arXiv:2603.02067v1 [math.OC] 2 Mar 2026

一类无穷维振荡系统的多项式大道性质

Alexander Zuyev* Emmanuel Tr´elat †

摘要

我们为一个最优控制问题建立了多项式大道估计。该问题由无穷多个受控振子组成，可视为希尔伯特空间中的抽象微分方程，并采用二次代价。我们的证明基于谱分析以及Riesz基的构造。文中给出了一个具体例子，涉及一个旋转体—梁系统。据我们所知，这是首个关于稳态的逐点大道估计，其衰减速度为多项式而非指数。

关键词：周转性质，最优控制，双曲系统，多项式衰减，Riesz基。

1 引言

众所周知，许多可由静态反馈律强稳定化的重要无穷维控制系统类别并不具有任何指数衰减估计（例如，参见[42, 26, 1, 32, 4, 5, 3]）。这一特征与有限维自治系统理论有本质区别：在中性线性近似的情形下，非指数（而是多项式）渐近稳定性是纯粹的非线性现象（例如，参见 [16] 及其中的参考文献）。本文旨在刻画一类无阻尼双曲系统在基于Riccati的控制器作用下的大时间行为，并在周转性质的背景下比较静态与动态优化问题的解。

巡航现象这一概念源自冯·诺依曼的工作 [28]，并在 [6] 中作为资本积累理论的一部分得到发展，对现代控制理论产生了根本性影响（例如参见 [41, 35, 9] 及其中的参考文献）。在过去十年中，围绕巡航现象发展出了几种互补的方法，包括严格耗散性和经济模型预测控制视角 [13, 8, 10], 、针对PDE约束线性二次问题的基于灵敏度的分析[14, 15], 、双曲边界控制情形 [17], 以及半线性PDE控制问题 [29]。我们还提及非线性最优控制的几何视角 [31], 、形状优化情形[23], ， 以及近年来关于大时间区间和时变结构的延拓 [2, 40]。关于更广泛的观点，可参阅近期综述 [11, 37]。在近期论文 [19], 中，针对具有二次代价的线性双曲系统，在弱可控性和可观测性假设下提出了积分大道估计。据我们所知，现有文献中尚未出现围绕稳态的逐点多项式大道性质。需要指出的是，在 [33], 中已经建立了一种逐点非指数的、称为“线性大道”的性质，但是

*马克斯·普朗克复杂技术系统动力学研究所，德国马格德堡，邮编39106

†乌克兰国家科学院应用数学与力学研究所，电子邮箱：zuyev@mpi- magdeburg.mpg.de。

‡索邦大学，巴黎西岱大学，法国国家科学研究中心，法国国家信息与自动化研究所，雅克-路易·利翁实验室，LJLL，法国巴黎75005，电子邮箱：emmanuel.trelat@sorbonne-universite.fr。

其中，转向点集并非稳态，而是一条非稳态轨迹；这是因为其非稳态特征导致指数估计失效。在本文中，转向点集是单点集。一个主要困难与相关无穷小生成元的Riesz基性质有关。

本文针对一类具有一维控制的无阻尼双曲型问题，建立了逐点多项式大道估计。

我们主要结果的一个显著特点是，在较弱的加权拓扑 $V_{0,\ -\beta-1}$ 中获得了大道估计。在谱 abscissa 为零的情况下，这种弱化是多项式衰减机制所固有的：现有的逐模衰减估计仅能在负加权范数中自然地通过哈密顿变分动力学传播。

大道估计呈多项式形式，直接源于高频处谱 abscissa 趋于零：相关特征值的实部满足 Re $\sigma_k^{\pm} \sim |b_k| \to 0$ as$k \to +\infty$。在这种情形下，只有引入模态依赖前因子，才能将模态衰减 $e^{-\mathrm{Re}\,\nu_k t}$ 转化为一致的多项式界，例如，对任意 $\beta > 0$， $e^{-|b_k|t} \le C_\beta |b_k|^{-\beta}(t+1)^{-\beta}$。这一损失恰好可以通过在弱加权拓扑 $V_{0,\ -\beta-1}$ 中进行估计来补偿（等价地，采用后文引入的加权序列范数 $H^b_{-(\beta+1)}$ ）；因此，这正是表述逐点多项式大道估计的自然泛函框架。特别地，对于任意固定的有限维谱截断，同一估计可在强范数下给出多项式大道估计，且常数与时域长度无关。

除下文引入的假设(*A*1)–(*A*2)外，我们使用间隙可和条件(*A*3)和加权Bari型条件(*A*5)。若(*A*5)对某个 $\rho > 1$成立，则多项式大道指数为 $\beta = \rho - 1$。更精确地说，对于自由终端点线性二次型问题，相对于稳态最优四元组的最优偏差为 $\mathcal{O}\big((t+1)^{-\beta} + (T-t+1)^{-\beta}\big)$ ，在$V_{0,\ -\beta-1}$中关于时间区间 T一致成立。

本文结构如下。第2 节考虑具有二次型代价的单输入线性无限维系统的静态与动态优化问题。主要结果在定理2.1中给出，是关于变分系统的多项式大道估计。该估计的证明依赖于线性算子的谱理论与辅助结果，这些内容总结于第3.1节。在第3.2节中，我们利用变分系统无穷小生成元的特征向量的线性组合构造一个Riesz基。该构造应用于命题3.2的证明，该命题在第3节中给出。所得分析结果以旋转柔性梁模型为例，在第4节中加以说明。

2 带模态坐标的振荡系统

考虑一个由受控振子组成的无限系统

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_k(t) &= \omega_k \eta_k(t), \\ \dot{\eta}_k(t) &= -\omega_k \xi_k(t) + b_k u(t), \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{1}$$

其中，列向量 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)^\top \in \ell^2(\mathbb{R})$ 和 $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots)^\top \in \ell^2(\mathbb{R})$ 分别充当广义坐标和动量，而实希尔伯特空间 $\ell^2(\mathbb{R})$ 配备了内积 $\langle \xi, \eta \rangle_{\ell^2(\mathbb{R})} = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k$。全文中，正整数集合记为 $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$。控制系统 (1) 被视为振动柔性结构的数学模型，例如弦、梁和板（参见，例如 [44, 第 3] 章）。我们假设实参数 b_k 和 ω_k 满足：

$$b = (b_1, b_2, \ldots)^\top \in \ell^2(\mathbb{R}) \text{ and } b_k \neq 0 \text{ for all } k \in \mathbb{N}, \tag{A1}$$

$$\omega_1 > 0,\ \omega_{k+1} - \omega_k \ge \omega_* > 0 \quad \text{for all} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{A2}$$

对于下文给出的部分技术结果，我们还将考虑以下一些假设：

$$S_k = \sum_{j\neq k} \frac{1}{(\omega_k - \omega_j)^2} \leq \bar{C} < \infty \quad \text{for all } k \in \mathbb{N}, \tag{A3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j\neq k} \frac{b_j^2}{(\omega_j - \omega_k)^2} < \infty, \tag{A4}$$

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{|b_k|^{2\rho}} \sum_{j\neq k} \frac{|b_j|^{2(1+\rho)}}{(\omega_j - \omega_k)^2} < \infty \quad \text{for some } \rho > 1, \tag{A5}$$

$$\liminf_{k\to\infty} (|b_k|\omega_k^{\alpha}) > 0 \quad \text{for some } \alpha > 0. \tag{A6}$$

显然，(A3) 与 (A1) 推出 (A4)。

备注1. 若假设 $\omega_k \asymp k^p$ with $p \geq 1$ and $|b_k| \asymp \omega_k^{-\alpha}$ for some $\alpha > 0$，则条件 (A6) 成立。此外，标准的近远分解结合间隙条件 (A2) 表明，只要满足以下条件，(A5) 就成立

$$2\alpha\rho < 2 - \frac{1}{p}. \tag{2}$$

在第 4 节中，我们将给出一个具有 $p = 2$和 $\alpha = \frac{1}{2}$的旋转梁示例，因此，对于所有 $\rho < \frac{3}{2}$，此类示例均满足 (A5)。

系统 (1) 写成算子形式为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \ \ x(t) \in H = \ell^2(\mathbb{R}) \times \ell^2(\mathbb{R}), \ u(t) \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

其中

$$x = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix},$$
$$\Omega = \mathrm{diag}(\omega_1, \omega_2, ...).$$

我们考虑插值空间 $V_{p,\ q}$，其中 p，$q \in \mathbb{R}$ (参见 [38, 21])，定义如下：

$$V_{p,q} = \left\{ x = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mid \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k^{2p}(\xi_k^2 + \eta_k^2)}{|b_k|^{2q}} < \infty \right\}, \tag{4}$$

其中，$V_{p,\ q}$ 是关于内积的希尔伯特空间

$$\left\langle \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} \right\rangle_{V_{p,q}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k^{2p}(\xi_k\tilde{\xi}_k + \eta_k\tilde{\eta}_k)}{|b_k|^{2q}}.$$

将 $H = V_{0,\ 0}$ 与其对偶空间等同，则 $V_{p,\ q}$ 关于基准空间 H 的对偶空间为 $V_{-p,\ -q}$。此外，我们有 $V_{0,\ 1} \subset H \subset V_{0,\ -1}$，且它们之间存在连续稠密嵌入。这源于以下性质：$b \in \ell^2$，因此 $b \in \ell^\infty$ 和 $\|x\|_H^2 = \sum_k |b_k|^2 \frac{\xi_k^2+\eta_k^2}{|b_k|^2} \leq \|b\|_{\ell^\infty}^2 \|x\|_{V_{0,\ 1}}^2$。

注意，在假设（A6）下，存在常数 $C > 0$ 使得 $|b_k|^{-2} \leq C^2\omega_k^{2\alpha}$，由此得到 $\|x\|_{V_{0,\ 1}} \leq C\|x\|_{V_{\alpha,\ 0}}$。因此，$V_{\alpha,\ 0} \subset V_{0,\ 1}$，且该嵌入是连续且稠密的。所以，在（A6）下，我们有

$$V_{\alpha,0} \hookrightarrow V_{0,1} \hookrightarrow H \hookrightarrow V_{0,-1} \hookrightarrow V_{-\alpha,0}.$$

注意，在假设（A2）下，算子 A: $D(A) \to H$ 是斜自伴且稠密定义的，其中 $D(A) = V_{1,0}$，且 $V_{-1,0} = D(A^*)'$。根据 Lumer–Phillips 定理（例如参见 [7, 39]），可知 A 是定义在 H 上的有界线性算子酉群 $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的无穷小生成元。给定任意 $T > 0$、任意 $x^0 \in H$ 以及任意控制 $u(\cdot) \in L^2(0,T)$，方程（3）存在唯一解 $x(\cdot) \in C^0([0,T]; H) \cap H^1((0,T); V_{-1,0})$（例如参见 [34, 第二部分、第 4.2 节、命题 4.12]），满足 $x(0) = x^0$，并且我们有

$$x(t) = e^{tA}x^0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)\,ds, \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

给定任意 $p, q \in \mathbb{R}$，根据 p 和 q的符号，算子 A 自然地被限制或延拓为作用于 $V_{p,q}$上的算子（仍记为） A，其定义域为 $V_{p+1,q}$，并在 $V_{p,q}$ 上生成半群 $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$，该半群是 H 上半群的限制或延拓（见 [34,第 4.1 节.3]）。

假设（A1）和（A2）对于确保系统（3）的可控性至关重要。回顾一下，给定 $x^0 \in H$ 和 $T > 0$，系统（3）在时刻 T 的可达集定义为 $\mathcal{R}_T(x^0) = \{x(T) \mid u(\cdot) \in L^2(0,T)\}$，其中解 $x(t)$由公式（5）表示，且$\mathcal{R}(x^0) = \bigcup_{T>0} \mathcal{R}_T(x^0)$。我们在以下命题中总结可控性条件。

命题 2.1. 设假设 (A1) 与 (A2) 成立，并设 $T > T_0$，其中

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_*}. \tag{6}$$

则系统 (3) 在时间 T 内于希尔伯特空间 $V_{0,1}$ 中精确可控，并且对每个 $x^0 \in V_{0,1}$，我们有 $\mathcal{R}_T(x^0) = V_{0,1}$，即 $V_{0,1}$ 是 H 中使该系统在时间 T 内精确可控的最大希尔伯特子空间。此外，控制系统的任一解若从 $V_{0,1}$ 中的一点出发，则始终留在 $V_{0,1}$ 中，即我们在 $V_{0,1}$ 中也具有适定性。

证明。众所周知，由对偶性（参见例如 [34, 定理 5.30]），系统（3）在时间 $T > 0$ 内于 $V_{0,1}$ 中精确可控，当且仅当存在 $C_T > 0$，使得如下可观测性不等式成立：

$$\int_0^T |B^* e^{(T-t)A^*}x|^2 dt \geq C_T \|x\|^2_{V_{0,-1}} \quad \text{for all } x \in H. \tag{7}$$

对于 $x = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \in H$，(7) 的坐标表示形式为

$$\int_0^T \Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} c_k e^{i\omega_k t}\Big|^2 dt \geq C_T \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k^2(\xi_k^2 + \eta_k^2), \tag{8}$$

其中 $\omega_{-k} := \omega_k$，$c_k := \frac{b_k}{(\eta_k - i\xi_k)\,2}$，且 $c_{-k} := \frac{b_k}{(\eta_k + i\xi_k)\,2}$ 对于 $k \in \mathbb{N}$。

Haraux 对 Ingham不等式的推广 [20, 第 2] 章以及 [22, 定理 4。6] 意味着存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\int_0^T \Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} c_k e^{i\omega_k t}\Big|^2 dt \geq C \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |c_k|^2, \tag{9}$$

对于所有平方可和复序列 $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$，只要 $\inf_{k\neq l} |\omega_k - \omega_l| > 0$ and$T > 2\pi/\tilde{\omega}$ with

$$\tilde{\omega} := \sup_{K\subset\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \inf_{\substack{k,\,l\,\in\,\mathbb{Z}\setminus(K\cup\{0\})\\ k\neq l}} |\omega_k - \omega_l|, \tag{10}$$

其中 K 遍历 $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 的有限子集。在假设（A2）下，$\tilde{\omega}\geq\omega_*$，因此不等式（9）对每个 $T>T_0$均成立。结合（8）和（9），我们得出可观测性不等式（8）成立。此外，$V_{0,1}$ 是具有可控性的最大空间，因为英厄姆不等式是“最优的”，也就是说，反向不等式成立。事实上，文献中所说的“容许性”指的正是反向不等式；这意味着控制系统的解若始于 $V_{0,1}$，便会始终保持在 $V_{0,1}$ 中。这里我们还证明了“反向不等式（7）”（从而得到范数等价（见 [34, 命题 5.13]））。这表明，在 $V_{0,1}$ 中，我们兼具可控性和容许性（换言之，$V_{0,1}$ 是由 HUM 给出的希尔伯特空间）。

