arXiv:2603.02144v1 [math.FA] 2 Mar 2026

海森堡群上STRICHARTZ傅里叶变换的加权范数不等式

APARAJITA DASGUPTA、PRERNA GULIA、SANJOY PUSTI与SUNDARAM THANGAVELU

ABSTRACT. 本文建立了海森堡群 $\mathbb{H}^n$上Strichartz傅里叶变换的Pitt不等式的类似结果。通过利用该变换的标量值表述以及递减重排框架，我们导出了Pitt型的加权 L^p–L^q 估计。特别地，我们借助加权Hardy不等式与Calder´on插值方法，得到此类不等式成立的充分条件，并利用Laguerre函数的结构性质以及贝塞尔函数的零点，证明了径向权情形下的必要条件。作为应用，我们在此背景下推出Heisenberg–Pauli–Weyl型不确定性原理，并建立Strichartz傅里叶变换的Paley不等式。我们还利用Hardy不等式，在情形 $p = q = 2$下导出了Pitt不等式。这些结果将Pitt不等式的经典欧氏理论推广到 $\mathbb{H}^n$ 的非交换幂零背景，适用于次拉普拉斯算子与共形拉普拉斯算子。在此，我们强调Laguerre函数在海森堡群上调和分析中的作用。

1. INTRODUCTION

与傅里叶变换相关不等式的研究是调和分析中的核心主题。这类不等式不仅对函数及其傅里叶变换之间的关系提供定量估计，也是从数论到偏微分方程等诸多领域的重要工具。一个经典例子是 Hausdorff–Young 不等式，它表明对于 $1 \leqslant p \leqslant 2$，傅里叶变换是从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 的有界映射，其中 p' 表示 p的 H¨older 共轭指数。这一结果揭示了时域与频域中可积性之间的深刻联系，并为一大类傅里叶不等式树立了范例。

一个不同但密切相关的方向由 Pitt 于 1937 年开创 [24], 他证明了加权L^p–L^q 不等式，适用于单位圆上可积函数的傅里叶系数。Pitt 不等式说明权重如何控制函数与其傅里叶变换之间的质量分布，在无穷远处的衰减与局部可积性之间取得平衡。随着时间的推移，这一结果已在许多方向上得到推广与改进。特别地，Heinig [18] 在一般欧几里得空间中考虑了该问题，给出了非负权重对 $(u,\ v)$ 的必要且充分条件，使得加权不等式

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(\xi) T f(\xi)|^q d\xi \right)^{1/q} \leqslant C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v(x) f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \tag{1.1}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 43A85,42C05；次要分类 43A90, 33C45, 35P10。
Key words and phrases. 海森堡群、Strichartz 傅里叶变换、Pitt 不等式、Laguerre函数、Bessel函数。

对定义在适当函数空间上的次线性算子 T 成立，其中 C 是与 f的选取无关的常数。

取 T 为 $\mathbb{R}^n$上的傅里叶变换，则不等式（1.1）具有如下形式

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(\xi)\,\widehat{f}(\xi)|^q\,d\xi\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |v(x)f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}. \tag{1.2}$$

研究（1.2）是否成立的一种自然方法是利用递减重排。记u^* 为非负权函数 u 在 $\mathbb{R}^n$上的递减重排，并令 $U = u^*$。类似地，设 $1/V = (1/v)^*$。在这一框架下，Heinig [18] 证明了以下基本结果。

定理 1.1。设 $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$。若 $p < \infty$ 且 $(p, q) \neq (2, 2)$，并且

$$\sup_{s>0}\left(\int_0^{1/s} U(t)^q\,dt\right)^{1/q}\left(\int_0^{s} V(t)^{-p'}\,dt\right)^{1/p'} < \infty, \tag{1.3}$$

则不等式（1.2）成立。此外，在特殊情形 $p = q = 2$下，若条件（1.3）满足，且

$$\sup_{s>0}\left(\int_{1/s}^{\infty} U(t)^2\,t^{-1}\,dt\right)^{1/2}\left(\int_{s}^{\infty} V(t)^{-2}\,t^{-1}\,dt\right)^{1/2} < \infty, \tag{1.4}$$

则（1.2）仍然成立。

在同一篇论文中，Heinig 还给出了一个必要条件，指出 Pitt 不等式只有在权重满足额外结构性假设时才能成立。

定理 1.2. 设 $1 < p,\ q < \infty$ 并且 (1.2) 对 u 和 v 上的两个径向权函数 $\mathbb{R}^n$成立。那么

$$\sup_{s>0}\left(\int_{|\xi|<\theta_0/s} u(\xi)^q\,d\xi\right)^{1/q}\left(\int_{|x|<s} v(x)^{-p'}\,dx\right)^{1/p'} < \infty,$$

其中 θ_0 表示 一个严格小于贝塞尔函数 $j_{n/2}$的第一个零点的正常数。

这里可以看到，这些一般性判据的一个重要推论出现在取幂权函数的特殊情形下。令 $u(\xi) = |\xi|^{-\sigma}$ 和 $v(x) = |x|^{\alpha}$，即可得到 $\mathbb{R}^n$ 上的经典 Pitt 不等式（见 [4, 24]）：对于 $1 < p \leqslant q < \infty$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-\sigma q}|\widehat{f}(\xi)|^q\,d\xi\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \tag{1.5}$$

当且仅当

$$0 \leqslant \sigma < \frac{n}{q}, \qquad 0 \leqslant \alpha < \frac{n}{p'}, \qquad \text{and} \qquad \alpha - \sigma = n\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right).$$

这一表述不仅将 Pitt 原始不等式与其加权推广统一起来，还将其置于其他基本傅里叶不等式之中，例如豪斯多夫–杨不等式和

帕莱不等式，作为调和分析更广泛框架的一部分。Paley 不等式是另一个与傅里叶变换相关的重要不等式，探讨的是是否存在一种测度 ν 使得傅里叶变换 $L^p - L^p_\nu$ 有界。在欧几里得情形下，H¨ ormander [19] 率先研究了这类不等式。多年来，加权范数不等式启发了针对不同数学结构的多种表述，在这一领域积累了大量文献。关于这类加权不等式的研究范围，可参阅 [2, 3, 4, 13, 9, 22] 及其中的参考文献。

2024 年，Kumar 等人 [20] 研究了非紧型秩一黎曼对称空间框架下傅里叶变换的加权 $L^p - L^q$ 不等式。这些结果凸显了适用于非欧几里得几何结构的傅里叶分析技术所发挥的作用。受对称空间上的经典赫尔加森傅里叶变换启发，2023 年，第四作者 [33]提出了海森堡群上的标量值傅里叶变换的定义。这种变换称为 Strichartz 傅里叶变换。它利用海森堡群的次拉普拉斯算子 $\mathcal{L}$ 和向量场 $T = \frac{\partial}{\partial t}$ 的联合特征函数来定义。

