arXiv:2603.02093v1 [math.GT] 2 Mar 2026

双曲有理同调球面的余恰1-形式谱隙

FRANCESCO LIN 和 MICHAEL LIPNOWSKI

Abstract. 我们讨论了一类双曲有理同调球面的构造，这些流形的余恰 1-形式谱隙具有一致下界，并且该构造非常适合进行显式计算。利用这一构造，我们给出了若干个互不相交的区间，其中包含这类谱隙的一个极限点；其中最右侧的区间为 $[0.8196,\ 0.8277]$。此外，我们还展示了一族算术例子，从而回答了 Abdurrahman-Adve-Giri-Lowe-Zung 提出的一个问题。

Introduction

双曲三维流形的余恰一形式谱近年来引起了广泛关注。它与 Bergeron 和 Venkatesh 关于同余覆盖中扭挠同调增长的猜想密切相关 [BV13]。在这一联系中，第一特征值 λ_1^*，即余恰 1-形式谱隙，发挥着关键作用。与更为经典研究的函数谱隙 λ_1相比，这一谱隙的性质有着显著不同；一个关键区别在于，它们在双曲空间 $\mathbb{H}^3$ 上的 L^2-谱的底端分别为 $\lambda_1^*(\mathbb{H}^3) = 0$ 和 $\lambda_1(\mathbb{H}^3) = 1$ 。从几何角度看， λ_1 可以用 Cheeger 常数 [Cha84], 来理解，而λ_1^* 则可以用适当的稳定等周比 [LS18, Rud23]给出下界。在[AAG+24]中，作者开始系统研究双曲有理同调球面的谱隙集合，即满足 $b_1(Y) = 0$的闭双曲三维流形；这一研究遵循了局部一致几何 [Sar23]谱的基频理论。特别地，他们构造了具有 λ_1^* 一致下界的无穷族，并详细研究了其相应的几何与拓扑性质。

本文介绍了一种构造无限族双曲有理同调球面的替代方法，其 λ_1^* 具有一致的正下界。粗略地说，我们的构造基于一个固定的映射环面 M_φ （它来自一个具有特定性质、亏格至少为二的曲面的微分同胚 φ ），该映射环面允许存在一种特殊类型的对合，从而赋予 M_φ 的循环覆盖二面体对称性。我们所考虑的流形是对这些循环覆盖取一个无不动点对合的商空间而得到的。

这种构造非常适合在双曲几何中进行显式计算，也便于直接搜寻例子。事实上，我们的构造得到了若干族流形，其谱隙序列 λ_1^* 收敛，并且我们可以给出一个包含该极限的显式且任意小的区间。在我们找到的例子中，极限最大的那个例子导出如下结论。

定理1. 存在一个无限族 $\{Y_n\}$ 双曲有理同调球面，使得极限$\lim_{n\to\infty} \lambda_1^*(Y_n) \in [0.8196, 0.8277]$。

另请参阅论文末尾的表1，其中列出了其他与此区间不相交、且各自包含一个极限点的区间。

作为背景，在 [LL22b]中，作者借鉴 [BS07]的思路，通过塞尔伯格迹公式研究余恰当1-形式谱。具体而言，对于给定的双曲有理同调球面 Y，只需输入其体积以及截至给定截断值的复长度谱（例如使用 SnapPy [CDGW]计算），便可获得关于 $\lambda_1^*(Y)$ 的明确结果。当然，这一策略无法应用于一般的无限流形族。定理1的关键在于将这些流形 Y_n 的谱理论同时与单个映射环面的谱理论联系起来；对后者可以进行一次有限计算（尽管计算可能非常耗时）。

算术性。 我们还肯定地回答了 [AAG+24] 中的问题2；该问题的动机来自 [AG25] 中关于双曲曲面的旋量谱的一项类似结果。

定理2。 存在一个由无穷多个算术双曲有理同调球构成的族，使得 λ_1^* 上存在一致下界。

定理2中的族由彼此可公度的算术三维流形构成，其中几乎所有流形都不是同余的。这些是算术有理同调球族具有 λ_1^*. 一致谱隙的必要条件。事实上，若一列算术三维流形满足以下任一条件：它们全都是同余的，或各自属于不同的可公度类，那么该序列便 Benjamini–Schramm 收敛到 $\mathbb{H}^3$ [FR19]。请注意， [AG25] 中的构造同样基于谱理论与阿贝尔覆盖之间的相互作用[1] ，而我们也将利用这一点。

