图乘积的希尔伯特–施密特稳定性

PIETER SPAAS

Abstract. 在这篇短文中，我们证明了弦图上阿贝尔群及 C^*-代数的图乘积具有希尔伯特–施密特稳定性。特别地，这表明弦图上的右角阿廷群具有希尔伯特–施密特稳定性。

arXiv:2603.02058v1 [math.OA] 2 Mar 2026

Introduction

稳定性通常关注这样一个问题：几乎满足某个方程的元素，是否接近于精确满足该方程的元素。这一问题历史悠久，其源头是一个自然的问题：在某种范数下，两个近似可交换的矩阵是否接近一对可交换矩阵；例如参见 [Io21] 的引言及其中的参考文献。在本文中，我们主要关注群的 *HS* 稳定性：如果一个群到酉群的近似同态（采用归一化希尔伯特–施密特范数）必然接近真正的同态，就称该群具有 HS 稳定性（见定义 1）。可容群的 HS 稳定性仍面临诸多挑战，但近年来已取得显著进展，例如参见 [HS17、ES22、LV22]。此外，已知 HS 稳定性在自由积以及与可容的 HS-稳定群作直积的运算下保持不变 [IS19]。然而，除了通过这些构造由可容的 HS-稳定群得到的群之外，目前已知的非可容 HS 稳定群实例寥寥无几。其中一些例子包括具有非平凡中心的某些单关系群 [HS17], 、某些特定的图乘积 [At18],以及几乎自由群 [GS21]。

本短文通过证明所有由弦图定义的右角阿廷群都是 HS-稳定的，进一步丰富了这些例子；更一般地，由弦图定义的阿贝尔群图乘积也是 HS-稳定的；参见推论 10。事实上，某些顶点群可以是 HS-稳定的，但不一定是阿贝尔群；最一般的表述见下文定理 9。后一个定理以及我们的主要结果定理 8 都以 C^*-代数的语言表述，并通过转到全群 C^*-代数得出上述关于群的结果。

最后，我们也请读者参阅 [FW26], ，作者在那里获得了许多具有（局部）提升性质和 (R)FD性质的群的新例子，并将其与所谓的高度灵活的希尔伯特–施密特稳定性联系起来。他们的结果包括由弦图定义的右角阿廷群具有高度灵活的希尔伯特–施密特稳定性；特别是，我们以完全不同的证明将这一结论加强为 HS 稳定性。

Preliminaries

稳定性。 下文中，我们用 $U(n)$ 表示维数为 n 的酉群，并用 $\|\cdot\|_2$ 表示归一化希尔伯特–施密特范数。

定义 1。 设 Γ 为一个可数离散群。若对于所有 $g,\ h \in \Gamma$，均有 $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(gh) - \varphi_n(g)\varphi_n(h)\|_2 = 0$，则称映射序列 $\varphi_n\colon \Gamma \to U(k_n)$ 为近似同态。如果对于每个这样的渐近同态，都存在同态序列 $\psi_n\colon \Gamma \to U(k_n)$，使得对于所有 $g \in \Gamma$ 均有 $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(g) - \psi_n(g)\|_2 = 0$，则称 Γ 具有希尔伯特–施密特稳定性（或*HS*-稳定）。

对于下文的主要结果定理 8，我们将利用如下事实：稳定性可以方便地用超积的语言来描述。在本注记中，当取迹 C^*-代数（例如带有其归一化迹的矩阵代数）的超积时，我们始终指的是 迹超积：对于迹

作者获得了欧盟通过欧洲研究委员会（ERC）资助的部分支持（QInteract，资助编号 101078107）。

C^*-代数 $(A_i, \tau_i)_{i\in I}$ 以及 I 上的超滤子 $\mathcal{U}$，迹超积 $\prod_{\mathcal{U}}(A_i, \tau_i)$ 是 C^*-积 $\prod_{i\in I} A_i$ 关于理想 $\mathcal{J} = \{(a_i)_i \in \prod_{i\in I} A_i$ 的商：$\lim_{\mathcal{U}} \tau_i(a_i^* a_i) = 0\}$。
当迹态是隐含的或可由上下文明确时，我们将简写为 $\prod_{\mathcal{U}} A_i$。我们进一步定义范数 $\|x\|_{2,i}^2 = \tau_i(x^*x)$，用于 $x \in A_i$；以及 $\|x\|_{2,\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|_{2,i}$，用于 $x = (x_i)_i \in \prod_{\mathcal{U}} A_i$。

