arXiv:2603.02068v1 [math.PR] 2 Mar 2026

置换不变随机矩阵的对角值柯西变换收敛速率

Alexis Imbert *

2026年3月3日

摘要

设 A 为置换不变随机矩阵， B 为另一个随机矩阵。我们给出了一个定量界，刻画 $A+B$ 的预解式对角线与 A 和 B的对角线上的带 amalgamation 的自由和之预解式对角线之间的差异。此外，当矩阵 A 和 B 稀疏且算子范数有界时，我们改进了收敛速率。为此，我们将 A 和 B 在对角线上的自由和显式构造为一个加权局部有限图的邻接算子。

目录

1 引言 2 2 主要定理的陈述 4

2.1 对角值自由概率的概念.4 2.2 主要定理及证明概要.7

3 合并自由和的显式构造 8 4 交通概念与假设 12

4.1 交通概念.13 4.2 单射迹假设.16 4.3 弗罗贝尼乌斯范数假设.19

*波尔多大学，波尔多数学研究所，解放大道 351 号，33400 塔朗斯，法国。电子邮箱：alexis.imbert@math.u-bordeaux.fr

5 主定理的证明 **20**
5.1 预备结果.20 5.2 定理 2.6 的证明.27 5.3 定理 2.7 的证明.29

A 渐近展开 **33**

1 引言

理解两个随机矩阵之和的渐近谱是随机矩阵理论中的一个经典问题。根据 Voiculescu 的开创性工作 [21], ，我们知道，当两个矩阵中的一个在酉矩阵共轭作用下的分布保持不变时，这两个矩阵是渐近自由的。在这种情形下，只要这两个矩阵的经验谱分布（ ESD）收敛，其和的极限测度就是边缘极限测度的自由加性卷积。证明这类收敛性的主要工具之一是矩方法，它表明柯西变换（或等价地，预解式的归一化迹）在适当定义域内收敛到某个解析函数。这尤其证明了柯西变换的极限仍然是某个测度的柯西变换，而我们现在可以对该测度进行刻画。此外，在同一情形下，只要对极限 ESD 作出某种光滑性假设，并且矩阵的范数具有有界性，就已经证明，和的柯西变换以 N^{-1} 的速度趋于其极限（其中 N 是矩阵的大小）。第一个结果由 Chatterjee 在 [8] 中获得，随后 Kargin 在 [13] 和 [14]中对其进行了改进。这些结果不仅表明柯西变换收敛，还表明预解式的对角线收敛。在随后的一系列论文中，Bao、Erdos 和 Schnelli [2, 3] 证明，在极限测度的主体区域内，最优速度为 N^{-1} 。

在本文中，我们关注一种更一般的情形：当两个矩阵中的一个在置换矩阵共轭下具有分布不变性时。在这种情况下，只要这些矩阵在交通分布意义下收敛并满足某种因子分解性质，Male[16] 便证明了所涉及的随机矩阵是渐近交通自由的。此外，已有研究表明， [1] 中的置换不变随机矩阵在对角线上渐近自由。后者是算子值自由性 [17, 23, 19] 的一个特例。因此，这两个矩阵的渐近联合交通（分别地，对角）分布仅由它们各自的边缘交通（分别地，对角）分布决定（更多细节见定义 4.3）。那么，如果我们只关心其和的渐近 ESD，由于联合交通分布和对角分布包含联合 $*$分布，因此只需知道边缘渐近交通分布或对角分布即可。对于单个置换不变随机矩阵，尤其是随机正则图的邻接矩阵，近年来已有多项相关研究，例如参见 [5, 4]。

设 X 是一个大小为 N 的矩阵，并设 D 是一个矩阵元均具有正虚部的对角矩阵。 X 的对角值柯西变换定义为

$G_X(D) := \Delta((D-X)^{-1})$，其中对于任意矩阵 M， $\Delta(M) := (M_{i,\ j}\delta_{i,\ j})_{1\le i,\ j\le N}$。更一般的定义见第 2 节。从标量情形可知，通常会研究测度的柯西变换，以恢复关于该测度的一些信息。算子值柯西变换也是如此（参见 $[19, 23, 21]$）。

若 A 和 B 以速率 M满足假设 4.5 和 4.6，则定理 2.6 指出，对于 $|z| > r$，

$$\mathbb{E}\frac{1}{N}||G_{A+B}(zI) - G_{a+b}(zI)||_F^2 \le (r/|z|)^{2cM},$$

其中 r, c 是一些常数，取决于关于 A 和 B 的假设； $a+b$ 是 A 和 B 对角线上的自由和，并在第 3 节中显式构造。注意， M 至多为 $\log\ N/\log\log\ N$ 阶，因此收敛速率至多为 $N^{-\beta/\log\log N}$。

假设 4.5 控制大小为 M的图单项式的交通矩增长，而假设 4.6 控制 A 和 B 的 M 次幂的弗罗贝尼乌斯范数（或等价地，它们的 Schatten-M 范数）；其中 M 随 N 趋于无穷，且至多为 $\log\ N/\log\log\ N$ 阶。

假设 4.5 适用于范围广泛的矩阵模型，例如 Wigner 矩阵、重型 Wigner 矩阵（其中尤其包括参数至少为 d/N 、某个固定 $0 < d$ 下的 Erdős–Rényi 图的邻接矩阵），以及稀疏有界矩阵。此外，假设 4.5 在逐元素乘积下保持稳定（见第 4.2 节最后一段）。可以这样理解：给定一个至多有 M 个顶点和边的图，我们控制将该图映射到矩阵 A 和 B的邻接图上的单射映射数量。

然而，假设 4.6 的限制更严格。事实上，以 Erdős–Rényi 随机图的邻接矩阵为例，该假设仅在参数 d 也随 N趋于无穷时才适用。不过要注意，它比要求矩阵的算子范数一致有界更宽松。再以 Erdős–Rényi 图为例，当参数 d 的阶小于 $\log\ N$时，文献 $[7]$ 证明，具有此类参数的 Erdős–Rényi 随机图的邻接矩阵的算子范数会随N趋于无穷。然而，对于足够小的 M，当它随 N趋于无穷时，这类模型满足假设 4.6。类似地，对于重型 Wigner 矩阵，如果矩阵元的 k 阶矩（经过适当归一化）对 $k \ge 3$ 不为零（见 $[24, 15]$），那么无论速度 M如何，假设 4.6 都无法得到验证，见第 4.3 节。因此，我们将研究范围限制在所谓的稀释 Wigner 矩阵上，其矩阵元的矩所满足的条件见公式 (4.9)。

定理 2.7 要求这两个矩阵一致稀疏且算子范数有界，但它控制了在任意对角矩阵处取值的柯西变换之差，并将收敛速率提升至 $N^{-\gamma}$，其中 γ 是某个显式正常数。因此，对于有界的 d，该定理可应用于一致 d-正则图，从而将 $[4]$ 的工作延伸至两个此类矩阵相加的情形。两个矩阵的算子范数均有界时，问题更容易处理，因为这使我们能够控制预解式级数展开的其余部分。注意，这意味着假设 4.6 成立。

这两个证明都依赖矩方法，其中假设 4.6（分别是一致的算子范数界）使我们能够控制预解式级数展开中的其余部分

定理 2.6，分别为定理 2.7。

论文结构在第 2 节中，我们介绍算子值自由概率中的必要工具，以便陈述定理 2.6 和定理 2.7。在第 3 节中，我们将 A 和 B 在对角线上的带 amalgamation 的自由和实现为一个局部有限图的邻接算子。第 4 节专门讨论假设 4.5 和 4.6，并说明许多随机矩阵模型都满足这些假设。在第 5 节中，我们证明两个主要定理。

2 主要定理的陈述

本节介绍算子值自由概率的必要背景知识，以便陈述我们的主要定理。具体而言，我们将构造两个随机矩阵在对角线上的带 amalgamation 的自由和。

2.1 对角值自由概率的概念

我们回顾算子值自由概率的一些基本概念。关于算子值非交换概率的详细介绍，可参阅 [17,19, 23] 及其中的参考文献。

定义 2.1： 一个 C^*-算子值概率空间 是一个三元组 $(\mathcal{A},\mathcal{B}\ E)$，其中 $\mathcal{A}$ 是一个C^*-代数，$\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个含幺 C^*-子代数，并且 $E:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是一个完全正、含幺的线性映射，满足 $\mathcal{B}$-双模条件：$E(b_1ab_2)=b_1E(a)b_2$，对所有$b_1,b_2\in\mathcal{B}$ 以及所有 $a\in\mathcal{A}$均成立。映射 E 称为条件期望。

我们称两个元素 $x,\ y\in\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{B}$ 上自由（或称为$\mathcal{B}$-自由，或在$\mathcal{B}$上带 amalgamation 的自由），当且仅当满足以下陈述。令 $\mathcal{A}_1\subset\mathcal{A}$（分别地，令$\mathcal{A}_2\subset\mathcal{A}$）为由 x（分别地，由 y）和$\mathcal{B}$生成的代数。对所有满足下列条件的 $n\geq 1$和 $a_1,\ \cdots\ a_n$：

- 中心化：对所有 $1\leq i\leq n$, $E(a_i)=0$,
- 交替：对所有 $1\leq i\leq n$, $a_i\in\mathcal{A}_{j_i}$，其中 $j_1\neq j_2,\ \cdots\ j_{n-1}\neq j_n$,

then

$$E(a_1a_2\cdots a_n)=0.$$

令$\mathcal{X}$ 为一个与$\mathcal{B}$代数自由的自伴形式变量，我们将$\mathcal{B}\langle\mathcal{X}\rangle$ 定义为$\mathcal{B}$-双模 $*$-代数，即 $\mathcal{B}$上的非交换多项式的线性张成，其单项式形式为 $b_1\mathcal{X}b_2\mathcal{X}\cdots\mathcal{X}\,b_n$，其中 $b_i\in\mathcal{B}$，对于 $1\leq i\leq n$，有 $(b_1\mathcal{X}b_2\mathcal{X}\cdots\mathcal{X}\,b_n)^*=b_n^*\mathcal{X}b_{n-1}^*\mathcal{X}\cdots\mathcal{X}\,b_1^*$。

定义 2.2： 令 $a \in (\mathcal{A}, \mathcal{B}\ E)$ 如上。 a 的$\mathcal{B}$-值分布（或 E-分布）是映射

$$\begin{aligned} \mu_a : \mathcal{B}\langle\mathcal{X}\rangle &\to \mathcal{B} \\ P &\mapsto E(P(a)), \end{aligned}$$

其中 $P(a)$ 表示非交换多项式 $P(\mathcal{X}) \in \mathcal{B}\langle\mathcal{X}\rangle$ 的求值映射。

我们将分布抽象集合 Σ_0 定义为由酉元、正的 $\mathcal{B}$-双模映射 $\mu : \mathcal{B}\langle\mathcal{X}\rangle \to \mathcal{B}$ 构成的集合，使得

1. 对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 以及任意非交换多项式 $P_1(\mathcal{X}), \cdots P_n(\mathcal{X}) \in \mathcal{B}\langle\mathcal{X}\rangle$，都有 $[\mu(P_i(\mathcal{X})^* P_j(\mathcal{X}))]_{1\le i,j\le n} \ge 0$ 属于 $\mathcal{M}_n(\mathcal{B})$，
2. 存在 $M > 0$，使得对所有 $b_1, \cdots b_n \in \mathcal{B}$，

$$||\mu(b_0 \mathcal{X} b_1 \cdots \mathcal{X} b_n)|| \le M^n ||b_0|| \cdots ||b_n||.$$

上述范数是从 C^*-代数继承而来的范数；在讨论随机矩阵时，它就是算子范数。

事实证明，这两个条件刻画了一个元素的$\mathcal{B}$-值分布。

定理 2.3 (命题 2.2，见 [19])。设 μ 是一个正的酉 $\mathcal{B}$-双模映射，且满足上述第一点。当且仅当存在一个 $\mathcal{B}$-值非交换概率空间 $(\mathcal{A}, \mathcal{B}\ E)$ 以及一个自伴元 $a \in \mathcal{A}$，使得 $\mu = \mu_a$时，它才满足第二点。

与标量情形一样，可以定义与分布 μ相关的一些解析变换。每个元素 $x \in \mathcal{A}$ 都可以唯一地写成 $\mathrm{Re}(x) + i\mathrm{Im}(x)$，其中 $\mathrm{Re}(x) = \frac{x+x^*}{2}$ 且 $\mathrm{Im}(x) = \frac{x-x^*}{2i}$。我们记 $\mathrm{H}^+(\mathcal{B}) := \{b \in \mathcal{B}, \mathrm{Im}(\overline{b}) > 0\}$，其中 $\overline{y > 0}$表示 $y \ge 0$ 且 y 可逆，等价地， $y \ge \varepsilon 1_{\mathcal{A}}$ 对于某个严格正实数 ε成立。$\mathrm{H}^+(\mathcal{B})$中的元素均可逆。此外，对于一个自伴元$x = x^*$ 和一个元素 $b \in \mathrm{H}^+(\mathcal{B})$， $b - x$ 仍然可逆。因此，算子上半平面 $\mathrm{H}^+(\mathcal{B})$是定义自伴元 $x = x^*$的柯西变换的适当定义域

Let x 是算子值概率空间（$\mathcal{A}, \mathcal{B}\ E$）中的自伴元 ，

- x 的算子值柯西变换为

$$G_x(b) := E((b - x)^{-1}) = \mu_x((b - \mathcal{X})^{-1}). \tag{2.1}$$

- x 的倒数柯西变换为

$$F_x(b) := G_x(b)^{-1}. \tag{2.2}$$

它验证了 $\mathrm{Im}(F_x(b)) \ge \mathrm{Im}(b)$（参见 [6] 中的备注 2.5）。

它们在 $\mathrm{H}^+(\mathcal{B})$ 上都有定义，并且 F_x 的取值属于 $\mathrm{H}^+(\mathcal{B})$。注意，根据定理 2.3，它们可以针对任意测度 $\mu \in \Sigma_0$ 定义。还应注意，与标量情形不同，它们不能刻画分布 μ。Voiculescu 的开创性工作 [22]表明，要恢复分布 μ，还需要更多信息，即柯西变换的完全矩阵扩张。不过，我们在此不需要这一点。

我们还回顾两个非交换 B 值变量 x 和 y 的 B 值自由和的一些简单事实，它们属于一个 C^* 算子值非交换概率空间 $(\mathrm{A}, \mathrm{B}\ E)$。我们将由 B 和形式变量 X（分别为 Y）生成的代数记作 $\mathrm{A}_1 = \mathrm{BX}$（分别为 $\mathrm{A}_2 = \mathrm{BY}$）。注意，从 A_1 和 A_2 到 BX, Y 存在典范单射映射，其中 X 和 Y 代数自由。我们将 A_1 和 A_2 与它们通过这些同态得到的像等同。我们按以下规则定义映射 $\mu : \mathrm{BX}, \mathrm{Y} \to \mathrm{B}$。对于任意 $n \geq 1$，令 $P_1, \cdots\ P_n$ 满足 $P_i \in \mathrm{A}_{j_i}$，其中 $j_1 \neq j_2, \cdots\ j_{n-1} \neq j_n$，记 $\nu(P_i) = \mu_x(P_i)$（若 $j_i = 1$），而 $\nu(P_i) = \mu_y(P_i)$（若 $j_i = 2$），则有

$$\mu\left((P_1 - \nu(P_1)) \cdots (P_n - \nu(P_n))\right) = 0 \tag{2.3}$$

最后，对于任意多项式$\mathcal{B}\langle\mathcal{Z}\rangle$，我们将$\mathcal{X}$ +$\mathcal{Y}$代入其中所得的$\mathcal{B}\langle\mathcal{X}, \mathcal{Y}\rangle$ 记作 $\in$，其中$\mathcal{Z}$ 分别映为$\mathcal{X}$和$\mathcal{Y}$，并将 $x \boxplus_{\mathcal{B}} y$ 定义为具有如下分布 $\mu_{x \boxplus_{\mathcal{B}} y}$ 的元素：

$$\begin{aligned} \mu_{x \boxplus_{\mathcal{B}} y} : \mathcal{B}\langle\mathcal{Z}\rangle &\to \mathcal{B} \\ P &\mapsto \mu(P(x+y)), \end{aligned}$$