与*Floer*理论的关系。 作者最初之所以希望明确理解 [LL22b] 中双曲有理同调球的余恰 1-形式谱隙，是因为它与三维流形的 Floer理论不变量有关。特别是，文中证明了若 $\lambda_1^*(Y) > 2$, 那么 Y 是一个 L-空间，即其约化单极子Floer同调 [KM07] 平凡。事实上，本文给出的构造是对 [Lin20] 中针对亏格一情形进行详细研究的构造的高亏格类比。在后者中，相关的瑟斯顿几何是 Sol几何 [Mar], , 可利用对可解群进行傅里叶分析的思想手工分析，从而给出一个几何证明，说明所有 Sol 有理同调球都是 L-空间（这一结论最初由 [BGW13] 通过拓扑方法证明）。考虑到它与Floer理论的关系，并且鉴于如此简单的构造就能给出具有显著一致谱隙的族，我们提出以下猜想：

猜想 **e.** 存在无穷多个具有 $\lambda_1^* >$ 的双曲有理同调球面 2.

目前尚不清楚，能否通过固定交换等价类中的一个序列，为该猜想找到肯定的解。尽管我们所提出的构造有多种推广方式——尤其是起始对象不必是纤维化流形——但要明确理解 λ_1^* 彼此不同交换等价类中的流形族，超出了我们策略所能达到的范围。

整数同调球面。 在 [AAG+24] 中，作者构造了无穷多个双曲整数 同调球面，其余恰 1-形式谱隙具有一致下界。我们的构造基于无不动点对合的商空间，因此绝不会得到整数同调球面：对于连通流形之间的任意二重覆盖 $Y \to Y$，Gysin 序列的这一部分

$$0 \to H^0(Y;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^0(\tilde{Y};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^0(Y;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^1(Y;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

[1]这在物理学中也称为 *Bloch wave theory* [DDJ08] 。

意味着 $H^1(Y;\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$，因此 $H_1(Y;\ \mathbb{Z})$ 非零。

若能为 λ_1^* 在一个无限的整数同调球面族中精确确定一个显式极限点，将会非常有趣，例如 [AAG+24] 中的那些球面族。Ozsv´ath 和 Szab´o 提出的一个著名猜想断言，双曲整数同调球面绝不是 L-空间。因此，他们的猜想预言，在这样的球面族中始终有 $\lambda_1^* \leqslant 2$ 。

致谢。 第一作者获得了美国国家科学基金会 DMS-2503714 项目和西蒙斯基金会 TSM-00013131 的部分资助；部分工作是在昆士兰大学作为 Raybould 访问学者期间完成的，他感谢该校的热情接待。第二作者获得了美国国家科学基金会 CAREER 项目 2338933 的部分资助。

1. 映射环面与特殊对合

设 Σ 是一个亏格至少为二的闭定向曲面，并考虑一个反定向保持的自微分同胚 φ。我们将考虑映射环面

$$M_\varphi = \mathbb{R} \times \Sigma \Big/ (t, x) \sim (t+1, \varphi(x)) \cdot$$

该流形通过将 (t, x) 映到 t 而纤维化于圆上，因此总有一个由纤维的对偶所产生的非平凡 b_1 。具体而言，这是 dt 的德拉姆上同调类，我们将引入一个对合来消去此类，方法如下。

固定 Σ 的一个对合 I （使得 $I = I^{-1}$），该对合无不动点、反定向，且满足条件

$$I \circ \varphi \circ I^{-1} = \varphi^{-1} \tag{1}$$

则映射环面 M_φ 上由下式给出的自映射

$$\iota(t, x) = (-t, I(x))$$

定义了 M_φ 上一个保定向且无不动点的对合，而类 $[dt]$ 不会下降到商流形 M_φ/ι ，因为 $\iota^*[dt] = -[dt]$。特别地，若满足 $b_1(M_\varphi) = 1$，则 M_φ/ι 是一个有理同调球。我们将称 ι 为映射环面上的特殊对合。

根据 Thurston 的著名定理（例如参见 [Mar]），当且仅当 M_φ 承认双曲度量时， φ 的映射类才是伪阿诺索夫。此外，根据几何化定理， M_φ/ι 也承认双曲度量；于是通过拉回可知， M_φ 承认一种双曲度量，使得 ι 是无不动点等距变换（另见 [Mar]）。