□

注记 2。 由于 $V_{0,1}$ 在 H中稠密，命题 2.1 的条件意味着，系统 (3) 在 H 中对任意时间 $T>T_0$ 均近似可控。然而，这并不能保证在 H中精确可控。

我们将考虑系统 (3) 的两类最优控制问题。

问题 1。（静态优化问题）给定向量 $\bar{x}=\begin{pmatrix}\bar{\xi}\\ \bar{\eta}\end{pmatrix}\in V_{0,1}$ 和实常数 $\bar{u}$，使代价最小

$$J_s(x,u)=\|x-\bar{x}\|_H^2+|u-\bar{u}|^2$$

约束条件为

$$x=\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\in H,\ Ax+Bu=0. \tag{11}$$

（这里，约定 A 表示延拓 $A\colon H\to V_{-1,0}$。）

问题 2。（动态优化问题）给定时间区间 $T>0$、初值 $x^0\in V_{0,1}$、向量 $\bar{x}=\begin{pmatrix}\bar{\xi}\\ \bar{\eta}\end{pmatrix}\in H$ 和实常数 $\bar{u}$，使代价最小

$$J_d(x(\cdot),u(\cdot))=\int_0^T\left(\|x(t)-\bar{x}\|_H^2+|u(t)-\bar{u}|^2\right)dt$$

对所有可能的解 $x(\cdot)$（即方程（3）的解，且对应于容许控制 $u(\cdot)\in L^2(0,T)$ 并满足 $x(0)=x^0$。

受约束的静态极小化问题1 可通过引入拉格朗日函数来处理

$$L_s(x,\lambda,\mu,u)=\frac{1}{2}J_s(x,u)-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\omega_k\eta_k+\mu_k(-\omega_k\xi_k+b_ku)\right),$$

其中 λ_k 和 μ_k 是与（11）的坐标分量相对应的拉格朗日乘子。由于泛函 J_s 在 $H\times\mathbb{R}$上严格凸且强制，存在 J_s 的唯一极小值点$\hat{}$（$\hat{}x$，$\hat{}u$），满足（11），并与唯一的拉格朗日乘子（λ，$\hat{}\mu$）相关联，使得$\hat{}x\in V_{1,0}$，（$\hat{}\lambda^\top$，$\hat{}\mu^\top$）$^\top\in V_{1,0}$，且

$$\begin{aligned}
&\hat{x}-\bar{x}=A^*\hat{\Lambda},\ \hat{u}-\bar{u}=B^*\hat{\Lambda},\ \hat{\Lambda}=\begin{pmatrix}\hat{\lambda}\\ \hat{\mu}\end{pmatrix},\\
&\hat{x}=\begin{pmatrix}\hat{\xi}\\ \hat{\eta}\end{pmatrix},\ \hat{\xi}_k=\bar{\xi}_k-\omega_k\hat{\mu}_k=\frac{b_k\hat{u}}{\omega_k},\ \hat{\eta}_k=\bar{\eta}_k+\omega_k\hat{\lambda}_k=0,\\
&\hat{\mu}_k=\frac{1}{\omega_k}\left(\bar{\xi}_k-\frac{b_k\hat{u}}{\omega_k}\right),\ \hat{\lambda}_k=-\frac{\bar{\eta}_k}{\omega_k},\\
&\hat{u}=\bar{u}+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\hat{\mu}_k=\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k^2}{\omega_k^2}\right)^{-1}\cdot\left(\bar{u}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k\bar{\xi}_k}{\omega_k}\right).
\end{aligned}\tag{12}$$

我们来证明$\hat{x} \in V_{0,1}$。事实上，我们有$\hat{x} = (\hat{\xi}^\top, \hat{\eta}^\top)^\top$，其中$\hat{\eta} = 0$且$\hat{\xi} = \hat{u}\Omega^{-1}b$，因此由$V_{0,1}$的定义可得$\hat{x} \in V_{0,1}$。此外，$A\Lambda = \bar{x} - \hat{x} \in V_{0,1}$，因为我们已假设$\bar{x} \in V_{0,1}$。该断言得证。

问题 2 的解的存在性可由 [25, 第 3] 章中的定理5.10 得出。为证明庞特里亚金极大值原理适用于求解该问题，我们参考 [24] 中概述的有限余维条件。在命题 2.1 的假设下，系统（3）在任意时间 $T > T_0$ 内均在 $V_{0,1}$ 中精确可控。具体而言，若 $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ 是问题 2, $T > T_0$, $x^0 \in V_{0,1}$ 的最优解，那么，由于系统（3）在希尔伯特空间$V_{0,1}$ 中精确可控，[24] 的有限余维条件对该希尔伯特空间 $V_{0,1}$ 成立。因此，存在一些伴随变量 $(\lambda(t)\ \mu(t))$，使得对于 $t \in [0,T]$，对偶空间 $V_{0,-1}$ 中的 $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$ 满足庞特里亚金极大值原理（参见 [24, 定理 2.3]），其中该对偶空间是 $V_{0,1}$ 的对偶空间。

为求得最优解，我们写出哈密顿量

$$H(x,\lambda,\mu,u) = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \omega_k \eta_k - \mu_k \omega_k \xi_k + \mu_k b_k u) - \frac{1}{2}\left(\|x-\bar{x}\|_H^2 + |u-\bar{u}|^2\right)$$

并应用庞特里亚金极大值原理（PMP）。由于 $x(T)$ 是自由的，且问题 2 中没有终端代价，庞特里亚金极大值原理给出终端条件 $\lambda(T) = 0$ 和 $\mu(T) = 0$，以及关于 $\Lambda(t) = \begin{pmatrix}\lambda \\ \mu\end{pmatrix}(t)\ (t)$ 的伴随方程组，其形式为

$$\dot{\Lambda}(t) = A\Lambda(t) + x(t) - \bar{x},\ \Lambda(T) = 0. \tag{13}$$

极值控制为

$$u(t) = \bar{u} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \mu_k(t). \tag{14}$$

将问题（13）反向求解，得到

$$\Lambda(t) = \int_t^T e^{(t-s)A}\,(\bar{x} - x(s))\,ds.$$

问题 2 是在常设假设 $\bar{x} \in H$ 下提出的。在此假设下，注意到 e^{tA} 在 H 上是酉算子，上述表示公式推出 $\Lambda(t) \in H$ 对所有 $t \in [0,T]$ 均成立，只要 $x(\cdot) \in L^1((0,T);\, H)$.

下文中有几处会用到更强的陈述 $\Lambda(t) \in V_{0,1}$。其充分条件为 $x^0 \in V_{0,1}$ 和 $\bar{x} \in V_{0,1}$，此时状态满足 $x(t) \in V_{0,1}$，且相同的表示公式在 $V_{0,1}$ 中仍成立。仅当明确使用基于 $V_{0,1}$ 的估计，或希望强调极值轨线的 b 加权正则性时，才会采用这一附加假设。

由于 e^{tA} 逐模执行旋转，因此它在任意$V_{p,q}$ 上都是等距映射（特别是在 $V_{0,1}$ 上），于是对于每个 $t \in [0,T]$，都有 $\Lambda(t) \in V_{0,1}$ 以及 $\|\Lambda(t)\|_{V_{0,1}} \le \int_t^T \|x(s) - \bar{x}\|_{V_{0,1}}\, ds$。

接下来，我们证明 (14) 和 $u \in L^2(0,T)$ 的良定义性。由 $\Lambda \in C([0,T];\, H)$ 可得$\mu(t) \in \ell^2$ 对所有 t均成立，因此 (14) 中的级数有意义，并且

$$|u(t) - \bar{u}| = \left|\sum_{k\ge 1} b_k \mu_k(t)\right| \le \|b\|_{\ell^2}\, \|\mu(t)\|_{\ell^2}.$$

由于 $\mu \in C([0,T];\, \ell^2) \subset L^2([0,T];\, \ell^2)$，因此 $u \in L^2(0,T)$，并且

$$\|u - \bar{u}\|_{L^2(0,T)} \le \|b\|_{\ell^2}\, \|\mu\|_{L^2(0,T;\ell^2)} < \infty.$$

引入相对于稳态解的偏差（12），并代入公式

$$\begin{aligned}\delta\xi(t)&=\xi(t)-\hat{\xi},\\ \delta\eta(t)&=\eta(t)-\hat{\eta},\\ \delta\lambda(t)&=\lambda(t)-\hat{\lambda},\\ \delta\mu(t)&=\mu(t)-\hat{\mu},\end{aligned}\qquad \Delta(t)=\begin{pmatrix}\delta\xi(t)\\ \delta\eta(t)\\ \delta\lambda(t)\\ \delta\mu(t)\end{pmatrix} \tag{15}$$

进入（1），（1 3）并采用控制（14），我们得到（所谓的变分）微分方程系统 ：

$$\begin{aligned}&\delta\dot{\xi}_k(t)=\omega_k\delta\eta_k(t),\ \delta\dot{\eta}_k(t)=-\omega_k\delta\xi_k(t)+b_k\sum_{j=1}^{\infty}b_j\delta\mu_j(t),\\ &\delta\dot{\lambda}_k(t)=\omega_k\delta\mu_k(t)+\delta\xi_k(t),\\ &\delta\dot{\mu}_k(t)=-\omega_k\delta\lambda_k(t)+\delta\eta_k(t),\ k\in\mathbb{N}.\end{aligned} \tag{16}$$

然后，我们将系统（16）改写为如下抽象形式

$$\dot{\Delta}(t)=\tilde{A}\Delta(t),\quad \Delta(t)\in\tilde{X}=V_{0,1}\times V_{0,1}, \tag{17}$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}0&\Omega&0&0\\ -\Omega&0&0&bb^*\\ I&0&0&\Omega\\ 0&I&-\Omega&0\end{pmatrix},$$

其中 I 表示恒等算子。

本文的主要结果是一个逐点多项式大道估计，表述如下。

定理2.1. 假设（A1）、（A2）、（A3），并固定 $\beta>0$，使得（A5）在 $\rho=\beta+1$ 下成立。对于任意 $T>0$，令（x,u）为问题 2 的唯一最优解，并令 $\Lambda=(\lambda,\mu)$ 为其对应的伴随变量。令（$\hat{}x,\hat{}u,\Lambda$）表示静态问题1的稳态最优三元组。则存在一个常数 $C>0$，它与 T 及该解无关，使得对于每个 $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}&\|x(t)-\hat{x}\|_{V_{0,-\beta-1}}+\|\Lambda(t)-\hat{\Lambda}\|_{V_{0,-\beta-1}}\\ &\qquad\le C\left(\|x(0)-\hat{x}\|_{V_{0,1}}+\|\hat{\Lambda}\|_H\right)\left(\frac{1}{(t+1)^\beta}+\frac{1}{(T-t+1)^\beta}\right).\end{aligned} \tag{18}$$

这意味着，在任意内部子区间 $[\varepsilon,T-\varepsilon]$ 上，最优轨迹都与稳态最优状态多项式级接近（在 $V_{0,-\beta-1}$ 中）。

定理 2.1 将在第 3 节中证明，证明将用到辅助引理 3.1–3.11 以及命题3.2–3.3，这些内容如下所述。

3 定理2.1 的证明

为了更一般地描述变分系统（17）的大时间行为，我们考虑其状态 $\Delta(t)$ 在复值希尔伯特空间 $X=(\ell^2(\mathbb{C}))^4$, 中，其中 $\ell^2(\mathbb{C})$ 是平方可和复序列的希尔伯特空间，其内积定义为 $\langle z,\zeta\rangle_{\ell^2(\mathbb{C})}=\sum_{k=1}^{\infty}z_k\overline{\zeta}_k$。因此，“复化”系统（17）取如下形式

$$\dot{\Delta}(t)=\tilde{A}\Delta(t),\quad \Delta(t)\in X=(\ell^2(\mathbb{C}))^4, \tag{19}$$

˜ ˜其中 $A:\ D(A)\to X$ 以其分块矩阵形式表示为

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}A & BB^*\\ I & -A^*\end{pmatrix}.$$

我们还对系统（19）进行如下复系数变换 s:

$$z=\delta\xi+i\delta\eta,\ \zeta=\delta\xi-i\delta\eta,\ p=\delta\lambda+i\delta\mu,\ q=\delta\lambda-i\delta\mu. \tag{20}$$

经过这一变换，系统（19）可写为:

$$\dot{\theta}(t)=\mathcal{A}\theta(t),\quad \theta(t)\in X=\left(\ell^2(\mathbb{C})\right)^4, \tag{21}$$

其中

$$\theta=\begin{pmatrix}z\\ \zeta\\ p\\ q\end{pmatrix},\ \mathcal{A}=\begin{pmatrix}-i\Omega & 0 & \frac{1}{2}bb^* & -\frac{1}{2}bb^*\\ 0 & i\Omega & -\frac{1}{2}bb^* & \frac{1}{2}bb^*\\ I & 0 & -i\Omega & 0\\ 0 & I & 0 & i\Omega\end{pmatrix}. \tag{22}$$

注意，变量代换（20）定义在整个复空间 X 上，它由线性算子 $\pi_1:\ X\to X$给出，使得

$$X\ni\Delta=\begin{pmatrix}\delta\xi\\ \delta\eta\\ \delta\lambda\\ \delta\mu\end{pmatrix}\mapsto\pi_1\Delta=\begin{pmatrix}\delta\xi+i\delta\eta\\ \delta\xi-i\delta\eta\\ \delta\lambda+i\delta\mu\\ \delta\lambda-i\delta\mu\end{pmatrix}\in X, \tag{23}$$

逆算子 π_1^{-1}: $X\to X$ 由以下规则定义:

$$X\ni\theta=\begin{pmatrix}z\\ \zeta\\ p\\ q\end{pmatrix}\mapsto\pi_1^{-1}\theta=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}z+\zeta\\ i(\zeta-z)\\ p+q\\ i(q-p)\end{pmatrix}\in X. \tag{24}$$