定义 2. 设 A 是一个 C^*-代数，且 $(A_i, \tau_i)_{i\in I}$ 是一族配备迹态的 C^*-代数。设 $\mathcal{U}$ 是 I 上的一个超滤子。若存在 *-同态 θ_i，对每个 $i \in I$ 都有 $A \to A_i$，使得 $\theta = (\theta_i)_{i\in\mathcal{U}}$，则称一个 *-同态 $\theta : A \to \prod_{\mathcal{U}} A_i$ 可提升；也就是说，对每个 $a \in A$，都有 $\theta(a) = (\theta_i(a))_{i\in\mathcal{U}}$。

定义 3. 给定一个迹 C^*-代数类 $\mathcal{C}$，若每个 *-同态 $\theta : A \to \prod_{\mathcal{U}} A_i$（其中每个 $A_i \in \mathcal{C}$）都可提升，则称一个 C^*-代数 A 是 $\mathcal{C}$-迹稳定的。当 $\mathcal{C}$ 由所有配备典范归一化迹的矩阵代数组成时，我们也将 $\mathcal{C}$-迹稳定性称为希尔伯特–施密特稳定性（或*HS* 稳定性）。

如上所定义，C^*-代数的迹稳定性可以用 ε、δ 和近似 *-同态来解释，参见例如 [HS16，第 2] 节。此外，考虑可数离散群 Γ 的全 C^*-代数 $C^*(\Gamma)$ 时，很容易验证，定义 1 中所定义的 Γ 的 HS 稳定性等价于定义 3 中所定义的 $C^*(\Gamma)$ 的 HS 稳定性。此外，具体写出迹超积以及 *-同态提升的定义后，可以轻易证明以下判据，用以判断从一个 C^*-代数到超积的 *-同态是否可提升。

引理 4 ([HS16，引理 2。2])。假设 A 由元素 $\{b_1、b_2、\ldots\}$ 作为 C^*-代数生成。设 $(A_i、\tau_i)_{i\in I}$ 是一族迹 C^*-代数，$\mathcal{U}$ 是 I 上的一个超滤子，且 $\theta :\ A \to \prod_{\mathcal{U}}(A_i、\tau_i)$ 是一个 *-同态。那么以下条件等价：

(i) θ提升。*(ii)* 对每个 $\varepsilon > 0$ 和每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 *-同态 $\theta_i :\ A \to A_i$，对所有 $i \in I$ 均成立，使得对每个 $1 \leqslant k \leqslant n$，

$$\|(\theta_i(b_k))_{\mathcal{U}} - \theta(b_k)\|_{2,\mathcal{U}} < \varepsilon.$$

图乘积。受 [At18], 的结果启发，我们研究群的图乘积的稳定性。这类图乘积最初由 [Gr90] 在一般情形下引入并加以研究。在本文中，我们所讨论的图均为有限简单图，即不存在自环或重边。为完整起见，我们给出图乘积群的定义：

定义 5。设 $\mathcal{G} = (V, E)$ 是一个图；对每个顶点 $v \in V$，令 Γ_v 为一个可数离散群。图乘积群 $*_{\mathcal{G}}\Gamma_v$ 定义为自由积 $*_{v\in V}\Gamma_v$ 除以由 $\{ghg^{-1}h^{-1}$ 生成的正规子群所得的商群：$g \in \Gamma_v, h \in \Gamma_w, (v, w) \in E\}$。

换言之，图乘积中的子群 Γ_v 和 Γ_w 交换，当且仅当 v 和 w 在 $\mathcal{G}$中相邻。值得关注的特殊例子包括右角阿廷群和右角考克斯特群，它们在数学的各个领域都有应用；这两类群分别是所有顶点群均为 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 时得到的图乘积。

对于 C^*-代数，完整图乘积类似地通过泛性质定义：

定义 6. 设 $\mathcal{G} = (V, E)$ 是一个图，对每个顶点 $v \in V$，设 A_v 是一个含幺 C^*-代数。图乘积 C^*-代数 $*_{\mathcal{G}}A_v$ 定义为唯一的含幺 C^*-代数 $*_{\mathcal{G}}A_v$，连同含幺 *-同态 $\iota_v : A_v \to *_{\mathcal{G}}A_v$，满足：