参见图 1，我们现在介绍一种构造微分同胚的方法，它们在亏格二曲面的情形下满足 1；为方便记号，我们也将使用字母$g_1, \ldots, g_5$代替 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$。作为固定点自由的反向定向对合的一个具体例子，我们考虑如下诱导出的对合（设曲面嵌入$\mathbb{R}^3$ 中，并作为一个标准嵌入的亏格2把手体的边界）：

$$I(x, y, z) = (-x, -y, -z).$$

此映射将曲线 g_i 映到 g_{5-i}。我们用打字机字体表示相应的正向德恩扭转（因此，a 表示沿 a的德恩扭转），并用大写字母表示其逆（即负向德恩扭转）。事实上，我们可以用一种 I-等变的方式，将定义德恩扭转 $\mathtt{g_i}$ 时的各种选择实现为实际映射（而非映射类），使得

$$I \circ \mathtt{g}_i \circ I^{-1} = \mathtt{G}_{5-i}.$$

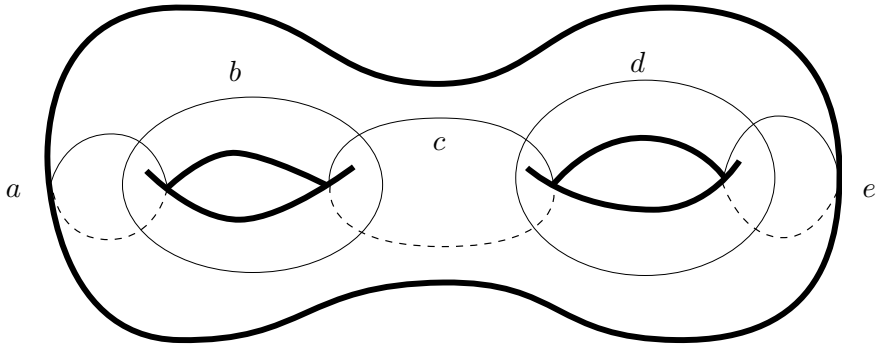


FIGURE 1. 属 2 曲面上的一组标准曲线，使得相应的德恩扭转生成映射类群 [FM12]。

这个恒等式与德恩扭转上的标准共轭作用相同 [FM12], , 逆映射出现在右侧，是因为映射 I 是反向定向的。

特别地，如果微分同胚 $\varphi = \mathtt{l}_{i_1} \cdots \mathtt{l}_{i_k}$ 对应于由字母 $\mathtt{g}_i$和 $\mathtt{G}_i$组成的一个词，则有

$$I \circ \varphi \circ I^{-1} = \mathtt{L}_{5-i_1} \cdots \mathtt{L}_{5-i_k},$$

因此取逆可得

$$\left(I \circ \varphi \circ I^{-1}\right)^{-1} = \mathtt{l}_{5-i_k} \cdots \mathtt{l}_{5-i_1}.$$

由此得到如下定义。

定义 关于 1.1。 我们称 $\mathtt{g}_i$ 和 $\mathtt{G}_i$ 中的词 $\mathtt{l}_{i_1} \cdots \mathtt{l}_{i_k}$ 是反向回文的，当且仅当

$$\mathtt{l}_{i_j} = \mathtt{l}_{5-i_{(k+1-j)}} \text{ for all } j = 1, \ldots, k.$$

例如，词 aBcDe 是反向回文的，而词 abcDe 和 aBcAe 则不是。我们的讨论直接推出以下结论。

引理 1.1。 如果$\mathtt{l}_{i_1} \cdots \mathtt{l}_{i_k}$ 是$\mathtt{g}_i$ 和$\mathtt{G}_i$ 中的反向回文词，那么相应的微分同胚 φ 满足（*1*）。

当然，随机生成反向回文词非常简单（注意，如果词的长度为奇数，那么中间的字母必定是 c 或 C）。在实际操作中，对于生成元中的任意词，我们可以使用 Twister [BHS14] 生成映射环面 M_φ的三角剖分，然后使用 SnapPy [CDGW]验证其双曲性并进行具体计算；这便提供了许多具有特殊对合 ι的双曲映射环面 M_φ 示例。

最后，虽然我们详细讨论了亏格二的情形，但这一构造很容易推广到高亏格曲面，例如，通过向 Lickorish 生成元集合中添加曲线（例如参见 [FM12，第4节.4]），使该集合具有 I-不变性；亏格三的情形见图2。

