arXiv:2603.02107v1 [math.DG] 2 Mar 2026

G对偶平面中悬链线的推广

´MUHITTIN EVREN AYDIN 和 RAFAEL LOPEZ

Abstract. 本文研究对偶平面 $\mathbb{D}^2$ 中可容许曲线类中的经典悬链线的对偶类比。我们将 $\mathbb{D}^2$ 中的 α-悬链线定义为势能泛函的驻点，其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ 为实参数。我们推导出相应的欧拉-拉格朗日方程，并针对 α 的特定取值，求得这些曲线的显式方程。此外，我们还根据 α-悬链线的曲率和单位法向量场，建立了其几何刻画。

1. Introduction and Formulation of The Problem

描述悬挂在重力作用下、两端固定的不可伸长链条形状，是数理物理中的经典问题之一。其解称为悬链线，是胡克、莱布尼茨、惠更斯、伯努利等人在 17 世纪末各自独立求得的。

从变分观点来看，悬链线的标准表达式如下。设 (x, y) 是欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 中的典范坐标，并考虑 $\mathbb{R}^2$中的曲线 $y(x)$， $x \in [a, b]$。在上半平面 $y > 0$中，链条的形状是连接给定端点的所有曲线中重力势能最小的那条曲线。这条曲线就是悬链线，其表达式为

$$y(x) = \frac{1}{c}\cosh(cx + m), \quad c, m \in \mathbb{R}, c > 0.$$

其他各种环境空间中的悬链线推广可见 [4, 5, 6, 9,10, 11]。

在本文中，我们将悬链线的概念推广到对偶平面 $\mathbb{D}^2$。回顾一下，对偶数的研究由威廉·金登·克利福德（1845—1879年） [3]发起。对偶数是形如 $a + \varepsilon b$的表达式，其中 a， $b \in \mathbb{R}$ 分别称为其实部和对偶部，而 ε 是满足$\varepsilon^2 = 0$ 且 $\varepsilon \neq 0$的幂零元。n维对偶空间 $\mathbb{D}^n = \mathbb{R}^n \times \varepsilon\mathbb{R}^n$ 是带单位元 [14]的对偶数交换环 $\mathbb{D}$ 上的一个模。

2020 数学主题分类。53A04;53A17; 53C42.关键词与短语。悬链线，
曲线，对偶平面。

设 $\mathbb{R}^3$ 为欧几里得空间。爱德华·施图迪（1862—1930年） [13] 建立了 $\mathbb{R}^3$ 中的直线与 $\mathbb{D}^3$中的对偶向量之间的对应关系，从而推动了对曲线运动学的系统研究。这一对应关系为利用对偶数描述刚体运动和螺旋位移提供了代数基础，并由此开启了空间运动学的系统发展。

用 $\langle , \rangle$ 表示空间 $\mathbb{R}^n$ 的欧几里得度量，用 $|\cdot|$ 表示相应的范数。对于 $\mathbb{D}^n$ 上的对偶度量，我们也采用相同的记号 $\langle , \rangle$ ；该度量是在条件 $\varepsilon^2 = 0$下将欧几里得度量延拓得到的。设 $\mathbf{u} \in \mathbb{D}^n$ 是一个形如 $\vec{u} + \varepsilon\vec{v}$的对偶向量，其中 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ 且 $\vec{u} \neq 0$。$\mathbf{u}$ 的对偶范数定义为$|\mathbf{u}| = |\vec{u}| + \varepsilon \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}|}$ （见 [14]）。

考虑由 $\gamma(t) = \psi(t) + \varepsilon\phi(t)$ 给出的实参数曲线 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{D}^n$ ，其中 $\psi, \phi : I \to \mathbb{R}^n$ 是光滑曲线。关于实参数 t ， γ 的导数为 $\gamma'(t) = \psi'(t) + \varepsilon\phi'(t)$（见 [1, 8]）。

如果 $\gamma = \gamma(t)$ 的实部 $\mathrm{Re}(\gamma) = \psi$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一条正则曲线，且实部与对偶部的速度彼此正交，即 $\langle \psi', \phi' \rangle = 0$ 在 $I \subset \mathbb{R}$ 上成立，则称 $\gamma = \gamma(t)$ 可容许。对于每条可容许曲线，均有 $|\gamma'| = |\psi'|$ ，因此范数 $|\gamma'|$ 始终为实值。