下文中，当上下文明确时，我们将省略 $\|\cdot\|$ 上的下标。利用三角不等式，可得上述算子有界:

$$\|\pi_1\|\le 2,\ \|\pi_1^{-1}\|\le 1. \tag{25}$$

3.1 谱分析

我们对算子 $\mathcal{A}$ 进行谱分析。首先，计算其特征元素。假设

$$\mathcal{A}\theta=\sigma\theta,\ \theta\in D(\mathcal{A})\subset X. \tag{26}$$

该算子方程可以关于由 k索引的(z,ζ,p,q)的坐标写成

$$\begin{aligned}&-i\omega_k z_k+b_k\phi=\sigma z_k,\\ &i\omega_k\zeta_k-b_k\phi=\sigma\zeta_k,\\ &z_k-i\omega_k p_k=\sigma p_k,\\ &\zeta_k+i\omega_k q_k=\sigma q_k,\ k\in\mathbb{N},\end{aligned} \tag{27}$$

其中

$$\phi = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} b_j(p_j - q_j) = \frac{1}{2}b^*(p-q). \tag{28}$$

在（A1）下，方程组（27）仅有平凡解，若 $\sigma = \pm i\omega_k$ 对某个 $k \in \mathbb{N}$成立。因此，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，$\sigma = \pm i\omega_k$ 不是 $\mathcal{A}$的特征值。假设 $\sigma \notin \{\pm i\omega_1, \pm i\omega_2, ...\}$，我们可以通过求解（26）来表示 θ 的各分量，并用 ϕ参数化：

$$\begin{aligned} z &= (\sigma I + i\Omega)^{-1} b\phi,\ \zeta = -(\sigma I - i\Omega)^{-1} b\phi, \\ p &= (\sigma I + i\Omega)^{-1} z,\ q = (\sigma I - i\Omega)^{-1}\zeta. \end{aligned} \tag{29}$$

将这些公式代入（28），得到（26）的可解条件：

$$\phi = \frac{1}{2} b^* \left((\sigma I + i\Omega)^{-2} + (\sigma I - i\Omega)^{-2} \right) b\phi. \tag{30}$$

当 $\phi = 0$时，（26）的唯一解是 $\theta = 0$。因此，（26）的非平凡解对应于 $\phi \neq 0$；在这种情况下，由（特征方程）可得问题（26）的特征方程（30）：

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \left(\frac{1}{(\sigma + i\omega_k)^2} + \frac{1}{(\sigma - i\omega_k)^2} \right) = 2, \tag{31}$$

或者等价地：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^2(\sigma^2 - \omega_k^2)}{(\sigma^2 + \omega_k^2)^2} = 1.$$

算子 $\sigma_p(\mathcal{A})$ 的点谱 $\mathcal{A}$ 由（31）的解定义。

引理 3.1。 $\mathcal{A}$ 的点谱 $\sigma_p(\mathcal{A})$具有以下性质：

1) $\sigma_p(\mathcal{A})$ 是哈密顿的：若 σ 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值，那么 $-\sigma$、 $\overline{\sigma}$ 和 $-\overline{\sigma}$ 也都是特征值；

2) $\sigma_p(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$，即谱是双曲的；

3) $\sigma_p(\mathcal{A}) \subset \cup_{k=1}^{\infty}(\mathcal{B}_k^+ \cup \mathcal{B}_k^-)$，其中

$$\mathcal{B}_k^+ = \{\sigma \in \mathbb{C} \,|\, |\sigma - i\omega_k| \leq \|b\|_{\ell^2(\mathbb{R})}\}, \qquad \mathcal{B}_k^- = \{\sigma \in \mathbb{C} \,|\, |\sigma + i\omega_k| \leq \|b\|_{\ell^2(\mathbb{R})}\}.$$

证明。特征方程（31）在将 σ 替换为 $-\sigma$ 并将 σ 替换为 $\overline{\sigma}$时保持不变，这证明了第一条性质。这与矩阵 Δ 是哈密顿矩阵这一事实相呼应（见 [36, 引理 2]）。为证明第二条性质，我们回顾一下，前面已经指出，$\pm i\omega_k$ 不是 $\mathcal{A}$的特征值。此外，当 $\sigma = i\omega$、 $\omega \in \mathbb{R}$时，方程（31）的左侧为负；因此，特征方程没有纯虚根。

接下来只需证明第三条性质。为此，我们利用 H¨older 不等式估计其左侧：（31）

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b_k^2}{(\sigma + i\omega_k)^2} + \frac{b_k^2}{(\sigma - i\omega_k)^2} \right) \right| \leq 2\|b\|_{\ell^2(\mathbb{R})}^2 \cdot \sup_{j\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{|\sigma + i\omega_k|^2}, \frac{1}{|\sigma - i\omega_k|^2} \right\}. \tag{32}$$

若（31）对某个 $\sigma \in \mathbb{C}$ 成立，则（32）意味着

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{|\sigma + i\omega_k|^2}, \frac{1}{|\sigma - i\omega_k|^2} \right\} \geq \frac{1}{\|b\|_{\ell^2(\mathbb{R})}^2},$$

也就是说，等价地，

$$\inf_{j\in\mathbb{N}}\{|\sigma+i\omega_k|,|\sigma-i\omega_k|\}\le\|b\|_{\ell^2(\mathbb{R})},$$

这与假设（A2）一起，证明了引理 3.1的断言 3）。 □

事实证明，算子 $\mathcal{A}$ 只有点谱，这是由以下引理得出的。

引理 3.2. 对每个 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\sigma_p(\mathcal{A})$，预解式 $R(\lambda;\mathcal{A})=(\mathcal{A}-\lambda I)^{-1}$ 是从 X 到 X的有界线性算子。

证明. 该引理并非显而易见，需要进行一些计算。利用（ ）中 $\mathcal{A}$ 22 $R\ \lambda\ \mathcal{A}$ $\theta\in X$ $\theta=\ \mathcal{A}-$ 的结构˜，我们注意到，$\lambda I^{-1}\tilde{\theta}\in X$ 预解算子（ ； ）按照方程组将一个向量映射为（ ）

$$\begin{aligned}&-(i\Omega+\lambda I)z+\tilde{\phi}b=\tilde{z},\\&(i\Omega-\lambda I)\zeta-\tilde{\phi}b=\tilde{\zeta},\\&-(i\Omega+\lambda I)p+z=\tilde{p},\\&(i\Omega-\lambda I)q+\zeta=\tilde{q},\end{aligned}\quad\theta=\begin{pmatrix}z\\\zeta\\p\\q\end{pmatrix},\ \tilde{\theta}=\begin{pmatrix}\tilde{z}\\\tilde{\zeta}\\\tilde{p}\\\tilde{q}\end{pmatrix},\tag{33}$$

$$\tilde{\phi}=\frac{1}{2}b^*(p-q)=\frac{1}{2}\langle p-q,b\rangle.$$

有三种可能的情况。

˜1）若 $\lambda\notin\sigma_p(\mathcal{A})\cup\{\pm i\omega_1,\pm i\omega_2,...\}$ 则，对任意 $\theta\in X$，方程组（33）有唯一解$\theta\in X$ 其分量为

$$\begin{aligned}z&=(\lambda I+i\Omega)^{-1}\big(\tilde{\phi}(\tilde{\theta})b-\tilde{z}\big),\\\zeta&=-(\lambda I-i\Omega)^{-1}\big(\tilde{\phi}(\tilde{\theta})b+\tilde{\zeta}\big),\\p&=(\lambda I+i\Omega)^{-2}\big(\tilde{\phi}(\tilde{\theta})b-\tilde{z}\big)-(\lambda I+i\Omega)^{-1}\tilde{p},\\q&=-(\lambda I-i\Omega)^{-2}\big(\tilde{\phi}(\tilde{\theta})b+\tilde{\zeta}\big)-(\lambda I-i\Omega)^{-1}\tilde{q},\end{aligned}\tag{34}$$

˜其中线性泛函 $\phi\colon\ X\to\mathbb{C}$ 是有界的：

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(\tilde{\theta})=b^*\big\{&(\lambda I+i\Omega)^{-2}\tilde{z}-(\lambda I-i\Omega)^{-2}\tilde{\zeta}\\&+(\lambda I+i\Omega)^{-1}\tilde{p}-(\lambda I-i\Omega)^{-1}\tilde{q}\big\}/\big\{b^*(\lambda I+i\Omega)^{-2}b+b^*(\lambda I-i\Omega)^{-2}b-2\big\}.\end{aligned}\tag{35}$$

˜公式 (34) 是通过求解关于 θ 的方程 (33)，并将 ϕ 视为参数得到的。然后，在 $\sigma=\lambda$ 不是方程 (31) 的解的前提下，公式 (35) 将 $\tilde{\phi}=\frac{1}{2}b^*(p-q)$ 表示为关于 $\tilde{\theta}$ 的表达式。总之，公式 (34)–(35) 定义了有界线性算子 ˜$R(\lambda;\ \mathcal{A})$：$X\ni\theta\mapsto\theta\in X$，其中 $\lambda\notin\sigma_p(\mathcal{A})\cup\{\pm i\omega_1,\pm i\omega_2,...\}$。

2）如果 $\lambda=i\omega_k$ 对于某个 $k\in\mathbb{N}$成立，那么z_j、ζ_j、p_j、q_j的坐标 θ 可以根据34的分量，在 $j\neq k$ 下推导得出：

$$\begin{aligned}z_j&=\frac{b_j\tilde{\phi}(\tilde{\theta})-\tilde{z}_j}{\lambda+i\omega_j},\\\zeta_j&=-\frac{b_j\tilde{\phi}(\tilde{\theta})+\tilde{\zeta}_j}{\lambda-i\omega_j},\\p_j&=\frac{b_j\tilde{\phi}(\tilde{\theta})-\tilde{z}_j}{(\lambda+i\omega_j)^2}-\frac{\tilde{p}_j}{\lambda+i\omega_j},\\q_j&=-\frac{b_j\tilde{\phi}(\tilde{\theta})+\tilde{\zeta}_j}{(\lambda-i\omega_j)^2}-\frac{\tilde{q}_j}{\lambda-i\omega_j},\quad\text{for } j\neq k,\end{aligned}\tag{36}$$

˜ ˜，而z_k、ζ_k、p_k、q_k的坐标 θ 连同 $\phi(\theta)$，可由33得出：

$$\tilde{\phi}(\tilde{\theta}) = -\tilde{\zeta}_k / b_k, \tag{37}$$

$$\begin{aligned} z_k &= -\frac{\tilde{z}_k + \tilde{\zeta}_k}{2i\omega_k}, \\ \zeta_k &= \tilde{q}_k, \\ p_k &= \frac{\tilde{z}_k + \tilde{\zeta}_k}{4\omega_k^2} - \frac{\tilde{p}_k}{2i\omega_k}, \\ q_k &= \frac{\tilde{z}_k + \tilde{\zeta}_k}{4\omega_k^2} - \frac{\tilde{p}_k}{2i\omega_k} + \frac{2\tilde{\zeta}_k}{b_k^2} + \frac{1}{b_k}\sum_{j\neq k} b_j(p_j - q_j). \end{aligned} \tag{38}$$

˜ ˜因此，对于每个 $\theta \in X$，由（37）和（36）可知，对所有$j \neq k$，$\phi(\theta)$和（z_j, ζ_j, p_j, q_j）都有定义；随后由（38）计算分量（z_k, ζ_k, p_k, q_k）。上述过程定义了˜有界线性算子 $R(i\omega_k; \mathcal{A})$：$X \ni \theta \mapsto \theta \in X$。

3）情形 $\lambda = -i\omega_k$ 的处理与情形2）类似，其坐标（z_j、ζ_j、p_j、q_j）由$\theta = R(-i\omega_k;\ \mathcal{A})\ \theta$ 根据（36）定义，并且

$$\tilde{\phi}(\tilde{\theta}) = \tilde{z}_k / b_k,$$

$$\begin{aligned} z_k &= \tilde{p}_k, \\ \zeta_k &= \frac{\tilde{z}_k + \tilde{\zeta}_k}{2i\omega_k}, \\ p_k &= \frac{\tilde{z}_k + \tilde{\zeta}_k}{4\omega_k^2} + \frac{\tilde{q}_k}{2i\omega_k} + \frac{2\tilde{z}_k}{b_k^2} + \frac{1}{b_k}\sum_{j\neq k} b_j(q_j - p_j), \\ q_k &= \frac{\tilde{z}_k + \tilde{\zeta}_k}{4\omega_k^2} + \frac{\tilde{q}_k}{2i\omega_k}. \end{aligned}$$

引理得证。 □

为了估计 $\mathcal{A}$的特征值渐近性质，我们需要以下辅助结果，它是 Rouch´é 定理的推论 [30, 第 390] 页。

引理 3.3. 设 $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda_0^2 + r(\lambda)$ 是一个复值函数，使得 $\lambda_0 > 0$ 并且 $r(\lambda)$ 在包含闭邻域的某个域内全纯

$$\overline{B}_\varepsilon(\lambda_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon\}$$

对某个 $0 < \varepsilon < \lambda_0$ 成立。如果

$$|r(\lambda_0 + \tilde{\lambda})| < \varepsilon(2\lambda_0 - \varepsilon) \quad for\ all\ \tilde{\lambda} \in \mathbb{C}\ s.t.\ |\tilde{\lambda}| = \varepsilon, \tag{39}$$

那么 $f(\lambda)$ 恰有一个零点[1] 在 $B_\varepsilon(\lambda_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$。

假设函数 $r(\lambda)$ 由 (39) 中的幂级数定义，我们从引理 3.3 中推导出一个有用的推论。

[1]我们对 $f(\lambda)$ 的每个零点按其重数计数。

推论 3.1. 设 $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda_0^2 + \sum_{n=3}^{\infty} c_n \lambda^n$ 的幂级数在 $|\lambda| < R$,$\lambda_0 \in (0, R)$ 内收敛，并且设

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{n+2}| \lambda_0^n (1+\varkappa)^{n+2} < \varkappa(2-\varkappa), \tag{40}$$

对于某个 $\varkappa \in \left(0, \text{最小值}\{1, \frac{R}{\lambda_0} - 1\}\right)$。那么方程 $f(\lambda) = 0$ 在 ε-邻域内恰有一个解 λ_0，且 $\varepsilon = \varkappa\lambda_0$。特别地，对于 $\varkappa = \frac{1}{2}$ 和 $\lambda_0 < \frac{2R}{3}$，条件 (40)具有如下形式

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{n+2}| \left(\frac{3\lambda_0}{2}\right)^n < \frac{1}{3}. \tag{41}$$