采用自然的求值映射。

因此，存在一种典范方式，可以构造两个非交换算子值变量的（在$\mathcal{B}$上的）并合自由积。我们将在第 3 节中针对随机矩阵给出一种更明确的构造。

注 2.1： 稍后将有两种 C^*-算子值概率空间的情形发挥重要作用。

- 三元组（$\mathcal{M}_N(\mathrm{C}), \mathcal{D}_N(\mathrm{C})\ \Delta$），其中$\mathcal{D}_N(\mathrm{C})$为（交换的）**对角矩阵代数**，而 Δ 是由 $\Delta(M) = (M_{i,j}\mathbb{1}_{i=j})_{1 \leq i,j \leq N}$ 定义的映射，是一个 C^*-算子值概率空间。

- 此外，还可以取任意带单位的 $*$-代数 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset B(H)$，使得它们在 $B(\mathcal{H})$ 的范数拓扑下均为闭集，并取任意一个从 A 到 B的 $*$-态射，该态射将自动是完全正的（参见 [18] 第 3 章和 [9] 例 34.3）。

定义 2.4： 若对任意 $\sigma \in \mathfrak{S}_N$，矩阵 $V_\sigma M V_\sigma^{-1}$与 M同分布，则称随机矩阵 M 是置换不变的，其中 $V_\sigma = (\mathbb{1}_{i=\sigma(j)})_{1 \leq i,\ j \leq N}$。

[1] 的一个关键结果是：在算子范数下有界的独立置换不变随机矩阵在对角上渐近自由。我们陈述该结果的一个较弱版本。

定理 2.5（定理 1.2，出自 [1]）。设 A_1 与 A_2 为在算子范数下有界的独立置换不变随机矩阵。设 $P_1, \cdots P_n \in \boldsymbol{D}_N\langle \boldsymbol{X} \rangle$ 以及 $j_1 \neq j_2 \neq \cdots \neq j_n$，则记

$$\varepsilon_N := \Delta\left((P_1(A_{j_1}) - \Delta(P_1(A_{j_1}))) \cdots (P_n(A_{j_n}) - \Delta(P_n(A_{j_n})))\right),$$

我们有

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(\varepsilon_N \varepsilon_N^*)^p\right] \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.4}$$

我们的目标是定量比较 $A+B$ 的分布与 A 和 B 的合并自由和的分布。直观地说，为了构造合并自由和，我们利用 A 和 B 的数据，在某个希尔伯特空间上构造一个有界算子 $a+b$，它是某个图的邻接算子。这个图的重要特征是，相对于族 A 和 B，其彩色分量图是一棵树（见第 4.1 节）。

2.2 主要定理及证明概要

设 A 是置换不变的，我们可以认为 B 也具有置换不变性。事实上，记 $\tilde{B} := VBV^{-1}$，其中 V 是均匀置换矩阵，则有 $\mathbf{E}\,\mathrm{Tr}\; G_{A+B}(zI) = \mathbf{E}\,\mathrm{Tr}\; G_{A+\tilde{B}}(zI)$。因此，在本文余下部分，特别是在以下定理的证明中，我们均认为 A 和 B 是置换不变随机矩阵。

对于 A 和 B 这两个随机矩阵，我们用 $a+b$ 表示它们关于对角线的自由和，即第 3 节中构造的算子。在此情形下，a 和 b 仍然关于对角矩阵代数自由，因此 $G_{a+b}(D)$ 的取值在 $\mathcal{D}_N(\mathbb{C})$ 中。为简便起见，我们将 $G_X(z) = G_X(zI)$ 记作 X 在标量矩阵 zI 处的对角值柯西变换。对于矩阵 M，我们用 $||M||_F := \sqrt{\mathrm{Tr}(MM^*)}$ 表示 F 的弗罗贝尼乌斯范数，用 $||M||_{op}$ 表示其算子范数。

定理 2.6。设 A 和 B 是满足假设 *4.5*（速度为 M，常数分别为 h_1 和 h_2）以及假设 *4.6*（速度为 M，两者的常数均为 C）的随机厄米矩阵。假设其中一个是置换不变的。令 $0 \leq c \leq \frac{1}{h_1+h_2+6}$ 和 $|z|^2 > \text{最大值}\{4C, 2c^2\} =: r_0^2$，则有

$$\mathbb{E}\frac{1}{N}||G_{a+b}(z) - G_{A+B}(z)||_F^2 \leq \frac{4}{|z|^2}\left(\frac{r_0}{|z|}\right)^{2cM} \tag{2.5}$$

假设中规定，速度 M 不能大于 $\log N / \log\log N$。因此，能够达到的最佳速度为 $N^{\gamma/\log\log N}$ 量级。

下一个定理的假设限制更严格，但收敛速度更快，并且不仅能控制算子值柯西变换在标量矩阵上的差异。

定理 2.7。设 A 和 B 是两个厄米随机矩阵，其中一个具有置换不变性。假设存在一个与 N 独立的 $C > 0$，使得它们满足

1. 算子范数一致有界： $||A||_{op}, ||B||_{op} \leq C$,

2. *Sparse:* $\forall 1 \leq i \leq N, \sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{A_{i,j}\neq 0} + \mathbb{1}_{B_{i,j}\neq 0} \leq C$.

设 $\eta_0 > ||A||_{op} + ||B||_{op}$ 和 $D \in \boldsymbol{D}_N(\mathbb{C})$，满足 $\min\{\mathrm{Im}(D_{i,i})\} > \eta_0$，并记$d := \min\{|D_{i,i}|, i \in [N]\}$，则有

$$\mathbb{E}\frac{1}{N}||G_{A+B}(D) - G_{a+b}(D)||_F^2 \leq \frac{6}{d^2} N^{\frac{2\log 2C/d}{1+2\log C}}. \tag{2.6}$$

两个定理的证明都依赖于矩方法：我们比较$A+B$的矩与第 3 节中构造的算子 $a+b$ 的矩。

3 合并自由和的显式构造

我们将合并自由和 A 和 B 构造性地定义为一个局部有限有根加权图的邻接算子。此构造受到 [20]以及 [12, 10]中所发展的方法的启发。设 $N \in \mathbb{N}$，对于 $x \in [N] := \{1, \cdots N\}$，我们定义

$$\begin{aligned} V_N^x &:= \{x\} \sqcup \bigsqcup_{n=1}^{\infty} V_N^x(n,a) \sqcup V_N^x(n,b), \text{ where} \\ V_N^x(n,a) &:= \{(j_1, \cdots, j_n, a) \in [N]^n \times \{a\} \,|\, x \neq j_1,\, j_1 \neq j_2, \cdots,\, j_{n-1} \neq j_n\}, \\ V_N^x(n,b) &:= \{(j_1, \cdots, j_n, b) \in [N]^n \times \{b\} \,|\, x \neq j_1,\, j_1 \neq j_2, \cdots,\, j_{n-1} \neq j_n\}. \end{aligned}$$

令 $\mathcal{H}_N^x := \ell^2(V_N^x)$ 为满足 $\sum_{v\in V_N^x} |y_v|^2 < +\infty$ 的序列 $(y_v)_{v\in V_N^x}$ 的集合。由于 $(\delta_v)_{v\in V_N^x}$ 是 $\mathcal{H}_N^x$ 的一组基（其中 δ_v 表示除 v 处外处处为 0 的序列），我们常将 $\mathcal{H}_N^x$ 这组基的元素与 V_N^x 的元素对应起来。为便于记号，我们令 $V_N^x(0) := \{x\}$。

注意，对于 $x, y \in [N]$，在 V_N^x与 V_N^y之间存在一个自然双射，它将元组 $(j_1, \ldots, j_n, a)$ 映为 $(j_1', \cdots j_n', a)$，其中当 $j_i \notin \{x, y\}$ 时为 $j_i' = j_i$，当 $j_i = y$ 时为 $j_i' = x$，当 $j_i = x$ 时为 $j_i' = y$，并且对以 b 结尾的元组同样如此。该双射自然地定义了一个同构 $\Psi_{x\to y} : \mathcal{H}_N^x \to \mathcal{H}_N^y$；当作用于基的元素时，我们因此常常写$\mathcal{H}_N$ 而不是 $\mathcal{H}_N^x$。

我们构造一族映射，对于 $x \in [N]$,

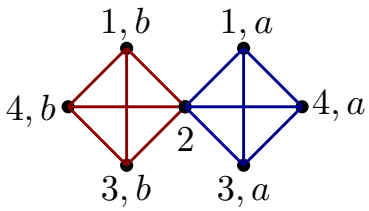
$$\boxplus_\Delta^x : \mathcal{M}_N(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_N(\mathbb{C}) \to B(\mathcal{H}_N^x), \tag{3.1}$$

满足以下性质： $\forall x,\ y \in [N]$, $(.\boxplus_\Delta^x .) = \Psi_{y\to x}(.\boxplus_\Delta^y .)\Psi_{x\to y}$。因此，只需构造出这类映射中的一个，我们将其简称为 $\boxplus_\Delta$。

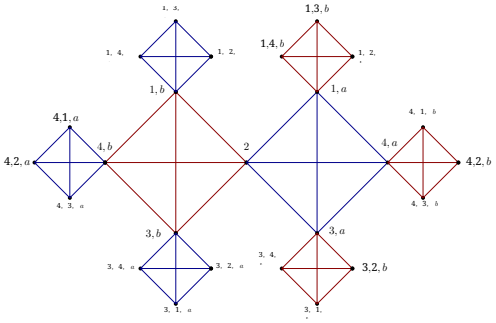
思路如下：对于每个矩阵 A 和 B，我们按以下方式构造 $A \boxplus_{\Delta} B$。将 A 和 B 视为顶点集为 $[N]$的加权图，并在 A的每个顶点 v处，沿着 B中对应的同一顶点 v 连接一份图 B 的副本。接着，对于每个新生成的顶点（也就是 B的图的某个副本中的顶点），在对应顶点处连接一份新的 A 副本。无限重复这一过程，我们便得到一个无限加权局部有限图。其邻接算子属于 $B(\mathcal{H}_N)$。

注 3.1： 从另一个顶点 y 出发，在按上述方式重命名顶点集合后，会得到完全相同的图

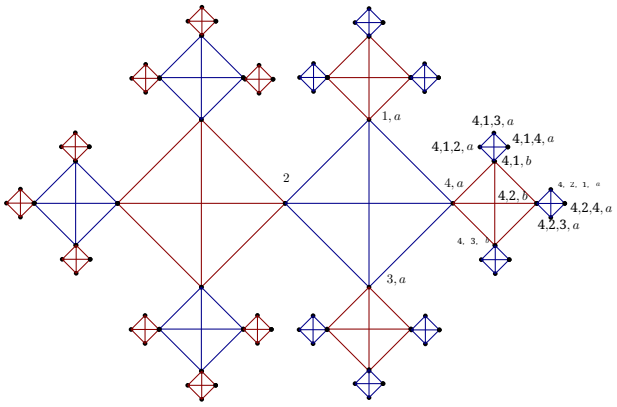
图 1 展示了以顶点 2 为根时该构造的最初几个步骤。



(a) 第一步



(b) 第二步



(c) 第三步

图 1： 将 $A \boxplus_{\Delta} B$ 构造为一个迭代过程。蓝色（分别为红色）的边标记为a（分别为 b）。

需要注意的是，若考察来自 A 的分量和来自 B的分量，这个图具有树状结构。形式上，相对于族 A 和 B，其彩色分量图是一棵无限树（见第 4 节）。

现在，我们明确构造与 A 和 B 相关的算子 a，$b \in B(\mathcal{H}_N^x)$，使得$A \boxplus_{\Delta} B = a+b$。随后，我们将证明它们相对于对角算子代数是自由的，甚至在下文将精确定义的意义上，相对于对角矩阵代数也是自由的。因此，

我们将 A 和 B 的合并自由和定义为 a 和 b 之和（此处的和是指有界线性算子上的自然求和运算）。

为便于定义 a 和 b，我们采用如下约定： $V_N(0,a) = V_N(0,b) = V_N(0) = \{x\}$；当 $n = 0$ 时，$(j_1,\ldots,j_n,a) = (j_1,\ldots,j_n,b) = x$。据此，集合 V_N^x 有如下分解：

$$V_N^x = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \bigsqcup_{v\in V_N(n,b)} R_a(v) = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \bigsqcup_{w\in V_N(n,a)} R_b(w), \tag{3.2}$$

其中，对于 $n \geq 0$，我们将 $v = (j_1,\cdots\ j_n,b) \in V_N(n,b)$ 和 $w = (j_1,\cdots\ j_n,a) \in V_N(n,a)$ 记作

$$\begin{aligned} R_a(v) &:= \{v\} \sqcup \{(j_1,\cdots,j_n,j_{n+1},a),\ j_{n+1} \in [N]\setminus\{j_n\}\},\\ R_b(w) &:= \{w\} \sqcup \{(j_1,\cdots,j_n,j_{n+1},b),\ j_{n+1} \in [N]\setminus\{j_n\}\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

观察图 1，很容易理解这一分解。我们将属于同一个彩色分量的顶点归为一组： R_a 对应蓝色， R_b对应红色。我们分别称集合 $R_a(v)$ $R_b(w)$ 为 a,b 中的分量。

利用这一分解，我们定义算子 a 和 b 如下。

令 $n \geq 0$ 和 $v = (j_1,\ \cdots\ j_n,\ b) \in V_N\ (n,\ b)$。令 $v_1,\ v_2 \in R_a\ (v)$，我们将 $j\ (v_1)$ 和 $j\ (v_2)$ 分别记为 v_1 和 v_2 的最后一个指标（它可能是 j_n 或某个 $j_{n+1} \neq j_n$），并设$\langle a\delta_{v_1},\ \delta_{v_2}\rangle = A\ (j\ (v_2)\ \ j\ (v_1))$。

类似地，令 $n \geq 0$ 和 $w = (j_1,\ \cdots\ j_n,\ a) \in V_N\ (n,\ a)$。令 $w_1,\ w_2 \in R_b\ (w)$，我们将 $j\ (w_1)$ 和 $j\ (w_2)$ 分别记为 w_1 和 w_2 的最后一个指标（它可能是 j_n 或某个 $j_{n+1} \neq j_n$），并设 $\langle b\delta_{w_1},\ \delta_{w_2}\rangle = B\ (j\ (w_2)\ \ j\ (w_1))$。

设 $n \geq 0$，对于任意 $v_1 \in R_a(v)$，令 $v \in V_N(n,b)$ 为

$$a : \delta_{v_1} \mapsto \sum_{v_2\in R_a(v)} \langle a\delta_{v_1},\delta_{v_2}\rangle \delta_{v_2}. \tag{3.4}$$

类似地，设 $n \geq 0$，对于任意 $w_1 \in R_b(w)$，令 $w \in V_N(n,a)$ 为

$$b : \delta_{w_1} \mapsto \sum_{w_2\in R_b(v)} \langle b\delta_{w_1},\delta_{w_2}\rangle \delta_{w_2}. \tag{3.5}$$