—

海森堡群 $\mathbb{H}^n$是最简单的非阿贝尔幂零李群，其底层流形为 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$，并配备如下群运算

$$(z,t)(w,s) = \left(z + w, t + s + \frac{1}{2}\operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})\right),$$

其中 $(z,t),(w,s) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$。对于定义在 $\mathbb{H}^n$上的函数 f，其傅里叶变换（通常意义下）是定义在 $L^2(\mathbb{R}^n)$上的算子，其定义为

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}} f(z,t)\pi_\lambda(z,t)\, dz\, dt,$$

其中 π_λ 表示 $\mathbb{H}^n$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$上的薛定谔表示。更明确地，对于 $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\pi_\lambda(z,t)\varphi(\xi) = e^{i\lambda t} e^{i\lambda(x\cdot\xi + \frac{1}{2}x\cdot y)}\varphi(\xi + y),$$

其中 $z = x + iy$。根据定义，很容易看出

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{C}^n} f^\lambda(z)\pi_\lambda(z,0)\, dz,$$

其中 f^λ 表示 f 关于中心变量的傅里叶逆变换，即

$$f^\lambda(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z,t)e^{i\lambda t}\, dt.$$

在海森堡群的背景下，群傅里叶变换是算子值的，尽管它满足 Plancherel 定理和反演公式，但其复杂性使其不太适合处理施瓦茨函数类的刻画或加权不等式的表述等问题。 [33]，提出的 Strichartz 傅里叶变换克服了这一困难，它提供了一种标量值类似结果，并具有若干与对称空间上的赫尔加森傅里叶变换相同的结构特征。借助该变换，可以通过黑克–博赫纳公式显式描述测试函数的像，并在这一新框架下重新表述 Hardy 和 Ingham 的经典定理。

基于这一进展，本文旨在拓展对 Strichartz 傅里叶变换的研究。本文的创新之处在于，为 Strichartz 傅里叶变换建立了 Pitt 型加权 L^p–L^q 不等式。标量值表述在此至关重要，因为它使我们能够使用在算子值情形下无法采用的递减重排和插值方法。我们运用这些方法，得到 $\mathbb{H}^n$ 上 Pitt 不等式成立的权重充分条件；据我们所知，文献中此前尚未出现这些条件。我们还利用 Laguerre 函数在海森堡群傅里叶分析中的结构作用，推导了这些不等式成立所需的权重对的必要条件。我们也研究了 Pitt 不等式与 Hardy 不等式之间的联系。在回顾它们在欧几里得空间中的等价性之后，我们将这种关系推广到 $p = q = 2$ 情形下的海森堡群。具体而言，我们展示了如何针对不同权重，为共形次拉普拉斯算子推导 Pitt 型不等式及相应的 Hardy 不等式。我们还推导了适用于非齐次权的 Pitt 不等式类似结果，以及适用于分数阶次拉普拉斯算子的 Pitt 不等式。用 Strichartz 傅里叶变换的语言重新表述这些结果，为理解 $\mathbb{H}^n$. 上的加权不确定性型不等式提供了统一框架。本文未讨论所得常数的最优性。

我们在引言结尾简要概述本文。在第2节中，我们介绍 Strichartz 傅里叶变换的必要背景，回顾普朗歇尔公式、反演公式以及 Hausdorff–Young 不等式。为建立 Pitt 不等式，我们还需要度量空间上函数的递减重排概念，以及加权 Hardy 不等式；这些内容已在第2节中作了简要说明。在第3 与4节中，我们证明 Strichartz 傅里叶变换的 Pitt 不等式，并推导权重的必要条件。此外，我们还作为一个定理推导出 Heisenberg–Pauli–Weyl型不确定性原理。随后，在第5节中，我们给出使该定理成立的幂权函数的一个非平凡例子，并推导幂权函数的充分必要条件。在第6节中，我们在 Strichartz 傅里叶变换的框架下证明 Paley 不等式的一个版本。最后，在第7 节中，我们借助 Hardy不等式，研究海森堡群上通常算子值傅里叶变换的 Pitt 不等式。

2. Preliminaries

本节回顾理解 Strichartz 傅里叶变换所需的基本预备知识。此外，我们还将回顾与之相关的普朗歇尔定理、反演公式和 Hausdorff–Young 不等式。

对于 $\delta > -1$ 和 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，令 L_k^δ 表示类型为 δ、次数为 k 的拉盖尔多项式，定义如下：

$$L_k^\delta(t) = \frac{t^{-\delta}e^t}{k!}\left(\frac{d}{dt}\right)^k\left(e^{-t}t^{k+\delta}\right),\ t \geqslant 0.$$

给定 $\lambda \in \mathbb{R}^*$，令 $\varphi_{k\,\lambda}^{n-1}$，表示拉盖尔函数 $\mathbb{C}^n$，定义如下：

$$\varphi_{k,\lambda}^{n-1}(z) = L_k^{n-1}\left(\frac{1}{2}|\lambda||z|^2\right)e^{-\frac{1}{4}|\lambda||z|^2}.$$

有关 Laguerre函数的更多详情，请参阅 [32, 34]。

Laguerre函数在确定次拉普拉斯算子 $\mathcal{L}$ on $\mathbb{H}^n$ and 左不变向量场 $\frac{\partial}{\partial t}$ 的联合特征函数方面发挥着重要作用。为了使本文自包含，我们简要回顾 $\mathcal{L}$ and T的联合谱理论。海森堡代数 $\mathfrak{h}_n$ 的基由以下左不变向量场组成

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} y_i \frac{\partial}{\partial t},\ Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{1}{2} x_i \frac{\partial}{\partial t},\ T = \frac{\partial}{\partial t},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

$_n$众所周知，次拉普拉斯算子 $\mathcal{L} = -\sum_{i=1}^{n} \left(X_i^2 + Y_i^2\right)$ 与向量场 T可交换。这使得我们能够研究这两个算子的联合谱理论。

由 [32], 可知，函数 $e_k^{n-1}{}_{,\lambda}(z, t) = e^{i\lambda t}\varphi_k^{n-1}{}_{,\lambda}(z)$ 满足以下特征值方程

$$\mathcal{L}(e_{k,\lambda}^{n-1}) = (2k+n)|\lambda| e_{k,\lambda}^{n-1}, \quad -i\frac{\partial}{\partial t}(e_{k,\lambda}^{n-1}) = \lambda e_{k,\lambda}^{n-1}.$$

由关系式 $\mathcal{L}(e^{i\lambda t} f(z) = e^{i\lambda t} L_\lambda f(z)$定义的算子 L_λ 称为特殊厄米算子。拉盖尔函数 $\varphi_k^{n-1}{}_{\lambda}$ 、是 L_λ 的特征函数，对应的特征值为 $(2k+n)|\lambda|$。此外， L_λ 对应于特征值 $(2k+n)|\lambda|$ 的特征空间是一个无限维空间，其标准正交基由以下函数组成

$$\Phi_{\alpha,\beta}^{\lambda} = (2\pi)^{-n/2} \langle \pi_\lambda(z, 0)\Phi_\alpha^\lambda, \Phi_\beta^\lambda \rangle,$$