引理 3.4. 在假设（$A1$）和（$A2$）下，算子 $\mathcal{A}$ 的谱 $\sigma(\mathcal{A}) = \{\sigma_k^+, \sigma_k^-, \sigma_{-k}^+, \sigma_{-k}^- \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ 可表示为如下形式 $k \to \infty$:

$$\begin{aligned} \sigma_k^+ &= i\omega_k + \nu_k, \\ \sigma_k^- &= i\omega_k - \overline{\nu_k}, \\ \sigma_{-k}^+ &= -i\omega_k + \overline{\nu_k}, \\ \sigma_{-k}^- &= -i\omega_k - \nu_k, \end{aligned} \tag{42}$$

其中

$$\begin{aligned} \nu_k &= \lambda_k^0 + \varepsilon_k, \\ \lambda_k^0 &= \frac{|b_k|}{\sqrt{2 + \frac{b_k^2}{4\omega_k^2} + 2\sum_{j\neq k} \frac{b_j^2(\omega_k^2+\omega_j^2)}{(\omega_k^2-\omega_j^2)^2}}} > 0, \end{aligned} \tag{43}$$

其中 $\varepsilon_k \in \mathbb{C}$ 满足 $|\varepsilon_k| < \frac{\lambda_k^0}{2}$。特别地，当 $k \to \infty$ 时，$\operatorname{Re}\sigma_{\pm k}^{\pm} \to 0$。

证明。将 $\sigma = i\omega_k + \lambda$ 代入（31），得到

$$\begin{aligned} &\frac{b_k^2}{\lambda^2} + \frac{b_k^2}{(\lambda + 2i\omega_k)^2} \\ &+ \sum_{j\neq k} b_j^2 \left(\frac{1}{(\lambda + i(\omega_k + \omega_j))^2} + \frac{1}{(\lambda + i(\omega_k - \omega_j))^2} \right) = 2. \end{aligned}$$

将该方程乘以 λ^2 后得到

$$f(\lambda) \equiv \lambda^2 - (\lambda_k^0)^2 + r(\lambda) = 0,$$

其中 λ_k^0 由（43）定义，而 $r(\lambda) = \sum_{n=3}^{\infty} c_n \lambda^n$,

$$\begin{aligned} \frac{r(\lambda)}{(\lambda_k^0)^2 \lambda^3} =& -\frac{\lambda + 4i\omega_k}{4\omega_k^2(\lambda + 2i\omega_k)^2} - \sum_{j\neq k} \frac{b_j^2(\lambda + 2i(\omega_k + \omega_j))}{b_k^2(\omega_k + \omega_j)^2(\lambda + i(\omega_k + \omega_j))^2} \\ &- \sum_{j\neq k} \frac{b_j^2(\lambda + 2i(\omega_k - \omega_j))}{b_k^2(\omega_k - \omega_j)^2(\lambda + i(\omega_k - \omega_j))^2}, \\ c_n =& (n-1) i^{n-2} (\lambda_k^0)^2 \Big\{ \frac{1}{(2\omega_k)^n} + \sum_{j\neq k} \frac{b_j^2}{b_k^2} \left(\frac{1}{(\omega_k + \omega_j)^n} + \frac{1}{(\omega_k - \omega_j)^n} \right) \Big\}, \ n \geq 3. \end{aligned} \tag{44}$$

在假设（A1）和（A2）下，余项 $r(\lambda)$ 是 λ 的一个全纯函数，其定义域为圆盘$|\lambda| < R$，其收敛半径 $R > 0$ 等于从 $\lambda = 0$ 到 $r(\lambda)$ [30, 第7章，§3], 即 $R =$ 最小值$\{R^*, R_*\}$,

$$R^* = \min_{j\neq k}\{\omega_k + \omega_j\},\ R_* = \min_{j\neq k}\{|\omega_k - \omega_j|\} \geq \omega_* > 0. \tag{45}$$

公式（43）表明

$$0 < \lambda_k^0 < \frac{|b_k|}{\sqrt{2}}. \tag{46}$$

W我们利用此估计确保当 $\lambda_0 = \lambda_k^0$时，不等式（40）成立，前提是 at

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{n+2}| \left(\frac{b_k^2(1+\varkappa)}{2}\right)^n < \frac{\varkappa(2-\varkappa)}{(1+\varkappa)^2},\ \varkappa \in (0,1). \tag{47}$$

我们代入（44）中的系数 c_{n+2}，以证明当47时，不等式（成立

$$b_k^2 \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\gamma_{n+2}x^n < \frac{2\varkappa(2-\varkappa)}{(1+\varkappa)^2},\ x = \frac{b_k^2(1+\varkappa)}{2} < 1, \tag{48}$$

$$\gamma_n = \left|\frac{1}{(2\omega_k)^n} + \sum_{j\neq k}\frac{b_j^2}{b_k^2}\left(\frac{1}{(\omega_k+\omega_j)^n} + \frac{1}{(\omega_k-\omega_j)^n}\right)\right|.$$

我们利用三角不等式、Hölder 不等式以及恒等式 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\gamma_{n+2}x^n = \frac{d}{dx}\sum_{n=2}^{\infty}\gamma_{n+1}x^n$，逐项估计（48）的左侧：¨

$$b_k^2 \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\gamma_{n+2}x^n \leq S_1 + S_2 + S_3, \tag{49}$$

$$S_1 = b_k^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{(2\omega_k)^{n+2}} = b_k^2\frac{d}{dx}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(2\omega_k)^{n+1}} = \frac{b_k^2 x(4\omega_k - x)}{4\omega_k^2(2\omega_k - x)^2},$$

$$S_2 = \|b\|^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{(R^*)^{n+2}} = \frac{\|b\|^2 x(2R^* - x)}{(R^*)^2(R^* - x)^2},$$

$$S_3 = \|b\|^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{(R_*)^{n+2}} = \frac{\|b\|^2 x(2R_* - x)}{(R_*)^2(R_* - x)^2},$$

其中 R^* 和 R_* 由（45）定义，且当 $x \neq 0$时，不等式（49）严格成立。将估计（49）应用于（48），可推知对于某个 $\varkappa \in (0,1)$，条件（40）成立，当且仅当

$$S_1 + S_2 + S_3 \leq \frac{2\varkappa(2-\varkappa)}{(1+\varkappa)^2},\ x = \frac{b_k^2(1+\varkappa)}{2} < 1. \tag{50}$$

由于连续函数 S_1、S_2、S_3 在 $x = 0$处取值为零，因此我们得出，对于任意 $\varkappa \in (0,1)$，在假设（A1）和（A2）下，当 $x > 0$ 足够小时（即 k 足够大时），条件（50）对

特别地，对于 $\varkappa = \frac{1}{2}$，推论 3.1 表明，$f(\lambda) = 0$ 在 $\frac{\lambda_k^0}{2}$ 的邻域内存在一个唯一根 λ_k^0。这证明 $\sigma_k^+ = i\omega_k + \lambda_k^0 + \varepsilon_k$ 是方程 (31) 的一个解，其中 $|\varepsilon_k| < \frac{\lambda_k^0}{2}$。特征值 σ_k^-、σ_{-k}^+和 σ_{-k}^- 通过利用 σ_k^+ 的对称性，从 $\sigma(\mathcal{A})$ 得到（引理 3.1）。

□

注记 3. 在 (A1)-(A2) 条件下，有

$$\sum_{j\neq k}|b_j|^2\frac{\omega_k^2+\omega_j^2}{(\omega_k^2-\omega_j^2)^2}\to 0 \qquad \text{as } k\to+\infty,$$

因此

$$\lambda_k^0=\frac{|b_k|}{\sqrt{2}}\big(1+\mathrm{o}(1)\big), \qquad k\to+\infty.$$

特别是， $\lambda_k^0\asymp|b_k|$，且由于 $|\varepsilon_k|\le\frac{1}{2}\lambda_k^0$ 由引理3.4可知，$\mathrm{Re}\,\nu_k\asymp|b_k|$。

下面的引理指出， $\mathcal{A}$ 的每个广义特征向量实际上都是特征向量。通俗地说，这意味着将 $\mathcal{A}$视为一个无限矩阵时，其“约旦标准形”不包含大小大于一的约旦块。

引理3.5。 在引理3.4的假设下，设$\hat{}\sigma\in\mathbb{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个形如(42)的特征值。那么，特征值$\hat{}\sigma$ 的代数重数为1。

证明。 该引理的结论由$\mathcal{A}$ 对应于孤立谱点$\hat{}\sigma$ 的谱投影的构造，以及$\hat{}\sigma$ 是特征方程(31)的单根这一事实得出。

□

3.2 Riesz基的构造

在本小节中，我们构造 X 的一个 Riesz 基，它由 $\mathcal{A}$的特征向量两两线性组合而成。对于复数 $\sigma\notin\{\pm i\omega_1,\pm i\omega_2,\ldots\}$，记向量 $\theta(\sigma)\in X$，其分量由（29）定义，其中 $\phi=1$:

$$\theta(\sigma)=\begin{pmatrix}z\\ \zeta\\ p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\sigma I+i\Omega)^{-1}b\\ -(\sigma I-i\Omega)^{-1}b\\ (\sigma I+i\Omega)^{-2}b\\ -(\sigma I-i\Omega)^{-2}b\end{pmatrix}. \tag{51}$$

由第3.1 节的结果可知

$$\theta_k^+=\theta(\sigma_k^+),\ \theta_k^-=\theta(\sigma_k^-),\ \theta_{-k}^+=\theta(\sigma_{-k}^+),\ \theta_{-k}^-=\theta(\sigma_{-k}^-) \tag{52}$$

是 $\mathcal{A}$的特征向量，其中 σ_k^+， σ_k^-， σ_{-k}^+， σ_{-k}^- 是引理3.4中由（42）给出的特征值。向量 $\mathcal{A}$ 的特征向量序列在 X中是完备的，下面的引理对此进行了总结。

引理3.6. 在假设（A1）和（A2）下， $\mathcal{A}$所有特征向量的闭线性张成与 X重合，即

$$\overline{\mathrm{span}}\left\{\theta_k^+,\theta_k^-,\theta_{-k}^+,\theta_{-k}^-\,|\,k\in\mathbb{N}\right\}=X.$$

证明。 线性算子 $\mathcal{A}:\ D(\mathcal{A})\to X$ 在希尔伯特空间 X中稠密定义且为闭算子，其谱完全由孤立特征值组成： $\sigma(\mathcal{A})=\sigma_p(\mathcal{A})=\{\sigma_k^+,\sigma_k^-,\sigma_{-k}^+,\sigma_{-k}^-\,|\,k\in\mathbb{N}\}$。由此，根据 [18], 中的引理 2.21 和 2.22，可知 sp($\mathcal{A}$) $=X$，其中 sp($\mathcal{A}$) 是 A 的根子空间（即所有 $\mathcal{A}$的广义特征向量的闭线性张成）。由于引理 3.5， $\mathcal{A}$ 的每个广义特征向量同时也是特征向量，从而证明了引理3.6的断言。

□

考虑 $\{\hat{\theta}_k^z、\hat{\theta}_k^\zeta、\hat{\theta}_k^p、\hat{\theta}_k^q\}_{k=1}^\infty$ 中的“标准”标准正交基。这里所说的标准，是指每个向量 $\hat{\theta}_k^z、\hat{\theta}_k^\zeta、\hat{\theta}_k^p、\hat{\theta}_k^q$ 恰好有一个坐标等于 1，而其他坐标均为零。更准确地说，我们引入线性算子 $\Pi_k: X \to \mathbb{C}^4$，它们将 θ-向量映射到由坐标 $(z_k、\ \theta_k、\ p_q、\ q_k)^\top \in \mathbb{C}^4$ 张成的子空间：

$$\Pi_k\theta = \begin{pmatrix} z_k \\ \zeta_k \\ p_k \\ q_k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

那么，对于标准正交基，我们有

$$\Pi_k\hat{\theta}_k^z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Pi_k\hat{\theta}_k^\zeta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Pi_k\hat{\theta}_k^p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \Pi_k\hat{\theta}_k^q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

并且对所有 $n \neq k$，$\Pi_n\hat{\theta}_k^z = \Pi_n\hat{\theta}_k^\zeta = \Pi_n\hat{\theta}_k^p = \Pi_n\hat{\theta}_k^q = 0 \in \mathbb{C}^4$。

引理 3.7。 在假设 (*A1*)、(*A2*)和 (*A4*)成立的条件下，设向量 $\{\theta_k^z, \theta_k^\zeta, \theta_k^p, \theta_k^q\}_{k=1}^\infty$ 定义如下

$$\begin{aligned} \theta_k^z &= \frac{1}{2b_k \operatorname{Re}\nu_k}\left(\overline{\nu}_k{}^2\theta_{-k}^+ - \nu_k{}^2\theta_{-k}^-\right), \\ \theta_k^\zeta &= -\frac{1}{2b_k \operatorname{Re}\nu_k}\left(\nu_k{}^2\theta_k^+ - \overline{\nu}_k{}^2\theta_k^-\right), \\ \theta_k^p &= \frac{1}{2b_k}\left(\overline{\nu}_k{}^2\theta_{-k}^+ + \nu_k{}^2\theta_{-k}^-\right), \\ \theta_k^q &= -\frac{1}{2b_k}\left(\nu_k{}^2\theta_k^+ + \overline{\nu}_k{}^2\theta_k^-\right), \ k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{53}$$

其中 ν_k 由引理 (43) 中的式子定义 *3.4*。

那么，序列 $\{\theta_k^z, \theta_k^\zeta, \theta_k^p, \theta_k^q\}_{k=1}^\infty$ 与标准正交基$\{\hat{\theta}_k^z、\hat{\theta}_k^\zeta、\hat{\theta}_k^p、\hat{\theta}_k^q\}_{k=1}^\infty$ 在 X 中平方可和接近，即

$$\sum_{k=1}^\infty \left(\|\theta_k^z - \hat{\theta}_k^z\|^2 + \|\theta_k^\zeta - \hat{\theta}_k^\zeta\|^2 + \|\theta_k^p - \hat{\theta}_k^p\|^2 + \|\theta_k^q - \hat{\theta}_k^q\|^2\right) < \infty. \tag{54}$$

证明。我们用算子 Π_k重写上述平方和：

$$\sum_{k=1}^\infty \|\theta_k^s - \hat{\theta}_k^s\|^2 = \sum_{k=1}^\infty\sum_{j=1}^\infty \|\Pi_j(\theta_k^s - \hat{\theta}_k^s)\|^2 = \sum_{k=1}^\infty \|\Pi_k(\theta_k^s - \hat{\theta}_k^s)\|^2 + \sum_{k=1}^\infty\sum_{j\neq k} \|\Pi_j\theta_k^s\|^2, \tag{55}$$