2. UNIFORM SPECTRAL GAPS

如果 φ 是对应于一个反回文词的微分同胚，那么它的所有幂φ^n 也满足条件 (1)。特别地，这些幂的映射环面 $M_{\varphi,\ n}$ 都

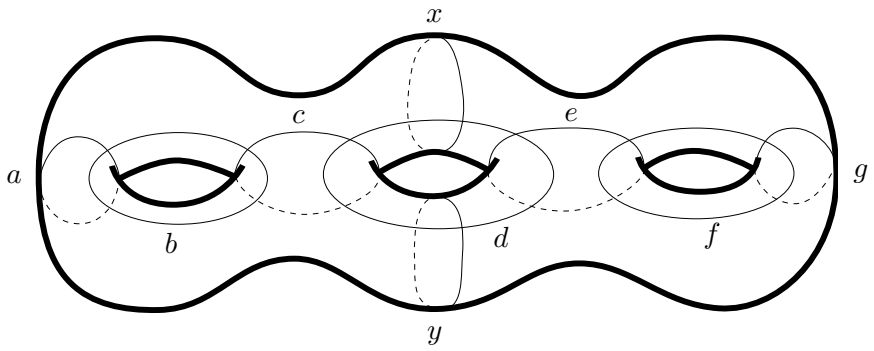


FIGURE 2. 亏格三曲面上的一个 I-不变曲线族；移去 x 后，经过合痕，我们得到 Lickorish 生成元。

具有特殊对合 ι。我们将考虑 $n \geqslant 1$ 这一族流形

$$Y_{\varphi,n} = M_{\varphi,n}/\iota.$$

首先注意，若 φ_* （在 $H_1(\Sigma)$ 上诱导的作用）没有单位根特征值，则对所有 $n \geqslant 1$，$Y_{\varphi,\ n}$ 都是有理同调球。这可直接由以下短正合列推出

$$H_1(\Sigma) \xrightarrow{\mathrm{id}-\varphi_*^n} H_1(\Sigma) \to H_1(M_{\varphi,n}) \to \mathbb{Z}$$

φ^n 的映射环面（例如参见 [Hat02]）的短正合列蕴含，所有 $M_{\varphi,\ n}$ 均具有 $b_1 = 1$。

为了得到一个 λ_1^* 一致有正下界的族，我们需要以下更强条件（文献中此前也曾考虑过类似版本，参见 [Lot97]）。

命题 2.1。 假设 φ_* 没有绝对值小于 1 的特征值。那么 $\{\lambda_1^*(Y_{\varphi,\ n})\}$一致有正下界。

因此，我们可以通过直接搜索满足这一（易于检验的）同调条件的伪阿诺索夫反向回文词，轻松构造出$\{Y_{\varphi,n}\}$ 一族 λ_1^* 具有统一下界的双曲有理同调球。通过这一搜索，我们得到如下结果。

定理*2*的证明。 考虑亏格2中与下述词相对应的映射类

$$\varphi = \texttt{CeBCdcbCDaC},$$

该词是反向回文的、伪阿诺索夫的，并且满足命题2.1中的同调条件。相应的映射环面 M_φ 的体积为 ≈ 4.4153，且 $H_1 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}/5$。要验证相应双曲有理同调球族的算术性，我们只需检验 M_φ 的算术性（关于算术性的定义，以及根据四元数代数的性质和迹的整性对算术性的刻画，参见 [MR03，第8章和 10] ）。利用SnapPy，可以将 M_φ 识别为Hodgson-Weeks普查中名为`s861(3,1)`的流形。经确定，后者具有算术性，其四元数代数的算术数据如下

域最小多项式（根）：`x^3 - x^2 + x - 2` (2) 实分歧：`[1]`

有限分歧： [[2, [0, 1, 0]~, 1, 1, [1, 1, 1]~]]整数迹/算术：
1/1
在 [CGHN00] 中使用计算机程序 Snap。 □

事实上，我们将证明命题 2.1 的一个更强版本，这对于定理1背后的显式计算是必要的。考虑一个扭曲同态

$$\psi : \pi_1(M_\varphi) \to H_1(M_\varphi) \to H_1(M_\varphi)/\mathrm{tors} \equiv \mathbb{Z} \to U(1), \tag{2}$$

与之对应的是一个带平坦 $U(1)$-联络$L_\psi \to M_\varphi$ 的拓扑平凡埃尔米特线丛。当然，这个同态由 $1 \in \mathbb{Z}$ 的取值确定；因此，我们也记作 $\psi \in U(1)$。

于是我们可以考虑扭曲霍奇拉普拉斯算子

$$\Delta_\psi : \Omega^1(L_\psi) \to \Omega^1(L_\psi)$$

on L_ψ值 1-形式。在这一设置下，霍奇定理给出了如下同一

$$\ker\Delta_\psi = H^1(M_\varphi; L_\psi),$$

带有扭曲系数的第一上同调。假设 φ_* 没有绝对值为 1 的特征值，则只要 $\psi \neq 1$，后一个群就是平凡的；例如参见[DK01，第 5]章。因此，对于 $\psi \neq 1$，我们有恰当和余恰当（L_ψ-值）1-形式的分解

$$\Omega^1(L_\psi) = d\Omega^0(L_\psi) \oplus d^*\Omega^2(L_\psi), \tag{3}$$

而对于 $\psi = 1$ ，我们有通常的（非扭曲、复值）1-形式的霍奇分解

$$\Omega^1 = d\Omega^0 \oplus \mathbb{C} \oplus d^*\Omega^2 \tag{4}$$

在 M_φ 上，中间的直和项对应于调和1-形式。

定义 2.1。 我们将 $\delta(\varphi) \geqslant 0$ 定义为 $\psi \in U(1)$ 变化时， Δ_ψ 作用在余恰当1-形式上的谱隙的下确界。