最近，第二作者 [12] 证明，曲线 $\gamma(t)$ 可容许，当且仅当它可以通过弧长重新参数化，即可以用满足$|\gamma'(s)| = 1$的实变量 s 进行参数化，其中该关系对所有 s 均成立。请注意，在欧几里得情形下，曲线的正则性是存在弧长重参数化的必要且充分条件。相比之下，在对偶情形下，正则性仍是必要条件，但不再充分：对偶曲线还必须满足其实部与对偶部速度之间的正交条件。

关于对偶情形下可容许曲线的存在性定理已在 [12],中建立，同时还得到了常曲率和挠率曲线的完整分类。另见 [2]。

本文旨在将悬链线的概念推广到 $\mathbb{D}^2$中的可容许曲线类。为此，设 $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ 为一个固定的单位向量，并考虑半平面

$$\mathbb{R}^2_+(\vec{u}) = \{p \in \mathbb{R}^2 : \langle p, \vec{u} \rangle > 0\}.$$

记$\mathbf{u} \in \mathbb{D}^2$ 为一个形如$\mathbf{u} = \vec{u} + \varepsilon\vec{v}$, 的固定单位对偶向量，其中 $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$。考虑一条光滑可容许曲线

$$\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{D}^2, \quad \gamma(t) = \psi(t) + \varepsilon\phi(t),$$

其中 $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}^2_+(\vec{u})$, 且 $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$。我们将 γ 沿$\mathbf{u}$ 方向的势能 α-能量定义为如下的一阶泛函：

$$\mathcal{E}[\gamma] = \int_a^b \langle \mathbf{u}, \gamma(t) \rangle^\alpha |\gamma'(t)| \, dt, \tag{1}$$

其中 α 是实常数。被积函数展开为

$$\langle \mathbf{u}, \gamma(t)\rangle^{\alpha} = \langle \vec{u}, \psi(t)\rangle^{\alpha} + \varepsilon\alpha(\langle \vec{u}, \phi(t)\rangle + \langle \vec{v}, \psi(t)\rangle)\langle \vec{u}, \psi(t)\rangle^{\alpha-1}. \tag{2}$$

由于 $\langle \vec{u},\ \psi(t)\rangle > 0$ 对所有 $t \in [a,b]$均成立，因此表达式 $\langle \mathbf{u}\ \gamma(t)\rangle^{\alpha}$ 定义良好，泛函 $\mathcal{E}[\gamma]$也定义良好。
因此，我们引入以下定义：

定义 1.1. 设 $\alpha \in \mathbb{R}$。可容许曲线 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{D}^2$ 若为式（1）中给出的能量 $\mathcal{E}[\gamma]$ 的驻点，则称为 $\mathbb{D}^2$ 中的 α-悬链线。特别地，当 $\alpha = 1$时，曲线 γ 称为 $\mathbb{D}^2$中的悬链线。

本文的组织结构如下。第2节中，我们将能量的一阶变分拆分为实部和对偶部，以刻画 $\mathbb{D}^2$ 中的 α-悬链线（命题 2.1）。随后，我们推导相应的欧拉-拉格朗日方程（命题2.2），并针对特定情形 $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$ 给出明确的分类（命题 2.3–2.5）。我们还引入反向悬链线的概念，并证明它可以直接由其欧几里得对应物自然地构造出 $\mathbb{D}^2$ 中的 α-悬链线（定理2.7）。最后，在第3节中，我们建立 $\mathbb{D}^2$中 α-悬链线的几何刻画，将其对偶曲率与对偶法向量联系起来（定理 3.2），这与经典欧几里得情形形成了优美的对应。

2. The Euler-Lagrange equation and examples

本节计算式 (1) 中定义的能量的一阶变分。为此，设 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{D}^2$ 是一条可容许曲线，其实部和对偶部分分别为

$$\psi : [a,b] \to \mathbb{R}^2_+(\vec{u}), \quad \phi : [a,b] \to \mathbb{R}^2.$$

记 $\mathbf{u} = \vec{u} + \varepsilon\vec{v}$ 为单位对偶向量，其中 $|\vec{u}| = 1$ 且 $\langle \vec{u},\ \vec{v}\rangle = 0$。由于 γ 可容许，因此对所有 t，都有 $|\gamma'(t)| = |\psi'(t)|$ 。
我们先说明如何得到式 (2)。在式 (2) 的左侧，项 $\langle \mathbf{u}\ \gamma(t)\rangle$ 展开为

$$\langle \mathbf{u}, \gamma(t)\rangle = \langle \vec{u}, \psi(t)\rangle + \varepsilon(\langle \vec{u}, \phi(t)\rangle + \langle \vec{v}, \psi(t)\rangle).$$