其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = k$ 和 Φ_α^λ 是缩放厄米函数，构成缩放厄米算子 $H(\lambda) = -\Delta + \lambda^2|x|^2$的特征函数。关于特征函数的更全面研究，请参阅 [31]。

现在，令 Ω 表示海森堡扇，它定义为以下射线的并集

$$R_k = \{(\lambda, (2k+n)|\lambda|) : \lambda \in \mathbb{R}^*\},\ k = 0, 1, \cdots,$$

以及极限射线

$$R_\infty = \{(0, \tau) : \tau \geqslant 0\}.$$

对于函数 $f \in L^1(\mathbb{H}^n) \cap L^2(\mathbb{H}^n)$，其 Strichartz 傅里叶变换是 Ω $\times\ \mathbb{C}^n$上的一个函数，定义为

$$\widehat{f}(a, w) = \int_{\mathbb{H}^n} f(z, t) e_a\left((z, t)^{-1}(w, 0)\right) dz\, dt, \tag{2.1}$$

其中 $a = (\lambda, (2k+n)|\lambda|) \in R_k$和 $e_a(z, t) = e_k^{n-1}{}_{,\lambda}(z, t)$。此外，对于元素 $(0, \tau) \in R_\infty$,

$$\widehat{f}(0, \tau, w) = (n-1)! 2^{n-1} \int_{\mathbb{H}^n} f(z, t) \frac{J_{n-1}(\sqrt{\tau}|w-z|)}{(\sqrt{\tau}|w-z|)^{n-1}} dz dt, \tag{2.2}$$

其中 J_{n-1} 表示阶数为 $(n-1)$的贝塞尔函数。

我们回顾 Strichartz 傅里叶变换的反演公式和普朗歇尔定理。为陈述该定理，需要在集合 Ω 上定义一个测度。考虑 Ω 上定义的测度 ν ，其定义为

$$\int_\Omega \phi(a) d\nu(a) = (2\pi)^{-2n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \phi(\lambda, (2k+n)|\lambda|) \right) |\lambda|^{2n} d\lambda. \tag{2.3}$$

定理 2.1。 对于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$，*Strichartz* 傅里叶变换的反演公式 [33]表述如下：

$$f(z,t) = \int_{\Omega}\int_{\mathbb{C}^n} \widehat{f}(a,w)e_a((-w,0)(z,t)dw\, d\nu(a). \tag{2.4}$$

此外，对于函数 f 属于 $L^1 \cap L^2(\mathbb{H}^n)$，我们有如下普朗歇尔公式

$$\int_{\mathbb{H}^n} |f(z,t)|^2 dz\, dt = \int_{\Omega}\int_{\mathbb{C}^n} |\widehat{f}(a,w)|^2 dw\, d\nu(a). \tag{2.5}$$

˜归一化 Strichartz 傅里叶变换 f 定义为

$$\tilde{f}(a,w) = \frac{k!(n-1)!}{(k+n-1)!}\widehat{f}(a,w),$$

and

$$\tilde{f}(0,\tau,w) = \widehat{f}(0,\tau,w).$$

利用 拉盖尔函数和贝塞尔函数的以下估计（见 [1, 30]）

$$\frac{k!(n-1)!}{(k+n-1)!}|\varphi_{k,\lambda}^{n-1}(z)| \leqslant 1 \text{ and } |J_{n-1}(t)| \leqslant c_n t^{n-1},$$

可得，对于任意 $f \in L^1(\mathbb{H}^n)$，归一化 Strichartz 傅里叶变换满足

$$\sup_{(a,w)\in\Omega\times\mathbb{C}^n} |\tilde{f}(a,w)| \leqslant c_{n,1}\|f\|_1. \tag{2.6}$$

此外，将普朗歇尔公式改写为关于归一化斯特里希茨傅里叶变换的形式，可得

$$\int_{\mathbb{H}^n} |f(z,t)|^2 dz\, dt = \int_{\Omega}\int_{\mathbb{C}^n} |\tilde{f}(a,w)|^2 dw\, d\nu_2(a), \tag{2.7}$$

其中，测度 $d\nu_2(a)$ 是 Ω 上的一个测度，由下式给出

$$\int_{\Omega} \phi(a)d\nu_2(a) = (2\pi)^{-2n-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}\right)^2 \phi(\lambda,(2k+n)|\lambda|)\right)|\lambda|^{2n}d\lambda.$$

需要注意的是，Strichartz 傅里叶变换不是从 $L^2(\mathbb{H}^n)$ 到 $L^2(\Omega \times \mathbb{C}^n,\ d\nu\ dw)$ 的酉算子；相反，若将空间 $L_0^2(\Omega \times \mathbb{C}^n,\ d\nu\ dw)$ 视为 $L^2(\Omega \times \mathbb{C}^n,\ d\nu\, dw)$ 的子空间，其中的函数满足以下性质

$$(2\pi)^{-n}|\lambda|^n\varphi_{k,\lambda}^{n-1} *_\lambda \widehat{f}(a,\cdot)(z) = \widehat{f}(a,z),\ a \in R_k \tag{2.8}$$

那么我们有以下结果。

定理 2.2。 *Strichartz* 傅里叶变换是从 $L^2(\mathbb{H}^n)$ 到 $L_0^2(\Omega \times\mathbb{C}^n, d\nu\ dw)$ 的酉算子。

Pitt 不等式是在 Hausdorff–Young 不等式的框架内表述的。在 Strichartz 傅里叶变换的框架中， [33], 中所建立的 Hausdorff–Young 不等式可陈述如下。

定理 2.3。 给定 $1 \leqslant p \leqslant 2$，在集合 Ω 上存在一个测度 ν_p，使得对每个 $f \in L^p(\mathbb{H}^n)$，

$$\left(\int_{\Omega} \int_{\mathbb{C}^n} |\tilde{f}(a,w)|^{p'} dw \, d\nu_p(a) \right)^{1/p'} \leqslant c_{n,p} \left(\int_{\mathbb{H}^n} |f(z,t)|^p dz \, dt \right)^{1/p}. \tag{2.9}$$

这是基于以下事实得出的：Strichartz 傅里叶变换是从 $L^1(\mathbb{H}^n)$到 $L^\infty(\Omega \times \mathbb{C}^n$的有界算子，$d\nu(a) \, dw)$并且也是从 $L^2(\mathbb{H}^n)$ 到 $L^2(\Omega \times \mathbb{C}^n$的有界算子，$d\nu_2(a) \, dw)$ 然后利用测度变换插值定理。根据 [33, 注 7.2。1]，我们还可得到

$$\left(\int_{\Omega} \int_{\mathbb{C}^n} |\tilde{f}(a,w)|^{p'} dw \, d\nu_2(a) \right)^{1/p'} \leqslant c'_{n,p} \left(\int_{\mathbb{H}^n} |f(z,t)|^p dz \, dt \right)^{1/p}. \tag{2.10}$$