- $[\iota_v(a),\ \iota_w(b)] = 0$ 对于任意 $a \in A_v, b \in A_w, (v,\ w) \in E$；
- 对于任意含幺 C^*-代数 B，以及满足以下条件的 *-同态 $\{\pi_v : A_v \to B\}_{v\in V}$ $[\pi_v(a),\ \pi_w(b)] = 0$ 对于任意 $a \in A_v, b \in A_w$ 和 $(v,\ w) \in E$，存在唯一的 *-同态 $*_{\mathcal{G}}\pi_v : *_{\mathcal{G}}A_v \to B$，使得对每个 $v \in V$ 都有 $*_{\mathcal{G}}\pi_v \circ \iota_v = \pi_v$。

在下面的主要结果定理 8 中，我们将考虑定义在弦图上的图乘积：如果一个有限简单图中的每个长度至少为 4 的圈都有一条弦，即一条连接圈上两个顶点但不属于该圈的边，则称该图为弦图。换句话说，该图不含长度至少为 4 的圈作为诱导子图。

弦图是一类经过深入研究的图。以下这一关于弦图的著名刻画对我们很有用。

引理 7（弦图的归纳构造）。弦图 $\mathcal{G}$（具有 n 个顶点）恰好是能够通过以下归纳方式构造的图。

（*1*）从只有一个顶点且没有边的平凡图 $\mathcal{G}_1$ 开始。（*2*）对于 $2 \leqslant k \leqslant n$：选择 $\mathcal{G}_{k-1}$ 的一个完全子图（可以为空）。要得到 $\mathcal{G}_k$，添加一个顶点，并将它与所选 $\mathcal{G}_{k-1}$ 完全子图中的每个顶点用一条边相连。（*3*）令 $\mathcal{G} := \mathcal{G}_n$。

Results

现在我们证明以下关于图乘积 C^*-代数稳定性的定理。这里回顾一个众所周知的事实：每个含幺可分交换的 C^*-代数都可视为某个紧豪斯多夫空间上的复值函数代数。证明基本遵循 [At18，定理 2。9]（以及 [HS16，定理 2。7], ；用图乘积的术语来说，这对应于由一条边连接两个顶点的图），不过我们将他们的证明推广到了弦图，并对证明作了简化。我们还要指出，为了谨慎处理证明中出现的投影，我们特别注意在必要时将 *-同态扩展到相应的 GNS 冯诺依曼代数。

定理 8. 设 $\mathcal{G} = (V, E)$ 是弦图，并且对每个顶点 $v \in V$，令 $A_v = C(X_v)$ 为一个含幺可分交换的 C^*-代数。那么，图乘积 C^*-代数 $*_{\mathcal{G}} A_v$ 是 *HS*-稳定的。

证明. 我们对 $\mathcal{G}$中顶点 $|V|$ 的数量进行归纳。若 $|V| = 1$，结论由 [HS16, 定理 2.5] 得出。假设 $|V| \geqslant 2$，并按照引理 7 归纳地构造 $\mathcal{G}$。
假设 θ： $*_{\mathcal{G}} A_v \to \prod_{\mathcal{U}} M_i$ 是一个含幺 *-同态，其中每个 M_i 都是配备其典范归一化迹的矩阵代数。注意， $*_{\mathcal{G}} A_v$ 由（可数多个）压缩算子 $b \in A_v$ 作为 C^*-代数生成，其中 $v \in V$；我们将 $A_v \simeq \iota_v(A_v)$ 视为 $*_{\mathcal{G}} A_v$的子代数。固定$\varepsilon > 0$ 以及压缩算子 $b_1, \ldots, b_n$，使得 $b_k \in A_{v_k}$，其中某个 $v_k \in V$。根据引理 4，只需找到 *- 同态 $\theta_i : *_{\mathcal{G}} A_v \to M_i$，使得

$$\|(\theta_i(b_k))_{\mathcal{U}} - \theta(b_k)\|_{2,\mathcal{U}} < \varepsilon, \tag{1}$$