设 $\mathbf{x} = x + \varepsilon y \in U \subset \mathbb{D}$ 为对偶变量，$f : U \to \mathbb{D}$ 为光滑函数，$f = f(\mathbf{x})$。那么，其在对偶意义下的一阶泰勒展开为 $f(\mathbf{x}) = f(x) + \varepsilon y f'(x)$。现在，将 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\alpha}$ 视为幂函数，并设

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{u}, \gamma(t)\rangle, \quad x = \langle \vec{u}, \psi(t)\rangle, \quad y = \langle \vec{u}, \phi(t)\rangle + \langle \vec{v}, \psi(t)\rangle,$$

我们立即得到式（2）。

接下来，能量（1）可写为

$$\mathcal{E}[\gamma] = \mathcal{E}_0[\psi] + \varepsilon\mathcal{E}_1[\psi, \phi],$$

其中

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_0[\psi] = \textstyle\int_a^b \langle \vec{u}, \psi(t)\rangle^\alpha |\psi'(t)|dt, \\ &\mathcal{E}_1[\psi, \phi] = \alpha \textstyle\int_a^b (\langle \vec{u}, \phi(t)\rangle + \langle \vec{v}, \psi(t)\rangle)\langle \vec{u}, \psi(t)\rangle^{\alpha-1}|\psi'(t)|dt. \end{aligned} \tag{3}$$

I在下面的命题中，我们给出了 α-悬链线在 $\mathbb{D}^2$.

命题 2.1。 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$。可容许曲线 $\gamma\colon\ [a, b] \to \mathbb{D}^2$, $\gamma = \psi + \varepsilon\phi$ 是 α-悬链线，当且仅当 ψ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的 α-悬链线，并且 $\mathcal{E}_1'[\psi, \phi] = 0$。

证明。 设 $\rho \in (-\delta,\ \delta) \subset \mathbb{R}$。考虑由 $\gamma_\rho\colon\ [a, b] \to \mathbb{D}^2$ 给出的光滑变分

$$\gamma_\rho(t) = \psi_\rho(t) + \varepsilon\phi_\rho(t), \qquad \gamma_0 = \gamma.$$

于是，我们有

$$\mathcal{E}[\gamma_\rho] = \mathcal{E}_0[\psi_\rho] + \varepsilon\mathcal{E}_1[\psi_\rho, \phi_\rho].$$

$\mathcal{E}$ 在 γ 处的一阶变分定义为

$$\mathcal{E}'[\gamma] = \frac{d}{d\rho}\bigg|_{\rho=0} \mathcal{E}[\gamma_\rho].$$

由于对偶值泛函关于实参数的微分是线性的，我们得到

$$\mathcal{E}'[\gamma] = \mathcal{E}_0'[\psi] + \varepsilon\,\mathcal{E}_1'[\psi, \phi]. \tag{4}$$

因此，若 γ是 $\mathcal{E}[\gamma]$的驻点，则 $\mathcal{E}'[\gamma] = 0$，这意味着 $\mathcal{E}_0'[\psi] = 0$与 $\mathcal{E}_1'[\psi, \phi] = 0$。换言之，$\gamma(t)$是 $\mathbb{D}^2$ 中的 α-悬链线，当且仅当

$$\mathcal{E}_0'[\psi] = 0, \quad \mathcal{E}_1'[\psi, \phi] = 0. \tag{5}$$

已知能量 $\mathcal{E}_0[\psi]$ 的驻点对应于 $\mathbb{R}^2$ 中的 α-悬链线（见 [7]）。

□

接下来，我们推导与式 (3) 中给出的能量 $\mathcal{E}_1$ 相对应的欧拉-拉格朗日方程。经过适当的坐标变换后，可以假设单位对偶向量 **u**给定为

$$\mathbf{u} = \vec{u} + \varepsilon\vec{v}, \quad \vec{u} = (0, 1), \vec{v} = (v, 0).$$

设 $\gamma(x) \subset \mathbb{D}^2, x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ 是一条写成如下形式的可容许曲线

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \psi(x) + \varepsilon\phi(x), \\ \psi(x) &= (x, y(x)), \\ \phi(x) &= (w(x), z(x)), \end{aligned} \tag{6}$$

