh\left(a_1\frac{T-\tau^*}{2}\right)}.$$

$u(x_T,s;d_1,t)$ 的最小值在 $v_{x,s}^{(1m)}$ 和 $v_{x,s}^{(1M)}$ 两处均可取得。

换言之，当 s 经过临界值 τ^* 时，$g(x_T,s;d_1,t)=0$ 的解集发生音叉式分岔。此外，

$$u_1(x_T,s)=\begin{cases}\frac{a_1\sinh\left(a_1\frac{T-s}{2}\right)\left[\left(d_1+\frac{a_0}{a_1}\right)^2-\left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right)^2\right]}{\cosh\left(a_1\frac{T-s}{2}\right)}, & s<\tau^*,\\ \frac{2a_1\left[\left(d_1+\frac{a_0}{a_1}\right)\cosh\left(a_1\frac{T-s}{2}\right)-\left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right)\right]^2}{\sinh(a_1(T-s))}, & s\geq\tau^*.\end{cases}$$

这使我们能够将定义域划分为三个不同的子集：

$$\Theta_1\triangleq\begin{cases}\{x_T\}\times((-\infty,\tau^*)\cap[0,T)), & in\ Cases\ B_{I,I},B_{II},B_{III},\\ (\{x_T\}\times(-\infty,\tau^*))\cap\Lambda_3, & in\ Case\ B_{I,II}\end{cases}$$

$$\Theta_2\triangleq\begin{cases}\{x_T\}\times(\{\tau^*\}\cap[0,T)), & in\ Cases\ B_{I,I},B_{II},B_{III},\\ \{(x_T,\tau^*)\}\cap\Lambda_3, & in\ Case\ B_{I,II}\end{cases}$$

$$\Theta_3\triangleq\begin{cases}D\times[0,T)\setminus(\Theta_1\cup\Theta_2), & in\ Cases\ B_{I,I},B_{II},B_{III},\\ \Lambda_3\setminus(\Theta_1\cup\Theta_2), & in\ Case\ B_{I,II}\end{cases}$$

（请注意，只有当 x_T 充分接近 d_1 或 T 足够大时，Θ_1 和 Θ_2 才非空，而 Θ_3 始终非空。）因此，我们得到

◇ u_1 *is of class* $\mathscr{C}^\infty$ *on* Θ_3.

◇ u_1 在 Θ_1 的每一点都不可微。

◇ u_1 *is differentiable at points of* Θ_2, *but* $\frac{\partial^2 u_1(y,v)}{\partial y^2}\to\infty$ *as* $(y,v)\to(x,s)$ *for* $(x,s)\in\Theta_2$ *and* $(y,v)\in\Theta_3$.

- 在情形 *BIV* 中，$u(x,s;d_1,t)$ 的最小值在唯一解 $v(1)x,s$ 处取得，该解满足

$$\left.\frac{\partial g(x,s;d_1,t)}{\partial t}\right|_{t=v_{x,s}^{(1)}}<0,$$

and

$$v_{x,s}^{(1)}\begin{cases}<(T+s)/2, & if\ x<x_T,\\ =(T+s)/2, & if\ x=x_T,\\ >(T+s)/2, & if\ x>x_T.\end{cases}$$

因此，$u_1(x,s) = u(x,s; d_1, v^{(1)}_{x,s})$ 在其定义域上属于 $\mathscr{C}^\infty$。特别地，当 $x = x_T$ 时，

$$u_1(x_T,s) = \frac{2a_1\left[\left(d_1+\frac{a_0}{a_1}\right)\cosh\left(a_1\frac{T-s}{2}\right)\right]^2}{\sinh(a_1(T-s))}.$$

u_2的性质：

- *For every $(x,s)\in D\times[0,T)$ in Cases $B_{I,I}$, B_{II}, B_{III}, B_{IV} (and for every $(x,s)\in\Lambda_3$ in Case $B_{I,II}$), the equation $g(x,s;d_2,t)=0$ has a unique solution $v^{(2)}_{x,s}$ in (s,T).*
- 该解满足

$$\left.\frac{\partial g(x,s;d_2,t)}{\partial t}\right|_{t=v^{(2)}_{x,s}} > 0,$$

and

$$v^{(2)}_{x,s}\begin{cases} > (T+s)/2, & \text{if } x < x_T,\\ = (T+s)/2, & \text{if } x = x_T,\\ < (T+s)/2, & \text{if } x > x_T.\end{cases}$$