注意， a 和 b 保持了由 (3.2) 给出的分解，即任意顶点 v 经 a（分别地，经 b）映射到其在 a（分别地，在 b）中的分量内的顶点。

由于矩阵 A 和 B 是厄米矩阵，很容易看出 a 和 b 是有界自伴算子，且其谱范数分别与 A 和 B 的谱范数相同。

回顾一下，对于 $T \in B(\mathcal{H}_N^x)$，我们将 T 的对角线定义为

$$\Delta(T) : \delta_v \mapsto \langle T(\delta_v),\delta_v\rangle \delta_v, \tag{3.6}$$

并注意到 $\Delta(B(\mathcal{H}_N^x)) =: \mathcal{D}$ 是 $B(\mathcal{H}_N^x)$ 关于范数拓扑的一个闭子代数。

令 $\mathcal{A} = \mathrm{cl\ span}\{a,b,\mathcal{D}\}$，其中 cl 表示在范数拓扑下 $B(\mathcal{H}_N^x)$ 中的闭包。三元组 $(\mathcal{A},\mathcal{D}\ \Delta)$ 是一个 C^*-算子值非交换概率空间。

命题3.1. 算子 a 和 b 在 $(\mathcal{A}, \mathcal{D}\ \Delta)$ 中是 Δ-自由的。

证明。我们将 X_1 （分别将 X_2）记为由 a 和 $\mathcal{D}$ （分别由 b 和$\mathcal{D}$）生成的 $\mathcal{A}$ 的子代数。注意，这不只是由形如 $(ad)^k$（其中 $d \in \mathcal{D}$ ）的单项式张成的向量空间；由于 a 和 d 通常不交换，它由形如 $d_0 a d_1 \cdots a d_k$ 的单项式张成，其中 $d_0, d_1, \cdots\ \ d_k \in \mathcal{D}$。

设 $m \geq 2$ 和 $x_1, \cdots\ \ x_m$ 满足 $x_{2i-1} \in X_1$ 和 $x_{2i} \in X_2$ 对所有 $1 \leq i \leq \lfloor m/2 \rfloor$ 成立，并且对所有 $1 \leq i \leq m$， $\Delta(x_i) = 0$。我们要证明 $\Delta(x_1 \cdots x_m) = 0$。设 $v \in V_N^x$，我们要计算 $\langle x_1 \cdots x_m(\delta_v)\ \delta_v \rangle$。首先假设 $x_m \in X_1$ 和 $v \in V_N(n, b)$ 对某个 $n \geq 0$ 成立。由于 x_m 是中心化的，我们有

$$x_m(\delta_v) = \sum_{v' \in R_a(v) \setminus \{v\}} \langle x_m \delta_v, \delta_{v'} \rangle \delta_{v'}. \tag{3.7}$$

由于 $R_a(v) \setminus \{v\} \subset V_N(n+1, a)$，由归纳法可得 $x_1 \cdots x_m(\delta_v) \subset V_N(n+m, a) \cup V_N(n+m, b)$，因此 $\Delta(x_1 \cdots x_m) = 0$。当 $x_m \in X_2$ 和 $v \in V_N(n, a)$ 对某个 $n \geq 0$ 成立时，同样的推理也适用。

现在假设，对于某个 $n \geq 0$， $x_m \in X_1$ 和 $v = (j_1, \cdots\ \ j_n, \ a) \in V_N(n, \ a)$。为简化记号，对于任意 $k \geq 0$，我们约定 $V_N(-k, \ a) = V_N(k, \ a)$，对 b 也同样如此。顶点 $v_{m-1} = (j_1, \cdots\ \ j_{n-1}, \ b) \in V_N(n-1, \ b)$ 满足 $v \in R_a(v_{m-1})$，因此

$$x_m(\delta_v) = \langle x_m \delta_v, \delta_{v_{m-1}} \rangle \delta_{v_{m-1}} + \sum_{w \in R_a(v_{m-1}) \setminus \{v, v_{m-1}\}} \langle x_m \delta_v, \delta_w \rangle \delta_w.$$

对于任意 $w \in R_a(v_{m-1}) \setminus \{v, v_{m-1}\}$，对于某个 $j \neq j_m$， $w = (j_1, \cdots\ \ j_{m-1}, j, a)$。因此，$x_1 \cdots x_{m-1}(\delta_w)$ 的支撑集由形如 $(j_1, \ldots, j_{n-1}, j, i_1, \cdots\ \ i_{m-1}, \varepsilon)$ 的顶点构成，其中 $\varepsilon \in \{a, b\}$ 永远不可能等于 v ，因为 $j \neq j_m$。因此，我们可以忽略这些项的贡献。

我们对 v_{m-1} 重复此过程：顶点 $v_{m-2} = (j_1, \ldots, j_{n-2}, a) \in V_N(n-2, a)$ 使得 $v_{m-1} \in R_b(v_{m-2})$。因此

$$x_{m-1}(\delta_{v_{m-1}}) = \langle x_{m-1} \delta_{v_{m-1}}, \delta_{v_{m-2}} \rangle \delta_{v_{m-2}} + \sum_{w \in R_b(v_{m-2}) \setminus \{v_{m-1}, v_{m-2}\}} \langle x_n \delta_v, \delta_w \rangle \delta_w.$$

任意 $w \in R_b(v_{m-2}) \setminus \{v_{m-1}, v_{m-2}\}$ 都具有形式 $w = (j_1, \cdots\ \ j_{n-2}, j, b)$，其中 $j \neq j_{n-1}$ 为某个量，因此 $x_1 \cdots x_{m-2}(\delta_w)$ 将由形如 $(j_1, \cdots\ \ j_{n-2}, j, i_1, \cdots\ \ i_{m-2}, \varepsilon)$ 的顶点支撑，其中 $\varepsilon \in \{a, b\}$。同样，我们可以忽略这些项的贡献。

若 $m \leq n$，则该推理可应用 m 次，且在每个步骤中，对 $\varepsilon \in \{a, b\}$ 有 $v_k \in V_N(n-(m-k)\ \varepsilon)$，因此乘积 $x_1 \cdots x_m$ 是中心化的。

否则，若 $m > n$，我们将这一推理重复应用 n 次，直到 $v_{m-n} = x$。接下来应用 x_{m-n}。因此， $x_1 \cdots x_{m-n}(\delta_x)$ 的支撑集位于形如 $(i_1, \ldots, i_{m-n}, \varepsilon)$ 的顶点上，其中$\varepsilon \in \{a, b\}$。因此，唯一的非平凡情形发生在 $m - n = n$ ，这意味着m 是偶数。若 n 是偶数，则 $x_{m-n} \in X_1$ ；否则 $x_{m-n} \in X_2$。此外，若 n 是偶数，这一方面意味着 $x_{m-n} \in X_1$ ，另一方面意味着 $m - n$ 是偶数。因此，必有 $\varepsilon = b$：事实上，我们应用第一种情形的推理，得出需要取

个以标记为 a 的步骤开始、并以标记为 b 的步骤结束的偶数个步骤。类似地，若 n 是奇数，则意味着 $x_{m-n} \in X_2$，且 $m-n$ 是奇数，进而意味着 $\varepsilon = b$。在这两种情况下， $x_1 \cdots x_{m-n}(\delta_x)$ 与 δ_v 的标量积都会产生零贡献。 □

注 3.2： 把证明写出来并逐步理解，确实相当繁琐。不过，画出与 a 相关的图以及与 b 相关的图，并注意到在 a 的边和 b 的边之间交替移动、且从不停留在同一个顶点（ x_i 是中心化的）时，永远无法回到起始顶点。

注 3.3： 存在从$\mathcal{D}_N$(C)到$\mathcal{D}$的自然嵌入：对于 $D \in \mathcal{D}_N$(C)，我们仍将其对应的对角算子记为 $D \in \mathcal{D}$ ，其定义为 $D(\delta_v) = D_{j(v),\ j(v)}\delta_v$，对任意$v \in V_N$均成立，其中 $j(v)$表示 v 的最后一个指标。因此，我们将$\mathcal{D}_N$(C)与$\mathcal{D}_N$(C)在此嵌入下的像等同起来。

定义$E_{\mathcal{D}_N(\mathbb{C})}$： $\mathcal{A} \to \mathcal{D}_N$(C) $T \mapsto (\langle T\delta_{(i,a)},\ \delta_{(i,a)}\rangle)_{1\le i\le N}$，不难看出，($\mathcal{A}$， $\mathcal{D}_N$(C) $E_{\mathcal{D}_N(\mathbb{C})}$)是一个 C^*-算子值概率空间

推论 3.2. 算子 a 和 b 在 C^*-算子值概率空间($\mathcal{A}$, $D_N(\mathbb{C})$ $E_{\mathcal{D}_N(\mathbb{C})}$)中是自由的。

证明。代数 D_N(C) 是 D(H_N) 的一个子代数，并且 $E_{\mathcal{D}_N}$(C) $= E_{\mathcal{D}_N}$(C) $\circ$ Δ。此外，对于任意对角矩阵 $D_0, \cdots\ D_n$，矩 $\Delta(D_0 a D_1 \cdots a D_n)$ 实际上属于 D_N(C)，替换 a 为 b时也同样如此。事实上， a 和 b 的定义仅取决于顶点 v的最后一个指标。因此， a 和 b 的 Δ-矩属于 D_N(C)，所以它们等于各自的 $E_{\mathcal{D}_N}$(C)-矩。参见 [17] 第 9 章命题 16，即可完成证明。 □

此外，设 $\varphi : \mathcal{A} \to \mathrm{C}$ $T \mapsto \frac{1}{N}\sum_{v\in R_a(x)}\langle T\delta_v, \delta_v\rangle$ 是一个幺正正 $*$-态射，使得它赋予 $\mathcal{A}$、$\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}_N$(C) C^*-概率空间的结构。请注意，在文献中，有时要求 C^*-算子值概率空间配备这样的正线性泛函 $\varphi : \mathcal{A} \to$C。

在 [18] 中可以找到的一个关键结果是：对于C^*-概率空间（$\mathcal{A}_0, \varphi_0$）中的任意自伴元 x ，存在一个紧支撑实测度 μ_x （其支撑包含于 x的谱中），使得对于 x的谱上的每一个连续函数 f ， $\int f \mathrm{d}\mu_x = \varphi_0(f(x))$，其中右端的 $f(x)$由函数演算定义，而左端的 μ_x 被视为x的谱上的测度。这随后可应用于（$\mathcal{A}$ φ）。

4 交通概念与假设

证明定理 2.6 和 2.7 所需的最后一些要素来自交通概率。Male 在 [16], 中引入了这一概念；为求完整起见，我们重述本文所需的一些相关定义和结果。

4.1 交通概念

定义 4.1（彩色分量图）：设 H 为一个图，其边由一个族 $\{x_i\}_{i\in I}$ 标记（每个 x_i 本身可以是由若干标签组成的族，只要 $x_i \cap x_j = \varnothing$ for$i \neq j$）。

T 的彩色分量 是至少包含一条边的极大子图，且其边的标签仅来自同一个族。我们用$\mathcal{CC}(H)$表示 H的彩色分量集合。

相对于族$\{x_i\}_{i\in I}$ ， H 的彩色分量图 记为$\mathcal{GCC}(H)$，它是如下二部图：

- 第一类顶点是 H的彩色分量 T_1，$\cdots$ T_K。
- 第二类顶点是 H中至少属于两个彩色分量的顶点 v_1，$\cdots$ v_L。
- 如果 $v_i \in T_j$ 对所有 $1 \le i \le L$、 $1 \le j \le K$都成立，则 v_i 与 T_j 之间有一条边。

对于给定的连通简单图 $H = (V,\ E)$，我们记

$$\eta(H) := |V| - |E| - 1. \tag{4.1}$$

注意， $\eta(H) \le 0$ ，当且仅当 H 是一棵树时取等号（见 [11] 引理 1.1）。

注记 4.1：我们经常讨论 $A+B$ 的彩色分量图，默认其相对于来自 A 的边族和来自 B 的边族而言。在这种情况下，我们用$\mathcal{V}_{cc}$ （表示彩色分量）表示 H 的彩色分量图中的第一类顶点，用 $\mathcal{V}_{co}$ （表示连接点）表示第二类顶点。记 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{GCC}(H)$ 的边集，注意到 $|\mathcal{E}| = 2|\mathcal{V}_{co}|$，因此$\eta(\mathcal{GCC}(H)) = |\mathcal{V}_{cc}| - |\mathcal{V}_{co}| - 1$。

定义 4.2：设 J 为一个指标集，并考虑两族形式变量$\mathbf{x} = (x_j)_{j\in J}$和 $\mathbf{x}^* = (x_j^*)_{j\in J}$。

1. 变量x 上的一个*-测试图 $T = (G,\ \gamma,\ \epsilon)$是一个有限连通多重有向图$G = (V,\ E,$ src, tar)，并配有边标签 ϵ： $E \to \{1,\ *\}$ 和 γ： $E \to J$。映射 γ 和 ϵ 可以理解为指示边 $e \in E$ 被标记为 $x_{\gamma e}^{\epsilon(e)}$ ()。映射src、tar： $E \to V$ 分别指定每条边 $e \in E$的源点src(e)和目标点tar(e)。

2. *-图单项式 $g = (T, v_{in}, v_{out})$是一个 *-测试图 T，并附有 V 中的两个顶点 v_{in} 和 v_{out}。我们将根 $(v_{in}, v_{out}) \in V^2$ 分别称为输入和输出，但它们不一定不同。我们用$\mathcal{G}\langle \mathbf{x},\mathbf{x}^*\rangle$表示所有此类 *-图单项式的集合，它们可以扩展为 $\mathbb{C}\mathcal{G}\langle \mathbf{x},\mathbf{x}^*\rangle$ ，即变量$\mathbf{x}$ 中 *-图单项式的有限线性复组合所构成的空间（图均视为在保留标记以及输入/输出的情况下按图同构等价）。

例 4.1： 对于随机矩阵族$\mathbf{A}_N = (A_{N,j})_{j\in J}$，我们通过以下公式定义族$\mathbf{A}_N$ 中 *-图单项式 g 的取值，

$$g(\mathbf{A}_N)(i,j) := \sum_{\substack{\phi:V\to[N]\\ \phi(v_{out})=i,\phi(v_{in})=j}} \prod_{e\in E} A_{N,\gamma(e)}^{\epsilon(e)}(\phi(\mathrm{tar}(e)),\phi(\mathrm{src}(e))). \tag{4.2}$$

为方便起见，我们常将 $\phi(e)$ 记作 $(\phi(\mathrm{tar}(e)),\ \phi(\mathrm{src}(e)))$。在自由概率框架下研究随机矩阵时，我们关注在一族随机矩阵中代入任意多项式后所得归一化迹的期望。在本节的语境中，一族随机矩阵的 交通分布 是指在该族中代入任意 *-图单项式后所得归一化迹的期望所构成的数据。

例 4.2： 设 $\mathcal{G} = (\mathcal{V},\ \mathcal{E})$ 是一个局部有限根图（可能依赖于N）。设 $\mathbf{a}_N = (a_{N,\ j})_{j\in J}$ 是一族定义在 $B(L^2(\mathcal{V}))$ 上的随机算子，使得对所有$j \in J$，若 $(v,\ w)$ 不是 $\mathcal{G}$ 的一条边，则$\langle a_{N,\ j}\delta_v,\ \delta_w\rangle = 0$。我们通过以下公式定义在一族 $\mathbf{a}_N$ 中对 *-图单项式 g 的求值，

$$\langle g(\mathbf{a}_N)\delta_v,\delta_w\rangle := \sum_{\substack{\phi:V\to\mathcal{V}\\ \text{graph morphism,}\\ \phi(v_{out})=v,\phi(v_{in})=w}} \prod_{e\in E} \langle a_{N,\gamma(e)}^{\epsilon(e)}\delta_{\phi(\mathrm{tar}(e))},\delta_{\phi(\mathrm{src}(e))}\rangle. \tag{4.3}$$