对于每个 $1 \leqslant k \leqslant n$。
令 v_0 表示引理 7 中通过归纳构造 $\mathcal{G}$ 时最后一步加入的顶点，并令 $\mathcal{G}_0 = (V_0,\ E_0)$ 表示由 v_0 的邻点构成的完全子图。特别地， $*_{\mathcal{G}_0} A_v = \otimes_{v \in V_0} A_v$ 是 $*_{\mathcal{G}} A_v$ 的一个交换的子-C^*-代数，因此其像 $\theta(*_{\mathcal{G}_0} A_v)$ 是交换的。

对于每个 $v \in V_0$，我们列出属于 A_v 的 b_k 中的元素 $a_{v,\,1},\ \ldots,\ a_{v,\,n_v}$。由于它们属于交换的 C^*-代数，我们可以用简单函数近似元素 $a_{v,\,1},\ \ldots,\ a_{v,\,n_v}$（对于 $v \in V_0$，将其视为定义在 X_v 上的函数）：存在 X_v 的 Borel划分 $\{E_{v,\,1},\ \ldots,\ E_{v,\,m_v}\}$ 以及点 $x_{v,\,d} \in E_{v,\,d}$，使得

$$\left\| a_{v,l} - \sum_{d=1}^{m_v} a_{v,l}(x_{v,d}) \chi_{E_{v,d}} \right\| < \varepsilon,$$

对所有的 $v \in V_0$ 和 $1 \leqslant l \leqslant n_v$，其中 $\|\cdot\|$ 表示一致范数。

我们注意到，所有的 C^*-代数都配备了典范迹态，即矩阵代数 M_i上的通常归一化迹 τ_i、 $\tau_{\mathcal{U}} := \lim_{\mathcal{U}} \tau_i$ 在 $\prod_{\mathcal{U}} M_i$上的迹，以及拉回迹$\tau_{\mathcal{G}} := \tau_{\mathcal{U}} \circ \theta$ 在 $*_{\mathcal{G}} A_v$ 上的迹和每个 $v \in V$对应的 $\tau_v := \tau_{\mathcal{U}} \circ \theta|_{A_v}$ 在 A_v 上的迹。

根据构造， *-同态 θ 保迹，因此可将其延拓到相应迹态在 GNS 构造中的冯·诺依曼代数完备化 $\pi_{\tau_v}(A_v)''$ 。我们还注意到，迹超积 $\prod_{\mathcal{U}}(M_i, \tau_i)$ 本身也是冯·诺依曼代数，因此我们还得到

$$\theta(\pi_{\tau_v}(A_v)'') \subset \prod_{\mathcal{U}} (M_i, \tau_i).$$

由于 w e 可以将 $\chi_{E_{v,d}} \in \pi_{\tau_v}(A_v)''$视为，因此我们可以考虑相应的投影 ns

$$\theta(\chi_{E_{v,d}}) =: Q_{v,d} \in \prod_{\mathcal{U}} (M_i, \tau_i),$$

当 d 取遍所有值时，它们构成每个 $v \in V_0$ 的单位分解。此外，由于它们两两交换，我们可以考虑由所有投影 $Q_{v,d}$（其中 $v \in V_0$、 $1 \leqslant d \leqslant m_v$）生成的单位分解 $Q_1, \ldots, Q_r$。

接下来，记 $\mathcal{G}' = (V', E')$ 为从 $\mathcal{G}$ 中删去 v_0后得到的诱导子图。考虑图乘积 $*_{\mathcal{G}'} B_v$，其中对每个 $v \in V' = V \backslash \{v_0\}$，我们定义

$$B_v = \begin{cases} A_v & \text{if } v \notin V_0, \\ C^*(\chi_{E_{v,1}}, \ldots, \chi_{E_{v,m_v}}) & \text{if } v \in V_0. \end{cases}$$

定义 ρ：当 $v \notin V_0$ 时，通过 $\rho|_{B_v} = \theta|_{A_v}$ 定义 $*_{\mathcal{G}'} B_v \to \prod_{\mathcal{U}} M_i$，并定义 $\rho|_{B_v} = \theta|_{C^*(\chi_{E_{v,1}}, \ldots, \chi_{E_{v,m_v}})}$，若 $v \in V_0$，我们再次假设已将 θ 延拓至 $\pi_{\tau_v}(A_v)'' \supset C^*(\chi_{E_{v,1}}, \ldots, \chi_{E_{v,m_v}})$。