因此，$u_2(x,s) = u(x,s;d_2,v^{(2)}_{x,s})$ 在其定义域上，在所有情形下都属于 $\mathscr{C}^\infty$ 类。特别地，当 $x = x_T$ 时，

$$u_2(x_T,s) = \frac{2a_1\left[\left(d_2+\frac{a_0}{a_1}\right)\cosh\left(a_1\frac{T-s}{2}\right)-\left(x_T+\frac{a_0}{a_1}\right)\right]^2}{\sinh(a_1(T-s))}.$$

u 的性质：

- u 在每个强正则点处都属于 $\mathscr{C}^\infty$ 类，即在满足以下条件的每一点 (x, s) 处

$$u_1(x,s) > u_2(x,s),$$

or

$$u_1(x,s) < u_2(x,s) \quad \text{and} \quad (x,s)\in\Theta_3.$$

- u 在满足以下条件的每一点 (x, s) 处都不可微

$$u_1(x,s) = u_2(x,s),$$

or

$$u_1(x,s) < u_2(x,s) \quad \text{and} \quad (x,s)\in\Theta_1.$$

（后一种情况只会在 x_T 充分接近 d_1 或 T 充分大时出现。）

- u 在满足以下条件的每一点 (x, s) 处均可微

$$u_1(x,s) < u_2(x,s) \quad \text{and} \quad (x,s)\in\Theta_2,$$

但 $\partial^2 u(y,v)/\partial y^2 \to \infty$ as $(y,v)\to(x,s)$，其中 (y, v) 是强正则的。（这种情况仅在 x_T 充分接近 d_1 或 T 充分大时才会出现。）

这进一步明确了那些不强正则点的确切位置。

应用 Fleming-James 定理，我们便得到以下结果。

命题 III.10. 令 $S \subset D\times[0,T)$ 为所有强正则点的集合。那么对于每个 $m = 0, 1, 2, \cdots$，有

$$q^\varepsilon(x,s) = \exp\left(-\frac{u(x,s)}{\varepsilon} - w(x,s)\right)(1+\varepsilon\psi_1(x,s) + \cdots + \varepsilon^m\psi_m(x,s) + o(\varepsilon^m)), \tag{24}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，在 S 的每个连通分支的紧子集上一致地成立。这里，函数 w，ψ_m 是 $\mathscr{C}^\infty$，满足方程 *(A8)*和 *(A9)*，并可通过特征线法计算（见注 *A.1*）。

Proof. For any $T'\in(0,T)$, define

$$S_{T'} \triangleq \{(x,s)\in S : v_{x,s}\in(0,T')\}.$$

根据引理III.6(a)、命题 III.7 和推论 III.8，$S_{T'}$ 的每个连通分支都满足假设（A）。此外，引理 III.5(e)表明，对于 S 的每个紧致连通子集K，都存在某个 $T'\in(0,T)$，使得$v_{x,s} < T'$对所有 $(x,s)\in K$ 均成立。因此，$K\subset S_{T'}$，故K包含于 $S_{T'}$的某个连通分支中。结论由 Fleming-James 定理直接得出。证明至此完成。 □

注 III.7. 显然，方程 $g(x,s;d,t)=0$属于四次型，因此难以求得显式解。因此，我们给出闭式表达式的能力有限，只能对所涉及的量作定性描述。幸运的是，在 $a_0 = 0$ 和 $a_1\to 0$的特殊情形下，问题会大大简化，所有量都可以显式确定。下一节将详细讨论这种情形。