其中，符号“s”表示上标 z、 ζ、 p 或 q 中的任意一个，且 $\mathbb{C}^4$ 中的范数定义为厄米范数。

为证明这两个序列平方可和接近 [12], 我们首先注意到

$$\Pi_k\theta_k^z = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{(\operatorname{Re}\nu_k)^2 + (4\omega_k + \operatorname{Im}\nu_k)\operatorname{Im}\nu_k}{(\operatorname{Re}\nu_k)^2 + (2\omega_k + \operatorname{Im}\nu_k)^2} \\ 0 \\ -4i\omega_k \frac{2\omega_k \operatorname{Im}\nu_k + |\nu_k|^2}{[(\operatorname{Re}\nu_k)^2 + (2\omega_k + \operatorname{Im}\nu_k)^2]^2} \end{pmatrix},$$

$$\Pi_k\theta_k^{\zeta}=\begin{pmatrix}-\frac{(\mathrm{Re}\,\nu_k)^2+(4\omega_k+\mathrm{Im}\,\nu_k)\mathrm{Im}\,\nu_k}{(\mathrm{Re}\,\nu_k)^2+(2\omega_k+\mathrm{Im}\,\nu_k)^2}\\1\\4i\omega_k\frac{2\omega_k\mathrm{Im}\,\nu_k+|\nu_k|^2}{[(\mathrm{Re}\,\nu_k)^2+(2\omega_k+\mathrm{Im}\,\nu_k)^2]^2}\\0\end{pmatrix},$$

$$\Pi_k\theta_k^{p}=\begin{pmatrix}-i\mathrm{Im}\,\nu_k\\-i\frac{2\omega_k[(\mathrm{Re}\,\nu_k)^2-(\mathrm{Im}\,\nu_k)^2]-|\nu_k|^2\mathrm{Im}\,\nu_k}{(\mathrm{Re}\,\nu_k)^2+(2\omega_k+\mathrm{Im}\,\nu_k)^2}\\1\\\frac{(2\omega_k(\mathrm{Re}\,\nu_k+\mathrm{Im}\,\nu_k)+|\nu_k|^2)(2\omega_k(\mathrm{Re}\,\nu_k-\mathrm{Im}\,\nu_k)-|\nu_k|^2)}{[(\mathrm{Re}\,\nu_k)^2+(2\omega_k+\mathrm{Im}\,\nu_k)^2]^2}\end{pmatrix},$$

$$\Pi_k\theta_k^{q}=\begin{pmatrix}i\frac{2\omega_k[(\mathrm{Re}\,\nu_k)^2-(\mathrm{Im}\,\nu_k)^2]-|\nu_k|^2\mathrm{Im}\,\nu_k}{(\mathrm{Re}\,\nu_k)^2+(2\omega_k+\mathrm{Im}\,\nu_k)^2}\\i\mathrm{Im}\,\nu_k\\\frac{(2\omega_k(\mathrm{Re}\,\nu_k+\mathrm{Im}\,\nu_k)+|\nu_k|^2)(2\omega_k(\mathrm{Re}\,\nu_k-\mathrm{Im}\,\nu_k)-|\nu_k|^2)}{[(\mathrm{Re}\,\nu_k)^2+(2\omega_k+\mathrm{Im}\,\nu_k)^2]^2}\\1\end{pmatrix}.$$

引理 46 中的估计式 3.4表明

$$|\nu_k|<\sqrt{2}|b_k|. \tag{56}$$

然后，由不等式（56）以及假设（*A*1）和（*A*2），可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|\Pi_k(\theta_k^s-\hat{\theta}_k^s)\|^2<\infty \tag{57}$$

对于分别表示分量 z,ζ,p,q 的每个“s”。

由于（55），接下来只需证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\neq k}\|\Pi_j\theta_k^s\|^2<\infty. \tag{58}$$

直接计算可得

$$\Pi_j\theta_k^{z}=\frac{b_j}{2b_k\mathrm{Re}\,\nu_k}\begin{pmatrix}\frac{\overline{\nu}_k^{\,2}}{i(\omega_j-\omega_k)+\overline{\nu}_k}+\frac{\nu_k^2}{i(\omega_k-\omega_j)+\nu_k}\\\frac{\overline{\nu}_k^{\,2}}{i(\omega_j+\omega_k)-\overline{\nu}_k}-\frac{\nu_k^2}{i(\omega_j+\omega_k)+\nu_k}\\\frac{\overline{\nu}_k^{\,2}}{(i(\omega_j-\omega_k)+\overline{\nu}_k)^2}-\frac{\nu_k^2}{(i(\omega_k-\omega_j)+\nu_k)^2}\\-\frac{\overline{\nu}_k^{\,2}}{(i(\omega_j+\omega_k)-\overline{\nu}_k)^2}+\frac{\nu_k^2}{(i(\omega_j+\omega_k)+\nu_k)^2}\end{pmatrix},$$

$$\Pi_j\theta_k^{\zeta}=\frac{b_j}{2b_k\mathrm{Re}\,\nu_k}\begin{pmatrix}-\frac{\nu_k^2}{i(\omega_k+\omega_j)+\nu_k}+\frac{\overline{\nu}_k^2}{i(\omega_k+\omega_j)-\overline{\nu}_k}\\\frac{\nu_k^2}{i(\omega_k-\omega_j)+\nu_k}-\frac{\overline{\nu}_k^2}{i(\omega_k-\omega_j)-\overline{\nu}_k}\\-\frac{\nu_k^2}{(i(\omega_k+\omega_j)+\nu_k)^2}+\frac{\overline{\nu}_k^2}{(i(\omega_k+\omega_j)-\overline{\nu}_k)^2}\\\frac{\nu_k^2}{(i(\omega_k-\omega_j)+\nu_k)^2}-\frac{\overline{\nu}_k^2}{(i(\omega_k-\omega_j)-\overline{\nu}_k)^2}\end{pmatrix},$$

$$\Pi_j\theta_k^{p}=\frac{b_j}{2b_k}\begin{pmatrix}\frac{\overline{\nu}_k^{\,2}}{i(\omega_j-\omega_k)+\overline{\nu}_k}+\frac{\nu_k^2}{i(\omega_j-\omega_k)-\nu_k}\\\frac{\overline{\nu}_k^{\,2}}{i(\omega_j+\omega_k)-\overline{\nu}_k}+\frac{\nu_k^2}{i(\omega_j+\omega_k)+\nu_k}\\\frac{\overline{\nu}_k^{\,2}}{(i(\omega_j-\omega_k)+\overline{\nu}_k)^2}+\frac{\nu_k^2}{(i(\omega_j-\omega_k)-\nu_k)^2}\\-\frac{\overline{\nu}_k^{\,2}}{(i(\omega_j+\omega_k)-\overline{\nu}_k)^2}-\frac{\nu_k^2}{(i(\omega_j+\omega_k)+\nu_k)^2}\end{pmatrix},$$

$$\Pi_j \theta_k^q = \frac{b_j}{2b_k} \begin{pmatrix} -\frac{\nu_k^2}{i(\omega_k+\omega_j)+\nu_k} - \frac{\overline{\nu}_k^2}{i(\omega_k+\omega_j)-\overline{\nu}_k} \\ \frac{\nu_k^2}{i(\omega_k-\omega_j)+\nu_k} + \frac{\overline{\nu}_k^2}{i(\omega_k-\omega_j)-\overline{\nu}_k} \\ -\frac{\nu_k^2}{(i(\omega_k+\omega_j)+\nu_k)^2} - \frac{\overline{\nu}_k^2}{(i(\omega_k+\omega_j)-\overline{\nu}_k)^2} \\ \frac{\nu_k^2}{(i(\omega_k-\omega_j)+\nu_k)^2} + \frac{\overline{\nu}_k^2}{(i(\omega_k-\omega_j)-\overline{\nu}_k)^2} \end{pmatrix}, \ j \neq k.$$

与引理 3.4的证明类似，我们考虑一个 $\varkappa \in (0,1)$，使得推论 3.1的条件对 $\lambda_0 = \lambda_k^0$成立。然后，由于（56），我们得到

$$\left| \frac{\nu_k^2}{b_k \mathrm{Re}\, \nu_k} \right| < \frac{\sqrt{2}(1+\varkappa)}{1-\varkappa}. \tag{59}$$

估计和式（58）中的各项，并应用不等式（56）和（59），结合假设（*A*1）、（*A*2）和（*A*4），我们得出条件（58）对表示分量 z、 ζ、 p和 q的每个“s”都成立。于是，（57）和（58）连同（55）推出了引理 3.7的结论。 □

由于向量组（53）与 $\mathcal{A}$ 的特征向量通过有界可逆线性变换相关联，它们之间的关系总结如下引理所述。

引理 3.8. 在假设 (*A*1) 和 (*A*2)下，设向量 $\{\theta_k^z, \theta_k^\zeta, \theta_k^p, \theta_k^q \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ 定义为(53)。则：

i) 序列 $\{\theta_k^z, \theta_k^\zeta, \theta_k^p, \theta_k^q\}_{k=1}^\infty$是 ω-线性无关的，当且仅当序列 $\{\theta_k^+, \theta_k^-, \theta_{-k}^+, \theta_{-k}^-\}_{k=1}^\infty$是 ω-线性无关的；

ii) $\overline{\mathrm{span}}\,\{\theta_k^+, \theta_k^-, \theta_{-k}^+, \theta_{-k}^-\}_{k=1}^\infty = \overline{\mathrm{span}}\{\theta_k^z, \theta_k^\zeta, \theta_k^p, \theta_k^q\}_{k=1}^\infty$.

证明。 假设（*A*1）（从而 $b_k \neq 0$ 对所有 k成立），并假设谱是双曲的，即 $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$。于是，对每一个 $k \in \mathbb{N}$，关系（53）在 span$\{\theta_{-k}^+, \theta_{-k}^-\}$与 span$\{\theta_k^z, \theta_k^p\}$之间，以及 span $\{\theta_k^+, \theta_k^-\}$与 span$\{\theta_k^\zeta, \theta_k^q\}$之间定义了一个可逆线性生成元变换。更确切地说，有如下显式逆公式

$$\theta_{-k}^+ = \frac{b_k}{\overline{\nu_k}^2}\Big(\theta_k^p + \mathrm{Re}\,(\nu_k)\,\theta_k^z\Big),\ \theta_{-k}^- = \frac{b_k}{\nu_k^2}\Big(\theta_k^p - \mathrm{Re}\,(\nu_k)\,\theta_k^z\Big),$$

and

$$\theta_k^+ = -\frac{b_k}{\overline{\nu_k}^2}\Big(\theta_k^q + \mathrm{Re}\,(\nu_k)\,\theta_k^\zeta\Big),\ \theta_k^- = -\frac{b_k}{\nu_k^2}\Big(\theta_k^q - \mathrm{Re}\,(\nu_k)\,\theta_k^\zeta\Big).$$

由（53），对固定的 k,

$$2b_k \mathrm{Re}\,(\nu_k)\,\theta_k^z = \overline{\nu_k}^2 \theta_{-k}^+ - \nu_k^2 \theta_{-k}^-,\ 2b_k\,\theta_k^p = \overline{\nu_k}^2 \theta_{-k}^+ + \nu_k^2 \theta_{-k}^-.$$

将这些恒等式相加和相减，得到

$$2b_k\big(\theta_k^p + \mathrm{Re}\,(\nu_k)\theta_k^z\big) = 2\overline{\nu_k}^2 \theta_{-k}^+,$$

$$2b_k\big(\theta_k^p - \mathrm{Re}\,(\nu_k)\theta_k^z\big) = 2\nu_k^2 \theta_{-k}^-,$$

由此得到第一对公式。第二对公式可类似地根据定义 θ_k^ζ 与 θ_k^q 的关系（53）得到。

还需证明分母不为零。由（*A*1）， $b_k \neq 0$。根据双曲性，不存在纯虚特征值，因此 Re（ν_k）$\neq 0$（否则 $\sigma_k^\pm = i\omega_k \pm \nu_k$ 将是纯虚数）。因此 $\nu_k \neq 0$，这就证明了其可逆性。 □

命题 3.1。 在假设 (A1)、(A2)和 (A4)下，序列 $\{\theta_k^z, \theta_k^\zeta, \theta_k^p, \theta_k^q\}_{k=1}^\infty$ 是 X的一组 Riesz基，由 $\mathcal{A}$的特征函数的线性组合构成。

证明。 由于引理 3.7，序列 $\{\theta_k^z, \theta_k^\zeta, \theta_k^p, \theta_k^q\}_{k=1}^\infty$ 在 X 中与标准正交基平方可和接近 [12], ，因此根据 Bari 定理 $\{\theta_k^z, \theta_k^\zeta, \theta_k^p, \theta_k^q\}_{k=1}^\infty$，序列 X 在 ω 中是 Riesz基，前提是它 -线性无关。因此，根据引理 3.8 的 i）部分，只需证明

$$\left\{\theta_k^+, \theta_k^-, \theta_{-k}^+, \theta_{-k}^-\right\}_{k=1}^\infty \quad \text{is } \omega\text{-linearly independent.} \tag{60}$$

性质（60）的证明采用了 [18, 定理 2。38] 证明中所用的方法，并将其调整到特征向量线性组合的情形，同时考虑引理 3.8。 □

给定 $\theta \in X$，考虑其关于 X 中 Riesz基的展开，该基由命题 3.1 定义：

$$\theta = \sum_{k=1}^\infty \left(a_k^z \theta_k^z + a_k^\zeta \theta_k^\zeta + a_k^p \theta_k^p + a_k^q \theta_k^q\right).$$

该展开与有界线性算子 π_0 有关： $X \to X$ 使得

$$X \ni a = \begin{pmatrix} a^z \\ a^\zeta \\ a^p \\ a^q \end{pmatrix} \mapsto \pi_0 a = \theta = \begin{pmatrix} z \\ \zeta \\ p \\ q \end{pmatrix} \in X. \tag{61}$$

根据公式（53），算子 π_0： $X \to X$ 的作用为

$$\pi_0 a = \pi_z a^z + \pi_\zeta a^\zeta + \pi_p a^p + \pi_q a^q, \tag{62}$$

其中，算子 π_z、 π_ζ、 π_p、 π_q： ℓ^2（$\mathbb{C}$） $\to X$ 的矩阵表示由（53）中的列组成：

$$\begin{aligned} \pi_z &= (\theta_1^z, \theta_2^z, ...), \ \pi_\zeta = (\theta_1^\zeta, \theta_2^\zeta, ...), \\ \pi_p &= (\theta_1^p, \theta_2^p, ...), \ \pi_q = (\theta_1^q, \theta_2^q, ...). \end{aligned} \tag{63}$$