注意， ρ 是良定义的，因为根据构造， $\{\rho|_{B_v}\}_{v \in V'}$ 满足图所施加的必要交换关系（本质上是因为 θ 满足这些关系），因此定义 6 中的泛性质给出了所需的 ρ。接下来，我们观察到 $\mathcal{G}'$ 是弦图，因此根据归纳假设， $*_{\mathcal{G}'} B_v$ 是 HS-稳定的。特别地，我们可以将 ρ 提升为单位的 *-同态 $\rho_i : *_{\mathcal{G}'} B_v \to M_i$。

设 $\rho_{v,i} := \rho_i|_{B_v}$，并且对每个 $v \in V_0$, $1 \leqslant d \leqslant m_v$ 和 $i \in I$，令 $P^i_{v,d} := \rho_i(\chi_{E_{v,d}})$。那么所有 $P^i_{v,d}$ 都两两交换，且对每个 $v \in V_0$ 和 $i \in I$，$\{P^i_{v,d}\}_{d=1}^{m_v}$ 是 M_i 中的一个单位分解。此外，根据构造，对每个 $v \in V_0$, $1 \leqslant d \leqslant m_v$，都有 $Q_{v,d} = (P^i_{v,d})_{i \in \mathcal{U}}$。记由所有 $P^i_{v,d}$ 生成的 M_i 的单位分解为 $P_{i,1}, \ldots, P_{i,r_i}$。注意，不失一般性，可假设对所有 i，都有 $r_i = r$。于是，对每个 $i \in I$，我们可以对 $P_{i,j}$ 排序，使得对所有 $1 \leqslant j \leqslant r$，都有 $Q_j = (P_{i,j})_{\mathcal{U}}$。

接下来，由于 $*_{\mathcal{G}_0} A_v$ 是交换的，且与 A_{v_0} 交换，我们注意到

$$C^*(Q_1, \ldots, Q_r) = C^*\big(\cup_{v \in V_0} C^*(Q_{v,1}, \ldots, Q_{v,m_v})\big) \subset \theta(C^*(A_{v_0}, *_{\mathcal{G}_0} A_v))' \cap \prod_{\mathcal{U}} M_i.$$

因此，通过取相对交换子，

$$\begin{aligned} \theta(C^*(A_{v_0}, *_{\mathcal{G}_0} A_v)) &\subset C^*(Q_1, \ldots, Q_r)' \cap \prod_{\mathcal{U}} M_i \\ &= \prod_{\mathcal{U}} \big(\bigoplus_{j=1}^{r} P_{i,j} M_i P_{i,j} \big) \\ &= \bigoplus_{j=1}^{r} \big(\prod_{\mathcal{U}} P_{i,j} M_i P_{i,j} \big). \end{aligned}$$

用φ_j 表示到$\bigoplus_{j=1}^{r} \prod_{\mathcal{U}} P_{i,j} M_i P_{i,j}$的直和项$\prod_{\mathcal{U}} P_{i,j} M_i P_{i,j}$上的正交投影。由于 A_{v_0} 是交换的，因而 HS-稳定，我们可以将 $\varphi_j \circ \theta : A_{v_0} \to \prod_{\mathcal{U}} P_{i,j} M_i P_{i,j}$ 对每个$1 \leqslant j \leqslant r$ 提升为 *-同态

$$\theta_{v_0,i,j} : A_{v_0} \to P_{i,j} M_i P_{i,j}.$$

W因此可以定义$\theta_{v_0,i} := \bigoplus_{j=1}^{r} \theta_{v_0,i,j}$，并注意到对每个 $a \in A_{v_0}$ 我们有

$$(\theta_{v_0,i}(a))_{\mathcal{U}} = \theta(a). \tag{2}$$

对于 $v \in V_0$ 和 $a \in A_v$，我们接下来定义

$$\theta_{v,i}(a) = \sum_{j=1}^{r} a(x_{v,d_j}) P_{i,j},$$

其中 d_j 满足 $P_{i,\ j} \leqslant P^{i}_{v,\ d_j}$。这是定义良好的，因为根据构造，$(P_{i,\ j})_j$ 是比 $(P^{i}_{v,\ d})_d$ 更细的划分。注意，根据构造，对于每个 $v \in V_0$ 和 $1 \leqslant l \leqslant n_v$，我们都有