IV. 极限情形：$a_0 = 0$，$a_1\to 0$

当$a_0 = 0$ 且$a_1\to 0$时，OU桥退化为布朗桥，其由带有以下漂移项的随机微分方程 (1) 所描述

$$b(x,t) = \frac{x_T - x}{T-t}.$$

该过程的q^ε 的渐近级数可由命题 II.5、III.3、III.10推得，如下所示。

推论IV.1。 *(a)* 对任意 $t\in[s, T]$, $x^0_{x,s}(t) = x\,T - tT - s + x_T t - sT - s$。 *(b)* 因此，对于所有 $(x,s)\in\mathbb{R}\times[0,T)$，$x^0_{x,s}$ 在 $[s,T]$ 上是单调的。

(c) 集合 Ω 始终为空，$\partial^2 > 1$, s, $\in$

(d) 当 $x[\,,\,]\}$ $\times[0,$ 时，轨迹 $\{(x^0_{x,s}(t),t) : t\ s\ T$ 与 $D\ T)$ 横截地相交于唯一点$(d_2,\tau^0_{x,s})$，其中 $\tau^0_{x,s} = s\ x_T - d_2 x_T - x + T\ d_2 - x\ x_T - x$。若 $x_T\in D$，则轨迹一直保持在 $D\times[0,T)$ 内，直至到达 (x_T,T)。

推论 IV.2。*(a)* 若 $x_T \notin D$，则对于所有 $(x,s)\in D\times[0,T)$，$q^\varepsilon(x,s)\equiv 1$。

(b) 特别地，当对每个 $(x,s)\in D\times[0,T)$ 和 $\eta>0$，$x_T>d_2>d_1$，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{P}^\varepsilon_{x,s}\left(\left|\tau^\varepsilon_{x,s}-\tau^0_{x,s}\right|>\eta\right)=0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{P}^\varepsilon_{x,s}\left(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{x,s}}=d_2\right)=1.$$

推论 IV.3. 假设 $x_T\in D$。则有以下结论：*(a)* 函数 $u(x,s;d,t)$ 可表示为

$$\begin{aligned}u(x,s;d,t)&=\frac{(d(T-s)-x(T-t)-x_T(t-s))^2}{2(T-s)(T-t)(t-s)}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{(d-x)^2}{t-s}+\frac{(d-x_T)^2}{T-t}-\frac{(x-x_T)^2}{T-s}\right).\end{aligned}$$

(b) 方程 $\partial u(x,s;d,t)/\partial t=0$ 有唯一解

$$v^*=s+(T-s)\frac{x-d}{x+x_T-2d}.$$

(c) 因此，

$$d_{x.s}=\begin{cases}d_1, & if\, x\le d_1+d_2-x_T,\\ d_2, & if\, x\ge d_1+d_2-x_T,\end{cases}$$

$$v_{x,s}=\begin{cases}s+(T-s)\frac{x-d_1}{x+x_T-2d_1}, & if\, x\le d_1+d_2-x_T,\\ s+(T-s)\frac{x-d_2}{x+x_T-2d_2}, & if\, x\ge d_1+d_2-x_T,\end{cases}$$

$$u(x,s)=\begin{cases}\frac{2(x-d_1)(x_T-d_1)}{T-s}, & if\, x\le d_1+d_2-x_T,\\ \frac{2(d_2-x)(d_2-x_T)}{T-s}, & if\, x\ge d_1+d_2-x_T.\end{cases}$$

(d) 所有强正则点构成的集合为

$$S=((d_1,d_1+d_2-x_T)\cup(d_1+d_2-x_T,d_2))\times[0,T).$$

(e) 对任意 $(x,s)\in D\times[0,T)\setminus S$，$u(x,s;d,t)$的最小值在两个不同的点 $(d_1,(x_T-d_1)s+(d_2-x_T)T\,d_2-d_1)$ 和 $(d_2,(d_2-x_T)s+(x_T-d_1)T\,d_2-d_1)$ 处取得，从而得到两条共存的最优路径：

$$\begin{aligned}\gamma^{(1)}_{x,s}&=\gamma_{x,s;d_1,\frac{(x_T-d_1)s+(d_2-x_T)T}{d_2-d_1}},\\ \gamma^{(2)}_{x,s}&=\gamma_{x,s;d_2,\frac{(d_2-x_T)s+(x_T-d_1)T}{d_2-d_1}}.\end{aligned}$$