其中 w, y, z 是区间 $[a,b]$上的光滑函数。

我们强调两点。首先，函数 w 不能是常数。事实上，若 $\phi(x) = (w_0, z(x))$, $w_0 \in \mathbb{R}$，则 ψ 与 ϕ之间的正交条件给出 $y'(x)z'(x) = 0$ 在 $[a,b]$上。若 $z(x)$为常数，则 ϕ 会退化为一个点，而这并非我们的情形。因此 $z'(x) \neq 0$，进而 $y'(x) = 0$，这就产生了矛盾。

其次，即使 $w(x)$不是常数，我们也不能将 ϕ 重新参数化为 $\phi(x) = (x, z(x))$，因为这将意味着对曲线 ψ进行重新参数化，而它在 (6) 中已经固定。

用坐标函数表示，曲线ψ 与 ϕ之间的正交条件等价于

$$w' + y'z' = 0. \tag{7}$$

如果 $\psi(x)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条 α-悬链线，那么函数 $y(x)$ 满足

$$\frac{y''}{1+y'^2} = \frac{\alpha}{y}. \tag{8}$$

解这个微分方程可得

$$1 + y'^2 = c^2 y^{2\alpha}, \tag{9}$$

其中 $c > 0$ 是一个实常数。通过求导可得

$$y'' = \alpha c^2 y^{2\alpha-1}. \tag{10}$$

在下一个结果中，我们将刻画 $\mathbb{D}^2$ 中所有的 α-悬链线。

命题2.2. $\mathbb{D}^2$ 中由(6) 给出的曲线 γ 是一个 α-悬链线，当且仅当$\mathrm{Re}(\gamma) = \psi$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中满足(8)的一个 α-悬链线，并且

$$z'' + \alpha\frac{y'}{y}(z' + v) + \alpha\frac{z + vx}{y^2} = 0. \tag{11}$$

证明. 根据命题 2.1， γ 的实部是 $\mathbb{R}^2$中的一条 α-悬链线。现在我们计算 $\mathcal{E}_1$的欧拉-拉格朗日方程。拉格朗日函数为

$$L(x,y,w,z,y',w',z') = \alpha(z+vx)y^{\alpha-1}\sqrt{1+y'^2} + \lambda(w'+y'z'),$$

其中 $\lambda = \lambda(x)$ 是一个拉格朗日乘子。接下来，我们用标准方法计算相应的欧拉-拉格朗日方程，得到以下方程组：

$$\begin{cases} 0 = L_y - \dfrac{d}{dx}(L_{y'}), \\ 0 = L_w - \dfrac{d}{dx}(L_{w'}), \\ 0 = L_z - \dfrac{d}{dx}(L_{z'}). \end{cases} \tag{12}$$

(12) 中的每个方程分别化简为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\lambda z' + \alpha(z+vx)y^{\alpha-1}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}) &= \alpha(\alpha-1)(z+vx)y^{\alpha-2}\sqrt{1+y'^2} \\ &= c\alpha(\alpha-1)(z+vx)y^{2\alpha-2}, \\ \frac{d}{dx}\lambda &= 0, \\ \frac{d}{dx}(\lambda y') &= \alpha y^{\alpha-1}\sqrt{1+y'^2} = \alpha c y^{2\alpha-1}. \end{aligned} \tag{13}$$

(13) 中的第二个方程表明， λ 是一个常函数。第三个方程为 $\lambda y'' = \alpha c y^{2\alpha-1}$。将其与 (10) 比较，我们推得 $\lambda = \frac{1}{c}$。接下来，利用 (8)，(13) 中的第一个方程变为

$$\lambda z'' + \alpha(z+vx)y^{\alpha-2}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} + \alpha(z'+v)y^{\alpha-1}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0.$$

最后，将 (9) 与 $\lambda = \frac{1}{c}$ 一起应用，得到 (11)。

□

我们描述特定情形 $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$ 下的 α-悬链线；在这些情形下，常微分方程 (7)、(8) 和 (11) 都有显式解。对于每种情形，我们的论证如下：先求解 (8)，得到 $y(x)$；再将该表达式及其导数代入 (11)，确定 $z(x)$；最后由 (7) 求得 $w(x)$。

情形 $\alpha = 0$ 是显然的。

命题 2.3. 由(6) 给出的 $\mathbb{D}^2$ 中的曲线 γ 是一条0-悬链线，当且仅当

$$\begin{aligned} y(x) &= \pm\sqrt{c^2-1}x + m, \\ w(x) &= \mp\sqrt{c^2-1}d_1 x + d_3, \\ z(x) &= d_1 x + d_2, \end{aligned}$$