为方便起见，我们常将 $a(\phi(e))$ 记作 $\langle a\delta_{\phi(\mathrm{tar}(e))},\ \delta_{\phi(\mathrm{src}(e))}\rangle$。注意，$g(\mathbf{a}_N)$ 不一定满足 $\langle g(\mathbf{a}_N)\delta_v,\ \delta_w\rangle = 0 \text{ if } (v,\ w) \notin \mathcal{E}$ 条件；不过，它可以看作某个加权局部有限图的邻接算子。注意，当 $\mathcal{G}$ 是具有 N 个顶点的完全图时，这与先前的定义一致。

以下定义通常针对测试图给出。我们为（有根）图单项式定义相应的概念，并沿用相同的名称。

定义 4.3： 设 $i \in [N]$，族 $\mathbf{A}_N$ 随机矩阵的 i-根交通分布为映射

$$\Phi^i_{\mathbf{A}_N} : g \in \mathbb{C}\mathcal{G}\langle \mathbf{x},\mathbf{x}^*\rangle \to \mathbb{E}\left[g(\mathbf{A}_N)_{i,i}\right]. \tag{4.4}$$

设 $\mathbf{a}_N$ 是一族作用于 $L^2(\mathcal{V})$ 上的随机算子，其中 $\mathcal{G} = (\mathcal{V},\ \mathcal{E},\ \rho)$ 是一个依赖于 N 的局部有限 ρ-根图。$\mathbf{a}_N$ 的 ρ-根交通分布为

$$\Phi^\rho_{\mathbf{a}_N} : g \in \mathbb{C}\mathcal{G}\langle \mathbf{x},\mathbf{x}^*\rangle \to \mathbb{E}\left[\langle g(\mathbf{a}_N)\delta_\rho,\delta_\rho\rangle\right]. \tag{4.5}$$

稍微滥用一下记号，我们也将 $\tau_i(g(\mathbf{A}_N))$ 记作 $= \Phi^i_{\mathbf{A}_N}(g)$，算子也类似。

注意，当$\mathcal{G}$ 是一个具有 N 个顶点的完全图时，这两个定义是一致的。在交通概率框架中，根据单射性的默认设定，将例 4.1 和

4.2 中的求和拆分是很自然的。更准确地说，

$$g(\mathbf{A}_N)(i,j) = \sum_{\pi\in P(V)} \sum_{\substack{\phi:V^\pi\to[N],\\ \phi \text{ injective},\\ \phi(v_{out})=i,\phi(v_{in})=j}} \prod_{e\in E^\pi} A^{\epsilon(e)}_{N,\gamma(e)}(\phi(\mathrm{tar}(e)),\phi(\mathrm{src}(e))),$$

$$\langle g(\mathbf{a}_N)\delta_v,\delta_w\rangle = \sum_{\pi\in P(V)} \sum_{\substack{\phi:V^\pi\to\mathcal{V}\\ \text{injective graph morphism},\\ \phi(v_{out})=v,\phi(v_{in})=w}} \prod_{e\in E^\pi} \langle a^{\epsilon(e)}_{N,\gamma(e)}\delta_{\phi(\mathrm{tar}(e))},\delta_{\phi(\mathrm{src}(e))}\rangle,$$

其中，图单项式 g 的顶点划分 π 会诱导出一个新的图单项式 $g^\pi=(V^\pi,\ E^\pi,\ \gamma,\ \varepsilon,\ v_{in},\ v_{out})$。该图单项式由 g 得到，方法是将 π 同一块中的顶点进行识别。这引出了如下定义

定义 4.4： 矩阵 $\mathbf{A}_N$ 中 g 的 i-根单射迹，以及算子 $\mathbf{a}_N$ 中 g 的 ρ-根单射迹，定义为

$$\mathrm{Tr}^0_i(g(\mathbf{A}_N)) = \sum_{\substack{\phi:V\to[N],\\ \phi \text{ injective},\\ \phi(v_{out})=\phi(v_{in})=i}} \prod_{e\in E} A^{\epsilon(e)}_{N,\gamma(e)}(\phi(\mathrm{tar}(e)),\phi(\mathrm{src}(e))),$$

$$\mathrm{Tr}^0_\rho(g(\mathbf{a}_N)) = \sum_{\substack{\phi:V\to\mathcal{V}\\ \text{injective graph morphism},\\ \phi(v_{out})=\phi(v_{in})=\rho}} \prod_{e\in E} \langle a^{\epsilon(e)}_{N,\gamma(e)}\delta_{\phi(\mathrm{tar}(e))},\delta_{\phi(\mathrm{src}(e))}\rangle,$$

因此

$$\tau_i(g(\mathbf{A}_N)) = \sum_{\pi\in P(V)} \mathbb{E}\,\mathrm{Tr}^0_i(g^\pi(\mathbf{A}_N)) =: \sum_{\pi\in P(V)} \tau^0_i(g^\pi(\mathbf{A}_N)),$$

$$\tau_\rho(g(\mathbf{a}_N)) = \sum_{\pi\in P(V)} \mathbb{E}\,\mathrm{Tr}^0_\rho(g^\pi(\mathbf{A}_N)) =: \sum_{\pi\in P(V)} \tau^0_\rho(g^\pi(\mathbf{A}_N)).$$

注意，如果 π 未将 v_{in} 和 v_{out} 识别为同一顶点，则单射迹为零。

注 4.2： [16] 中表明，只要族 $\mathbf{A}^{(1)}_N$、$\cdots$、$\mathbf{A}^{(L)}_N$ 是置换不变的、在交通分布意义下收敛，并满足某种因子分解性质，那么它们就是渐近交通独立的。此外，[1] 中还表明，在相同条件成立时，它们在对角线上渐近自由。

在下文中，我们仍将 T_N 称为测试图，其中 $T_N:=(V_N,\ E_N,\ \gamma,\ \epsilon)$ 不再相对于 N 固定，而是允许其顶点数和边数依赖于 N。此外，在明确说明时，我们也允许测试图包含多个连通分支。不过，处理这种情况时应当谨慎，因为单射迹在有多个分量时表现不佳。同样，若未特别说明，泛指的测试图总是有限的，且只有一个连通分支。

4.2 关于单射迹的假设

本小节给出定理 2.6 的一项假设。从直观上看，这是一个有界性条件，针对的是较大的“矩”，但在交通框架中，也就是针对较大的测试图。随后，我们给出若干满足此条件的随机矩阵模型。

假设 4.5： 设 $M = M(N)$ 是一个随 N趋于无穷且小于 $\log N/\log\log N$ 的序列。随机矩阵序列 X_N 以速度 M 满足假设 4.5，若存在某个正常数 h，使得对于任意正常数 c 以及任意满足以下条件的测试图序列 $T_N := (V_N, E_N, \epsilon)$，其中 T_N有 $K(N)$ 个连通分量：$T_{1,N}, \cdots T_{K(N),N} (T_{i,N} := (V_{i,N}, E_{i,N}))$，有

$$\sum_{k=1}^{K(N)} |V_{k,N}| \le cM, \quad \sum_{k=1}^{K(N)} |E_{k,N}| \le cM, \tag{4.6}$$

我们有

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{N^{K(N)}}\mathrm{Tr}^0\left(T_N\left(X_N\right)\right)\right] = O\left(N^{c\cdot h}\right), \tag{4.7}$$

对某个常数 h。

首先注意到 $M \le \log N$，因此我们通常证明 (4.7) 左侧的量有界于 C^M，其中 C 为某个常数，由此可得方程 (4.7)。我们检验了若干随机矩阵模型，发现它们满足这些假设。

具有有界元素的稀释矩阵。 设 X_N 是一个大小为 N 的（可能是随机）矩阵，并且几乎必然地，X 每行和每列的非零矩阵元数量均有界于 $C = C(N)$。此外，还假设矩阵元的绝对值有界于 C。速度 C 必须满足 $\log C/\log N \to 0$，当 $N \to \infty$ 时。我们首先使用以下界

$$\left|\mathbb{E}\left[\frac{1}{N^{K(N)}}\mathrm{Tr}^0\left(T_N(X_N)\right)\right]\right| \le \mathbb{E}\left[\frac{1}{N^{K(N)}}\mathrm{Tr}^0\left(T_N(|X_N|)\right)\right].$$

现在，在每个连通分量中任取一个顶点，例如 v_1、..... $v_{K(N)} \in V_{1,N} \times$ ..... $\times V_{K(N),N}$，并对它们所有可能取值求和。由于我们对单射顶点赋值求和，其他顶点必须取不同的值。简记 $V_{\prime N} := V_N \backslash \{v_1$、..... $v_{K(N)}\}$ 以及 $[N]' := \{1$、..... $N\} \backslash \{i_1$、..... $i_{K(N)}\}$，可得

$$\frac{1}{N^{K(N)}}\mathrm{Tr}^0(T(|X_N|)) = \frac{1}{N^{K(N)}} \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_{K(N)}=1, \\ \text{pairwise distinct}}}^{N} \sum_{\substack{\phi: V_N' \to [N]', \\ \phi \text{ injective}}} \prod_{e\in E_N} |X(\phi(e))|,$$

其中 ϕ 在 V_N 上由 $\phi(v_k) = i_k$ 扩展到 $1 \le k \le K(N)$。对于每个 $1 \le k \le K(N)$，我们进行如下推理。选定 v_k 的值后，由于 X_N 是稀疏的，对于距离 v_k 为 1 的每个顶点 w，使得贡献非零的 $\phi(w)$ 至多有 C 个可能取值

。对于距离 v_k为 2 的顶点，情况也相同：选定距离 v_k为 ≤ 2 的顶点的值后，对于每个距离为 2 的新顶点，使其贡献非零的可能取值至多有 C 个。因此，选定顶点 v_k的值后，连通分量 v_k中其余顶点的选择至多有 $C^{|V_{k,\ N}|}$ 种。此外，由于矩阵元有界，每项贡献小于 $C^{|E_{k,\ N}|}$。我们得到如下界

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[\frac{1}{N^{K(N)}}\mathrm{Tr}^0\left(T_N(X_N)\right)\right]\right| &\leq \frac{N(N-1)\cdots(N-K(N)+1)}{N^{K(N)}}\prod_{k=1}^{K(N)} C^{|V_{k,N}|+|E_{k,N}|},\\ &\leq C^{2cM}.\end{aligned}$$

选取 M，使得 $M\log\ C = \log N$是在 $M \leq \log\ N/\log\log\ N$ 且 $\log\ N/\log\ C \to \infty$ 的条件下所能达到的最佳速度。否则，也可以直接取 $M = \log\ N/\log\log\ N$。注意，随机置换矩阵、均匀 C-正则图的邻接矩阵都是此类稀疏有界矩阵的特例。

Erdős–Rényi 矩阵。设 B_N 为 Erdős–Rényi 随机图的邻接矩阵：该图的顶点集为 $[N]$，每条（无向）边 $e = \{i,\ j\}$ 以概率 $p = p(N)$ 出现，其中$i \neq j$，且对某个 $0 < p < 1$，有 $p \to 0$ 当 $N \to \infty$ 时，$Np \to \infty$。注意，由于边是无向的，X_N 是对称矩阵，对角线上的元素为 0，且其下三角部分的矩阵元独立同分布，服从参数为 p 的伯努利分布。令$X_N = \frac{B_N - p(J-I)}{\sqrt{Np(1-p)}}$为 B_N 的中心化归一化版本，其中 J是全 1 矩阵，I 是单位矩阵。注意，如果测试图 T_N 有自环，其单射迹为零，因为 X_N 的对角线元素全为 0。假设 T_N 没有自环，并将忽略 T_N中边的重数和方向后得到的边集记为 E。将忽略边的方向时边 e 的重数记为 $m(e)$。利用矩阵元的独立性，我们可以明确计算

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{1}{N^{K(N)}}\mathrm{Tr}^0\left(T_N(X_N)\right)\right] &= \frac{1}{N^{K(N)}}\sum_{\substack{\phi:V\to[N],\\ \phi\ \text{injective}}}\mathbb{E}\left[\prod_{\bar{e}\in\overline{E}} X(\phi(e))^{m(e)}\right]\\ &= \frac{1}{N^{K(N)}}\#\left\{\substack{\phi:V\to[N],\\ \phi\ \text{injective}}\right\}\prod_{\bar{e}\in\bar{E}}\left(p\left(\frac{1-p}{\sqrt{Np(1-p)}}\right)^{m(\bar{e})} + (1-p)\left(\frac{-p}{\sqrt{Np(1-p)}}\right)^{m(\bar{e})}\right),\\ &= N^{|V|-K(N)-|\overline{E}|}(1+o(1))\prod_{\bar{e}\in\bar{E}}\left((1-p)\left(\frac{1-p}{Np}\right)^{\frac{m(\bar{e})}{2}-1} + (-1)^{m(\bar{e})}p\left(\frac{p}{N(1-p)}\right)^{\frac{m(\bar{e})}{2}-1}\right),\end{aligned}$$

最后一行用到了命题 A.1。如果存在某条重数恰好为一的边，由于矩阵元是中心化的，上述量为 0。否则，

乘积中的每一项都是可忽略的，因此我们得到

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{N^{K(N)}}\mathrm{Tr}^0\left(T_N(X_N)\right)\right] = N^{|V|-K(N)-|\overline{E}|}(1+o(1))\prod_{\bar{e}\in\bar{E}}\left(\frac{1}{Np}\right)^{m(\bar{e})/2-1},$$
$$= N^{|V|-K(N)-|\overline{E}|}(Np)^{|\bar{E}|-|E|/2}(1+o(1)).$$

根据欧拉恒等式，我们有 $|V|-K(N)-|E|\overline{\leq}\,0$，当且仅当在忽略重数以及边的定向时，每个连通分量都是一棵树时取等。由于所有边的重数至少为 2，$|E|-|E|/2\leq 0$ 当且仅当 T_N 的每个连通分量都是一棵双树时取等。最后，我们得到该界

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{N^{K(N)}}\mathrm{Tr}^0\left(T_N(X_N)\right)\right] = O(1). \tag{4.8}$$

该假设对 $Np\to c>0$ 同样成立，然而该模型并不满足假设 4.6。

具有矩条件的稀释 Wigner 矩阵。如上所述的 Erdos-Renyi 矩阵是下述意义下稀释 Wigner 矩阵的一个特例。

设 $X=(x_{i,j}^N)1\leq i,j\leq N$ 为一个厄米矩阵，使得 $(x_{i,j}^N)1\leq i\leq j\leq N$ 是中心化的独立随机变量，其矩直至 cM 阶（其中 M 趋于无穷，且小于 $\log N/\log\log N$），并且存在与 N 无关的某些常数$h,\varepsilon>0$，使得对所有 $1\leq i\leq j\leq N$ 以及对所有 $2\leq k_1,k_2\leq cM$，我们有

$$N|\mathbb{E}(x_{i,j}^N)^{k_1}(\overline{x_{i,j}^N})^{k_2}|\leq\frac{\log(N)^{h(k_1+k_2)}}{N^{\varepsilon}}, \tag{4.9}$$

以及 $N\mathbf{E}|x_{i,j}^N|^2=1$。注意，$M$ 取决于 N，因此对于 k_1，k_2，方程 (4.9) 必须成立，且其可能依赖于 N。