这里，我们遵循如下约定： $\pi_s a^s = \sum_{k=1}^\infty \theta_k^s a_k^s$，其中每个“$s$”表示分量$z$、 ζ、 p、 q。注意， π_0 和π_0^{-1}都是从 X 到 X的有界线性算子，因为$\{\theta_k^z, \theta_k^\zeta, \theta_k^p, \theta_k^q\}_{k=1}^\infty$ 是 X中的Riesz基。

π_0 在V_0^X上的同构性质, γ 对于 $\gamma \in \mathbb{R}$，定义

$$V_{0,\gamma}^X = \left\{\theta = (z, \zeta, p, q) \in X \mid \|\theta\|_{V_{0,\gamma}^X}^2 = \sum_{k \geq 1} \frac{|z_k|^2 + |\zeta_k|^2 + |p_k|^2 + |q_k|^2}{|b_k|^{2\gamma}} < \infty\right\}.$$

设 W_γ： V_0^X, $\gamma \to X$ 为对角等距映射，即（$W_\gamma \theta$） $_k = \theta_k / |b_k|^\gamma$。

引理 3.9。 设 (A1)、(A2)、(A4)以及 (A5) 对某个 $\rho > 0$成立。则算子 π_0，由 (62)定义，可延拓为一个有界同构

$$\pi_0 : V_{0,-\rho}^X \longrightarrow V_{0,-\rho}^X, \qquad \pi_0^{-1} : V_{0,-\rho}^X \longrightarrow V_{0,-\rho}^X.$$

证明。考虑 X 上的共轭算子：

$$\widetilde{\pi}_{0,\rho} = W_{-\rho}\,\pi_0\,W_{-\rho}^{-1}.$$

由于 $W_{-\rho}$ 是等距同构 $V_0^{X,\,-\rho} \to X$，因此 π_0 在 $V_0^{X,\,-\rho}$ 上有界可逆，当且仅当 $\widetilde{\pi}_{0,\,\rho}$ 在 X 上有界可逆。在 X 中定义重归一化族如下：

$$\widetilde{\theta}^{s}_{k,\rho} = W_{-\rho}\big(|b_k|^{-\rho}\,\theta^{s}_{k}\big), \qquad s \in \{z,\zeta,p,q\}.$$

直接计算系数可知，$\widetilde{\pi}_{0,\,\rho}$ 是 $\{\widetilde{\theta}^{z}_{k,\rho},\widetilde{\theta}^{\zeta}_{k,\rho},\widetilde{\theta}^{p}_{k,\rho},\widetilde{\theta}^{q}_{k,\rho}\}_{k\ge1}$ 的“合成”算子。因此，根据 Bari 定理，只需证明该重归一化族与 X 的标准正交基平方可和接近，且 ω-线性无关。

~对角部分。对于 $s \in \{z,\zeta,p,q\}$ 以及每个 k，有$\Pi_k\theta^{s}_{k,\,\rho} = \Pi_k\theta^{s}_{k}$因为权重因子在 $j = k$处抵消。因此，引理3.7 中的对角估计仍然成立，从而得到

$$\sum_{k\ge1}\|\Pi_k(\widetilde{\theta}^{s}_{k,\rho} - \widehat{\theta}^{s}_{k})\|^2 < \infty.$$

非对角部分。对于 $j \neq k$,

$$\Pi_j\widetilde{\theta}^{s}_{k,\rho} = |b_j|^{\rho}|b_k|^{-\rho}\,\Pi_j\theta^{s}_{k}.$$

引理 3.7 的证明给出了如下形式的一致估计（对每个 s）：

$$\|\Pi_j\theta^{s}_{k}\| \le C\frac{|b_j|}{|\omega_j-\omega_k|}, \qquad j\neq k,$$

其中常数 C与 j、k以及 $s\in\{z,\zeta,p,q\}$无关，因此

$$\|\Pi_j\widetilde{\theta}^{s}_{k,\rho}\|^2 \le C^2\frac{|b_j|^{2(1+\rho)}}{|b_k|^{2\rho}}\frac{1}{(\omega_j-\omega_k)^2}.$$

先对 $j\neq k$ 求和，再对 k 求和，由 (A5) 得到平方接近。
ω-线性无关性。将每个向量 θ^{s}_{k} 乘以非零标量，不会改变 ω-线性无关性。因此，Bari 定理适用，并可得重正规化后的族是 X 的 Riesz基。因此，$\widetilde{\pi}_{0,\,\rho}$ 在 X 上有界且可逆，换回原来的表示即可得出结论。□

3.3 多项式衰减条件

我们对所考虑控制系统的解的大时间行为的研究基于以下引理。

引理 3.10。设序列 $\{\sigma_k^-\}_{k\in\mathbb{N}}$ 由 (42) 和 (43)定义，其中 ω_k 和 b_k 满足假设 (A1)、(A2)和 (A3)。那么，对任意 $\beta>0$，存在一个常数 $C_\beta>0$ 使得

$$|e^{\sigma_k^- t}| \le C_\beta|b_k|^{-\beta}(t+1)^{-\beta} \quad \textit{for all } t\ge0,\ k\in\mathbb{N}. \tag{64}$$

这里，C_β 取决于 β、b以及引理 3.4中的常数，但不取决于 t或 k。

证明。我们从以下标量不等式开始：对于每个 $\beta>0$,

$$e^{-y} \le \beta^{\beta}e^{-\beta}y^{-\beta} \quad \text{for all } y>0. \tag{65}$$

事实上， $y^\beta e^{-y}$ 在 $y>0$ 上的最大值在 $y=\beta$ 处取得，且等于 $\beta^\beta e^{-\beta}$。现在，我们将（65）应用于 $e^{\sigma_k^- t}$。由于 $\sigma_k^- = i\omega_k - \overline{\nu_k}$，我们有

$$|e^{\sigma_k^- t}| = e^{-(\operatorname{Re}\nu_k)t} = e^{\operatorname{Re}\nu_k} e^{-(\operatorname{Re}\nu_k)(t+1)}.$$

任取 $\beta>0$ 并将不等式（65）应用于上述表示，其中 $y=$（$\operatorname{Re}\nu_k$）（$t+1$）。由此得到

$$|e^{\sigma_k^- t}| \le e^{-\beta+\operatorname{Re}\nu_k}\beta^\beta(\operatorname{Re}\nu_k)^{-\beta}(t+1)^{-\beta} \text{ for all } t\ge 0, k\in\mathbb{N}. \tag{66}$$

在假设（A1）、（A2）和（A3）下，引理 3.4 蕴含 $\operatorname{Re}\nu_k \asymp |b_k|$（当 k充分大时；有限个剩余的 k 可并入常数）。因此，由（66）可得一般估计（64）。

□

注记 4. 由于表示式（42），引理 3.10 中的估计（64）也可改写为如下的反向时间形式：

$$|e^{\sigma_k^+ t}| \le C_\beta |b_k|^{-\beta}(T-t+1)^{-\beta} \quad \text{for all } t\le T,\ k\in\mathbb{N}. \tag{67}$$

关于变分系统解的双侧多项式渐近性的一个关键结果见下述命题。

命题 3.2. 设假设（A1）、（A2）、（A3）和（A5）对某个常数$\rho>1$成立，并令 $\beta=\rho-1$，$\gamma=-\rho$（因此，根据引理 3.9，π_0 是 V_0^X,$_\gamma$上的有界同构）。那么存在常数 $C>0$，使得对任意 $T>0$ 以及方程（19）的任意解 $\Delta(\cdot)\in C([0,T];X)$，

$$\|\Delta(t)\|_{V_{0,\gamma}^X} \le C\left(\frac{\|\Delta(0)\|_X}{(t+1)^\beta} + \frac{\|\Delta(T)\|_X}{(T-t+1)^\beta}\right), \quad t\in[0,T]. \tag{68}$$

证明。对于方程 (19) 的解 $\Delta(\cdot)\in C([0,T];X)$，考虑方程 (21) 的相应解 $\theta(\cdot)\in C([0,T];X)$。则函数 $a(t)=\pi_0^{-1}\theta(t)$（其中 $\pi_0\colon X\to X$ 在 (61) 中定义）满足以下抽象微分方程：

$$\dot a(t) = \mathcal{A}_R a(t), \quad a(t)\in X, \tag{69}$$

其中

$$D(\mathcal{A}_R) = \{a\in X \mid \sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2\left(|a_k^z|^2+|a_k^\zeta|^2+|a_k^p|^2+|a_k^q|^2\right) < \infty\}.$$

在坐标中，(69) 的形式为：

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}a_k^z\\a_k^p\end{pmatrix} = A_k^{zp}\begin{pmatrix}a_k^z\\a_k^p\end{pmatrix},\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}a_k^\zeta\\a_k^q\end{pmatrix} = A_k^{\zeta q}\begin{pmatrix}a_k^\zeta\\a_k^q\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{N}, \tag{70}$$

$$\begin{aligned}
&A_k^{zp} = \left(M_k^\top\right)^{-1}\Sigma_{-k}M_k^\top,\ A_k^{\zeta q} = \left(N_k^\top\right)^{-1}\Sigma_k N_k^\top,\\
&\Sigma_{-k} = \begin{pmatrix}\sigma_{-k}^+ & 0\\ 0 & \sigma_{-k}^-\end{pmatrix},\ \Sigma_k = \begin{pmatrix}\sigma_k^+ & 0\\ 0 & \sigma_k^-\end{pmatrix},\\
&M_k = \frac{1}{2b_k}\begin{pmatrix}\frac{\overline{\nu_k}^2}{\operatorname{Re}\nu_k} & -\frac{\nu_k^2}{\operatorname{Re}\nu_k}\\ \overline{\nu_k}^2 & {\nu_k}^2\end{pmatrix},\qquad N_k = -\frac{1}{2b_k}\begin{pmatrix}\frac{\nu_k^2}{\operatorname{Re}\nu_k} & -\frac{\overline{\nu_k}^2}{\operatorname{Re}\nu_k}\\ \nu_k^2 & \overline{\nu_k}^2\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{71}$$

通过引入变量代换

$$\begin{pmatrix}\upsilon_k\\ \chi_k\end{pmatrix}=N_k^\top\begin{pmatrix}a_k^\zeta\\ a_k^q\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\tilde\upsilon_k\\ \tilde\chi_k\end{pmatrix}=M_k^\top\begin{pmatrix}a_k^z\\ a_k^p\end{pmatrix}, \tag{72}$$

系统 (70) 写作

$$\begin{aligned}&\dot\chi_k(t)=\sigma_k^-\chi_k(t),\ \dot\upsilon_k(t)=\sigma_k^+\upsilon_k(t),\\ &\dot{\tilde\chi}_k(t)=\sigma_{-k}^-\tilde\chi_k(t),\ \dot{\tilde\upsilon}_k(t)=\sigma_{-k}^+\tilde\upsilon_k(t),\quad k\in\mathbb{N},\end{aligned} \tag{73}$$

其中 $\sigma_{\pm k}^{\pm}$ 定义见 (42)。

系统 (73) 的抽象表述导出

$$\begin{aligned}&\dot\chi(t)=\mathcal{A}_\chi\chi(t),\\ &\dot\upsilon(t)=\mathcal{A}_\upsilon\upsilon(t),\\ &\dot{\tilde\chi}(t)=\tilde{\mathcal{A}}_\chi\tilde\chi(t),\\ &\dot{\tilde\upsilon}(t)=\tilde{\mathcal{A}}_\upsilon\tilde\upsilon(t),\ \chi(t),\upsilon(t),\tilde\chi(t),\tilde\upsilon(t)\in\ell^2(\mathbb{C}),\end{aligned} \tag{74}$$

或者，等价地,

$$\dot\tau(t)=\mathcal{A}_\tau\tau(t),\quad \tau(t)\in X=(\ell^2(\mathbb{C}))^4. \tag{75}$$

这里，线性算子 $\mathcal{A}_\chi:\ D(\mathcal{A}_\chi)\to\ell^2(\mathbb{C})$, $\mathcal{A}_\upsilon:\ D(\mathcal{A}_\upsilon)\to\ell^2(\mathbb{C})$, $\tilde{\mathcal{A}}_\chi:\ D(\tilde{\mathcal{A}}_\chi)\to\ell^2(\mathbb{C})$,$\tilde{\mathcal{A}}_\upsilon:\ D(\tilde{\mathcal{A}}_\upsilon)\to\ell^2(\mathbb{C})$ 由其对角矩阵表示:

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}_\chi=\operatorname{diag}(\sigma_1^-,\sigma_2^-,...),\ \mathcal{A}_\upsilon=\operatorname{diag}(\sigma_1^+,\sigma_2^+,...),\\ &\tilde{\mathcal{A}}_\chi=\operatorname{diag}(\sigma_{-1}^-,\sigma_{-2}^-,...),\ \tilde{\mathcal{A}}_\upsilon=\operatorname{diag}(\sigma_{-1}^+,\sigma_{-2}^+,...),\\ &D(\mathcal{A}_\chi)=D(\mathcal{A}_\upsilon)=D(\tilde{\mathcal{A}}_\chi)=D(\tilde{\mathcal{A}}_\upsilon)=\{\chi\in\ell^2(\mathbb{C})\,|\,\sum_{k=1}^\infty\omega_k^2|\chi_k|^2<\infty\},\end{aligned}$$

~ ~和 $\mathcal{A}_\tau$: $D(\mathcal{A}_\tau)=D(\mathcal{A}_\chi)\times D(\mathcal{A}_\upsilon)\times D(\mathcal{A}_\chi)\times D(\mathcal{A}_\upsilon)\to X$ 由以下规则定义

$$D(\mathcal{A}_\tau)\ni\tau=\begin{pmatrix}\chi\\ \upsilon\\ \tilde\chi\\ \tilde\upsilon\end{pmatrix}\mapsto\mathcal{A}_\tau=\begin{pmatrix}\mathcal{A}_\chi\chi\\ \mathcal{A}_\upsilon\upsilon\\ \tilde{\mathcal{A}}_\chi\tilde\chi\\ \tilde{\mathcal{A}}_\upsilon\tilde\upsilon\end{pmatrix}\in X.$$