其中 $c, m, d_i \in \mathbb{R}$, $c > 0$。

命题 2.4. 由 (6) 给出的 $\mathbb{D}^2$ 中的曲线 γ 是悬链线，当且仅当

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{c}\cosh(cx+m), \\ w(x) &= \frac{v}{c}\cosh(cx+m) + cd_1 x - d_1\tanh(cx+m) + d_2\,\mathrm{sech}(cx+m) + d_3, \\ z(x) &= -vx + d_1\,\mathrm{sech}(cx+m) + d_2\tanh(cx+m), \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $c, m, v, d_i \in \mathbb{R}$ 且 $c > 0$。

证明。 由命题 2.1 可知，实部 $\psi(x) = (x, y(x))$ 是 $\mathbb{R}^2$中的标准悬链线。因此， $y(x) = \frac{1}{c}\cosh(cx+m)$，从而 $y'(x) = \sinh(cx+m)$，其中 $c, m \in \mathbb{R}$, $c > 0$。将 y 和 y' 代入 (11)，得到

$$z'' + c\tanh(cx+m)(z'+v) + \frac{c^2(z+vx)}{\cosh^2(cx+m)} = 0.$$

为求解此方程，我们使用变量代换 $u(x) = z(x) + vx$。由此可直接得到 $u' = z' + v$ 和 $u'' = z''$。因此，方程化为

$$u'' + c\tanh(cx+m)u' + c^2\mathrm{sech}^2(cx+m)u = 0.$$

该线性方程的通解为

$$u(x) = d_1\mathrm{sech}(cx+m) + d_2\tanh(cx+m),$$

其中 $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$。于是， $z(x)$ 的表达式由 (14) 给出。接下来只需求出$w(x)$。由正交条件 (7)，可得 $w' = -y'z'$。对$z(x)$ 求导，得到

$$z'(x) = -v - cd_1\mathrm{sech}(cx+m)\tanh(cx+m) + cd_2\mathrm{sech}^2(cx+m).$$

两边乘以 $-y'(x) = -\sinh(cx+m)$，得

$$w'(x) = v\sinh(cx+m) + cd_1\tanh^2(cx+m) - cd_2\tanh(cx+m)\mathrm{sech}(cx+m).$$

通过积分，我们得到式 (14) 中 w 的表达式。 □

命题 2.5. 由式 (6) 给出的 γ 中的曲线 $\mathbb{D}^2$ 是(-1)-悬链线，当且仅当

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \sqrt{R^2-(x-m)^2},\\
w(x) &= (v-d_1)y(x)+d_2(x-m)-d_2y(x)\arcsin\left(\frac{x-m}{R}\right)+d_3,\\
z(x) &= -vx+d_1(x-m)+d_2\left(y(x)+(x-m)\arcsin\left(\frac{x-m}{R}\right)\right),
\end{aligned}
\tag{15}
$$

其中 R、m、v、$d_i \in \mathbb{R}$，且 $R>0$。此外，最大定义域由$|x-m|<R$给出。

证明。对于 $\alpha=-1$，曲线 ψ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条 (-1)-悬链线，对应于一段圆弧。因此，我们有 $y(x)=\sqrt{R^2-(x-m)^2}$，，其导数为 $y'(x)=\frac{-(x-m)}{y(x)}$，其中 m, $R\in\mathbb{R}$、$R>0$。将 $\alpha=-1$ 代入 (11)，我们得到