不存在满足定义 *III.1* 的条件 *(a)* 但不满足条件 *(b)* 的点。

(f) 由于 $\partial^2 u/\partial x_2\equiv 0$ 在 S 上，我们有 $w(x,s)\equiv 0$ 且 $\psi_m(x,s)\equiv 0$，对所有 $(x,s)\in S$ 以及每个 $m>1$ 均成立。

(g) 对每个 $m=0$、1、2、⋯，

$$q^\varepsilon(x,s)=\exp\left(-\frac{u(x,s)}{\varepsilon}\right)(1+o(\varepsilon^m)),\quad as\ \varepsilon\to 0,\quad (25)$$

在 S 的紧子集上一致地。

注 IV.1. 与注 *III.1* 类似，式 *(25)* 中的无穷小项 $o(\varepsilon^m)$也不能忽略。注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^\varepsilon_{x,s}\left(\tau^\varepsilon_{x,s}\le T\right)=&\mathbb{P}^\varepsilon_{x,s}\left(\tau^\varepsilon_{x,s}\le T, x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{x,s}}=d_1\right)\\&+\mathbb{P}^\varepsilon_{x,s}\left(\tau^\varepsilon_{x,s}\le T, x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{x,s}}=d_2\right).\end{aligned}$$

大偏差理论（参见 *[8, 第 3 章，定理 3.4]*）指出，右侧两项的渐近形式为

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^\varepsilon_{x,s}\left(\tau^\varepsilon_{x,s}\le T, x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{x,s}}=d_1\right)&\simeq\exp\left(-\frac{u_1(x,s)}{\varepsilon}\right),\\ \mathbb{P}^\varepsilon_{x,s}\left(\tau^\varepsilon_{x,s}\le T, x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{x,s}}=d_2\right)&\simeq\exp\left(-\frac{u_2(x,s)}{\varepsilon}\right),\end{aligned}$$

其中，u_1 和 u_2（定义见注释 *III.6*）由下式给出

$$\begin{aligned}u_1(x,s)&=\frac{2(x-d_1)(x_T-d_1)}{T-s},\\ u_2(x,s)&=\frac{2(d_2-x)(d_2-x_T)}{T-s}.\end{aligned}$$

若 $u_1(x,s)\neq u_2(x,s)$（即 $x\neq d_1+d_2-x_T$），则

$$\mathbb{P}^\varepsilon_{x,s}\left(\tau^\varepsilon_{x,s}\le T\right)\simeq\exp\left(-\frac{u(x,s)}{\varepsilon}\right)\left(1+\exp\left(-\frac{\Delta u}{\varepsilon}\right)\right),$$

with

$$\Delta u\triangleq u_1\vee u_2-u_1\wedge u_2.$$

由于 $\exp(-\Delta u/\varepsilon)$ 在 ε 中于 $\varepsilon=0$ 处是光滑但非解析的，它不能展开为收敛的泰勒级数。因此，尽管方程 *(25)* 对每一个 $m\ge 0$ 都成立，项 $o(\varepsilon^m)$不能被忽略，因为它代表一个指数级小的贡献。

相比之下，当 $x=d_1+d_2-x_T$ 时，我们有 $u_1(x,s)=u_2(x,s)$。因此，

$$\mathbb{P}^\varepsilon_{x,s}\left(\tau^\varepsilon_{x,s}\le T\right)\simeq 2\exp\left(-\frac{u(x,s)}{\varepsilon}\right).$$

这就解释了为什么渐近级数 *(25)* 在非强正则的点处失效。

V. 结论

本文推导了标量奥恩斯坦-乌伦贝克桥的退出时间概率的精确渐近展开。通过分析一个相关约束优化问题的解，我们证明，该渐近级数对于一般位置仍然成立，无论是在拓扑意义上还是在测度论意义上。本文的结果拓展了此前关于扩散桥的研究，并为给定初始与终端状态条件下相应奥恩斯坦-乌伦贝克过程的退出时间概率提供了精确估计。