结合（73）和（75），我们得出，（τ（t）$\in X$）75）的每个解的坐标可表示如下:

$$\begin{aligned}&\chi_k(t)=\chi_k(0)e^{\sigma_k^-t},\ \upsilon_k(t)=\upsilon_k(T)e^{\sigma_k^+(t-T)},\ t\in[0,T],\\ &\tilde\chi_k(t)=\tilde\chi_k(0)e^{\sigma_{-k}^-t},\ \tilde\upsilon_k(t)=\tilde\upsilon_k(T)e^{\sigma_{-k}^+(t-T)},\ k\in\mathbb{N}.\end{aligned} \tag{76}$$

公式（76）可利用变换（72）表示方程（69）对应解的坐标 $a(t)$:

$$\begin{pmatrix}a_k^\zeta(t)\\ a_k^q(t)\end{pmatrix}=\left(N_k^\top\right)^{-1}\begin{pmatrix}e^{\sigma_k^+(t-T)}&0\\ 0&e^{\sigma_k^-t}\end{pmatrix}\tilde N_k\begin{pmatrix}a_k^\zeta(0)\\ a_k^q(0)\\ a_k^\zeta(T)\\ a_k^q(T)\end{pmatrix}, \tag{77}$$

其中

$$\tilde{N}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n_{11}^k & n_{21}^k \\ n_{12}^k & n_{22}^k & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_{11}^k & n_{12}^k \\ n_{21}^k & n_{22}^k \end{pmatrix} = N_k,\ k \in \mathbb{N},$$

and 矩阵 N_k 由（71）定义。为进一步分析，我们将（77）改写为如下形式

$$a_k^{\zeta,q}(t) = g_k^- a_k^{\zeta,q}(0) e^{\sigma_k^- t} + g_k^+ a_k^{\zeta,q}(T) e^{\sigma_k^+ (t-T)}, \tag{78}$$

with

$$a_k^{\zeta,q}(t) = \begin{pmatrix} a_k^\zeta(t) \\ a_k^q(t) \end{pmatrix}, \quad g_k^- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{Re}\nu_k \\ -\frac{1}{\operatorname{Re}\nu_k} & 1 \end{pmatrix}, \quad g_k^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \operatorname{Re}\nu_k \\ \frac{1}{\operatorname{Re}\nu_k} & 1 \end{pmatrix}. \tag{79}$$

类似地，由（76）和（72），可得 $a^{z,p}_k(t) = \begin{pmatrix} a_k^z(t) \\ a_k^p(t) \end{pmatrix}$ 的如下表示，对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立：

$$a_k^{z,p}(t) = g_k^- a_k^{z,p}(0) e^{\sigma_{-k}^- t} + g_k^+ a_k^{z,p}(T) e^{\sigma_{-k}^+ (t-T)}. \tag{80}$$

直接计算（79）中的矩阵范数可得

$$\|g_k^+\| = \|g_k^-\| = \frac{1 + (\operatorname{Re}\nu_k)^2}{2|\operatorname{Re}\nu_k|} \lesssim 1/|b_k| \text{ for all } k \in \mathbb{N}. \tag{81}$$

将估计式（64）、（67）和（81）应用于（78），可得

$$\|a_k^{\zeta,q}(t)\| \le \frac{\tilde{C}_\beta}{|b_k|^{\beta+1}} \left(\frac{\|a_k^{\zeta,q}(0)\|}{(t+1)^\beta} + \frac{\|a_k^{\zeta,q}(T)\|}{(T-t+1)^\beta} \right), t \in [0,T], \tag{82}$$

其中某个常数为 $C_\beta > 0$，且对 $\|a^{z,p}_k(t)\|$也有相同的估计。将模态估计（82）乘以 $|b_k|^{\beta+1}$ 并对 k 求平方后求和，得到抽象界

$$\|a(t)\|_{V_{0,\gamma}^X} \le \bar{C}_\beta \left(\frac{\|a(0)\|_X}{(t+1)^\beta} + \frac{\|a(T)\|_X}{(T-t+1)^\beta} \right), \tag{83}$$

对所有 $t \in [0,T]$均成立，其中某个常数 $C_\beta > 0$。根据引理 3.9，我们可以通过有界同构 π_0 和 π_0^{-1}在 V_0^X 上γ传递上述加权范数。因此，（83）给出了所需的不等式（68）。

□

定理 2.1 证明的结尾

令 $(\hat{x}, \lambda, \hat{\mu}, \hat{u})$ 和 $(x(t)\ \lambda(t)\ \mu(t)\ u(t))$ 分别为问题 1 和问题 2 的解，它们由 (12)、(3)、(13)、(14) 定义，并令差异 $\Delta(t)$由 (15) 定义。则

$$\|\Delta(t)\|^2_{V_{0,\gamma}^X} = 2\Big(\|x(t) - \hat{x}\|^2_{V_{0,\gamma}} + \|\Lambda(t) - \hat{\Lambda}\|^2_{V_{0,\gamma}}\Big),$$

满足 $\gamma = -\beta - 1$。因此，根据命题 3.2，存在一个常数 $C > 0$ 使得，对任意$T > 0$,

$$\|x(t) - \hat{x}\|_{V_{0,-\beta-1}} + \|\Lambda(t) - \hat{\Lambda}\|_{V_{0,-\beta-1}} \le \tilde{C} \left(\frac{\|\Delta(0)\|_X}{(t+1)^\beta} + \frac{\|\Delta(T)\|_X}{(T-t+1)^\beta} \right) \text{ for all } t \in [0,T]. \tag{84}$$

为完成定理 2.1的证明，我们需要以下两个辅助结果。

引理 3.11。 设 $\{\nu_k\}_{k\ge 1}$ 由引理 3.4定义。则存在常数 $C_{\tanh}$， $C_{\cosh}>0$使得

$$\sup_{k\ge 1}\sup_{s\ge 0}|\tanh(\nu_k s)|\le C_{\tanh},\ \sup_{k\ge 1}\sup_{s\ge 0}\frac{1}{|\cosh(\nu_k s)|}\le C_{\cosh}. \tag{85}$$

证明。根据引理 3.4，对于所有足够大的 k，我们有 $\nu_k=\lambda_k^0+\varepsilon_k$、 $\lambda_k^0>0$ 和 $|\varepsilon_k|<\frac{\lambda_k^0}{2}$。因此，对于这样的 k，我们有 $\operatorname{Re}\nu_k\ge\lambda_k^0-|\varepsilon_k|>\frac{\lambda_k^0}{2}>0$ 和 $|\operatorname{Im}\nu_k|\le|\varepsilon_k|<\frac{\lambda_k^0}{2}\le\operatorname{Re}\nu_k$。特别地，对于所有 $k\ge k_0$（某个$k_0\in\mathbb{N}$），ν_k 属于闭扇形 $S_{\theta_0}=\{z\in\mathbb{C}\mid|\arg z|\le\theta_0\}$，其中 $\theta_0=\frac{\pi}{4}$。对于有限多个指标 $1\le k<k_0$，我们只需在证明末尾增大常数；因此，只需证明 (85) 对所有 z 属于 S_{θ_0}一致成立。

现在，任取 $\theta\in(0,\pi/2)$，并考虑扇形 $S_\theta=\{z\mid|\arg z|\le\theta\}$。我们断言，存在常数 $C_{\tanh}(\theta)$ $C_{\cosh}(\theta)>0$，使得

$$\sup_{z\in S_\theta}|\tanh z|\le C_{\tanh}(\theta),\qquad \sup_{z\in S_\theta}\frac{1}{|\cosh z|}\le C_{\cosh}(\theta). \tag{86}$$

事实上，令 $R>0$并设 $q=e^{-2R\cos\theta}\in(0,1)$。对于任意满足 $|z|\ge R$的 $z\in S_\theta$，我们有 $\operatorname{Re}z\ge|z|\cos\theta\ge R\cos\theta$，因此 $|e^{-2z}|=e^{-2\operatorname{Re}z}\le q$。利用恒等式

$$\tanh z=\frac{1-e^{-2z}}{1+e^{-2z}},\qquad \cosh z=\frac{e^z}{2}\left(1+e^{-2z}\right),$$

我们得到，对于 $|z|\ge R$,

$$|\tanh z|\le\frac{1+|e^{-2z}|}{1-|e^{-2z}|}\le\frac{1+q}{1-q},$$

and

$$\frac{1}{|\cosh z|}\le\frac{2e^{-\operatorname{Re}z}}{|1+e^{-2z}|}\le\frac{2e^{-\operatorname{Re}z}}{1-|e^{-2z}|}\le\frac{2e^{-R\cos\theta}}{1-q}.$$

在紧集 $K_\theta(R)=\{z\in S_\theta\mid|z|\le R\}$上，函数 $\tanh$ 连续，因此$M_1=\sup_{z\in K_\theta(R)}|\tanh z|<\infty$。此外，对于所有 $z\in S_\theta$，$\cosh z\ne 0$，因为 $\cosh$ 的零点为 $\{i(\pi/2+\pi n)\mid n\in\mathbb{Z}\}$，它们位于虚轴上，且 $\theta<\pi/2$。因此 $1/\cosh$ 在 $K_\theta(R)$ 上连续，并且 $M_2=\sup_{z\in K_\theta(R)}1/|\cosh z|<\infty$。

结合 $|z|\le R$ 和 $|z|\ge R$ 的界，我们可以令

$$C_{\tanh}(\theta)=\max\left(M_1,\frac{1+q}{1-q}\right),\qquad C_{\cosh}(\theta)=\max\left(M_2,\frac{2e^{-R\cos\theta}}{1-q}\right),$$

这就证明了 (86)。

现在我们来完成证明。由于 $\nu_k\in S_{\theta_0}$ 对所有 $k\ge k_0$均成立，因此 $\nu_k s\in S_{\theta_0}$ 对所有 $s\ge 0$均成立。将 86式应用于 $\theta=\theta_0$，可得对所有 $k\ge k_0$,

$$\sup_{s\ge 0}|\tanh(\nu_k s)|\le C_{\tanh}(\theta_0),\ \sup_{s\ge 0}\frac{1}{|\cosh(\nu_k s)|}\le C_{\cosh}(\theta_0).$$

对于有限多个指标 $1\le k<k_0$，每个量 $\sup_{s\ge 0}|\tanh(\nu_k s)|$ 和 $\sup_{s\ge 0}1/|\cosh(\nu_k s)|$都是有限的，因为 $\operatorname{Re}\nu_k>0$ (在射线 $\nu_k\mathbb{R}_+$ 上 $\cosh$ 无零点，且当 $s\to\infty$时呈指数增长）。将这些有限个值与上述常数取最大值，即可得到全局常数$C_{\tanh}$， $C_{\cosh}$ 使得（85）对所有 $k\ge 1$均成立。 □

¯命题 3.3。假设($A1$)，($A2$)以及($A3$)。存在一个常数 $C>0$，与T无关，使得对于问题$(X,\ \Lambda,\ u)$ 2的每个解 Δ，相应的最优性系统解满足[2]:

$$\|\Delta(0)\|_X + \|\Delta(T)\|_X \le \bar{C}\Big(\|x(0)-\hat{x}\|_{V_{0,1}} + \|\hat{\lambda}\|_{\ell^2} + \|\hat{\mu}\|_{\ell^2}\Big). \tag{87}$$

证明。我们采用复化表述。令 $\theta(t) = \pi_1\Delta(t) = (z(t)\ \zeta(t)\ p(t)\ q(t)) \in X$，于是¯满足 $\theta = \mathcal{A}\theta$。我们还记 $x(t) = (z(t)\ \zeta(t))$ 和 $y(t) = (p(t)\ q(t))$。边界条件为$x(0) = x^0 - \hat{}x$ 以及 $y(T) = -(\hat{}p, \hat{}q)$，其中 $\hat{}p = \hat{}\lambda + i\hat{}\mu$ 且 $\hat{}q = \hat{}\lambda - i\hat{}\mu$。

首先，利用命题 3.1 以及由 (61) 定义的同构 π_0，在由$a(t) = \pi_0^{-1}\theta(t) = (a^z(t)\ a^\zeta(t)\ a^p(t)\ a^q(t)) \in X$ 给出的坐标下，动力系统是分块对角的；逐模而言，它由 (70) 中给出的 2×2 矩阵 $A^z_{,k}{}^p$ 和 $A^\zeta_{,k}{}^q$所支配。应用 (71) 中的逐模对角化矩阵M_k, N_k，得到 (72) 中引入的稳定—不稳定变量 $(\chi_k, \upsilon_k, \widetilde{\chi}_k, \widetilde{\upsilon}_k)$，其演化由 (76) 描述。

将 $t=0$ 处未知的协态迹汇集为 $y_0 = (p(0)\ q(0)) \in H\times H$，并将给定的终端迹表示为 $y(T) = -(\hat{}p, \hat{}q)$，则边值问题可写成如下形式的线性算子方程：$W_T y_0 = r_T$，其中 W_T是相应的射击算子，且r_T关于 $(x(0)\ y(T))$ 线性依赖。

现在证明射击算子是一致可逆的。在上述坐标$a(t)$中，射击算子按模态呈对角形式，其标量乘子由 $\tanh(\nu_k T)$ 和 $1/\cosh(\nu_k T)$ 与关于 b_k和 $\mathrm{Re}(\nu_k)$ 的有理因子组合而成。引理 3.11 给出一个常数$C_*>0$，它与 T 和 k无关，使得

$$\sup_{k\ge 1}\sup_{T>0} |\tanh(\nu_k T)| \le C_*, \quad \sup_{k\ge 1}\sup_{T>0} \frac{1}{|\cosh(\nu_k T)|} \le C_*.$$

再结合引理 ν_k中的 $\mathrm{Re}(\ \asymp |b_k|\ )$，我们得到逆射击映射的一致界，因此

$$\|y_0\|_{H\times H} \le C_*\left(\|x(0)\|_{V_{0,1}\times V_{0,1}} + \|y(T)\|_{H\times H}\right).$$

最后，我们推导 $\Delta(0)$ 和 $\Delta(T)$ 的界。由于 $y(T) = -(\hat{}p, \hat{}q)$，因此有 $\|y(T)\|_{H\times H} \le \hat{}2(\|\lambda\|_{\ell^2} + \|\hat{}\mu\|_{\ell^2})$。流的同一对角表示给出了如下形式的界

$$\|x(T)\|_{H\times H} \le C_*\left(\|x(0)\|_{V_{0,1}\times V_{0,1}} + \|y(T)\|_{H\times H}\right),$$

其中常数与 T 无关。最后，由于 π_0 和 π_1 是 X 上的固定同构，因此关于 $(x(0)\ y(0))$ 和 $(x(T)\ y(T))$ 的估计可转化为 $\Delta(0)$ 和 $\Delta(T)$ 在 X-范数下的估计，由此得到 (87)。 □