$$z''-\frac{y'}{y}(z'+v)-\frac{z+vx}{y^2}=0.$$

我们引入变量代换 $u(x)=z(x)+vx$，得到

$$u''-\frac{y'}{y}u'-\frac{1}{y^2}u=0.$$

将 y 和 y' 代入该方程，得到

$$u''+\frac{x-m}{R^2-(x-m)^2}u'-\frac{1}{R^2-(x-m)^2}u=0,$$

或等价地，

$$(R^2-(x-m)^2)u''+(x-m)u'-u=0.$$

不难验证，$u_1(x)=x-m$ 是该方程的一个特解。利用降阶法可以求得第二个线性无关解：

$$u_2(x)=\sqrt{R^2-(x-m)^2}+(x-m)\arcsin\left(\frac{x-m}{R}\right).$$

注意到 u_2 的第一项恰好是 $y(x)$，因此 $u(x)$的通解为

$$u(x)=d_1(x-m)+d_2\left(y(x)+(x-m)\arcsin\left(\frac{x-m}{R}\right)\right),$$

其中 $d_1,d_2\in\mathbb{R}$。反向进行变量代换，可得（15）中的 $z(x)$ 表达式。

最后，我们需要由（7）求出 w 。对 $z(x)$ 求导，得到

$$z'(x) = -v + d_1 + d_2 \arcsin\left(\frac{x-m}{R}\right).$$

因此

$$w'(x) = \frac{x-m}{\sqrt{R^2-(x-m)^2}}\left(-v + d_1 + d_2 \arcsin\left(\frac{x-m}{R}\right)\right).$$

积分可得式（15）中 $w(x)$的表达式。证明完毕 . □

注意，对于这三个 α值，Re(γ)的坐标函数 $y(x)$也出现在 γ的对偶部坐标中。下面的例子将清楚地展示这一特性。

例2.6。 对于 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = -1$，在（14）和（15）中取积分常数为 $d_1 = d_2 = d_3 = 0$。于是，曲线 γ 的对偶部简化为$\phi(x) = v(y(x) - x)$。因此， α-悬链线 γ 的形式为

$$\gamma(x) = (x, y(x)) + \varepsilon v(y(x), -x),$$

其中 $y(x) = \frac{1}{c}\cosh(cx + m)$ ($\alpha = 1$)或 $y(x) = \sqrt{R^2 - (x-m)^2}$ ($\alpha = -1$)。

借助这些例子，我们可以将这一结果推广到任意 α ，如下所示。

定理2.7。 设 $\alpha \in \mathbb{R}$。若 $\psi(x) = (x, y(x))$ 是 α 中的一条悬链线，则

$$\gamma(x) = (x, y(x)) + \varepsilon v(y(x), -x), \quad v \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

是 $\mathbb{D}^2$ 中的一条 α-悬链线。

证明。 结论显然成立。事实上，我们有 $w(x) = vy(x)$，且 $z(x) = -vx, v \in \mathbb{R}$。正交条件（7）显然满足。也很容易验证$z$ 的方程（11）。

□

该定理展示了一种构造 $\mathbb{D}^2$ 中 α-悬链线的特殊方法，只需使用 $\mathbb{R}^2$ 的 α-悬链线即可。我们可以这样解释这一现象：对偶部由实部经过交换和缩放生成。

定义2.8。 若 $\psi(x)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条 α-悬链线，则由（16）定义的 $\mathbb{D}^2$ 中的 α-悬链线称为反向悬链线。

反向悬链线的存在表明， $\mathbb{D}^2$中 α-悬链线的结构具有某种对称性。

3. A characterization of catenaries in $\mathbb{D}^2$

本节将根据曲线的曲率和法向量刻画对偶平面中的悬链线。我们的方法受到欧几里得平面中相应刻画的启发。设 ψ 是 $\mathbb{R}^2$中的一条曲线。那么，当且仅当其曲率 κ_ψ 满足以下条件时， ψ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的 α-悬链线:

$$\kappa_\psi = \alpha \frac{\langle N_\psi, \vec{u}\rangle}{\langle \psi, \vec{u}\rangle}, \quad \vec{u} = (0,1), \tag{17}$$

其中 N_ψ 是 ψ的单位法向量。

现在，我们为对偶平面 $\mathbb{D}^2$中的 α-悬链线得出类似的刻画。首先，计算由式（6）给出的 $\mathbb{D}^2$ 中的曲线 γ 的曲率 κ_γ 。以弧长参数化的可容许曲线的曲率已在 [12]中引入。

设 $\gamma(s) = \psi(s) + \varepsilon\phi(s)$是 $\mathbb{D}^2$ 中一条以弧长参数化的曲线。分别用 κ_ψ和 N_ψ 表示 ψ 的曲率和单位法向量。那么

$$\kappa_\gamma = \kappa_\psi + \varepsilon\langle \phi_s'', N_\psi\rangle, \quad \phi_s'' := \frac{d^2\phi}{ds^2}, \tag{18}$$

其中 κ_γ 是 γ的曲率。利用这一恒等式，我们推导出当 γ 按式（6）参数化时，κ_γ 的相应表达式。

引理 3.1. 设 $\gamma = \gamma(x)$ 是 $\mathbb{D}^2$ 中由(6)参数化的可容许曲线。那么其曲率 κ_γ 为

$$\begin{aligned} \kappa_\gamma &= \kappa_\psi + \varepsilon \frac{z''}{\sqrt{1+y'^2}} \\ &= \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} + \varepsilon \frac{z''}{\sqrt{1+y'^2}}. \end{aligned} \tag{19}$$