这些矩阵是重型 Wigner 矩阵的一种特殊情形（见 [24]），因为当 k固定时，(4.9) 中的量趋于 0；但我们还对阶数为 $\log N/\log\log N$ 的矩规定了一个 N^c 阶的上界。实际上，满足与 (4.9) 类似的矩条件的重型 Wigner 矩阵也满足假设 4.5；然而，它们一般不满足假设 4.6。

取 T_N，其大小至多为 cM，如假设 4.5 所述。对于 $\bar{e}\in E$，回顾一下，$\bar{e}$ 是所有连接两个顶点（例如 v 和 w）的边的集合。任意选定一种方向，例如从 v 指向 w，并令 $m_+(\bar{e})$ 和 $m_-(\bar{e})$ 分别表示等价类$\bar{e}$ 中方向相同和方向相反的边数。采用与前一种情形类似的技巧，我们得到

$$\mathbb{E}\frac{1}{N^{K(N)}}\mathrm{Tr}^0(T_N(X_N)) = N^{|V|-K(N)-|\bar{E}|}\prod_{\bar{e}\in\bar{E}}\mathbb{E}\left(NX_N(\phi_N(\bar{e}))^{m_+(\bar{e})}\overline{X_N(\phi_N(\bar{e}))}^{m_-(\bar{e})}\right).$$

我们将满足 $m_+(\bar{e})=m_-(\bar{e})=1$ 的边集记为 $E_2\subset E$，也就是说，由于 $N\mathbf{E}|x|^2=1$，这些边将贡献 1。其余每条边 $\bar{e}\in\bar{E}\setminus\bar{E}_2$ 将会有

一个 $\log^{h(m_{+}(\bar{e})+m_{-}(\bar{e}))}N$ $/N^{\varepsilon}$ 的贡献。现在将满足$m_{+}(\bar{e})=m_{-}(\bar{e})=1$的边集记为 $E_2\subset E$，于是得到

$$\left|\mathbb{E}\frac{1}{N^{K(N)}}\mathrm{Tr}^0(T_N(X_N))\right|\leq N^{|V|-|\bar{E}|-K(N)}\frac{\log(N)^{h(|E|-2|\bar{E}_2|)}}{N^{\varepsilon(|\bar{E}|-|\bar{E}_2|)}}\leq N^{hc}. \tag{4.10}$$

逐项乘积。设 X_N 是一个矩阵，它以速度 M 对某个常数 h 满足假设 4.5，并设 Γ_N 是一个所有矩阵元均以 $C=C(N)$为界的矩阵，使得存在常数 h' 满足 $M\log C\leq h'\log N\Leftrightarrow C^M\leq N^{h'}$（注意，对任意常数 α，$C=\log(N)^{\alpha}$ 总是如此）。记 $W_N:=X_N\circ\Gamma_N$ 为这两个矩阵的逐项乘积。我们容易得到

$$\left|\mathbb{E}\left[\frac{1}{N^{K(N)}}\mathrm{Tr}^0\left(T_N(X_N\circ\Gamma_N)\right)\right]\right|\leq\left|\mathbb{E}\left[\frac{1}{N^{K(N)}}\mathrm{Tr}^0\left(T_N(X_N)\right)\right]\right|\times C^{cM}=O\left(N^{c(h+h')}\right), \tag{4.11}$$

这表明 W_N 同样满足假设 4.5。

4.3 关于弗罗贝尼乌斯范数的假设

假设 4.6：设 $M=M(N)$是一个随 N趋于无穷的序列。随机矩阵序列 X_N 以速度 M 满足假设 4.6，如果存在与 N 无关的正常数 C，使得对所有 N，

$$\mathbb{E}\frac{1}{N}||X^M||_F^2\leq C^M. \tag{4.12}$$

对于在算子范数下一致有界的矩阵序列，这一点在任意速度下显然成立，因为 $\frac{1}{N}||X_N^M||_F^2\leq||X_N^M||_{op}^2\leq||X_N||_{op}^{2M}\leq C^{2M}$，其中 C是 X_N的算子范数的界。

然而，即使 X_N 的算子范数发散，这一结论也可能成立。以参数为 p、满足 $Np\to\infty$ 且 $Np/\log N\to 0$ 作为 $N\to\infty$的 Erdős–Rényi 图的邻接矩阵的重新中心化并重新归一化的版本为例。文献 [7] 表明，X_N 的最大特征值发散。然而，将弗罗贝尼乌斯范数中的迹展开为单射迹，并利用上一小节中的计算，我们得到如下表达式。

$$\mathbb{E}\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(X^{2M})=\mathbb{E}\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(T_{2M}(X))=\sum_{\pi\in P(V_{2M})}N^{|V_\pi|-|\bar{E}_\pi|-1}(Np)^{|\bar{E}_\pi|-|E_\pi|/2}(1+o(1)),$$

其中，测试图 $T_{2M}=(V_{2M},E_{2M})$ 是一个长度为 $2M$ 的环。当划分 π 使 T^π 成为一棵双树时，其贡献为 1。当划分 π 使 T^π 成为一棵粗树（即存在某条边的重数至少为 4）时，其贡献至多为 $(Np)^{-1}$；否则，其贡献至多为 $1/N$。将划分的数量界定为 $2M^{2M}$，我们得到

$$\mathbb{E}\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(X^{2M})\leq C_M+M^M(Np)^{-1}+M^MN^{-1},$$

其中，C_M 是第 M 个卡特兰数，即具有 M 条边的树的数量（或具有 $2M$ 条边的双树的数量）。卡特兰数可以用 M 的某个幂来界定；另一方面，取 $M = \log(Np)/\log\log(Np)$，我们得到公式 (4.12)。

相反，若取一个稀疏的 Erdős–Rényi 图，即 $Np \to c > 0$，那么每棵粗树都会产生 1 阶的贡献，而大小为 M 的粗树数量无法被 M 的某个幂所界定。

类似地，对于稀释 Wigner 矩阵，将贡献为 1 的双树、至少有一条重数严格大于 2 的边的粗树，以及其他情形区分开来，并回顾 $E_{\pi,2}$ 是 E_π 中重数恰好为 2 的边的集合，我们有

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(T_{2M}(X))\right| &\le \sum_{\pi\in P(V_{2M})} N^{|V_\pi|-|\bar{E}_\pi|-1}\frac{\log(N)^{h(|E_\pi|-2|\bar{E}_{\pi,2}|)}}{N^{\varepsilon|(\bar{E}_\pi|-|\bar{E}_{\pi,2}|)}},\\ &\le C_M + M^M\log(N)^{2hM}N^{-\varepsilon} + M^M\log(N)^{2hM}N^{-1}.\end{aligned}$$

现在取 $M = \beta\log N/\log\log N$，其中 $\beta < \frac{\varepsilon}{1+2h}$，只有 C_M 的贡献保留下来，因此得到所需的界。因此，当 β 足够小时，稀释 Wigner 矩阵以速率 $\beta\log N/\log\log N$ 满足假设 4.6。

5 主要定理的证明

5.1 预备结果

在证明定理 2.6 和 2.7 之前，我们先给出一些有用的引理和记号。第一个引理保证：将两个图粘合在一起、但不识别来自同一个图的顶点时，如果起始图的彩色分量图不是树，那么得到的图的彩色分量图也不是树。回顾 (4.1)，对于简单连通图 $H = (V, E)$，$\eta(H) := |V| - |E| - 1 \le 0$，且等号成立当且仅当 H 是一棵树。

引理 5.1。令 $S_1 = (V_1, E_1, \gamma_1, \varepsilon_1)$ $S_2 = (V_2, E_2, \gamma_2, \varepsilon_2)$ 为两个以 $\{a, b\}$ 标记的测试图，并令 σ 为 V_1 与 V_2之间的一种合并，即对 $V_1 \sqcup V_2$ 的一个划分，其中所有块的大小要么为一，要么为二，且大小为二的块各含有一个来自 V_1 的顶点和一个来自 V_2的顶点。此外，假设 σ 至少有一个大小为二的块（因此 $(S_1 \sqcup S_2)^\sigma$ 是连通的）。那么，我们有

$$\eta(\mathcal{GCC}((S_1 \sqcup S_2)^\sigma)) \le \min\{\eta(\mathcal{GCC}(S_1)), \eta(\mathcal{GCC}(S_2))\}. \tag{5.1}$$

证明。图 $(S_1 \sqcup S_2)^\sigma$ 可以通过以下过程得到。从 $G_0 = S_1$开始。由于 σ 有一个大小为二的块，因此存在一对 $(v, w) \in V_1 \times V_2$，使得 $v \overset{\sigma}{\sim} w$。在 S_2中任意选择一条与 w 相邻的边：例如 $e = (w, w')$。如果 w' 属于σ中大小为一的块，则向 G_0 添加一个新顶点 w'，并在 v 和 w' 之间添加一条与 e标签相同的边。否则，如果存在 $v' \in V(G_0) = V_1$，使得 $v' \overset{\sigma}{\sim} w'$，则在 G_0 中添加一条连接 v

和 v' 、标签与 e相同的边。由此得到的图为 G_1。重复此过程，在第 l步选择一条新边 $e = (u,\ u') \in E_2$ ，使其与之前选取的某条边相邻（即 u 是 G_l的一个顶点），直到 E_2中不再有边。如果 S_2 的边数记为 k ，那么 $G_k = (S_1 \sqcup S_2)^\sigma$。记 $\eta(l) := \eta(\mathcal{GCC}(G_l))$，并证明该量不会增加。根据注记 4.1，回忆一下，对于任意由 A和 B标记的图 G ， $\eta(\mathcal{GCC}(G)) = |\mathcal{V}_{cc}| - |\mathcal{V}_{co}| - 1$。因此，为了跟踪 $\eta(l)$，我们只需考察每一步添加的不同类型的顶点。

从 G_l 到 G_{l+1} ，我们区分两种情况。要么添加一条边 e （标记为 a 或b）：(i) 连接两个已有顶点 v_1, v_2 ，它们属于 G_l ；或 (ii) 连接 G_l 中的一个已有顶点 v_1 和一个新顶点 v_2。换句话说，当 S_2 的一条边 (w, w') 的两个顶点都位于 σ中大小为二的块中，即 $\exists v, v' \in V_1, v \overset{\sigma}{\sim} w, v' \overset{\sigma}{\sim} w'$时，我们就在 G_l 中添加一条连接 v 和 v' 的边；否则，我们添加一个新顶点，并向其添加一条新边。

我们记作

$$G_l = \bigsqcup_{i=1}^{I} T_i^{l,a} \cup \bigsqcup_{j=1}^{J} T_j^{l,b},$$

其中， $T^{l}{}_{,i}{}^{a}$是 G_l中由 a标记的互不相交的彩色分量，而 $T^{l}{}_{,j}{}^{b}$是 G_l中由 b标记的互不相交的彩色分量。我们记 $V^{l}{}_{,i}{}^{a}$ 为 $T^{l,i}{}^{a}$ 的顶点集合

。（ b的情形类似）。对于 $i \in I$，我们记 $V^{l}{}_{,}{}_{j}{}^{a} \subset V^{l,i}{}^{a}$ 为顶点 $v \in V^{l}{}_{,i}{}^{a}$ 的子集，其中这些顶点仅与标记为 a 的边相邻； b的情形类似。

令 $0 \le l \le k-1$ 我们假设 $\eta(l) \le \eta(0) = \eta(S_1)$，并且不失一般性，假设我们添加的新边 $e = (v,\ w')$ 标记为 a (回想一下， v 是 G_l 的一个顶点)。如果处于第一种情形，令 $v' \in V_1 \subset V(G_l)$ 满足 $v' \overset{\sigma}{\sim} w'$，我们就在 v 和 v' 之间添加一条标记为 a 的边。

1. 如果 $v \in V^{l}{}_{,}{}_{i}{}^{a}$ 和 $v' \in V^{l}{}_{,}{}_{i}{}^{a}$，那么在 v 和 v' 之间添加一条标记为 a 的边不会改变彩色分量图，因为它们已经属于同一个彩色分量（标记为 a），因此 $\eta(l+1) = \eta(l)$。注意， v 或 v' 是否为连接点并不重要。

2. 如果 $v \in V^{l}{}_{,}{}_{i_1}{}^{a}$ 和 $v' \in V^{l}{}_{,}{}_{i_2}{}^{a}$，且满足 $i_1 \neq i_2$。在 v 和 v' 之间添加一条边会合并彩色分量 $T^{l}{}_{,}{}_{i_1}{}^{a}$ 和 $v' \in T^{l}{}_{,}{}_{i_2}{}^{a}$，因此彩色分量图的顶点数会减少一个： $\eta(l+1) = \eta(l) - 1$。

。3. 如果 $v \in V^{l}{}_{,}{}_{j_1}{}^{b}$，

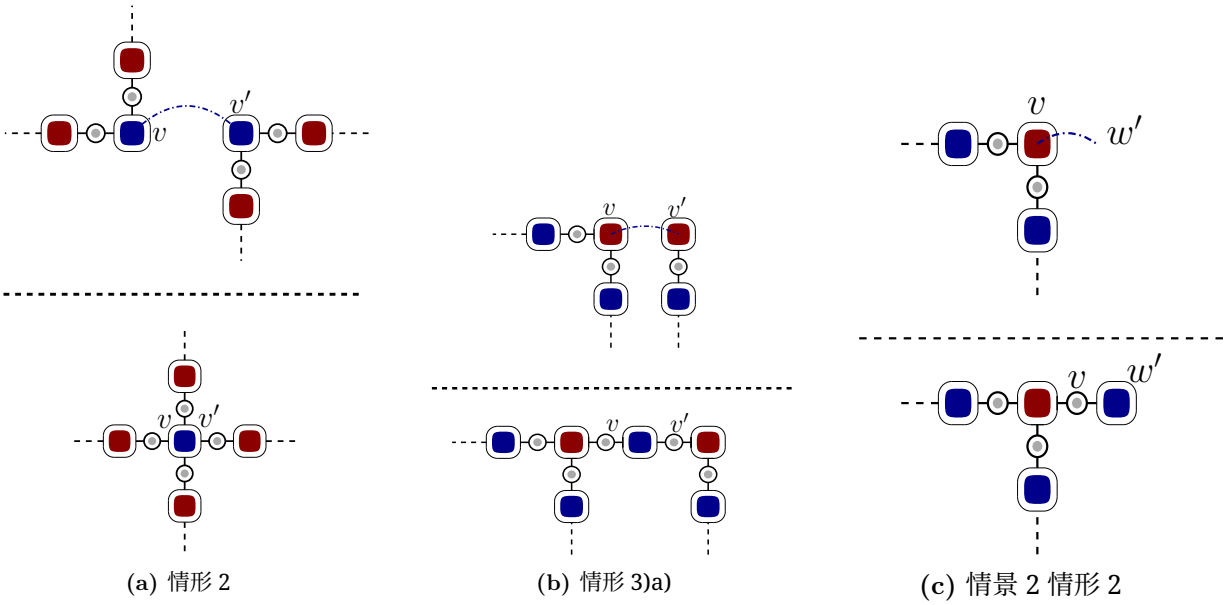
。(a) 若 $v' \in V^{l,j_2}{}^{b}$ 对某个 $j_2 \in J$ 成立，则在彩色分量图中添加一个类型为 cc 的顶点和两个类型为 co 的顶点，因此 $\eta(l+1) = \eta(l) - 1$；(b) 若 $v' \in V^{l,}{}_{j_2}{}^{b} \cap V^{l,i}{}^{a}$ 对某个 $j_2 \in J$ 和某个 $i \in I$ 成立，则在彩色分量图中添加一个类型为 co 的顶点，因此 $\eta(l+1) = \eta(l) - 1$；