虽然不等式（2.9）比（2.10）给出了更精确的估计，但为了推导 Pitt 不等式的类似结果，我们将以（2.10）作为分析基础。为使本文自包含，我们在此回顾递减重排和洛伦兹空间。

2.1. 递减重排与洛伦兹空间。 设 (X, μ) 是一个测度空间，f 是定义在 X 上的可测函数。f 的分布函数 记为 d_f，它是定义在 $[0, \infty)$ 上的函数，定义如下：

$$d_f(M) = \mu\{x : |f(x)| > M\}.$$

给定一个可测函数 f，其递减重排 f^* 是定义在 $[0, \infty)$ 上的函数，该函数单调递减且满足 $d_f = d_{f^*}$。具体而言，对于 $t \geqslant 0$，

$$f^*(t) = \inf\{s > 0 : d_f(s) \leqslant t\}.$$

关于递减重排的详情及其更多性质，请参阅 [17]。介绍了函数的递减重排后，下面给出洛伦兹空间的定义。

定义 2.1.1。 设 f 是定义在 $(X$ 上的可测函数，$\mu)$ 和 $0 < p, \ q \leqslant \infty$，定义

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} & if \, q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) & if \, q = \infty. \end{cases}.$$

所有满足 $\|f\|_{L^{p,q}} < \infty$ 的函数 f 所构成的集合称为指标为 p 和 q 的洛伦兹空间，记作 $L^{p,q}$。

我们陈述递减重排和洛伦兹空间的几个性质（详情请参见 [5, 17]），这些性质将在后续章节中使用。对于定义在 $(X, \ \mu)$ 上的两个可测函数 $f, \ g$，

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_0^\infty (f^*(t))^p dt \quad \text{for } 0 < p < \infty, \tag{2.11}$$

and

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{(1/g)^*(t)} f^*(t) \right)^p dt \right)^{1/p} \leqslant \left(\int_X |f(x)g(x)|^p d\mu \right)^{1/p}. \tag{2.12}$$

第二个不等式可见 [18]。洛伦兹空间之间的包含关系如下

$$\text{for } 0 < p \leqslant \infty \text{ and } 0 < q < r \leqslant \infty, L^{p,q} \subseteq L^{p,r}.$$

2.2. Calder´on 算子与加权 Hardy 不等式。现在回顾一些与 Calder´on 算子 [8] 及加权 Hardy 不等式 [6]相关的结果。给定 $1 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant \infty$和 $1 \leqslant q_1,\ q_2 \leqslant \infty$，其中 $q_1 \neq q_2$，考虑端点为 $\left(\frac{1}{p_1},\ \frac{1}{q_1}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{p_2},\ \frac{1}{q_2}\right)$的线段 σ。对于每条这样的线段，我们将其斜率定义为

$$m = \frac{1/q_1 - 1/q_2}{1/p_1 - 1/p_2}.$$

此外，每条这样的线段都对应一个*Calder´on* 算子 S_σ，其定义域为 $(0,\ \infty)$上的非负可测函数 f 集合。对于每个 $t > 0,\ S_\sigma$ 定义为

$$S_\sigma f(t) = t^{-1/q_1} \int_0^{t^m} s^{1/p_1 - 1} f(s)ds + t^{-1/q_2} \int_{t^m}^{\infty} s^{1/p_2 - 1} f(s)ds. \tag{2.13}$$

设 $(X,\ \mu)$ 和 $(Y,\ \nu)$ 是两个 σ-有限测度空间。作用于 μ 可测函数、且取值为 ν 可测函数的次线性算子 T称为具有联合弱型 $(p_1,\ q_1;\ p_2,\ q_2)$，如果

$$(Tf)^*(t) \leqslant CS_\sigma f^*(t),\ \forall f \text{ and } t \in (0, \infty). \tag{2.14}$$

此外，若算子 T 满足分别弱型 $(p_1,\ q_1)$ 和 $(p_2,\ q_2)$，即当 T 从$L^{p_1,\ 1}$ 映到 $L^{q_1,\ \infty}$ 有界，且从 $L^{p_2,\ 1}$ 映到 $L^{q_2,\ \infty}$有界时，称其具有分别弱型。以下结果 [5, 8] 给出了联合弱型与分别弱型之间的关系。

定理 2.2.1. 设 T是作用于 $L^{p_1,\ 1}(X, \mu) + L^{p_2,\ 1}(X, \mu)$ 的次线性算子，其取值属于 (Y, ν) 上的可测函数空间。那么，T 具有分别弱型 (p_1, q_1) 和 (p_2, q_2)，当且仅当 T具有联合弱型 $(p_1, q_1;\ p_2, q_2)$。

我们还需要以下加权 Hardy 不等式，其证明可见于 [6]。

定理 2.2.2. 设 $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ 和 $u_1,\ v_1,\ f_1$ 是非负函数。那么

(a) 我们有

$$\left(\int_0^\infty \left[u_1(t)\int_0^t f_1(s)ds\right]^q dt\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_0^\infty [v_1(t)f_1(t)]^p\, dt\right)^{1/p},$$

当且仅当

$$\sup_{s>0}\left(\int_s^\infty u_1(t)^q dt\right)^{1/q}\left(\int_0^s v_1(t)^{-p'} dt\right)^{1/p'} < \infty.$$

(*b*) 此外，

$$\left(\int_0^\infty \left[u_1(t)\int_t^\infty f_1(s)ds\right]^q dt\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_0^\infty [v_1(t)f_1(t)]^p\, dt\right)^{1/p},$$

当且仅当成立，

$$\sup_{s>0}\left(\int_0^s u_1(t)^q dt\right)^{1/q}\left(\int_s^\infty v_1(t)^{-p'}dt\right)^{1/p'}<\infty.$$

3. Pitt's Inequality for Strichartz Fourier Transform

本节中，我们证明海森堡群上 Pitt 不等式的类似结果。从这里开始， u 和 v 分别表示 $\Omega \times \mathbb{C}^n$ 上的两个非负可测函数。令$U = u^*$ 为 u 关于 $\Omega \times \mathbb{C}^n$上测度 $d\nu_2(a)\ dw$ 的递减重排， v^*为 v关于 $\mathbb{H}^n$上测度 $dz\ dt$的递减重排。取 $\frac{1}{V} = \left(\frac{1}{v}\right)^*$。下文中， C 表示一个与函数的选取无关、但在不同不等式中可能取不同值的常数。

定理 3.1. 令 $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$。若 $p < \infty$ 且

$$\sup_{s>0}\left(\int_0^{1/s} U(t)^q dt\right)^{1/q}\left(\int_0^s V(t)^{-p'}dt\right)^{1/p'}<\infty, \tag{3.1}$$