致谢

作者感谢国家自然科学基金（项目编号：12172167、12202318、12302035、12572038）以及江苏省优秀博士后人才资助计划（项目编号：2023ZB591）的资助。

数据可用性声明

支持本研究结果的数据可应合理要求向通讯作者获取。

附录 A：扩散过程的 Fleming-James 定理

设 $D \subset \mathbb{R}$ 为一个非空开集。固定 $T>0$，并考虑由如下随机微分方程控制的扩散过程 $(x^\varepsilon, \mathbb{P}^\varepsilon_{x,s})$:

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}x_t^\varepsilon = b(x_t^\varepsilon, t)\mathrm{d}t + \sqrt{\varepsilon}\mathrm{d}w_t, \quad t \in (s,T], \\ &x_s^\varepsilon = x \in D. \end{aligned} \tag{A1}$$

假设漂移系数 b 属于 $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}\times[0,T],\mathbb{R})$ 类，且关于 x 是 Lipschitz 连续的，对 t 一致地成立。令 $\tau^\varepsilon_{x,s} \triangleq \inf\{t>s : x_t^\varepsilon \notin D\}$ 为 x^ε 离开 D 的首次退出时间。将退出时间概率函数定义为

$$q^\varepsilon(x,s) \triangleq \mathbb{P}^\varepsilon_{x,s}\left(\tau^\varepsilon_{x,s} \le T\right).$$

那么，对于每个紧子集 $K \subset \bar{D}\times[0,T)$，$q^\varepsilon(x,s)$ 都属于 $\mathscr{C}^{2,1}(K)$，并且满足边值问题[11]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial q^\varepsilon}{\partial s} + b(x,s)\frac{\partial q^\varepsilon}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2 q^\varepsilon}{\partial x^2} = 0 \quad \text{in } D\times(0,T), \\ &q^\varepsilon(x,s) = 1 \quad \text{on } \partial D\times[0,T), \\ &q^\varepsilon(x,T) = 0 \quad \text{if } x \in D. \end{aligned} \tag{A2}$$

将可容许路径的集合定义为

$$\Gamma_{x,s} \triangleq \{\gamma \in \mathscr{C}([s,T],\mathbb{R}) : \gamma(s) = x, \exists t \in (s,T] \text{ s.t. } \gamma(t) \in \partial D\},$$

并令

$$u(x,s) \triangleq \inf_{\gamma\in\Gamma_{x,s}} I(\gamma) \triangleq \inf_{\gamma\in\Gamma_{x,s}} \frac{1}{2}\int_s^T [\dot\gamma(t) - b(\gamma(t),t)]^2 \mathrm{d}t. \tag{A3}$$

可以证明，$u \in \mathscr{C}(\bar{D}\times[0,T))$ 是 Hamilton-Jacobi方程[15] 的唯一粘性解:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial s} + b(x,s)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0 \quad \text{in } D\times(0,T), \\ &u(x,s) = 0 \quad \text{on } \partial D\times[0,T], \\ &u(x,s) \to \infty \quad \text{as } s \to T \text{ if } x \in D. \end{aligned} \tag{A4}$$

首阶渐近展开由以下著名结果给出[7,8]。

定理A.1。我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln q^\varepsilon(x,s) = -u(x,s),$$

在 $\bar{D}\times[0,T)$ 的紧子集上一致地。

下一个结果由 Fleming 和 James 给出（参见 [11, 定理 4.2]），它为$q^\varepsilon(x,s)$ 提供了渐近展开，至少对于集合$N \subset D\times[0,T)$ 中满足以下假设的点 (x,s) 而言。

假设（A）：

- There exists $T' < T$ such that $N \subset D\times[0,T']$ and N is open;
- $u \in \mathscr{C}^\infty(\bar N)$;
- 定义

$$\beta(x,s) \triangleq b(x,s) - \frac{\partial u(x,s)}{\partial x}, \quad (x,s) \in \bar N. \tag{A5}$$