。(c) 并且如果 $v' \in V^{l,i}{}^{a}$ 对于某个 $i \in I$，我们还会在彩色分量图中添加一个类型为 co 的顶点，因此 $\eta(l+1) = \eta(l) - 1$。

如果处于第二种情形： w' 位于 σ 的一个大小为一的块中。分两种情况：

1. 要么 $v \in V^{l,}{}_{i}{}^{a}$ 对于某个 $i \in I$，彩色分量图不发生变化，因此 $\eta(l+1) = \eta(l)$；

2. 要么 $v \in V^{l,}{}_{j}{}^{\circ\, b}$ 对于某个 $j \in J$，那么我们在彩色分量图中添加一个类型为 co 的顶点和一个类型为 cc 的顶点，因此 $\eta(l+1) = \eta(l)$。



(a) 情形 2　　(b) 情形 3)a)　　(c) 情景 2 情形 2

图 2： 添加一条边时对$\mathcal{GCC}$ 所作修改的示例。上图是$\mathcal{GCC}$ 的局部细节，蓝色虚线表示我们在步骤 l 于图中添加的边。下图是$\mathcal{GCC}$的局部变化。彩色方块是来自着色分量的顶点（a 为蓝色， b 为红色），灰色圆圈是连接点。

图 2给出了若干不同情形的示例。穷尽所有情形后，我们看到$(\eta(l))_{0\le l\le k}$ 不会增加。因此 $\eta(k) \le \eta(\mathcal{GCC}(S_1))$。该构造是对称的，从而完成证明。

□

我们现在证明若干关于图单项式的迹与单射迹的结果，这些结果用 $A+B$、 $a+b$、 A 和 B 来表述。

对于由单个变量标记、具有 L 个连通分支的图单项式 h ，我们定义

$$t(h(X)) := \mathbb{E}\frac{1}{N^L} \sum_{\substack{\phi: V_h \to [N],\\ \text{injective}}} \prod_{e \in E_h} X(\phi(e))$$

出现在假设 4.5 中的量。

引理 5.2. 设 A 与 B 为以速度 M、常数 h_1 与 h_2 满足假设 *4.5* 的随机矩阵。设 g 为以 a 与 b 标记、具有 $m \le cM$ 个顶点和边的图单项式，并令 $\eta := \eta(GCC(g))$。我们有如下估计：

$$\tau_i^0(g(A,B)) = t(g_a(A))t(g_b(B))N^{\eta} + O(N^{\eta + c(h_1+h_2)-1}m^2), \tag{5.2}$$

其中， g_a 是从 g 中删去所有标记为 b 的边以及孤立顶点后得到的图单项式， g_b也同理。

该论证在 [16] 中针对边数和顶点数有界的测试图给出，但在我们的情形下仍然成立。为完整起见，我们在此重述。

证明。 设 $g = (V, E, \gamma, \varepsilon, v_{in} = v_{out})$是一个由两个形式变量$a$ 和 b标记的图单项式。此外，由于矩阵 A 和 B 是厄米的，我们可以省略 ε ，并记$X^a = A, X^b = B$。首先注意到，由于 A 和 B 是置换不变的，

$$\tau_i^0(g(A,B)) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\tau_j^0(g(A,B)),$$

因此

$$\begin{aligned}\tau_i^0(g(A,B)) &= \frac{1}{N}\sum_{\substack{\phi: V\to[N],\\ \phi \text{ injective}}} \mathbb{E}\left[\prod_{e=(v,w)\in E} X^{\gamma(e)}(\phi(w),\phi(v))\right] \\ &= \frac{(N-1)!}{(N-|V|)!}\mathbb{E}_{\phi_N}\left[\prod_{e=(v,w)\in E} X^{\gamma(e)}(\phi_N(w),\phi_N(v))\right],\end{aligned}$$

其中，期望还取自 ϕ_N，它是从 V 到 $[N]$的所有单射映射中均匀选取的一个单射映射，且与 A 和 B独立。由于矩阵 A和 B 在置换下分布不变，我们可以为其中一个矩阵再添加一“层”随机单射映射，例如为 B 添加，如下所示，

$$\tau_i^0(g(A,B)) = \frac{(N-1)!}{(N-|V|)!}\mathbb{E}\left[\prod_{\substack{e\in E,\\ \gamma(e)=a}} A(\phi_N(e)) \prod_{\substack{e\in E,\\ \gamma(e)=b}} B(\sigma\circ\phi_N(e))\right],$$

其中， σ 是从 $\mathfrak{S}_N$中均匀随机选取的元素，并且与（ϕ_N、 A、 B）相互独立。不难看出，（A、 ϕ_N）与（B、 $\sigma\circ\phi_N$）相互独立，并且 $\sigma\circ\phi_N$与ϕ_N具有相同的分布。因此，我们可以分别计算 A和 B的贡献。令 $g_a = (V_a, E_a)$（分别为$g_b = (V_b, E_b)$）表示由 g 得到的图单项式：保留标记为 a（分别为b ）的边，然后删除孤立顶点。记 K_a（分别为 K_b ）为 g_a（分别为 g_b）的连通分量数。于是我们有

$$\begin{aligned}\tau_i^0(g(A,B)) &= \frac{(N-1)!}{(N-|V|)!}\mathbb{E}\left[\prod_{e\in E_a} A(\phi_N(e))\right]\mathbb{E}\left[\prod_{e\in E_b} B(\phi_N(e))\right] \\ &= \frac{(N-|V_a|)!(N-|V_b|)!}{(N-|V|)!(N-1)!}N^{K_a-1}N^{K_b-1}t(g_a(A))t(g_b(B)).\end{aligned}$$

为了使用引理 A.1 的第二项，我们只需验证 $\eta := K_a(N) + K_b(N) - 1 - |V_a| - |V_b| + |V|$ 为非正。回忆一下，S 的彩色分量图 GCC(S)：=(V, E)具有两类顶点。第一类是彩色分量：共有 $K_a(N) + K_b(N)$个。第二类是来自S 、同时属于 a 中的一个彩色分量和 b中的一个彩色分量的顶点，共有$|V_a \cap V_b|$ 个。因此，$|\mathbf{V}| = K_a(N) + K_b(N) + |V_a \cap V_b|$。此外，对于第二类中的每个顶点，彩色分量图中都有与之对应的两条边，因此 $|\mathbf{E}| = 2|V_a \cap V_b|$。最后，注意到 $|V| - |V_a| - |V_b| = -|V_a \cap V_b|$，我们得到$\eta = |\mathbf{V}| - |\mathbf{E}| - 1$。利用公式 (4.1)，可得 $\eta \leq 0$；当且仅当 GCC(S) 是一棵树时取等号。

最后，我们得到

$$\tau_i^0(g(A,B)) = N^{\eta} t(g_a(A)) t(g_b(B)) \left(1 + O\left(\frac{m^2}{N}\right)\right),$$

结合假设 4.5，即可完成证明。 □

现在，我们用矩阵 A 和 B 的单射分布来计算算子 a 和 b 的单射交通分布。我们将 $G_N = (V_N, E_N, \gamma_N, \rho)$ 记为第 3 节中定义的底层 ρ-根标记图，其中 $\rho \in [N]$，并且当 $a\delta_v, \delta_w \neq 0$（此时 $\gamma_N((v,w)) = a$）或 $b\delta_v, \delta_w \neq 0$（此时 $\gamma_N((v,w)) = b$）时，v 与 w 之间有一条边。令 $g = (V, E, \gamma, \varepsilon, v_{in}, v_{out})$ 为一个由两个形式变量 a 和 b 标记的图单项式。此外，由于矩阵 A 和 B 是厄米的，我们可以省略 ε。容易看出，如果 g 相对于族 a 和 b 有一个不是树的 GCC，那么从 g 到 G_N 不存在单射标记图态射；否则，G_N 的彩色分量图就不是树。

我们记作

$$\begin{aligned} \Phi : V_N &\longrightarrow [N] \\ \rho &\mapsto \rho, \\ (j_1, \cdots, j_n, \star) &\mapsto j_n, \end{aligned} \tag{5.3}$$

其中 $\star$ 表示 a 或 b。映射 Φ 通过保持标签不变，诱导出一个从 G_N 到与矩阵 A 和 B 相关联的、具有 N 个顶点的完全图的带标记图态射。

引理 5.3. 设 g 是一个图单项式，其 $v_{in} = v_{out}$ 且其 *GCC* 是一棵树。从 g 到 G_N 的单射图态射集合与从 V 到 $[N]$ 且在 g的每个着色分量上均为单射的映射集合之间存在一个双射。该双射由映射 Φ诱导。

证明。设 $\phi: V \to V_N$ 是一个单射图态射。映射 $\Phi \circ \phi: V \to [N]$ 在 g的每个彩色分量上都是单射的。事实上，设 S 是 g的一个彩色分量，颜色为 a。由于 ϕ 是一个单射态射，其通过 ϕ 的像是某个

$R_a(v) = \{(j_1, \cdots j_n, b)\} \sqcup \{(j_1, \cdots j_{n+1}, a) \; j_{n+1} \in [N] \setminus \{j_n\}\}$（见第 3 节）。由于 Φ 在 $R_a(v)$ 上是单射的，$\Phi \circ \phi$ 在 S 上是单射的。

现在令 $\psi: V \to [N]$ 在 g 的每个着色分量上都是单射，并用 $\mathcal{CC}(g)$ 表示 g的着色分量集合。我们定义函数 $h: \mathcal{CC}(g) \to \mathbb{N}_{>0}$，它是 $\mathcal{GCC}(g)$ 上图距离的一个轻微变形，定义如下：

$$h(S) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(d_{\mathcal{GCC}(g)}(S, v_{in}) + 1\right) & \text{if } v_{in} \in \mathcal{V}_{co}, \\ \frac{1}{2} d_{\mathcal{GCC}(g)}(S_{in}, S) + 1, & \text{if } v_{in} \in \overset{\circ}{S}_{in}, \end{cases} \tag{5.4}$$

◦其中 S_{in} 是 S_{in} 中不属于连接点的顶点集合。注意，$h(S)$ 确实是一个自然数，并且若 $v_{in} \in S$，则 $h(S) = 1$。此外，h 通过取 $h(v_{in}) = 0$，并在其他情况下取 $\min\{h(S) \; S \ni v\}$，在 V上诱导出一个函数，仍记作 h。最后，对于 $v \neq v_{in}$，记 $c(v) \in \{a, b\}$，表示使最小值成立的着色分量的颜色，即使 v_{in}更近的那个颜色。由于 $\mathsf{GCC}(g)$ 是一棵树，对于任意顶点 $v \neq v_{in}$，存在唯一的路径 $v_{in} = v_0, v_1, \cdots v_{h(v)-1}, v_{h(v)} = v$，使得对于所有 $1 \leq i \leq h(v)$，顶点 v_{i-1} 和 v_i 属于同一个着色分量，除 v_{in}和 v外，它们都是连接点，并且 $h(v_i) = i$。记 $(j_1, \cdots j_{h(v)}) = (\psi(v_1) \ldots, \psi(v_{h(v)}))$，并定义 $\phi: V \to V_N$，使得 $\phi(v_{in}) = \rho$，且 $\phi(v) = (j_1, \ldots, j_{h(v)} \; c(v))$。该定义良好，因为 ψ在每个着色分量上都是单射，而 v_{i-1}和 v_i 属于同一个着色分量且是两个不同的顶点，所以有 $j_{i-1} \neq j_i$。此外，ϕ 诱导出一个图态射。事实上，对于任意边 $e = (v, w)$，若 $v = w$，则显然 $(\phi(v) \; \phi(w))$ 是 G_N的一条边；若 $v \neq w$，则在后一种情况下，由于它们位于同一个着色分量中，$\phi(v)$ 和 $\phi(w)$ 在 G_N中也都属于同一个着色分量，因此 $(\phi(v) \; \phi(w))$ 确实是 G_N的一条边。最后，ϕ 是单射：若 $(\psi(v_1) \ldots, \psi(v) \; c(v)) = (\psi(w_1), \cdots \; \psi(w) \; c(w))$，则 v 和 w 属于同一个着色分量；利用 ψ 在该着色分量上的单射性，我们递归地得到 $v = w$。

□

回顾一下，图单项式 g 的顶点划分 σ 被称为彩色分量之间的合并，记作 $\sigma \in P_{\#}(\text{彩色分量}(g))$，如果 σ 的每个块至多包含来自每个彩色分量的一个顶点。换言之，它可以识别来自不同彩色分量的顶点，但绝不会识别同一彩色分量中的两个顶点。我们用 $\mathbf{1}$ 表示仅由单点集构成的特殊合并。回顾一下，对于图单项式的任意顶点划分，我们用 g^σ 表示将同一块中的顶点识别后得到的图单项式。

引理 5.4。设 A 和 B 为随机矩阵，a、b 为第 3 节中构造的相应算子。设 g 为一个以两个变量标记的图单项式，且其 $\mathcal{GCC}$ 是一棵树。我们有

$$\mathrm{Tr}_\rho^0(g(a, b)) = \mathrm{Tr}_\rho^0(g(A, B)) + \sum_{\substack{\sigma \in P_{\#}(\mathcal{CC}(g)), \\ \sigma \neq \mathbf{1}}} \mathrm{Tr}_\rho^0(g^\sigma(A, B)). \tag{5.5}$$

证明。 根据 Φ 的定义，并回想一下，算子 a 和 b 是通过顶点的最后一个指标定义的，我们有

$$\mathrm{Tr}_\rho^0(g(a,b)) = \sum_{\substack{\phi:V\to V_N,\\ \text{injective graph morphism},\\ \phi(v_{in})=\rho}} \prod_{e\in E} X^{\gamma(e)}(\Phi(\phi(e))),$$

其中 $X^a = A$ 和 $X^b = B$。利用引理 5.3，我们得到

$$\mathrm{Tr}_\rho^0(g(a,b)) = \sum_{\phi} \prod_{e\in E} X^{\gamma(e)}(\phi(e)),$$

其中，对 ϕ 的求和现在遍历所有映射 $\phi\colon V\to[N]$，这些映射在每个着色分量上都是单射，并且满足 $\phi(v_{in}) = \rho$。

一个映射 $\phi\colon V\to[N]$，若在每个着色分量上都是单射，则可视为一个单射映射 $\psi\colon V^\sigma\to[N]$，其中 $\sigma(i)\sim\sigma(j)\Leftrightarrow\phi(i)=\phi(j)$，是 g 的着色分量的一个合并。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_\rho^0(g(a,b)) &= \sum_{\sigma\in P_\#(\mathcal{CC}(g))} \sum_{\substack{\psi:V^\sigma\to[N],\\ \text{injective},\\ \psi(v_{in})=\rho}} \prod_{e\in E} X^{\gamma(e)}(\phi(e)),\\ &= \sum_{\sigma\in P_\#(\mathcal{CC}(g))} \mathrm{Tr}_\rho^0(g^\sigma(A,B))\end{aligned}$$

特殊情况 特殊情况 $\sigma = 1 = \{\{v_1\},\cdots,\{v_m\}\}$ 不会改变 g，因此我们得到结果 . □

推论 5.5。 设 $m\le cM$，设 A 和 B 是满足假设 *4.5* 且速率为 M 的两个矩阵，则

$$\langle(a+b)^m\delta_\rho,\delta_\rho\rangle - (A+B)^m_{\rho,\rho} = O(2^m m^{2m} N^{c(h_1+h_2)-1}). \tag{5.6}$$