则存在一个常数 C ，使得对所有 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$,

$$\left(\int_{\Omega\times\mathbb{C}^n} |\tilde{f}(a,w)|^q u(a,w)^q dw\ d\nu_2(a)\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_{\mathbb{H}^n}|f(z,t)|^p v(z,t)^p dz\ dt\right)^{1/p}. \tag{3.2}$$

˜证明。首先考虑 $p < \infty$且 $(p、\ q) \neq (2、\ 2)$的情形。考虑$L^1(\mathbb{H}^n) + L^2$、$^1(\mathbb{H}^n)$上的算子 $T(f) = f$。注意 L^1、$^1 = L^1$ 以及 L^2、$^1 \subset L^2$、$^2 = L^2$。由(2.6)，算子 T是强型 $(1、\ \infty)$，因而它是弱型 $(1、\ \infty)$。再由普朗歇尔定理(2.7)， T是弱型$(2、\ 2)$。应用定理 2.2.1，可得

$$(Tf)^*(t) \leqslant C\, S_\sigma f^*(t),$$

对每个 $t \in (0,\ \infty)$，其中 σ是以 $(1,\ 0)$和 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$为端点的线段。

现在利用算子 S_σ 如(2.13)中所给的定义，我们有

$$(\tilde{f})^*(t) = (Tf)^*(t) \leqslant C\left\{\int_0^{1/t} f^*(s)ds + t^{-1/2}\int_{1/t}^\infty s^{-1/2} f^*(s)ds\right\} \tag{3.3}$$

将不等式两边乘以 $U(t)$ ，并对 t 积分，可得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty \left[(\tilde{f})^*(t)U(t)\right]^q dt\right)^{1/q} \leqslant C\Bigg\{&\left(\int_0^\infty U(t)^q\left(\int_0^{1/t} f^*(s)\,ds\right)^q dt\right)^{1/q}\\ &+\left(\int_0^\infty U(t)^q t^{-q/2}\left(\int_{1/t}^\infty s^{-1/2} f^*(s)\,ds\right)^q dt\right)^{1/q}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

定义

$$I_1 = \left(\int_0^\infty U(t)^q \left(\int_0^{1/t} f^*(s)\, ds \right)^q dt \right)^{1/q}.$$

作变量代换 $t \mapsto t^{-1}$，得到

$$I_1 = \left(\int_0^\infty U(t^{-1})^q\, t^{-2} \left(\int_0^{t} f^*(s)\, ds \right)^q dt \right)^{1/q}.$$

接下来，我们结合加权 Hardy 不等式使用我们的假设。特别地，由定理2.2.2 (a)，可得

$$I_1 \leqslant C \left(\int_0^\infty \big(V(t) f^*(t)\big)^p\, dt \right)^{1/p}, \tag{3.5}$$

当且仅当

$$\sup_{s>0} \left(\int_s^\infty U(t^{-1})^q t^{-2}\, dt \right)^{1/q} \left(\int_0^s V(t)^{-p'}\, dt \right)^{1/p'} < \infty.$$

经过适当的变量代换，这个条件与我们的假设（3.1）一致。

$$\sup_{s>0} \left(\int_0^{1/s} U(t)^q dt \right)^{1/q} \left(\int_0^s V(t)^{-p'} dt \right)^{1/p'} < \infty.$$

现在我们来处理积分

$$I_2 = \left[\int_0^\infty U(t)^q t^{-q/2} \left(\int_{1/t}^\infty s^{-1/2} f^*(s) ds \right)^q dt \right]^{1/q}.$$

再次通过变量代换

$$I_2 = \left[\int_0^\infty U(t^{-1})^q t^{q/2} t^{-2} \left(\int_t^\infty s^{-1/2} f^*(s) ds \right)^q dt \right]^{1/q}.$$

应用定理2.2。2 (b)其中

$$u_1(t) = U(t^{-1})\, t^{1/2} t^{-2/q}, \quad v_1(t) = t^{1/2} V(t), \quad f_1(t) = t^{-1/2} f^*(t),$$

我们推得

$$I_2 \leqslant C \left(\int_0^\infty \big(V(t) f^*(t)\big)^p\, dt \right)^{1/p}$$

当且仅当

$$\sup_{s>0} \left(\int_0^s U(t^{-1})^q\, t^{q/2} t^{-2}\, dt \right)^{1/q} \left(\int_s^\infty t^{-p'/2} V(t)^{-p'}\, dt \right)^{1/p'} < \infty.$$

进行变量代换 $t \mapsto t^{-1}$ 后，该条件变为

$$\sup_{s>0}\left(\int_{1/s}^{\infty} U(t)^q\, t^{-q/2}\, dt\right)^{1/q}\left(\int_{s}^{\infty} t^{-p'/2}V(t)^{-p'}\, dt\right)^{1/p'} < \infty. \tag{3.6}$$

然而，在假设中，我们只有

$$\sup_{s>0}\left(\int_{0}^{1/s} U(t)^q dt\right)^{1/q}\left(\int_{0}^{s} V(t)^{-p'} dt\right)^{1/p'} < \infty.$$

现在，利用 [20, 引理 3。3], 以及 $N=1$ 和 $q_0=2$，我们得到 (3.1) 推出 (3.6)。因此，我们有

$$I_2 \leqslant C\left[\int_0^{\infty}(V(t)f^*(t))^p\right]^{1/p}. \tag{3.7}$$

因此，结合 (3.4)、(3.5) 和 (3.7)，可知对于 $p<\infty$ 和 $(p,\ q)\neq(2,\ 2)$，存在一个常数 $C>0$ 使得

$$\left(\int_0^{\infty}\left[(\tilde{f})^*(t)U(t)\right]^q dt\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_0^{\infty}\left[V(t)f^*(t)\right]^p dt\right)^{1/p}. \tag{3.8}$$

□

接下来，利用递减重排的性质 (2.11) 以及 (3.8)，我们得到

$$\begin{aligned}\left(\int_{\Omega\times\mathbb{C}^n}|\tilde{f}(a,w)|^q\, u(a,w)^q\, dw\, d\nu_2(a)\right)^{1/q} &\leqslant \left(\int_0^{\infty}\left[(\tilde{f})^*(t)U(t)\right]^q dt\right)^{1/q}\\ &\leqslant C\left(\int_0^{\infty}\left[V(t)f^*(t)\right]^p dt\right)^{1/p}\\ &= C\left(\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{(1/v)^*}(t)f^*(t)\right]^p dt\right)^{1/p}\\ &\leqslant C\left(\int_{\mathbb{H}^n}|f(z,t)|^p v(z,t)^p\, dz\, dt\right)^{1/p}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