对于每个 $(x,s) \in N$，令 $\gamma_{x,s}$ 为以下常微分方程的解:

$$\begin{aligned} &\dot\gamma_{x,s}(t) = \beta(\gamma_{x,s}(t),t), \\ &\gamma_{x,s}(s) = x. \end{aligned} \tag{A6}$$

用 $\nu_{x,s}$ 表示轨迹 $(\gamma_{x,s}(t),t)$ 首次到达边界 ∂N的时刻。令

$$\Gamma_1 \triangleq \{z_{x,s} = (\gamma_{x,s}(\nu_{x,s}), \nu_{x,s}) : (x,s) \in N\} \subset \partial N.$$

施加以下条件:

◇ $\Gamma_1 \subset \partial D\times(0,T')$;
◇ Γ_1 is a $\mathscr{C}^\infty$-manifold and is relatively open in ∂N;
◇ $(\gamma_{x,s}(t),t)$ crosses ∂N non-tangentially.

定理 A.2. 假设 $N \subset D\times[0,T)$ 满足假设（A）。那么对于每个 $m = 0,1,2,\cdots$,

$$\begin{aligned} q^\varepsilon(x,s) = \exp\left(-\frac{u(x,s)}{\varepsilon} - w(x,s)\right)(1 + \varepsilon\psi_1(x,s) \\ + \cdots + \varepsilon^m\psi_m(x,s) + o(\varepsilon^m)), \end{aligned} \tag{A7}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，在 N 的紧子集上一致地。函数 w $\psi_m \in \mathscr{C}^\infty(N)$（其中 $\psi_0 \equiv 1$）满足

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial s} + \left(b - \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad in\ N, \\ &w(x,s) = 0 \quad on\ \partial D\times[0,T)\cap\bar N, \end{aligned} \tag{A8}$$

并且，对于 $m \ge 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_m}{\partial s} + \left(b - \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \psi_m}{\partial x} = -\left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right. \\ \left. \times \psi_{m-1} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \psi_{m-1}}{\partial x^2}\right] \quad in\ N, \end{aligned} \tag{A9}$$

$\psi_m(x,s) = 0$ 在 $\partial D\times[0,T)\cap\bar N$。

注 A.1。*(a)* 本质上，假设（*A*）提供了强正则性条件，确保 q^ε 的渐近展开有效。如果区域 N 满足这一假设，则具有以下性质：

- 对于每个 $(x,s)\in N$，*(A3)* 中的下确界都由唯一的路径 $\gamma\in\Gamma_{x,s}$ 达到。
- 经典变分法表明，这条极小化路径与由 *(A6)* 定义的特征曲线 $\gamma_{x,s}$ 重合，即对于所有 $t\in[s,\nu_{x,s}]$，都有 $\gamma(t)=\gamma_{x,s}(t)$。此外，轨迹 $(\gamma_{x,s}(t),t)$ 在时间 $\nu_{x,s}<T'$ 首次离开 N，其出口点 $(\gamma_{x,s}(\nu_{x,s}),\nu_{x,s})$ 属于 $\Gamma_1\subset\partial D\times(0,T')$。因此，

$$u(x,s)=\frac{1}{2}\int_s^{\nu_{x,s}}[\dot\gamma_{x,s}(t)-b(\gamma_{x,s}(t),t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

- 方程 *(A6)* 是偏微分方程 *(A8)* 和 *(A9)* 的特征微分方程。应用特征线法可得显式积分表示：

$$w(x,s)=\frac{1}{2}\int_s^{\nu_{x,s}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\gamma_{x,s}(t),t)\,\mathrm{d}t,$$

且对于 $m\ge 1$，

$$\psi_m(x,s)=\int_s^{\nu_{x,s}}\left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\psi_{m-1}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi_{m-1}}{\partial x^2}\right](\gamma_{x,s}(t),t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) 一般而言，在不满足假设（*A*）的区域中，定理 *A.2* 的渐近展开可能不成立。关于这一现象的讨论，请参见 *[12]* 的备注 *2.3*。