$$\begin{aligned}
\|(\theta_{v,i}(a_{v,l}))_{\mathcal{U}} - \theta(a_{v,l})\|_{2,\mathcal{U}} &= \Big\| \big(\sum_{j=1}^{r} a_{v,l}(x_{v,d_j}) P_{i,j} \big)_{\mathcal{U}} - \theta(a_{v,l}) \Big\|_{2,\mathcal{U}} \\
&= \Big\| \big(\sum_{d=1}^{m_v} a_{v,l}(x_{v,d}) P^{i}_{v,d} \big)_{\mathcal{U}} - \theta(a_{v,l}) \Big\|_{2,\mathcal{U}} \\
&= \Big\| \big(\sum_{d=1}^{m_v} a_{v,l}(x_{v,d}) \rho_i(\chi_{E_{v,d}}) \big)_{\mathcal{U}} - \theta(a_{v,l}) \Big\|_{2,\mathcal{U}} \\
&= \Big\| \theta\big(\sum_{d=1}^{m_v} a_{v,l}(x_{v,d}) \chi_{E_{v,d}} \big) - \theta(a_{v,l}) \Big\|_{2,\mathcal{U}} \\
&\leqslant \Big\| \sum_{d=1}^{m_v} a_{v,l}(x_{v,d}) \chi_{E_{v,d}} - a_{v,l} \Big\|_{2,\mathcal{U}} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned} \tag{3}$$

最后，对于 $v \notin V_0 \cup \{v_0\}$，令 $\theta_{v,\ i} := \rho_{v,\ i}$。注意，由于 $(\rho_i)_{i \in I}$ 是 ρ 的一个提升，而 ρ 在 A_v 上对于 $v \notin V_0 \cup \{v_0\}$ 等于 θ，因此对于每个 $v \notin V_0 \cup \{v_0\}$ 和 $a \in A_v$，我们有

$$(\theta_{v,i}(a))_{\mathcal{U}} = \theta(a). \tag{4}$$

由于根据构造，$\{\theta_{v,\ i}\}_{v \in V}$ 对每个 $i \in I$ 都满足必要的交换关系，因此我们可以定义这些 *-同态

$$\theta_i := *_{\mathcal{G}} \theta_{v,i} : *_{\mathcal{G}} A_v \to M_i,$$

对于 $i \in I$。由 (2)、(3) 和 (4)，我们现在可以立即得出

$$\|(\theta_i(b_k))_{\mathcal{U}} - \theta(b_k)\|_{2,\mathcal{U}} = \|(\theta_{v_k,i}(b_k))_{\mathcal{U}} - \theta(b_k)\|_{2,\mathcal{U}} < \varepsilon.$$

对每个 $1 \leqslant k \leqslant n$ 都成立。因此，θ_i 满足 (1)，证明至此完成。 □

备注。

(i) 在证明中，我们不必采用矩阵代数，而可以令 M_i 属于任意一类 $\mathcal{C}$，其中的代数为实秩 0 C^*、含单位的代数，且该类对直和和含单位角封闭，并配备迹态（参见 [At18,HS16]）。因此，对于这样的类 $\mathcal{C}$，定理 8 也蕴含弦图上交换的 C^*代数的图乘积具有 $\mathcal{C}$-迹稳定性。(ii) 在证明中，对于新增顶点的相邻顶点处的 C^*代数，我们只用到了交换性这一假设；而新增顶点处的 C^*代数只需是 HS-稳定的。因此，证明实际上蕴含了以下更一般的结果：

定理 9. 若从 $\mathcal{G}$ 的引理 7 中归纳构造的第 *(2)* 步所得到的某个完全子图中出现的每个顶点所对应的 C^*-代数都是交换的，且其他所有顶点的 C^*-代数都是 *HS*-稳定的（分别为 $\mathcal{C}$-迹稳定的），那么弦图 $\mathcal{G}$ 上的 C^*- 代数图乘积是 *HS*- 稳定的（分别为 $\mathcal{C}$- 迹稳定的）。