至此，本文情形下 Pitt 不等式的证明完成。对于 $(p,q)=(2,2)$ 的情形，我们沿用 [16, 定理 3.1]中的推理思路。通过直接改编 [16, 定理 2.3], 中针对 $s>0$ 的证明论证，可得以下不等式

$$\left(\int_0^{s}\tilde{f}^*(t)^2 dt\right)^{1/2} \leqslant C\left(\int_0^{x}\left(\int_0^{1/t} f^*(s)ds\right)^2 dt\right)^{1/2}.$$

利用上述不等式，我们可以推出：

$$\int_0^\infty \tilde{f}^*(t)^2 U(t)^2 dt \leqslant C \int_0^\infty \left(\int_0^{1/t} f^*(s) ds \right)^2 U(t)^2 dt. \tag{3.10}$$

通过进行变量代换，右侧的积分变为：

$$\int_0^\infty \left(\int_0^t f^*(s) ds \right)^2 U(1/t)^2 t^{-2} dt.$$

Next，通过调用加权 Hardy 不等式（定理 2.2.2 （a）），我们得出 t

$$\int_0^\infty \left(\int_0^t f^*(s) ds \right)^2 U(1/t)^2 t^{-2} dt \leqslant C \int_0^\infty \left(V(t) f^*(t) \right)^2 dt,$$

当且仅当

$$\sup_{s>0} \left(\int_s^\infty U(1/t)^2 t^{-2} dt \right)^{1/2} \left(\int_0^s V(t)^{-2} dt \right)^{1/2} < \infty.$$

该条件可以改写为：

$$\sup_{s>0} \left(\int_0^{1/s} U(t)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^s V(t)^{-2} dt \right)^{1/2} < \infty.$$

最后，利用（3.10）以及前一种情形中所采用的方法，我们可以得到所需的不等式。

3.1. **一种不确定性原理**。 不确定性原理指出，函数及其傅里叶变换不能同时局域化。概括这一现象的经典不等式是 $\mathbb{R}^n$ 中的海森堡–泡利–外尔不等式。在 [12], 中，

$$\|f\|_2^2 \leqslant C \|u \, \widehat{f}\|_q \|vf\|_p, \tag{3.11}$$

研究了适当选取权函数 v 和 u 时的这类不等式。

利用 $\mathbb{H}^n$ 上的 Pitt 不等式，我们为$C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ 函数类建立了不等式（3.11）的类似结果。该结果的灵感来自 [14, 定理 6。1]。

定理 3.1.1。 设 $1 \leqslant p, \ q \leqslant \infty$ 和 u 以及 v 为权重，且 *Pitt* 不等式 (3.2) 成立。那么有

$$\int_{\mathbb{H}^n} (f(z,t))^2 \, dz \, dt \leqslant C \left(\int_{\Omega \times \mathbb{C}^n} \left| \lambda u^{-1}(a,w) \, \tilde{f}(a,w) \right|^{q'} d\nu_2(a) \, dw \right)^{1/q'} \left(\int_{\mathbb{H}^n} |tv(z,t) f(z,t)|^p \, dz \, dt \right)^{1/p}. \tag{3.12}$$

证明。对于 $f \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$，分部积分可得

$$\int_{-\infty}^\infty |f(z,t)|^2 dt = 0 - \int_{-\infty}^\infty t \frac{\partial}{\partial t} |f(z,t)|^2$$

$$= -2\,\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} t\overline{f(z,t)}\frac{\partial}{\partial t}f(z,t)dt\right).$$

对 z 积分，得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}^n}|f(z,t)|^2dz\,dt &= -2\,\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}} t\overline{f(z,t)}\frac{\partial}{\partial t}f(z,t)dt\right)\\ &= -2\,\mathrm{Re}\left\langle\frac{\partial f}{\partial t},tf\right\rangle\\ &= -2\,\mathrm{Re}\left\langle\widetilde{\frac{\partial f}{\partial t}},\widetilde{tf}\right\rangle. \end{aligned}\tag{3.13}$$

最后一个等号由普朗歇尔定理得出。
这里回顾一下，函数 e_a 是 $T=\frac{\partial}{\partial t}$ 的特征函数，其特征值为 $i\lambda$。利用这一点，很容易验证

$$\widetilde{\frac{\partial f}{\partial t}}(a,w) = -i\lambda\tilde{f}(a,w).\tag{3.14}$$

将 (3.14) 代入 (3.13) 并应用 Pitt 不等式，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}^n}|f(z,t)|^2\,dz\,dt &= 2\ \mathrm{Re}\left(i\int_{\Omega\times\mathbb{C}^n}\lambda\,\tilde{f}(a,w)\,\overline{\widetilde{tf}(a,w)}\,dw\,d\nu_2(a)\right)\\ &= 2\ \mathrm{Re}\left(i\int_{\Omega\times\mathbb{C}^n}\left(\lambda u^{-1}\tilde{f}(a,w)\right)\overline{u\,(\widetilde{tf})(a,w)}\,dz\,d\nu_2\right)\\ &\leqslant C\,\|\lambda u^{-1}\tilde{f}\|_{q'}\,\|u(\widetilde{tf})\|_q\\ &\leqslant C\,\|\lambda u^{-1}\tilde{f}\|_{q'}\,\|vtf\|_p. \end{aligned}\tag{3.15}$$

证明至此完成。

□

4. Necessary Condition for Pitt's inequality

本节将建立一般径向权函数下 Pitt 不等式（3.2）成立的必要条件。

对于 $\mathbb{H}^n$，如果函数 $f(z,t)$ 在第一个分量上是径向的，则称其为径向函数。首先，回顾定义在 $\mathbb{H}^n$ 上的径向函数 f 的归一化斯特里希茨傅里叶变换为

$$\tilde{f}(a,w) = \frac{k!(n-1)!}{(k+n-1)!}R_k^{n-1}(-\lambda,f)e_{k,\lambda}^{n-1}(w,0),\tag{4.1}$$

其中 $a=(\lambda,(2k+n)|\lambda|)$ 并且

$$R_k^{n-1}(-\lambda,f) = \frac{k!(n-1)!}{(k+n-1)!}\int_{\mathbb{C}^n}f^{-\lambda}(z)\varphi_{k,-\lambda}^{n-1}(z)dz = \frac{k!(n-1)!}{(k+n-1)!}\int_{\mathbb{C}^n}f^{-\lambda}(z)\varphi_{k,\lambda}^{n-1}(z)dz.\tag{4.2}$$

我们首先回顾 [1, (9.5.2)、(22.16.8)]中关于Bessel函数与拉盖尔多项式零点的若干结果 L_k^{n-1} 。

设 $k \geqslant 1$ 与 $\nu \geqslant 0$。用 J_ν 表示第一类贝塞尔函数，并令$j_{\nu,s}$ 为 J_ν的 s^{th}正零点。这些零点满足交错性质

$$j_{\nu,1} < j_{\nu+1,1} < j_{\nu,2} < j_{\nu+1,2} < j_{\nu,3} < \cdots .$$

对于拉盖尔多项式 L_k^{n-1}，第一个正零点 x_1 满足

$$x_1 > \frac{j_{n-1,1}^2}{4M_{k,n}}, \quad \text{where } M_{k,n} = k + \frac{n}{2}.$$