(c) 关于将定理 *A.2* 推广至漂移项 b 依赖于 ε 或扩散系数不是常数的情形，可参见 *[11]*。

附录 B：与相应奥恩斯坦-乌伦贝克过程的条件退出时间概率的关系

令 $\{\tilde{x}_t^\varepsilon\}_{t\ge0}$ 为一维奥恩斯坦-乌伦贝克过程，该过程由以下随机微分方程（SDE）支配：

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\tilde{x}_t^\varepsilon=(a_0+a_1\tilde{x}_t^\varepsilon)\,\mathrm{d}t+\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{d}w_t,\quad t>0,\\&\tilde{x}_0^\varepsilon=x_0.\end{aligned}\tag{B1}$$

显然，量 $-a_0/a_1$ 表示向量场 $\tilde{b}(x)=a_0+a_1x$ 的不动点。众所周知，$\{\tilde{x}_t^\varepsilon\}_{t\ge0}$ 是一个均值为 $\mathbb{E}^\varepsilon(\tilde{x}_t^\varepsilon)=\left(x_0+\frac{a_0}{a_1}\right)e^{a_1t}-\frac{a_0}{a_1}$、协方差为 $\mathbb{C}\mathrm{ov}(\tilde{x}_s^\varepsilon,\tilde{x}_t^\varepsilon)=\varepsilon e^{a_1t}\frac{\sinh(a_1s)}{a_1}$ 的高斯–马尔可夫过程，其中 $0\le s\le t$。

具有给定终端条件 x_t^ε 的奥恩斯坦-乌伦贝克桥 $x_t^\varepsilon x_T$（与奥恩斯坦–乌伦贝克过程 $\tilde{x}_t^\varepsilon$ 相关）是一个定义如下的随机过程

$$\mathrm{Law}(x^\varepsilon,\mathbb{P}^\varepsilon)=\mathrm{Law}(\tilde{x}^\varepsilon,\tilde{\mathbb{P}}^\varepsilon_{x_0,0;x_T,T}),$$

其中

$$\tilde{\mathbb{P}}^\varepsilon_{x_0,0;x_T,T}\triangleq\mathbb{P}^\varepsilon_{x_0,0}(\cdot|\tilde{x}_T^\varepsilon=x_T)=\mathbb{P}^\varepsilon(\cdot|\tilde{x}_0^\varepsilon=x_0,\tilde{x}_T^\varepsilon=x_T).$$

众所周知（例如参见 [1, 2, 和 6]），过程 x_t^ε 与具有漂移项 (2) 和初始条件 $x_0^\varepsilon=x_0$ 的随机微分方程 (1) 的唯一强解一致。

令 $\tilde{\tau}^\varepsilon_{x_0,0}\triangleq\inf\{t>0:\tilde{x}_t^\varepsilon\notin D\}$ 表示 $\tilde{x}^\varepsilon$ 从 D 首次退出的时间，并将条件退出时间概率定义为

$$\tilde{q}^\varepsilon(x_0,0)\triangleq\mathbb{P}^\varepsilon_{x_0,0}\left(\tilde{\tau}^\varepsilon_{x_0,0}\le T|\tilde{x}_T^\varepsilon=x_T\right).$$