证明。 对于 $f\colon [m]\to\{a,b\}$，将 g_f 称为图单项式，它是一个边沿环标记为 f 的有向环。对边上的矩应用多重线性展开，我们得到

$$\begin{aligned}\langle(a+b)^m\delta_\rho,\delta_\rho\rangle &= \sum_{f:[m]\to\{a,b\}} \sum_{\substack{\pi\in P(g_f),\\ \mathcal{GCC}(g_f^\pi)=\text{tree}}} \mathrm{Tr}_\rho^0(g_f^\pi(a,b)),\\ &= \sum_{f:[m]\to\{a,b\}} \sum_{\substack{\pi\in P(g_f),\\ \mathcal{GCC}(g_f^\pi)=\text{tree}}} [\mathrm{Tr}_\rho^0(g_f^\pi(A,B))) + \sum_{\substack{\sigma\in P_\#(\mathcal{CC}(g_f^\pi)),\\ \sigma\neq 1}} \mathrm{Tr}_\rho^0((g_f^\pi)^\sigma(A,B))].\end{aligned}$$

因此，方程（5.6）的左侧等于

$$\sum_{f:[m]\to\{a,b\}}\left(\sum_{\substack{\pi\in P(g_f),\\ \mathcal{GCC}(g_f^\pi)=\text{tree}}}\sum_{\substack{\sigma\in P_\#(\mathcal{CC}(g_f^\pi)),\\ \sigma\neq 1}}\mathrm{Tr}_\rho^0((g_f^\pi)^\sigma(A,B))-\sum_{\substack{\pi\in P(g_f),\\ \mathcal{GCC}(g_f^\pi)\neq\text{tree}}}\mathrm{Tr}_\rho^0(g_f^\pi(A,B))\right).$$

现在利用假设 4.5 和引理 5.2，将每个单射迹界定为 $N^{c(h_1+h_2)}N^\eta$。由于我们只对其彩色分量图不是树的划分求和，因此每一项都有 $\eta\le -1$。将所求和的划分数量界定为 m^m，即可得到方程（5.6）。

□

5.2 定理 2.6 的证明

在整个证明过程中，我们记 $G_{A+B}(z):=G_{A+B}(zI)$，对 G_{a+b} 也作类似记号。设 $(\mathcal{A},\mathcal{D}_N(\mathbb{C})\ E)$ 为一个 C^*-概率空间，设 $X\in\mathcal{A}$ 为自伴，并令 $z\in\mathbb{C}$ 为虚部严格为正的复数。我们选择矩阵 A 和 B 满足假设 4.5 和 4.6 时的最小速度，并将 $c>0$ 设为稍后确定。我们有恒等式

$$G_X(z)=E((z-X)^{-1})=\sum_{n=0}^{cM-1}\frac{1}{z^{n+1}}E(X^n)+\frac{1}{z^{cM}}E\left(X^{cM}(z-X)^{-1}\right). \tag{5.7}$$

我们将上述等式右边的 $I_X^M(z)$ 称为第一项，将 $R_X^M(z)$ 称为第二项。我们将该结果应用于带有 $E=\Delta$ 的 $X=A+B$，以及带有 $E=E_{\mathcal{D}_N(\mathbb{C})}$（定义见第 2 节）的 $X=a+b$。我们首先将 $I^M(z)$ 的范数展开如下：$=I_{a+b}^M(z)\ -I_{A+B}^M(z)$

$$\begin{aligned}||I^M(z)||_F^2=\sum_{\rho=1}^N\sum_{n,m=0}^{cM-1}\frac{1}{z^{m+1}\bar{z}^{n+1}}(\langle g_m(a+b)\delta_\rho,\delta_\rho\rangle-g_m(A+B)_{\rho,\rho})\times\\ (\langle g_n(a+b)\delta_\rho,\delta_\rho\rangle-g_n(A+B)_{\rho,\rho}),\end{aligned} \tag{5.8}$$

其中 g_m 表示长度为 m 、由单个变量标记的有向环。因此 $\mathrm{Tr}\ g_m(X)\ =\mathrm{Tr}\,X^m$。我们复现推论 5.5 的证明，从而得到

$$\begin{aligned}\langle g_m(a+b)\delta_\rho,\delta_\rho\rangle-g_m(A+B)_{\rho,\rho}=&\sum_{f_1:[m]\to\{a,b\}}\sum_{\substack{\pi_1\in P(g_{f_1}),\\ \mathcal{GCC}(g_{f_1}^{\pi_1})=\text{tree}}}\sum_{\substack{\sigma_1\in P_\#(\mathcal{CC}(g_{f_1}^{\pi_1})),\\ \sigma_1\neq 1}}\mathrm{Tr}_\rho^0((g_{f_1}^{\pi_1})^{\sigma_1}(A,B))\\ &-\sum_{\substack{\pi_1\in P(g_{f_1}),\\ \mathcal{GCC}(g_{f_1}^{\pi_1})\neq\text{tree}}}\mathrm{Tr}_\rho^0(g_{f_1}^{\pi_1}(A,B)),\end{aligned} \tag{5.9}$$

对于第 n 阶矩也同理，只需将所有下标 1 替换为 2。注意，在最后的求和中，对于任意 π_1,σ_1，$(g_{f_1}^{\pi_1})^{\sigma_1}$ 的彩色分量图不是一棵树，因此

$\eta(\mathcal{GCC}((g_{f_1}^{\pi_1})^{\sigma_1})) \leq -1$。因此，展开方程（5.8）中的乘积时，我们将得到形如以下形式的表达式之和

$$\mathrm{Tr}_\rho^0(h(A,B))\,\mathrm{Tr}_\rho^0(h'(A,B)),$$

对于某些图单项式 h，h' 它们的彩色分量图不是树，且具有相同的输入顶点和输出顶点。我们将该乘积表示为某个修改后图单项式的单射迹之和。令 $h\cdot h'$ 为将 h 的输入顶点与 h'的输入顶点合并后得到的图单项式，于是有

$$\mathrm{Tr}_\rho^0(h(A,B))\,\mathrm{Tr}_\rho^0(h'(A,B)) = \sum_{\sigma\in P_\#(h,h')} \mathrm{Tr}_\rho^0((h\cdot h')^\sigma(A,B)).$$

利用引理 5.1，我们知道 $\eta(\mathcal{GCC}((h\cdot h')^\sigma)) \leq -1$。我们使用引理 5.2，将和式中出现的每个单射迹的期望估计为 $N^{c(h_1+h_2)-1}$。最后，我们将含有 k 个元素的集合的划分数估计为 k^k，从而得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}||I^M(z)||_F^2 &\leq \sum_{\rho=1}^{N}\sum_{n,m=0}^{cM-1}\sum_{\substack{f_1:[m]\to\{a,b\},\\ f_2[n]\to\{a,b\}}} \frac{1}{|z|^{n+m+2}} n^{2n}m^{2m}(n+m)^{n+m}N^{c(h_1+h_2)-1},\\
&\leq \frac{N}{|z|^2}\left(\sum_{m=0}^{cM-1}\left(\frac{2(cM)^3}{|z|}\right)^m\right)^2 N^{c(h_1+h_2)-1},\\
&\leq \frac{4N}{|z|^2}\left(\frac{2c^3}{|z|}\right)^{2cM} M^{6cM}N^{c(h_1+h_2)-1},
\end{aligned}$$

其中，对于最后一行，我们将和式中的每一项估计为 $\left(\frac{2(cM)^3}{|z|}\right)^{cM-1}$，当 M足够大时这是有效的，因此 N也足够大。利用 $M^{6cM}\leq N^{6c}$，对于 $|z|\geq 2c^3$，我们有

$$\mathbb{E}\frac{1}{N}||I^M(z)||_F^2 \leq \frac{1}{|z|^2}N^{c(h_1+h_2+6)-1}e^{2cM\log(2c^3/|z|)}. \tag{5.10}$$

现在我们来估计 $R_{A+B}^M(z)$ 的范数。回顾一下，弗罗贝尼乌斯范数就是 Schatten-2 范数，而算子范数就是 Schatten-∞ 范数。对 Schatten 范数应用 Hölder 不等式可得

$$||R_{A+B}^M(z)||_F \leq \frac{1}{|z|^{cM}}||(A+B)^{cM}||_F||(z-A-B)^{-1}||_{op}.$$

由于 A 和 B 是厄米矩阵，记 $||X||_p := \mathrm{Tr}((XX^*)^p)^{1/2p}$ 为矩阵 X 的 Schatten p-范数，并使用闵可夫斯基不等式，继而使用 Hölder 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
||(A+B)^{cM}||_F^2 = ||A+B||_{cM}^{2cM} &\leq (||A||_{cM}+||B||_{cM})^{2cM},\\
&\leq \left(||A^{cM}||_F^{1/cM}+||B^{cM}||_F^{1/cM}\right)^{2cM},\\
&\leq 2^{2cM-1}(||A^{cM}||_F^2+||B^{cM}||_F^2).
\end{aligned}$$

由于 A 和 B 以速度 cM、常数 C 满足假设 4.6，我们最终得到

$$\mathbb{E}\frac{1}{N}||R^M_{A+B}(z)||^2_F \leq \left(\frac{4C}{|z|^2}\right)^{cM} \frac{1}{|\mathrm{Im}(z)|^2}. \tag{5.11}$$

为了估计 $R^M_{a+b}(z)$，回忆第 3 节末尾的结论：$\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}\ T \mapsto \frac{1}{N}\sum_{v\in R_a(x)}\langle T\delta_v, \delta_v\rangle$ 是正的，并使 $(\mathcal{A}\ \varphi)$ 成为一个 C^*-概率空间。此外，令 $x := (z-a-b)^{-1}(a+b)^{cM}$，我们可以写成

$$\frac{1}{N}||R^M_{a+b}(z)||^2_F = \frac{1}{|z|^{2cM}}\varphi(E_{\mathcal{D}_N(\mathbb{C})}(x)E_{\mathcal{D}_N(\mathbb{C})}(x)^*) \leq \frac{1}{|z|^{2cM}}\varphi(xx^*),$$

这里用到了 $E_{\mathcal{D}_N(\mathbb{C})}$ 是一个 $*$-同态，同时也是一个投影：对任意也是投影的 $*$-同态 p，可以显式计算 $\langle x\delta_v, x\delta_v\rangle = \langle (x-p(x)+p(x))\delta_v, (x-p(x)+p(x))\delta_v\rangle$，从而得到上述不等式。现在，由于 $a+b$ 是自伴的，存在一个紧支撑测度 μ，使得

$$\varphi(xx^*) = \int (z-t)^{-1}t^{2cM}(\bar{z}-t)^{-1}\mathrm{d}\mu(t) \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}(z)|^2}\frac{1}{N}\sum_{\rho=1}^{N}\langle (a+b)^{2cM}\delta_\rho, \delta_\rho\rangle.$$

根据推论 5.5，我们有，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\frac{1}{N}||R^M_{a+b}(z)||^2_F &\leq \frac{1}{|z|^{2cM}|\mathrm{Im}(z)|^2}\left(\frac{1}{N}||(A+B)^{cM}||^2_F + O(2^{cM}(cM)^{2cM}N^{c(h_1+h_2)-1})\right), \\ &\leq \left(\frac{1}{|z|^2}\right)^{cM}\left(\frac{(4C)^{cM}}{|\mathrm{Im}(z)|^2} + (2c^2)^{cM}N^{c(h_1+h_2+2)-1}\right),\end{aligned} \tag{5.12}$$

其中，最后一行用到了以下事实：A 和 B 以速度 M、常数为 C满足假设 4.6，且 $M^{2M} \leq N^{2c}$。

综合以上结果，对于 $0 < c < \frac{1}{h_1+h_2+6}$ - 这保证了含有 $N^{c(h_1+h_2+p)-1}$ 的项（$p=2$（公式 (5.12)）和 $p=6$（公式 (5.10)））比 α^M 中的项以更快的速度趋于零，其中某个常数为 $0<\alpha<1$（公式 (5.12)、(5.11)）-，以及 $|z|^2 \geq \max\{4C, 2c^2, 2c^3\} = \max\{4C, 2c^2\} =: r_0^2$，我们得到

$$\mathbb{E}\frac{1}{N}||G_{a+b}(z) - G_{A+B}(z)||^2_F \leq \frac{4}{|z|^2}\left(\frac{r_0}{|z|}\right)^{2cM} \tag{5.13}$$

5.3 定理 2.7 的证明

注意，定理 2.6 已涵盖稀疏有界矩阵。我们通过稍有不同的证明改进了该界。证明仍然依赖矩方法，但现在我们证明，以高概率，$A+B$ 的矩与 $a+b$ 的矩在阶数不超过 $\log N$ 时相同。

图相关定义 给定一个图 $G=(V,E)$，我们定义，对于 $x,y\in V$， $d_G(x,y)$ 为从 x 到 y 的最短路径长度，其中路径的长度是其边数。下文中，如果图 G 是 $A+B$，我们将其距离简记为 d。令 $x\in V, k\in \mathbb{N}$，并记

$$B_G(x,k):=\{y\in V, d_G(x,y)\le k\},\qquad B_G(k):=\max_{x\in V}\{|B_G(x,k)|\}$$
$$C_G(x,k):=\{y\in V, d_G(x,y)= k\},\qquad C_G(k):=\max_{x\in V}\{|C_G(x,k)|\}.$$

注意，对于 C-稀疏矩阵，我们总有

$$|B_A(x,n)|\le C^n. \tag{5.14}$$

对于 $G=A+B$，对所有 $x\in V=[N]$，我们记

$$R(x):=\max\{k\in\mathbb{N},\, \mathcal{GCC}(B(x,k)) \text{ is a tree}\}.$$

最后，我们设

$$F_N(n):=\{x\in[N], R(x)\ge n\}.$$

量 $R(x)$ 可视为相对于彩色分量而言的 x 的围长：它是满足以下条件的最大半径：在局部范围内， x 周围的球满足其彩色分量图为树这一条件。对于第 3 节中构造的与 $a+b$ 相关联的图，由于彩色分量图是一棵树，因此所有顶点的围长均为无穷大。

引理 5.6。设 A_N 和 B_N 是 C-稀疏矩阵，则有

$$\mathbb{E}\left(|F_N(\kappa\log N)|\right)\le (eC^2)^n. \tag{5.15}$$

证明。 在整个证明中，令 n 为一个小于 $\kappa\log N$ 的整数，其中某个常数 κ 将在后文选定。注意

$$\mathbb{E}\left(|F_N(n)^c|\right)=\sum_{x=1}^{N}\mathbb{P}\left(\mathcal{GCC}(B(x,n)) \text{ is not a tree}\right).$$

令 $x_1,x_2\in[N],$和 $2\le k,l\le n$，并令

$$f_{2l}^{a\to b}(x_1,x_2,k):=\mathbb{P}\left(\exists\gamma_1,\cdots,\gamma_{2l},\sum_{i=1}^{2l}\ell(\gamma_i)\le k,\, x_1\underset{\gamma_1}{\overset{a}{\sim}}y_1\underset{\gamma_2}{\overset{b}{\sim}}\cdots\underset{\gamma_{2l-1}}{\overset{a}{\sim}}y_{2l-1}\underset{\gamma_{2l}}{\overset{b}{\sim}}x_2\right),$$

其中， $\ell(\gamma)$ 是路径 γ in $A+B$ 的长度（即边的数量），记号 $x_1\underset{\gamma_1}{\overset{a}{\sim}}y_1\underset{\gamma_2}{\overset{b}{\sim}}\cdots\underset{\gamma_{2l-1}}{\overset{a}{\sim}}y_{2l-1}\underset{\gamma_{2l}}{\overset{b}{\sim}}x_2$ 表示如下条件：路径 γ_{2i+1} 仅使用来自 $A\cap B(x,n)$ 的边，并连接 y_{2i} 与 y_{2i+1}；路径 γ_{2i} 仅使用来自$B\cap B(x,n)$ 的边，并连接 y_{2i-1} 与 y_{2i}；其中 $\gamma:=\coprod\gamma_i$ 不会两次使用同一条边，约定 $y_0=x_1$ 和 $y_{2l}=x_2$。