此外， L_k^{n-1} 的导数为

$$\frac{d}{dx} L_k^{n-1}(x) = -L_{k-1}^n(x), \quad k \geqslant 1. \tag{4.3}$$

注意到， $L_{k-1}^n(x)$ 在区间上为正

$$\left[0, \frac{j_{n,1}^2}{4M_{k-1,n+1}}\right], \quad \text{where } M_{k-1,n+1} = k - 1 + \frac{n+1}{2}.$$

这是因为 $L_{k-1}^n(x)$ 的第一个正零点大于 $j_{n,}^2 4M_{k-1}^{\ 1}{}_{,\ n+1}$。此外，直接比较可得

$$\frac{j_{n-1,1}^2}{4M_{k,n}} = \frac{j_{n-1,1}^2}{4\,(k+n/2)} < \frac{j_{n-1,1}^2}{4\,(k-1+(n+1)/2)} < \frac{j_{n,1}^2}{4\,(k-1+(n+1)/2)} = \frac{j_{n,1}^2}{4M_{k-1,n+1}}.$$

因此， $L_{k-1}^n(x)$ 在.....上为正

$$\left[0, \frac{j_{n-1,1}^2}{4M_{k,n}}\right].$$

将此与（4.3）结合，可得 $L_k^{n-1}(x)$ 在区间上单调递减

$$\left[0, \frac{j_{n-1,1}^2}{4M_{k,n}}\right].$$

现在我们可以推导 Pitt 不等式成立时径向权函数所必须满足的必要条件。假设 u和 $v^{-p'}$ 均局部可积。

定理 4.1。 设 u和 v是定义在 $\Omega \times \mathbb{C}^n$和 $\mathbb{H}^n$上的函数，且 v是径向的，并假设 *Pitt* 不等式 （3.2） 对 $1 < p$、 $q < \infty$成立。则有以下必要条件：

- 对于每个 $k \geqslant 1$,

$$\sup_{s>0} \left(\int_{R_{k,s}} \int_{|w|^2 < 2\beta_k s} u\big(\lambda, (2k+n)|\lambda|, w\big)^q |\lambda|^{2n}\, dw\, d\lambda \right)^{1/q} \left(\int_{|z|^2 < 2\beta_k s} \int_{|t|<s} v(z,t)^{-p'}\, dz\, dt \right)^{1/p'} < \infty, \tag{4.4}$$

  where $\beta_k = \frac{j_{n-1,1}^2}{4M_{k,n}}$ *and* $R_{k,s} = \{(\lambda, (2k+n)|\lambda|) : |\lambda| < 1/s\}$.

- *For* $k = 0$,

$$\sup_{s>0} \left(\int_{R_{0,s}} \int_{|w|^2 < 2s} u\big(\lambda, n|\lambda|, w\big)^q |\lambda|^{2n}\, dw\, d\lambda \right)^{1/q} \left(\int_{|z|^2 < 2s} \int_{|t|<s} v(z,t)^{-p'}\, dz\, dt \right)^{1/p'} < \infty. \tag{4.5}$$

证明。 首先，固定 $k \geqslant 1$。对任意 $s>0$，考虑径向函数

$$f_k(z,t)=\begin{cases} v(z,t)^{-p'}, & \text{if } |z|^2<2\beta_k s \text{ and } |t|<s, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.6}$$

由于 $v(z,\ t)$ 是径向的，因此 $f_k(z,\ t)$ 在 $\mathbb{H}^n$上是径向的。

注意，若 $|\lambda|<1/s$ 且 $|z|^2<2\beta_k s$，则

$$\frac{1}{2}|\lambda||z|^2<\frac{1}{2s}\cdot 2\beta_k s=\beta_k.$$

因此，利用前面所证的 $L_k^{n-1}(x)$ 的递减性质，可得

$$L_k^{n-1}\Big(\frac{1}{2}|\lambda||z|^2\Big)>L_k^{n-1}(\beta_k). \tag{4.7}$$

同样，我们也有

$$e^{-\frac{1}{4}|\lambda||z|^2}>e^{-\beta_k/2}. \tag{4.8}$$

结合（4.7）和（4.8），得到

$$\varphi_{k,\lambda}^{n-1}(z)=L_k^{n-1}\left(\frac{1}{2}|\lambda||z|^2\right)e^{-\frac{1}{4}|\lambda||z|^2}>L_k^{n-1}(\beta_k)e^{-\frac{\beta_k}{2}}=B_k(\text{ say}). \tag{4.9}$$

因此，我们推出，若 $|\lambda|<1/s$ 且 $|z|^2<2\beta_k s$，则 $\varphi_k^{n-1}{}_{,\ \lambda}(z)$ 以常数 B_k 为下界。对于 f 如（4.6）中的选取，我们有

$$R_k^{n-1}(-\lambda,f)=c_{n,k}\int\limits_{|z|^2<2\beta_k s}\int\limits_{|t|<s}v(z,t)^{-p'}e^{-i\lambda t}\varphi_{k,\lambda}^{n-1}(z)dt\ dz,$$

其中 $c_{n,\ k}=\frac{k}{!(n-1)!\ (k+n-1)!}$。

接下来，取实部可得

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(R_k^{n-1}(-\lambda,f)\right)&=c_{n,k}\int\limits_{|z|^2<2\beta_k s}\int\limits_{|t|<s}v(z,t)^{-p'}\cos(\lambda t)\,\varphi_{k,\lambda}^{n-1}(z)\,dt\,dz\\ &\geqslant c_{n,k}\cos(1)\int\limits_{|z|^2<2\beta_k s}\int\limits_{|t|<s}v(z,t)^{-p'}\,\varphi_{k,\lambda}^{n-1}(z)\,dt\,dz\\ &\geqslant c_{n,k}\cos(1)\,B_k\int\limits_{|z|^2<2\beta_k s}\int\limits_{|t|<s}v(z,t)^{-p'}\,dt\,dz\\ &=B_k'\int\limits_{|z|^2<2\beta_k s}\int\limits_{|t|<s}v(z,t)^{-p'}\,dt\,dz,\end{aligned} \tag{4.10}$$