那么，鉴于 $\tilde{x}^\varepsilon$ 与 x^ε 之间的关系，我们得到恒等式

$$\tilde{q}^\varepsilon(x_0,0)=q^\varepsilon(x_0,0),\quad\forall\,x_0\in D.$$

因此，根据命题 II.5、III.3 和 III.10，可直接得到 $\tilde{q}^\varepsilon$ 关于 ε 的精确渐近展开。

[1]M. Barczy 和 P. Kern，“维纳过程和奥恩斯坦–乌伦贝克过程偏离其桥的样本路径”，《巴西概率与统计杂志》**27**，437–466（2013年）。[2]A. Azze、B. D’Auria 和 E. García-Portugués，“奥恩斯坦–乌伦贝克桥的最优停止”，《随机过程及其应用》**172**，104342（2024年）。[3] C. Yue、Z. Peng、J. Ma、S. Du、P. Wei 和 D. Zhang，“通过广义奥恩斯坦-乌伦贝克桥进行图像复原”，载于第四十一届国际机器学习会议（2024 年）。[4]E. Di Nardo 、 A. G. Nobile 、 E. Pirozzi 和 L. M. Ricciardi，“高斯–马尔可夫过程首次通过时间问题的计算方法”，《应用概率进展》**33**，453–482（2001年）。[5]G. D’Onofrio 和 E. Pirozzi，“高斯-马尔可夫过程双边界首次退出时间密度的渐近性质”，《应用概率的方法与计算》**21**，735–752（2019年）。[6]A. Azze、B. D’Auria 和 E. García-Portugués，“高斯–马尔可夫桥的最优停止”，《应用概率进展》**57**，1–34（2025年）。[7]A. D. Wentzell 和 M. I. Freidlin，“关于动力系统的小随机扰动”，《俄罗斯数学调查》**25**，1–55（1970年）。[8]M. I. Freidlin 和 A. D. Wentzell，《动力系统的随机扰动》（施普林格，柏林，海德堡，*2012*年）。[9]W. H. Fleming，“退出概率与最优随机控制”，《应用数学与优化》**4**，329–346（1977年）。[10] W. H. Fleming 和 P. E. Souganidis，“渐近级数与消失黏性方法”，《印第安纳大学数学杂志》**35**，425–447（1986年）。[11]W. H. Fleming 和 M. R. James，“渐近级数与退出时间概率”，《概率年刊》**20**，1369–1384（1992年）。[12]P. Baldi，“定义域退出概率的精确渐近及其在模拟中的应用”，《概率年刊》**23**，1644–1670（1995年）。[13] P. Baldi 和 L. Caramellino，“一般一维钉扎扩散命中概率的渐近性质”，《应用概率年刊》**12**，1071–1095（2002年）。[14]P. Baldi、L. Caramellino 和 M. Rossi，“一般扩散过程的桥的尖锐大偏差”，载于《纪念 *Marc Yor*——概率研讨班 *XLVII*》，C. Donati-Martin、A. Lejay 和 A. Rouault 编（施普林格国际出版，查姆，2015年），第427–441页。[15]W. H. Fleming 和 P. E. Souganidis，“大偏差若干问题的偏微分方程黏性解方法”，《比萨高等师范学校年刊——科学部》**13**，171–192（1986年）。



图1：向量场 $(b(x,t), 1)^{\top}$ 与 $\{(x^{0}_{x,s}(t),t) : t \in [s,T]\}$ 和 $\partial D \times [0,T)$ 的交集，适用于情形 A_{VII}。子图 (a) 和 (b) 分别对应情形 $A_{VII,I}$ 和 $A_{VII,II}$，而 (c) 和 (d) 展示了情形 $A_{VII,III}$的一个示例。参数为 $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $T = 1$, $x_T = 2$，其中 (a) $d_1 = 0.2$, $d_2 = 1.2$；(b) $d_1 = 1.2$, $d_2 = 1.8$; (c)(d) $d_1 = 1.7$, $d_2 = 1.9$。



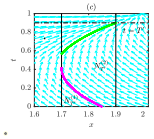

图 2：情形 A_{VII}的强正则区域。子图 (a) 和 (b) 分别对应情形 $A_{VII,I}$ 和 $A_{VII,II}$，而 (c) 展示了情形 $A_{VII,III}$的一个示例。在每个子图中，绿色实线表示轨迹 $\{(x^0_{x,s}(t),t) : t \in [0, T]\}$的一段，该轨迹满足 $x^0_{x,s}(T') = d_2,$；洋红色实线表示临界轨迹 $\{(x^0_{,*}(t),t) : t \in [0,T]\}$的一段。参数为 $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $T = 1$, $x_T = 2$, $T' = 0.9$，其中 (a) $d_1 = 0.2$, $d_2 = 1.2$; (b) $d_1 = 1.2$, $d_2 = 1.8$; (c) $d_1 = 1.7$, $d_2 = 1.9$。