最后，定理 2.1 的结论可由不等式 (84) 和 (87) 得出。 □

4 旋转柔性梁的应用

考虑一根长度为 l 的欧拉-伯努利梁，它连接在一个旋转刚体（轮毂）上。相对于固定在轮毂上的参考系，梁在 $x\in[0,l]$ 处的横向位移 $w(x,t)$ 由以下偏微分方程描述（例如参见 [27, 第 4], [44,章，第 3]章）：

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + c^2\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = -(x+d)u(t), \quad x\in[0,l],\ t\ge 0, \tag{88}$$

[2]不等式（87）是一个“打靶估计”，其思路与 [35, 引理 2]相同。

以及边界条件

$$w|_{x=0}=0,\ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=l}=0,\ \left.\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right|_{x=l}=0. \tag{89}$$

控制 $u(t)\in\mathbb{R}$ 对应于轮毂的角加速度， $d>0$ 是轮毂的半径， $c=\sqrt{EI/\rho}>0$， E 是杨氏模量， I 是截面二次矩， ρ 是梁的单位长度质量。上述控制系统对应于轮毂“慢速”旋转的情形，即在（88）–（89）中省略了高阶项。

设梁挠度展开为

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}W_n(x)q_n(t),\quad x\in[0,l], \tag{90}$$

其中 W_n 是谱问题的特征函数

$$\frac{d^4}{dx^4}W_n(x)=\lambda_n W_n(x),\ x\in[0,l], \tag{91}$$

$$W_n(0)=W_n'(0)=W_n''(l)=W_n'''(l)=0. \tag{92}$$

特征 值 λ_n 与归一化特征函数 W_n（x）由（91）–（92）表示为 [44, 第 3]章 :

$$\lambda_n=(\delta_n/l)^4,\qquad W_n(x)=k_n\phi_n(x/l),\qquad k_n=\pm l^{-1/2}\left(\|\phi_n\|_{L^2(0,1)}\right)^{-1}, \tag{93}$$

其中

$$\phi_n(x)=-\frac{1+\gamma_n}{2}e^{\delta_n x}-\frac{1-\gamma_n}{2}e^{-\delta_n x}+\gamma_n\sin(\delta_n x)+\cos(\delta_n x),$$
$$\gamma_n=-\frac{e^{\delta_n}-\sin\delta_n+\cos\delta_n}{e^{\delta_n}+\sin\delta_n+\cos\delta_n}<0, \tag{94}$$

并且 $\delta_1<\delta_2<\ldots<\delta_n<\ldots$ 是下列方程的正解

$$1+\cos(\delta_n)\cosh(\delta_n)=0. \tag{95}$$

特征函数 $\{W_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 由（93）定义，在 $L^2(0,\ l)$ 中构成标准正交基，并且 $\|\phi_n\|_{L^2(0,\ 1)}=O(1)$ 作为 $n\to\infty$ （见 [27, 引理 4。6]）。由（95）还可看出

$$\delta_n=\frac{\pi(2n-1)}{2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\quad\text{as}\ \ n\to\infty. \tag{96}$$

将（90）代入（88）–（89），并进行变量代换

$$\xi_n(t)=\omega_n q_n(t),\ \eta_n(t)=\dot{q}_n(t),$$

可得到系统（1），其中

$$\omega_n=\frac{c\delta_n^2}{l^2}=\frac{c\pi^2(2n-1)^2}{4l^2}+o(1),$$
$$b_n=2lk_n{\delta_n}^{-1}\left(l{\delta_n}^{-1}-d\gamma_n\right)=O(1/n)>0\quad\text{as}\ \ n\to\infty. \tag{97}$$

上述表示表明， ω_n 和 b_n 满足假设（$A1$）–（$A3$）（假设（$A3$）由 [44, 引理 4。3]推出）。

利用（97），我们得出序列 $\{b_n\omega_n^{\alpha}\}$ 与 $\{n^{2\alpha-1}\}$ 在 $n\to\infty$ 时渐近等价。因此，对于任意 $\alpha\geq\frac{1}{2}$，条件（$A6$）均成立。鉴于备注1，为满足（$A5$），我们从不等式（2）中选取 ρ，其中 $p=2$。由此，任意 $\rho\in(1,\ 3\ 2)$ 均满足（$A5$）。根据定理2.1，只要控制系统（1）的参数对应于旋转梁模型（情形（97）），问题1和问题2的解就满足周转性质（18），其中任意 $\beta=\rho-1\in(0,\ 1\ 2)$ 均适用。

5 结论

本文的主要贡献在于，首次揭示了一类振荡无限维系统的线性二次最优控制问题中存在多项式转向点现象。

与针对一致指数稳定系统的经典指数转向点理论相比，本文的关键新意在于闭环谱隙在高频处趋于消失，因而无法在自然能量空间中获得一致指数估计。因此，分析依赖于多项式二分性和加权范数：巡航现象估计在弱拓扑 $V_{0,\ -\beta-1}$ 下表述，以弥补形如 $e^{-|b_k|t} \le C_\beta |b_k|^{-\beta}(t+1)^{-\beta}$ 的界中固有的模态相关损失。从方法论角度看，证明结合了变分系统的哈密顿生成元的 Riesz 基构造、相关双曲函数的一致楔积估计，以及加权Bari型论证。

请注意，逐点控制偏差项 $|u(t) - \hat{u}|$ 并未出现在主不等式 (18) 的左侧。由于在已证明协态具有性质 $\Lambda(t) \in H$ 的前提下，最优控制 $u(t)$ 由公式 (14) 良好定义，因此我们有 $|u(t) - \hat{u}| \le \|b\|_{\ell^2}\, \|\mu(t) - \hat{\mu}\|_{\ell^2}$。因此，任何控制 $\|\mu(t) - \hat{\mu}\|_{\ell^2}$ 的强转向点估计，都将推出 $|u(t) - \hat{u}|$ 具有相同的衰减率。

一个自然的后续方向是加强左侧所采用的拓扑。在强能量空间中建立逐点多项式大道估计 H，即可通过反馈关系直接获得控制差异的衰减信息，但要实现这种加强，似乎需要额外的端点正则性或更严格的结构假设。另一个自然的问题是衰减指数以及所选加权拓扑的尖锐性。若能将最优多项式衰减率和最弱的有意义拓扑与多项式稳定性理论中的预解式增长条件联系起来，将会很有意义；例如参见[4, 5, 3]。

本文的研究仅限于自由端最优控制问题。考虑终端点约束 $x(T) = x^1$ 会给协态的正则性分析带来严峻的额外挑战。在本文采用的弱拓扑 $V_{0,\ -\beta-1}$下，逐点大道估计需要额外的端点正则性和更精细的谱论证。因此，我们将固定端点情形留作未来研究中的一个开放问题。

除了固定端点问题之外，还有几个自然的后续研究方向：

- 将分析扩展到多输入或边界控制双曲系统，其中谱结构可能不满足形如（$A2$）、（$A3$）的谱隙条件，或可能包含重数（例如旋转Timoshenko梁模型中的 [43]，[44, 定理 5。1]或Kirchhoff板中的 [44, 第 6]）；
- 考虑半线性扰动，此时可能仅成立局部或近似的转折点性质；
- 研究非平稳集合附近的转折点现象（例如周期最优状态），因为稳态并非最优。

致谢

Alexander Zuyev 衷心感谢欧洲区域发展基金（ERDF）通过“研究与创新”计划提供的资助——资助编号 ZS/2023/12/182138。

参考文献

[1] N. Anantharaman 和 M. L´eautaud. 环面上阻尼波动方程的尖锐多项式衰减率 等。 *Analysis & PDE*, 7(1):159–214, 2014.

[2] J. Aˇskovi´c, E. Tr´elat 和 H. Zidani。值函数展开与长时间区间上的巡航现象。
Systems & Control Letters, 188:105902, 2024.[3] C. J. K. Batty、R. Chill 和 Y. Tomilov。算子半群衰减的精细尺度。 *Journal of the European Mathematical Society* 18 4 853 929, 2016 , ( ): –
.[4] C. J. K. Batty 和 T. Duyckaerts。巴拿赫空间上有界半群的非一致稳定性。
Journal of Evolution Equations, 8(4):765–780, 2008.[5] A. Borichev 和 Y. Tomilov。函数与算子半群的最优多项式衰减。 *Mathematische Annalen* 347 455 478, 2010 , : – .
[6] R. Dorfman、P. A. Samuelson 和 R. M. Solow。 *Linear programming and economic analysis*. McGraw- Hill, 1958.[7] K.-J. Engel 和 R. Nagel。 *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, 第 194 卷。Springer, 2000.[8] T. Faulwasser 和 D. Bonvin。精确巡航性质与经济型非线性模型预测控制。 *European Journal of Control* 35 34 41, 2017 , : – .
[9] T. Faulwasser 和 L. Gr¨une。最优控制中的转折点性质：离散时间与连续时间结果综述。
Handbook of numerical analysis, 23:367–400, 2022.[10] T. Faulwasser、M. Korda、C. N. Jones 和 D. Bonvin。关于连续时间最优控制问题中的巡航现象与耗散性。 *Automatica*, 81:297–304, 2017.[11] B. Geshkovski 和 E. Zuazua。偏微分方程、残差网络及其他领域最优控制中的巡航现象。 *Acta Numerica* 31 135 263, 2022 , : – .
[12] I. Gohberg 和 M. G. Kreˇın。 *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, 第18卷。美国数学会，1978.[13] L. Gr¨une 和 M. A. M¨uller。严格耗散性与巡航性质之间的关系。
Systems & Control Letters, 90:45–53, 2016.[14] L. Gr¨une、M. Schaller 和 A. Schiela。受模型预测控制启发的一类抛物型偏微分方程最优控制的灵敏度分析。 *SIAM Journal on Control and Optimization*, 57(4):2753– 2774, 2019.[15] L. Gr¨une、M. Schaller 和 A. Schiela。一般演化方程线性二次最优控制的灵敏度分析与巡航分析。
Journal of Differential Equations 268 12 7311 7341, , ( ): – 2020.[16] V. Grushkovskaya 和 A. Zuyev。在具有 q 对纯虚特征值的临界情形下，非线性系统解的渐近行为。
Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 80 156: –178, 2013.[17] M. Gugat 和 F. M. Hante。双曲系统最优边界控制问题中的巡航现象。 *SIAM Journal on Control and Optimization*, 57(1):264–289, 2019.[18] B.-Z. Guo 和 J.-M. Wang。 *Control of wave and beam PDEs*. Springer, 2019.[19] Z.-J. Han 和 E. Zuazua。无限时域双曲型线性二次问题中的慢衰减与巡航现象。
SIAM Journal on Control and Optimization, 60(4):2440–2468, 2022.[20] A. Haraux。
Quelques méthodes et résultats récents en théorie de la contrôlabilité exacte. 法国国家信息与自动化研究所罗克昂库尔中心，1990.[21] B. Jacob 和 J. R. Partington。关于一维输入空间对角系统的可控性。
Systems & Control Letters, 55(4):321–328, 2006.[22] V. Komornik 和 P. Loreti。
Fourier Series in Control Theory. Springer, 2005.[23] G. Lance、E. Tr´elat 和 E. Zuazua。线性抛物型偏微分方程模型的形状巡航。 *Systems & Control Letters* 142 104733, 2020 , : .[24] X. Li 和 J. Yong。分布参数系统最优控制的必要条件。 *SIAM Journal on Control and Optimization* 29 4 895 908, 1991 , ( ): – .

[25] X. Li 和 J. Yong. *Optimal control theory for infinite dimensional systems*. Birkh¨auser，1995年。[26] Z. Liu 和 B. Rao. 线性演化方程解的多项式衰减率刻画。*Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*，56：630–644，2005年。[27] Z.-H. Luo、B.-Z. Guo 和 ¨O. Morg ¨ *Stability and stabilization of infinite dimensional systems with* ul. . *applications* 1999 Springer Science & Business Media，。[28] 冯·诺依曼。一般经济均衡模型。*The Review of Economic Studies* 13 1 1 9, ，( )：– 1945 。[29] D. Pighin. 半线性控制中的周转性质。*ESAIM: Control Optimisation and Calculus* ， ， *of Variations* 27 48, 2021 48 ： 。论文编号 。[30] R. Remmert. *Theory of complex functions*，第 122 卷。Springer Science & Business Media，1991年。[31] N. Sakamoto 和 E. Zuazua. 非线性最优控制中的周转性质——几何方法。*Automatica*，134：109939，2021年。[32] G. Sklyar 和 P. Polak. 关于某类 C_0 *Stabilization of* -半 *Distributed Parameter Systems: Design Methods and Applications* 89 102 2021 群的多项式稳定性。见 ，第–页。Springer，。[33] E. Tr ´ *Mathematics of Control Signals and Systems* 35 3 685 739, 2023 elat. 线性大道定理。，，，( )：–。[34] E. Tr´elat. *Control in finite and infinite dimension*。偏微分方程与数据科学SpringerBriefs。Springer，2024年。[35] E. Tr´elat、C. Zhang 和 E. Zuazua. 希尔伯特空间中最优控制问题的稳态与周期指数大道性质。 *SIAM Journal on Control and Optimization*，56(2)：1222–1252，2018年。[36] E. Tr´elat 和 E. Zuazua. 有限维非线性最优控制中的周转性质。*Journal of Differential Equations*，258(1)：81–114，2015年。[37] E. Tr´elat 和 E. Zuazua. 最优控制及其拓展中的巡航现象：综述，2025年。arXiv预印本。[38] H. Triebel. *Interpolation Theory*、*Function Spaces*、 *Differential Operators*。North-Holland，1978年。[39] M. Tucsnak 和 G. Weiss. *Observation and control for operator semigroups*。Springer Science & Business Media，2009年。[40] S. Zamorano. 时变系统的殆周期大道现象。*Systems & Control Letters* 199 106069, 2025 ，：。[41] A. Zaslavski. *Turnpike properties in the calculus of variations and optimal control*，第80卷。Springer Science & Business Media，2005年。[42] X. Zhang 和 E. Zuazua. 一维双曲-抛物耦合系统的多项式衰减与控制。*Journal of Differential Equations*，204(2)：380–438，2004年。[43] A. Zuyev 和 O. Sawodny. 旋转Timoshenko梁模型的镇定与可观测性。*Mathematical Problems in Engineering*，2007(1)：057238，2007年。[44] A. L. Zuyev. *Partial stabilization and control of distributed parameter systems with elastic elements*。Springer，2015年。