证明. 我们将 γ 按弧长重新参数化（见 [12,命题 2.1]），并写作 e

$$\gamma(s) = \gamma(f(s)) = \psi(f(s)) + \varepsilon\phi(f(s)).$$

注意，(18) 中 κ_γ 的实部，即 $\mathrm{Re}(\kappa_\gamma) = \kappa_\psi$，与参数化方式的选择无关。因此，只需确定 κ_γ的对偶部。

现在涉及两个参数， s 和 x，因此我们将微分记号规定如下:

$$\gamma' = \frac{d\gamma}{dx}, \quad \gamma_s' = \frac{d\gamma}{ds}.$$

由于 γ 是以弧长为参数的，且

$$\gamma_s' = f_s'(\psi' + \varepsilon\phi'),$$

因此可得

$$f_s' = \frac{1}{\nu}, \quad \nu := \sqrt{1 + y'^2}.$$

此外， ψ 的单位法向量场为

$$N_\psi = \frac{(-y', 1)}{\nu}.$$

利用（7）并应用链式法则，我们计算得

$$\begin{aligned}\phi_s'' &= f_s''\phi' + f_s'^2\phi'' = f_s''(w', z') + f_s'^2(w'', z'') \\ &= z' f_s''(-y', 1) + f_s'^2(w'', z'') \\ &= z' f_s'' \nu N_\psi + \frac{1}{\nu^2}(w'', z'').\end{aligned}$$

与 N_ψ取内积，得到

$$\langle \phi_s'', N_\psi \rangle = z' f_s'' \nu + \frac{1}{\nu^3}(z'' - y' w''). \tag{20}$$

对正交条件（7）求导，得到 $w'' = -y''z' - y'z''$。此外，

$$f_s'' = \left(\frac{1}{\nu}\right)' f_s' = -\frac{y'y''}{\nu^4}.$$

将这些表达式代入（20），得到

$$\langle \phi_s'', N_\psi \rangle = -\frac{z'y'y''}{\nu^3} + \frac{1}{\nu^3}(z''\nu^2 + z'y'y'') = \frac{z''}{\nu}.$$

至此，证明完成。 □

现在我们建立 (17) 的对偶版本。

定理 3.2. 设 $\gamma(x) = \psi(x) + \varepsilon\phi(x)$ 是 $\mathbb{D}^2$ 中的一条可容许曲线。则 γ 是一条 α-悬链线，当且仅当其曲率 κ_γ 满足

$$\kappa_\gamma = \alpha \frac{\langle N_\gamma, \mathbf{u} \rangle}{\langle \gamma, \mathbf{u} \rangle}, \tag{21}$$

其中 N_γ 是 γ 的单位法向量，且 $\mathbf{u} \in \mathbb{D}^2$ 是一个固定的单位向量。

证明。 经过坐标变换后，我们可以假设 $\mathbf{u} = (0, 1) + \varepsilon(v, 0)$，其中$v \in \mathbb{R}$。采用这组坐标，我们考虑 γ 的参数化 (6)。直接计算可得

$$\langle \gamma, \mathbf{u} \rangle = y + \varepsilon(vx + z).$$

计算 N_γ 时，我们可以使用 [12, 命题 2。8], 或者直接按如下方法进行。设 T_γ 和 T_ψ 分别为 γ 和 ψ的单位切向量。由前引理可得,

$$T_\gamma = \gamma_s' = f_s'(\psi' + \varepsilon\phi') = T_\psi + \varepsilon z' N_\psi.$$

因此， γ 的单位法向量场为

$$N_\gamma = N_\psi - \varepsilon z' T_\psi,$$

其中

$$N_\psi = \frac{1}{\nu}(-y', 1), \quad T_\psi = \frac{1}{\nu}(1, y').$$

(21) 式右侧的分子为

$$\begin{aligned}\langle N_\gamma, \mathbf{u}\rangle &= \langle N_\psi, (0,1)\rangle + \varepsilon\left(\langle N_\psi, (v,0) - z'\langle T_\psi, (0,1)\rangle\right) \\ &= \frac{1}{\nu}\left(1 - \varepsilon y'(v + z')\right).\end{aligned}$$