命题 2.1 的更强版本如下。

命题 2.2。 在命题 *2.1* 的设定下，量 $\delta(\varphi)$ 实际上达到最小值，并且严格为正，且

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1^*(Y_{\varphi,n}) = \inf\{\lambda_1^*(Y_{\varphi,n})\} = \delta(\varphi) > 0.$$

证明。我们研究循环覆盖 $M_{\varphi,\ n}$ of M_φ的对称性。条件 (1) 意味着 $M_{\varphi,\ n}$ 存在一个由 $2n$ 个元素组成的二面体群的等距作用

$$\mathsf{D}_n = \left\{ r, s \mid r^n = 1, s^2 = 1, srs = r^{-1} \right\},$$

其中 s 对应于特殊对合 ι，而 r 对应于由$\mathbb{Z}/n$给出的覆盖作用。考察后者与余闭1-形式的特征空间分解之间的相互作用，我们得到如下识别（保持扭曲霍奇拉普拉斯算子的作用）

$$d^*\Omega^2(M_{\varphi,n}) = \bigoplus_{\zeta^n=1} d^*\Omega^2(L_\zeta) \tag{5}$$

基流形 M_φ上的扭曲余恰当1-形式；让我们先分析后者。

Δ_ψ 在 $\Omega^1(L_\psi)$ 上的谱随扭曲参数 $\psi \in U(1)$ [Kat95] 连续变化。事实上，直和分解 (3) 表明（例如通过极小极大刻画），Δ_ψ 在恰当和余恰当（扭曲）1-形式上的谱也都随扭曲参数 $\psi \in U(1)$ 连续变化，当 $\psi \neq 1$ 时尤其如此。关键的观察是，未扭曲拉普拉斯算子的零特征值（对应于 (4) 中的 $b_1(M_\varphi) = 1$ ）在扭曲参数 ψ 连续变形至接近 $1 \in U(1)$ 时，将对应于恰当1-形式上的一个极小特征值，而非余恰当1-形式上的特征值。例如，可以注意到，(5) 的类似分解也适用于 M_φ 上的恰当1-形式；而当 n 非常大时，循环覆盖，n 在函数上会有非常小的谱隙（因此在恰当1-形式上也是如此），因为其 Cheeger 常数 [Cha84] 会非常小。

这一论证表明，对于小开邻域 O 中的 ψ ，Δ_ψ 在余恰当1-形式上的谱隙下确界严格为正。最后，由于谱的连续性，且根据 (3)，0 不属于 Δ_ψ 的谱，$U(1)\backslash O$ 这一紧集上 ψ 的该谱隙下确界也严格为正。事实上，谱的连续性还意味着，$U(1)$ 上的下确界 $\delta(\varphi) > 0$ 可以取到。

为完成证明，我们考虑二面体群 D_n 在 $M_{\varphi,n}$ 上的完整作用。同样，D_n 自然作用于特征空间；此外，能够下降到商空间$Y_{\varphi,n} = M_{\varphi,n}/\iota$ 的特征形式恰好是被 s 固定的那些；由此可直接推出

$$\lambda_1^*(Y_{\varphi,n}) \geqslant \lambda_1^*(M_{\varphi,n}) \text{ for all } n.$$

设 α 是一个特征值为 λ 的余恰当1-形式，定义在$M_{\varphi,n}$ 上，其中 r 的作用为一个 n次单位根 $\zeta \neq \pm 1$。这意味着，在分解式 (5) 下，α 对应于直和项 $d^*\Omega^2(L_\zeta)$中的一个 Δ_ζ-特征形式。于是，$s(\alpha)$ 也是一个特征值为 λ的余恰当1-形式，并且 r 在其上的作用为 ζ^{-1}。因此，$s(\alpha)$ 不同于 $-\alpha$，且 $s(\alpha) + \alpha$ 是定义在$M_{\varphi,n}$上的一个非零 s-不变余恰当1-形式，特征值为 λ ，所以 λ 属于$Y_{\varphi,n}$的余恰一形式谱。由分解式 (5) 和谱的连续性，结论得证。□