因此，我们得到

$$\mathbb{E}\left(|F_N(n)^c|\right) \leq \sum_{x=1}^{N} \sum_{y \in B(x,n)} \sum_{l=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} f_{2l}^{a \to b}(y, y, n). \tag{5.16}$$

注意，我们只考虑经过偶数个着色分量的路径，因为形如 $\gamma\ x_1 \underset{\gamma_1}{\overset{a}{\sim}} y_1 \underset{\gamma_2}{\overset{b}{\sim}} \cdots \underset{\gamma_{2l-2}}{\overset{b}{\sim}} y_{2l-2} \underset{\gamma_{2l-1}}{\overset{a}{\sim}} x_2$ 的路径可以理解为一条经过 $2l$ 个着色分量的路径，其中最后一个 γ_{2l} 为空。

现在我们递归地对 $f_{2l}^{a \to b}(y, y, n)$ 关于 l 进行界定。

对于 $l = 1$，我们更一般地界定以下量：

$$\begin{aligned} f_2^{a \to b}(x_1, x_2, n) &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\left[(B_A(x_1, k) \setminus \{x_1\}) \cap (B_B(x_2, n-k) \setminus \{x_2\}) \neq \varnothing\right] \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} 1 - \frac{\binom{N-|B_A(x_1,k)|+1}{|B_B(x_2,n-k)|-1}}{\binom{N}{|B_B(x_2,n-k)|-1}}, \end{aligned}$$

这里我们利用了这样一个事实：矩阵 A 和 B 是置换不变的，因此可以用两个相互独立的均匀随机置换矩阵分别对 A 和 B 进行共轭，从而得到第二行。

由于 A 和 B 是稀疏的，当 N 趋于~~无穷时，量~~ $\frac{|B_{A(n)||B_B\ n\ |\ ()}}{N}$ 对于 $\kappa < (2 \log C)^{-1} s$ 趋于 0，见公式（5.14）。因此，利用斯特林公式，我们得到

$$\begin{aligned} f_2^{a \to b}(x_1, x_2, n) &\leq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{|B_A(x_1, j)||B_B(x_2, n-j)|}{N} + O\left(n\left(\frac{|B_A(n)||B_B(n)|}{N}\right)^2\right) \\ &\leq \frac{nC^n}{N} + O\left(\frac{nC^{2n}}{N^2}\right). \end{aligned}$$

我们通过归纳法证明

$$f_{2l}^{a \to b}(x_1, x_2, n) \leq \frac{n^{2l-1} C^n}{(2l-1)! N}(1 + o(1)).$$

现在注意，对于 $2l + 2 \leq n$，

$$f_{2l+2}^{a \to b}(x_1, x_2, n) \leq \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{y_1 \in C_A(x_1, j_1)} \sum_{j_2=1}^{n-j_1} \sum_{y_2 \in C_B(x_2, j_2)} f_{2l}^{a \to b}(y_2, y_1, n - j_1 - j_2).$$

因此，利用归纳假设，我们得到

$$\begin{aligned} f_{2l+2}^{a \to b}(x_1, x_2, n) &\leq \sum_{j_1 + j_2 \leq n} C^{j_1} C^{j_2} \frac{(n - j_1 - j_2)^{2l-1} C^{n-j_1-j_2}}{(2l-1)! N}(1 + o(1)), \\ &\leq \frac{n^{2l+1} C^n}{(2l+1)! N}(1 + o(1)), \end{aligned}$$

其中我们用到了这一事实:

$$\begin{aligned}\sum_{i+j\le n}(i+j)^{2l-1} &= n^{2l+1}\frac{1}{n^2}\sum_{(i+j)/n\le 1}\left(\frac{i+j}{n}\right)^{2l-1}\\ &= n^{2l+1}\int_{0\le x+y\le 1}(1-(x+y))^{2l-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y(1+o(1)),\\ &= \frac{n^{2l+1}}{2l(2l+1)}(1+o(1)).\end{aligned}$$

回到公式 5.16，我们有

$$\mathbb{E}\left(|F_N(n)^c|\right) \le \sum_{x=1}^{N}\sum_{y\in B(x,n)}\sum_{l=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{n^{2l-1}C^n}{(2l-1)!N} \le \sum_{x=1}^{N}\sum_{y\in B(x,n)}\frac{e^nC^n}{N} \le (eC^2)^n.$$

□

定理 *2.7* 的证明。令 $0<\kappa<1/2$ 稍后选定，令 η_0 和 D 如定理 2.7 中所述。写作 $\tilde{A}=D^{-1/2}AD^{-1/2}$ 和 $\tilde{B}=D^{-1/2}BD^{-1/2}$，我们得到

$$G_{A+B}(D)_{i,i} = D_{i,i}^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tilde{A}+\tilde{B}\right)^n_{i,i} = D_{i,i}^{-1}\sum_{n=0}^{\kappa\log N}\left(\tilde{A}+\tilde{B}\right)^n_{i,i} + D_{i,i}^{-1}\sum_{n=\kappa\log N}^{\infty}\left(\tilde{A}+\tilde{B}\right)^n_{i,i}.$$

右侧的最后一项有如下界

$$\begin{aligned}\left|D_{i,i}^{-1}\sum_{n=\kappa\log N}^{\infty}\left(\tilde{A}+\tilde{B}\right)^n_{i,i}\right| &\le \frac{\left(\frac{||A||_{op}+||B||_{op}}{d}\right)^{\kappa\log N}}{d-||A||_{op}-||B||_{op}},\\ &\le \frac{1}{d}N^{\kappa\log\left(\frac{2C}{d}\right)},\end{aligned}$$

其中我们记得 $d:=\inf\{|\mathrm{Im}D_{i,\ i}|,\ \ 1\le i\le N\}$。$G_{a+b}(D)$ 也同理，因为 a 和 b 的算子范数分别与 A 和 B 的算子范数相同

回顾推论 3.2，算子值测度 $\mu_{a+b}:\mathcal{D}_N(\mathbb{C})\langle\mathcal{X}\rangle\to\mathcal{D}_N(\mathbb{C})$ 描述了 A 和 B在对角线上的自由和的分布。我们记 $a+b:=D^{-1/2}(a+b)D^{-1/2}$，其中 $D^{-1/2}$应视为对角算子，这是通过第 3 节所述的将对角矩阵嵌入对角算子的方法实现的，并令 μ_{a+b} 表示相应的算子值测度。

将两个算子值柯西变换展开，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\frac{1}{N}||G_{A+B}(D)-G_{a+b}(D)||_F^2 \le \frac{2}{d^2}\mathbb{E}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\sum_{n=0}^{\kappa\log N}\left(\tilde{A}+\tilde{B}\right)^n_{i,i}-\langle(\overline{a+b})^n\delta_i,\delta_i\rangle\right|^2\\ +4\frac{1}{d^2}N^{2\kappa\log\left(\frac{2C}{d}\right)}\end{aligned}$$

现在注意，查看推论 5.5 的证明，$i \in F_N(\kappa \log\ N) \implies \left(\tilde{A}+\tilde{B}\right)^n_{i,i} = \langle (a+b)^n \delta_i, \delta_i \rangle \ \forall 1 \leq n \leq \kappa \log\ N$。事实上，推论 5.5 是关于 $a+b$ 与 $A+B$ 的每一个实现的陈述，并且所有其余项都等于 0，因为它们是其 $\mathcal{GCC}$ 不是树的图单项式的单射迹。因此我们有，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\frac{1}{N}||G_{A+B}(D)-G_{a+b}(D)||_F^2 \leq & \frac{2}{d^2}\mathbb{E}\left[\frac{|F_N(\kappa \log N)|^c}{N}\left(\frac{||A||_{op}+||B||_{op}}{d}\right)^{2\kappa \log N}\right] \\ & + 4\frac{1}{d^2}N^{2\kappa \log\left(\frac{2C}{d}\right)}, \\ \leq & \frac{2}{d^2}N^{\kappa \log(eC^2)-1+2\kappa \log\left(\frac{2C}{d}\right)} + 4\frac{1}{d^2}N^{2\kappa \log\left(\frac{2C}{d}\right)},\end{aligned}$$

最后一个不等式由引理 5.6 得出。取 $\kappa = {}_{1+2^{\frac{1}{\log C}}} < 1/2$，即可得到所需的界。

□

A 渐近展开

引理 A.1（两个渐近展开）。 *1.* 设 V 是一个大小依赖于 N 的集合，使得当 $N \to \infty$ 时，$|V|^2/N \to 0$。

$$\frac{N!}{(N-|V|)!} = N^{|V|}\left(1+O\left(\frac{|V|^2}{N}\right)\right).$$

2. 设 V、V_1、V_2 是大小依赖于 N 的集合，K_1、K_2 是同样依赖于 N 的数，并满足以下条件：

- 我们有包含关系 V_1、$V_2 \subset V$，并记 $\delta V := V_1 \cap V_2$。
- 比值 $|V|^2/N$ 在 N 趋于无穷时趋于0（因此，将 V 换成 V_1 和 V_2 时结论也成立）。
- 量 $\eta := K_1+K_2-1-|V_1|-|V_2|+|V|$ 非正。

因此，我们有

$$\Gamma_N := N\frac{(N-|V_1|)!(N-|V_2|)!}{(N-|V|)!N!}N^{K_1-1}N^{K_2-1} = N^{\eta}\left(1+O\left(\frac{|V|^2}{N}\right)\right)$$

证明。 对于第一部分，我们使用斯特林等价公式：

$$\begin{aligned}\frac{N!}{(N-|V|)!} &= \frac{N^N e^{N-|V|}}{(N-|V|)^{N-|V|}e^N}\left(1-\frac{|V|}{N}\right)^{-1/2}\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right),\\ &= N^{|V|}\exp\left(-\left(N-|V|+\frac{1}{2}\right)\log\left(1-\frac{|V|}{N}\right)-|V|\right)\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right),\\ &= N^{|V|}\exp\left(-\frac{|V|^2}{N}+\frac{|V|}{2N}+\frac{|V|^2}{2N}+O\left(\frac{|V|^3}{N^2}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right),\\ &= N^{|V|}\left(1+O\left(\frac{|V|^2}{N}\right)\right),\end{aligned}$$

其中，指数中的渐近展开是有效的，因为所有项均为 $\frac{|V|^{k+1}}{N^k}$，根据假设，当 N 趋于无穷时,一它趋于 0。对于第二项，我们注意到我们已经证明了

$$f_{\pm}(V) := \exp\left(\pm\left[\left(N-|V|+\frac{1}{2}\right)\log\left(1-\frac{|V|}{N}\right)+|V|\right]\right) = 1+O\left(\frac{|V|^2}{N}\right),$$

对于 V_1, V_2 也同理，因为它们都满足第一项的假设。再次利用阶乘的渐近展开，我们得到

$$\begin{aligned}\Gamma_N &= N^{\eta}\frac{\left(1-\frac{|V_1|}{N}\right)^{N-|V_1|+1/2}\left(1-\frac{|V_2|}{N}\right)^{N-|V_2|+1/2}}{\left(1-\frac{|V|}{N}\right)^{N-|V|+1/2}}e^{|V_1|+|V_2|-|V|}\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right),\\ &= N^{\eta}f_+(V_1)f_+(V_2)f_-(V)\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right) = N^{\eta}\left(1+O\left(\frac{|V|^2}{N}\right)\right).\end{aligned}$$

□

参考文献

[1] Benson Au、Guillaume C´ebron、AntoineDahlqvist、Franck Gabriel 和 Camille Male。大型置换不变随机矩阵在对角代数上渐近自由。《概率年刊》，49(1)，2021年1月。

[2] Zhigang Bao、L´aszl´o Erdos 和 Kevin Schnelli。随机矩阵相加的谱分布收敛速率。《数学进展》，319:251–291，2017年10月。

[3] Zhigang Bao、L´aszl´o Erdos 和 Kevin Schnelli。《随机矩阵之和在最优尺度下的局部定律》。《数学物理通讯》，349(3):947–990，2017年2月。arXiv:1509.07080 [math]。

[4] Roland Bauerschmidt、黄嘉洋和姚鸿泽。《随机正则图的局部Kesten–McKay定律》。《数学物理通讯》，369(2):523–636，2019年7月。arXiv:1609.09052 [math]。[5] Roland Bauerschmidt、Antti Knowles 和姚鸿泽。《随机正则图的局部半圆律》。《纯粹与应用数学通讯》，70(10):1898–1960，2017年10月。arXiv:1503.08702 [math]。[6] S. T. Belinschi、M. Popa 和 V. Vinnikov。《无限可分性与非交换布尔到自由的Bercovici–Pata双射》。《泛函分析杂志》，262(1):94–123，2012年1月。[7] Florent Benaych-Georges、Charles Bordenave 和 Antti Knowles。《稀疏非齐次Erdos–R´enyi图的最大特征值》。《概率年刊》，47(3)，2019年5月。[8] Sourav Chatterjee。《Haar测度的集中性及其在随机矩阵中的应用》。《泛函分析杂志》，245(2):379–389，2007年4月。[9] John B. Conway。《算子理论教程》，研究生数学丛书第21卷。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，2000年。ISSN：1065-7338。[10] L´aszl´o Erdos、Antti Knowles、姚鸿泽和尹俊。《Erdos–R´enyi图的谱统计 I：局部半圆律》。《概率年刊》，41(3B):2279–2375，2013年5月。[11] Alice Guionnet。《大随机矩阵：宏观渐近讲义：´圣弗洛尔概率论暑期学校´第´XXXVI届——2006年》，数学讲义第1957卷。施普林格，柏林、海德堡，2009年。[12] 黄嘉洋和姚鸿泽。《随机d-正则图的谱直至边缘》。《纯粹与应用数学通讯》，77(3):1635–1723，2024年。[13] Vladislav Kargin。《随机矩阵之和的集中不等式与局部定律》。《概率论与相关领域》，154(3):677–702，2012年12月。[14] Vladislav Kargin。《两个随机矩阵之和的从属关系》。《概率年刊》，43(4):2119–2150，2015年。[15] Camille Male。《大重尾Wigner矩阵与任意随机矩阵的极限分布》。《泛函分析杂志》，272(1):1–46，2017年。[16] Camille Male。《交通分布与独立性：置换不变随机矩阵与三种独立性》，美国数学会回忆录第267卷。美国数学会，2020年9月。[17] James A. Mingo 和 Roland Speicher。《自由概率与随机矩阵》，菲尔兹研究所专著第35卷。施普林格，纽约，纽约州，2017年。

[18] Alexandru Nica 和 Roland Speicher。《自由概率组合学讲义》，伦敦数学学会讲义系列第335卷。剑桥：剑桥大学出版社，2006年。[19]Mihai Popa 和 Victor Vinnikov。非交换函数与非交换自由 Lévy–Hinčin 公式。《数学进展》，236：131–157，2013年3月。[20] Sarah Timhadjelt。随机置换与双随机矩阵凸组合的谱隙，2025年6月。arXiv:2310.16434 [math].[21] Dan Voiculescu。关于某些非交换算子值随机变量的运算。载于《算子代数最新进展》，第243–275页。巴黎：法国数学会，1995年。[22] Dan Voiculescu、Kenneth Dykema 和 Alexandru Nica。《自由随机变量》，CRM专著系列第1卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1992年12月。[23] John D. Williams。算子值自由概率的解析函数理论。《纯粹与应用数学杂志》（Crelles Journal），2017(729)：119–149，2017年8月。[24] Inna Zakharevich。Wigner定律的推广。《数学物理通讯》，268：403–414，2006年12月。