现在我们使用对偶数的除法运算,

$$\frac{a + b\varepsilon}{c + d\varepsilon} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2}\varepsilon.$$

此外，恒等式 (17) 可写为

$$\kappa_\psi = \frac{\alpha}{y\nu}.$$

利用（11），我们改写为

$$z'' = -\frac{\alpha}{y^2}(yy'(v + z') + vx + z).$$

因此,

$$\begin{aligned}\alpha\frac{\langle N_\gamma, \mathbf{u}\rangle}{\langle \gamma, \mathbf{u}\rangle} &= \frac{\alpha}{y\nu}\left(1 - \frac{\varepsilon}{y}(yy'(v + z') + vx + z)\right) \\ &= \frac{\alpha}{y\nu} - \varepsilon\frac{\alpha}{y^2\nu}(yy'(v + z') + vx + z) \\ &= \kappa_\psi + \varepsilon\frac{z''}{\nu} = \kappa_\gamma,\end{aligned}$$

其中，最后一个恒等式直接由（19）得出。 □

因此，我们得到如下结论。

推论 3.3. α中的悬链线的曲率与其在 $\mathbb{D}^2$中的反向悬链线的曲率相同。特别地，反向悬链线的曲率是纯实值的。

证明。 根据式 (16) 中给出的反向悬链线 γ 的定义，我们有 $z(x) = -vx$。因此，$z'' = 0$。将其代入式 (19)，得到 $\kappa_\gamma = \kappa_\psi$，证明完毕。 □

数据可用性声明。 本研究没有可用数据。

Acknowledgements

Rafael L´opez 获得了 MINECO/MICINN/FEDER 项目（编号 PID2023-150727NB-I00）的部分资助，并获得了由 MCINN/AEI/10.13039/ 501100011033/ CEX2020-001105-M 资助的“Mar´ıa de Maeztu”卓越研究单位 IMAG（参考编号 CEX2020-001105-M）的资助。

References

[1] B. Akta¸s、O. Durmaz、H. G¨undo˘gan，《对偶数及其拓扑结构上的不等式》，《土耳其数学杂志》47(5) (2023), 1318 – 1334.[2] M. E. Aydın、N. C¸avdar、M. Erg¨ut，《对偶仿射平面和对偶洛伦兹-闵可夫斯基平面中的常曲率曲线》，arXiv:2512.01593v1 (2025).[3] M. A. Clifford，《双四元数初步概述》，Proc. Lond. Math. Soc. s1-4(1) (1871), 381–395.[4] L. C. B. da Silva、R. L´opez，《单迷向空间中的悬链线与奇异极小曲面》，Results Math 78 (2023), 文章编号 204，第 28 页。[5] L. C. B. da Silva、R. L´opez，《黎曼曲面中的悬链线》，S˜ao Paulo J. Math. Sci. 18(1) (2024), 389-406.[6] L. C. B. da Silva、R. L´opez，《双曲空间中的悬链线与旋转极小曲面》，Proc. R. Soc. Edinb. A: Math. 156 (2026), 263–283.[7] U. Dierkes，《奇异极小曲面：几何分析与非线性偏微分方程》，第 177–193 页。Springer，柏林 (2003).[8] F. M. Dimentberg，《螺旋演算及其在力学中的应用》，外国技术局，赖特-帕特森空军基地，莫斯科，1965.[9] R. L´opez，《不变奇异极小曲面》，Ann. Global Anal.Geom.53(4)(2018), 521-541.[10] R. L´opez，《带密度的奇异极小曲面的一维情形》，Geom. Dedicata 200(1) (2019), 303–320.[11] R. L´opez，《球面和双曲平面中的悬链问题》，J. Nonlinear Sci. 34 (2024), 文章编号 75，第 23 页。

[12]R. L´opez, 《对偶空间中曲线的微分几何》，越南数学杂志 (2025).
https://doi.org/10.1007/s10013-025-00766-7

[13] E. Study, 《动力几何》，Teubner出版社，莱比锡，1903。

[14] G. R. Veldkamp, 《对偶数、向量和矩阵在瞬时空间运动学中的应用》，《机械与机器理论》11 (1976)，141-156。

Department of Mathematics, Faculty of Science, Firat University, Elazig, 23200Turkey

电子邮箱：meaydin@firat.edu.tr

Departamento de Geometría y Topología Universidad de Granada 18071 Granada, Spain

电子邮箱：rcamino@ugr.es