3. Explicit intervals

根据命题 2.2，我们可以通过显式研究与映射环面 M_φ （其具有 $b_1 = 1$）相关的量 $\delta(\varphi) > 0$ ，确定包含 $\lim_{n\to\infty}\lambda_1^*(Y_{\varphi,n})$ 的显式区间，其中 φ 为上述类型（伪阿诺索夫、反向回文，且 φ_* 没有绝对值为 1 的特征值）。关键工具是下述适用于 M_φ上扭曲余恰 1-形式的塞尔伯格迹公式版本；对于每个偶的（足够正则的）紧支撑函数 H 以及如式 (2) 中的扭曲同态 ψ ，该公式均成立：

$$\frac{1}{2}\sum \widehat{H}\left(\sqrt{\lambda_{\psi,j}^*}\right) = \frac{\mathrm{vol}(M_\varphi)}{2\pi}\cdot(H(0) - H''(0)) + \sum \ell(\gamma_0)\frac{\cos(\mathrm{hol}(\gamma))\cdot\cos(\psi(\gamma))}{|1 - e^{\mathbb{C}\ell(\gamma)}||1 - e^{-\mathbb{C}\ell(\gamma)}|}H(\ell(\gamma)). \tag{6}$$

关于更详细的讨论和规范化，请参阅我们之前的工作 [LL22b、LL25a]；在左侧（谱侧），我们对余恰当1-形式谱求和

$$0 < \lambda_{\psi,1}^* \leqslant \lambda_{\psi,2}^* \leqslant \lambda_{\psi,3}^* \leqslant \cdots$$

$\widehat{\ }$的 Δ_ψ （按重数计），而 H 是 H的傅里叶变换；右侧（几何侧）的求和遍历闭测地线 γ，其中 $\mathbb{C}\ell(\gamma)$ 表示其复长度，γ_0 是 γ 的一个倍数本原测地线。该公式的证明直接改编自 [LL22b] 中关于非扭曲余闭1-形式的版本，以及 [LL25a]中关于扭曲旋量的版本。

注3.1. 一个技术要点是， [LL22b], 中的前一个公式，其谱侧包含额外项$\frac{1}{2}(b_1(Y)-1)$，其中第一项对应于余闭1-形式上的零特征值，第二项则是平凡表示的贡献。在我们的设定中，$b_1(Y)=1$，并且只要考虑非平凡扭曲，平凡表示的贡献就会消失。

按照 [LL22b], 的做法，我们将 [BS07] 的傅里叶优化思路应用于当前情形。以给定截断值 $R>0$ 以内的 M_φ 长度谱（例如，可通过 SnapPy 使用 Twister 提供的三角剖分计算得到），以及有关测地线的同调信息（按 [LL22a] 中的方法计算）作为输入，以确定扭曲同态，由此得到一族显式函数

$$J_\psi : \mathbb{R}^{\geqslant 0} \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$$

以 $\psi \in U(1)$ 为参数，且具有以下关键性质：

$$J_\psi(\sqrt{\lambda^*}) \geqslant \mu \quad \text{if } \lambda^* \text{ is an eigenvalue of } \Delta_\psi \text{ of multiplicity } \mu.$$

在条件良好时，函数 $\{J_\psi\}_{\psi\in U(1)}$ 因此使我们能够排除某些区间包含 Δ_ψ 的余恰1-形式特征值，并为量 $\delta(\varphi)$.[2] 提供非平凡的显式下界。例如，如果对所有 $t \in [0,\ \sqrt{\delta}]$ 以及所有 $\psi \in U(1),$ 均有 $J_\psi(t)<1$，那么每个 Δ_ψ 都有余恰 1-形式谱隙 $\geqslant \delta.$ 。反过来，也可以将公式 (6) 与 [LL22a] 中使用的测试函数等结合起来证明（同样是在条件良好时），某些区间实际上包含特征值。

定理1中的这一族，是我们在亏格2、3和4的映射类中搜索所得、具有最大一致余恰 1-形式谱隙的例子。它源自亏格2中与之对应的映射类

$$\varphi = \texttt{bcbeccadcd},$$

其映射环面 M_φ 的体积为 ≈ 6.0896 且 $H_1 = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}/13$。 M_φ 的一个关键特征使得我们能够进行非常精确的计算：它是可镜像的，即存在一个反定向等距变换，这一点已通过 SnapPy 验证。特别地，（在可能与我们的特殊对合 ι复合之后）它存在一个在 $H^1(M_\varphi$上作用为恒等的反定向等距变换；$\mathbb{R}) = \mathbb{R}$。因此，对于所有 $\psi \in U(1)$， Δ_ψ 的余恰当1-形式特征值的重数均为偶数；这一点可通过考察该等距变换在算子 $*d$的特征空间上的作用看出（该算子在余恰当1-形式上平方为 Δ_ψ ）。