通过转到全群 C^*-代数，定理 8 立即推出以下关于可数群的图乘积的结论。请注意，前述评论也适用于群情形。

推论 10. 设 $\mathcal{G} = (V, E)$ 是一个弦图，并且对于每个顶点 $v \in V$，令 Γ_v 为一个可数阿贝尔群。那么，图乘积群 $*_{\mathcal{G}} \Gamma_v$ 是 *HS*-稳定的。特别地，弦图上的右角阿廷群和右角考克斯特群都是 *HS*-稳定的。

注 11. 众所周知，右角考克斯特群几乎自由，当且仅当其图是弦图（作者谨向 Francesco Fournier-Facio 致谢，感谢他指出这一点）。因此，推论 10 中的右角考克斯特情形也可由 [GS21], 推出，尽管证明完全不同。

注 12. 我们指出，并非所有右角阿廷群都是 HS-稳定的。事实上，Ioana 在 [Io21] 中证明，自由群的乘积 $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$（即正方形上的右角阿廷群）不是 HS-稳定的。特别地，由于容易验证稳定群的收缩子群仍然稳定，图包含一个与正方形相同的诱导子图的右角阿廷群都不是 HS-稳定的。长度为 5 或更长的圈上的右角阿廷群是否 HS-稳定，似乎仍是一个开放问题（解决这一问题很可能会带来 HS-稳定右角阿廷群的分类）。

在考克斯特情形中，已知正方形上的右角考克斯特群（即 $D_\infty \times D_\infty$，其中 D_∞ 是无限二面体群）是 HS-稳定的。这可由以下事实得出：$D_\infty \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 有限群是 HS-稳定的，而且 HS 稳定性在自由积运算下封闭，也在与一个可和 HS-稳定群取直积时封闭 [IS19，推论 D]。另一方面，例如五边形上的右角考克斯特群以及 $K_{3,\ 3}$ 上的右角考克斯特群是否 HS-稳定，似乎仍是开放问题。注意，$K_{3,\ 3}$ 上的右角考克斯特群是两个几乎自由群的直积。

致谢。 </style}这篇短文中的结果是在作者与 Adrian Ioana 和 Scott Atkinson 就相关主题进行了一些富有成果的讨论后得出的，作者谨向他们致谢。此外，作者还要感谢 Francesco Fournier-Facio 和 Rufus Willett 分享他们的预印本 [FW26]，并对本文早期草稿提出意见。

References

[At18] S. Atkinson，《迹稳定性与图乘积》，*Indiana Univ. Math. J.* **70** (2021)，第 3 期，第 1167–1187 页。[ES22] C. Eckhardt 和 T. Shulman，《可 amenable 希尔伯特–施密特稳定群》，*J. Funct. Anal.* **285** (2023)，109954。[FW26] F. Fournier-Facio 和 R. Willett，《局部提升性质、FD 性质与近似表示的稳定性》，*to appear*（个人通信）。[Gr90] E. R. Green，《《群的图乘积》》，*PhD thesis*，利兹大学，1990 年。[GS21] M. Gerasimova 和 K. Shchepin，《几乎自由群是 p-Schatten 稳定的》，*Proc. Amer. Math. Soc.* **152** (2024)，第 411–421 页。[HS16] D. Hadwin 和 T. Shulman，《C^*-代数的迹稳定性》，*Int. Eq. Op. Th.* **90** (2018)，第 1–35 页。[HS17] D. Hadwin 和 T. Shulman，《小希尔伯特–施密特扰动下群关系的稳定性》，*J. Funct. Anal.* **275** 2018 761 792 ( )，第 –

页。[Io21] A. Ioana，《几乎可交换矩阵与乘积群的稳定性》，*J. Eur. Math. Soc.* **27** (2025)，第 10 期，第 4027–4068 页。[IS19] A. Ioana 和 P. Spaas，《具有奇异中心序列代数的 II_1 因子》，*J. Inst. Math. Jussieu* **20** (2021)，第 1671–1696 页。[LV22] A. Levit 和 I. Vigdorovich，《可解群的特征、希尔伯特–施密特稳定性与稠密周期测度》，*Math. Ann.* **389** (2024)，第 3181–3229 页。

Centre for the Mathematics of Quantum Theory, Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen, Universitetsparken 5, DK-2100 Copenhagen Ø, Denmark*Email address*: pisp@math.ku.dk