利用这些信息，将上述方法应用于截至截断值$R=8$ 的长度谱，可以得出

$$\sqrt{\delta(\varphi)} \in [0.90535, 0.90975],$$

以及 由此即可得出结论（另见图 3，其中绘出了 J_ψ 在某一特定参数下的图像）。

对于满足我们假设的一般微分同胚 φ ，函数族 $\{J_\psi\}_{\psi\in U(1)}$ 的图像不会像图 3 中那样呈现定位得如此精确的峰；事实上，在大多数情况下，它根本不会出现峰。尤其是在 Δ_ψ 具有彼此不同但相近的特征值时，情况更是如此。粗略地说，根据韦伊定律，低位特征值 $\sqrt{\lambda^*}$ 的平方根预期会大致按 $\varepsilon := \mathrm{vol}(M_\varphi)^{-1}$ 的比例彼此间隔。要通过迹公式区分它们

[2]事实上，我们首先在群环 $\mathbb{C}[H_1(Y$中进行“形式上的”运算；$\mathbb{Z})]$ 正如 [LL25b], 中那样，这使我们能够高效地对不同的 ψ 进行计算。

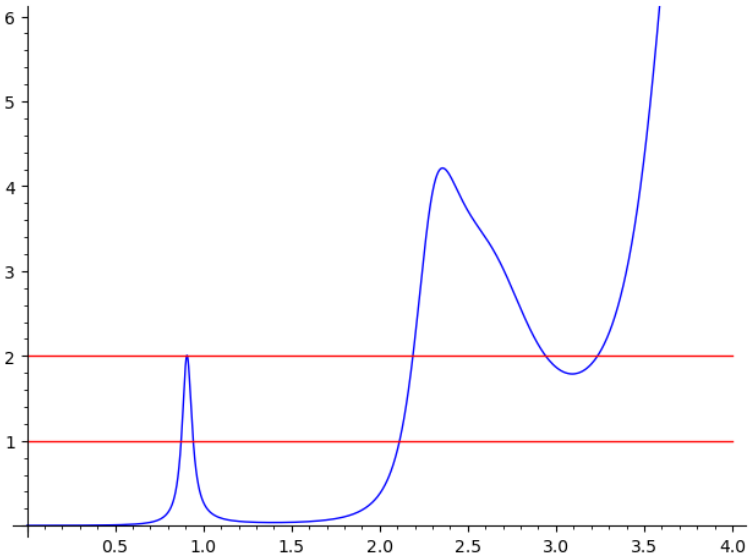


FIGURE 3. J_ψ $\sqrt{\lambda^*}$ ψ = 对于一个扭曲参数（其值接近使 的实际值实现的参数），绘制的图（横坐标为 ）。这个非常局部化的峰对应于扭曲Hodge拉普拉斯算子 Δ_ψ 的一个重数为二的特征值（的平方根）。 $e^{2\pi i\cdot 0.3}\in U(1)$ $\delta(\varphi)$

$\widehat{\ }$，就需要使用测试函数 H，使其傅里叶变换 $\widehat{H}$ 在 ε 上局域化。根据不确定性原理，这意味着 $\widehat{H}$ 至少要在 ε^{-1} 的尺度上弥散。遗憾的是，要在如此弥散的尺度 $R=\varepsilon^{-1}$ 上计算迹公式的几何侧，根据素测地线定理 [Cha84], ，需要计算数量约为 $e^{2R}/2R$ 的素测地线的长度，这是一项难度呈指数级增长的任务。

尽管存在这些计算上的挑战，我们还是在 λ_1^* 族中找到了另外三个较窄的区间，其中包含极限点。这三个族中λ_1^* 的极限所在的窗口彼此互不相交，并且也都与定理1中的窗口不相交。详情见表1；亏格3曲面的约定见图2。

区间	亏格	映射类	$\mathrm{vol}(M_\varphi)$	$\mathrm{tors}H_1(M_\varphi)$	可镜像
[0.1705,0.2632]	2	dcbaBBcDDedcb	5.9929	$\mathbb{Z}/15$	N
[0.4448,0.4803]	2	DaCaEabcdeAeCeB	5.6664	$\mathbb{Z}/5$	N
[0.6115,0.7090]	3	EEBCFDfGCEAbDBEFCC	8.2339	$\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/10$	Y

TABLE 1. 更多区间，每个区间都包含 λ_1^* 的一个极限点。计算采用的长度谱截断值为 $R=7.5$。

REFERENCES

[AAG+24] Amina Abdurrahman、Anshul Adve、Vikram Giri、Ben Lowe与Jonathan Zung。余闭1-形式具有一致谱隙的双曲3-流形。 *preprint*，2024年。[AG25] Anshul Adve与Vikram Giri。双曲曲面上旋量的谱隙。 *preprint*，2025年。[BGW13] Steven Boyer、Cameron McA. Gordon与Liam Watson。关于L-空间与左可序基本群。 *Math. Ann.*，356(4):1213–1245，2013年。

[BHS14] Mark Bell、Tracy Hall与Saul Schleimer。Twister（计算机软件）。https://bitbucket.org/ Mark_Bell/twister/，2008–2014。版本2.4.1。[BS07] Andrew R. Booker与Andreas Str¨ombergsson。利用迹公式与Selberg特征值猜想进行的数值计算。 *J. Reine Angew. Math.*，607:113–161，2007。[BV13] Nicolas Bergeron与Akshay Venkatesh。算术群挠同调的渐近增长。 *J. Inst. Math. Jussieu*，12(2):391–447，2013年。[CDGW] Marc Culler、Nathan Dunfield、Matthias Goerner与Jeff Weeks。Snappy，一个用于研究三维流形几何与拓扑的计算机程序。[CGHN00] David Coulson、Oliver A. Goodman、Craig D. Hodgson与Walter D. Neumann。三维流形算术不变量的计算。 *Experiment. Math.*，9(1):127–152，2000。[Cha84] Isaac Chavel。 *Eigenvalues in Riemannian geometry*， *Pure and Applied Mathematics*第115卷。学术出版社，佛罗里达州奥兰多，1984。含Burton Randol所撰一章，并附Jozef Dodziuk的附录。[DDJ08] M. S. Dresselhaus、G. Dresselhaus与A. Jorio。 *Group theory*。施普林格出版社，柏林，2008。应用于凝聚态物质物理学。[DK01] James F. Davis与Paul Kirk。 *Lecture notes in algebraic topology* 35 *Graduate Studies*，第 卷。 *in Mathematics* 2001 美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，。[FM12] Benson Farb与Dan Margalit。 *A primer on mapping class groups* 49 *Princeton Math-*，第 卷。 *ematical Series* 2012 普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，。[FR19] Mikolaj Fraczyk与Jean Raimbault。志村曲线与算术三维轨形的Betti数。 *Algebra Number Theory*，13(10):2359–2382，2019。[Hat02] Allen Hatcher。 *Algebraic topology*。剑桥大学出版社，剑桥，2002。[Kat95] Tosio Kato。 *Perturbation theory for linear operators*。数学经典。施普林格出版社，柏林，1995。1980年版重印。[KM07] Peter Kronheimer与Tomasz Mrowka。 *Monopoles and three-manifolds* 10 *New Math-*，第 卷。 *ematical Monographs* 2007 剑桥大学出版社，剑桥，。[Lin20] Francesco Lin。单极Floer同调与Solv几何。 *Ann. H. Lebesgue*，3:1117–1131，2020。[LL22a] Francesco Lin与Michael Lipnowski。单极Floer同调、特征形式重数与Seifert-Weber十二面体空间。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(9):6540–6560，2022。[LL22b] Francesco Lin与Michael Lipnowski。Seiberg-Witten方程与双曲三维流形的长度谱。 *J. Amer. Math. Soc.*，35(1):233–293，2022。[LL25a] Francesco Lin与Michael Lipnowski。双曲三维流形的闭测地线与Frøyshov不变量。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*，27(10):4201–4281，2025年。[LL25b] Francesco Lin与Michael Lipnowski。双曲3-流形的Dirac谱流与Floer理论。 *preprint*，2025年。[Lot97] J. Lott。几何无限双曲三维流形的 L^2-上同调。 *Geom. Funct. Anal.*，7 1 81 119，1997 ( ): – 。[LS18] Michael Lipnowski与Mark Stern。双曲流形上最小1-形式拉普拉斯算子特征值的几何。 *Geom. Funct. Anal.*，28(6):1717–1755，2018。[Mar] Bruno Martelli。几何拓扑导论。[MR03] Colin Maclachlan与Alan W. Reid。 *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*， *Graduate Texts in Mathematics*第219卷。施普林格出版社，纽约，2003。[Rud23] Cameron Gates Rudd。双曲流形的稳定等周比与Hodge拉普拉斯算子。*J. Topol.*，16(2):588–633，2023。[Sar23] Peter Sarnak。指定局部一致几何的谱。 *Berkeley Chern Lectures*，2023年。

Department of Mathematics, Columbia University
Email address: flin@math.columbia.edu

Department of Mathematics, Ohio State University
Email address: michaellipnowski@gmail.com