其中 $B_k'=c_{n,\ k}\cos(1)\,B_k$。

Let

$$R_{k,s}=\big\{(\lambda,(2k+n)|\lambda|):|\lambda|<1/s\big\}.$$

于是我们有

$$\left(\int\limits_{R_{k,s}}\int\limits_{|w|^2<2\beta_k s}\left|\tilde{f}(\lambda,(2k+n)|\lambda|,w)\right|^q u(\lambda,(2k+n)|\lambda|,w)^q\,|\lambda|^{2n}\,dw\,d\lambda\right)^{1/q}$$

$$= c_{n,k}\left(\int_{R_{k,s}}\int_{|w|^2<2\beta_k s} u(\lambda,(2k+n)|\lambda|,w)^q\,|R_k^{n-1}(-\lambda,f)|^q\,|e_{k,\lambda}^{n-1}(w)|^q\,|\lambda|^{2n}\,dw\,d\lambda\right)^{1/q}$$

$$= c_{n,k}\left(\int_{R_{k,s}}\int_{|w|^2<2\beta_k s} u(\lambda,(2k+n)|\lambda|,w)^q\,|R_k^{n-1}(-\lambda,f)|^q\,|\varphi_{k,\lambda}^{n-1}(w)|^q\,|\lambda|^{2n}\,dw\,d\lambda\right)^{1/q}$$

$$> C_k\left(\int_{R_{k,s}}\int_{|w|^2<2\beta_k s} u(\lambda,(2k+n)|\lambda|,w)^q\Big(\int_{|z|^2<2\beta_k s}\int_{|t|<s} v(z,t)^{-p'}\,dt\,dz\Big)^q\,|\lambda|^{2n}\,dw\,d\lambda\right)^{1/q}, \quad (4.11)$$

其中常数 C_k 与 $s>0$ 的选取无关。

应用 Pitt 不等式 (3.2) 以及 (4.11)，可得

$$C_k\left(\int_{R_{k,s}}\int_{|w|^2<2\beta_k s} u(\lambda,(2k+n)|\lambda|,w)^q\Big(\int_{|z|^2<2\beta_k s}\int_{|t|<s} v(z,t)^{-p'}\,dt\,dz\Big)^q\,|\lambda|^{2n}\,dw\,d\lambda\right)^{1/q}$$

$$\leqslant C\left(\int_{|z|^2<2\beta_k s}\int_{|t|<s} v(z,t)^{-p'p}\,v(z,t)^p\,dz\,dt\right)^{1/p}$$

$$= C\left(\int_{|z|^2<2\beta_k s}\int_{|t|<s} v(z,t)^{-p'}\,dz\,dt\right)^{1/p}. \quad (4.12)$$

上述不等式可改写为

$$\left(\int_{R_{k,s}}\int_{|w|^2<2\beta_k s} u(\lambda,(2k+n)|\lambda|,w)^q\,|\lambda|^{2n}\,dw\,d\lambda\right)^{1/q}\left(\int_{|z|^2<2\beta_k s}\int_{|t|<s} v(z,t)^{-p'}\,dt\,dz\right)^{1/p'} < C_k'. \quad (4.13)$$

对 $s>0$ 取上确界，便得到权重所需的必要条件。$k=0$ 的情形类似，此时我们定义

$$f_0(z,t)=\begin{cases} v(z,t)^{-p'}, & \text{if } |z|^2<2s \text{ and } |t|<s,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases} \quad (4.14)$$

现在我们利用 $L_0^{n-1}=1$，以及对于 $|\lambda|<1/s, |z|^2<2s$,

$$\varphi_0^{n-1}(z)=L_0^{n-1}\left(\frac{1}{2}|\lambda||z|^2\right)e^{-\frac{1}{4}|\lambda||z|^2}=e^{-\frac{1}{4}|\lambda||z|^2}>e^{-\frac{1}{2}}.$$

□

5. Pitt's inequality for polynomial type weights

在本节中，我们考察多项式型权重的条件（3.1），从而给出满足 Pitt 不等式的非平凡权重的例子。在本节中，我们用 $X\asymp Y$ 表示 $X=CY$ 对某个常数 $C>0$ 成立，并用 $X\lesssim Y$ 表示 $X\leqslant CY$ 对某个常数$C>0$成立。

5.1. 函数侧权重。对于 $\alpha > 0$，我们考虑如下权函数

$$v_\alpha(z,t) = \left(|z|^4 + 16t^2\right)^{\alpha/4}. \tag{5.1}$$

为求函数 $1/v_\alpha$, 的递减重排，我们首先计算其分布函数。对于 $M > 0$,

$$\begin{aligned} d_{1/v_\alpha}(M) &= \left|\left\{(z,t) : \left(|z|^4 + 16t^2\right)^{\alpha/4} > M\right\}\right| \\ &= \left|\left\{(z,t) : |z|^4 + 16t^2 < M^{-4/\alpha}\right\}\right|. \end{aligned}$$

此处，$|\cdot|$ 表示集合相对于 $\mathbb{H}^n$上的测度 $dz\,dt$ 的测度。因此，我们有

$$d_{1/v_\alpha}(M) \asymp M^{-\frac{2(n+1)}{\alpha}}.$$

于是，$1/v_\alpha$ 的递减重排为

$$\begin{aligned} (1/v_\alpha)^*(t) &= \inf\left\{M > 0 : d_{1/v}(M) \leqslant t\right\} \\ &\asymp t^{-\frac{\alpha}{2(n+1)}}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.2. 傅里叶变换侧权重。我们考虑傅里叶变换侧的两个权重。对于 σ，$\rho > 0$，考虑 $\Omega \times \mathbb{C}^n$ 上由下式给出的两个函数

(1)

$$u_\rho(a,w) = u\left(\lambda, (2k+n)|\lambda|, w\right) = \begin{cases} (|a| + |w|)^{-\rho} & \text{for } w \neq 0, \lambda \neq 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{5.3}$$

where $|a| = (2k+n+1)|\lambda|$.

(2)

$$u_{\sigma,\rho}(a,w) = u\left(\lambda, (2k+n)|\lambda|, w\right) = \begin{cases} ((2k+n)|\lambda|)^{-\sigma}\,|w|^{-\rho} & \text{for } w \neq 0, |\lambda| > 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5.4}$$

我们需要求 u_ρ 和 $u_{\sigma,\ \rho}$的递减重排。记 $|\cdot|$ 为 $\Omega \times \mathbb{C}^n$ 的子集相对于测度 $d\nu_2\,dw$ 的测度。对于 $M > 0$，注意到

$$\{(a,w) : u_\rho(a,w) > M\} \subseteq \{(a,w) : |w| < M^{-1/\rho}, (2k+n)|\lambda| < M^{-1/\rho}\}.$$

由此可得

$$\begin{aligned} d_{u_\rho}(M) &= |\{((\lambda,(2k+n)|\lambda|),w) : u_\rho(a,w) > M\}| \\ &\leqslant \left|\left\{((\lambda,(2k+n)|\lambda|),w) : |w| < M^{-1/\rho}, (2k+n)|\lambda| < M^{-1/\rho}\right\}\right| \\ &\asymp M^{-(4n+1)/\rho}. \end{aligned}$$

根据定义，u_ρ 的递减重排为

$$\begin{aligned} u_\rho^*(t) &= \inf\{M > 0 : d_{u_\rho}(M) \leqslant t\} \\ &\lesssim t^{-\rho/(4n+1)}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

我们还求出了函数 $u_{\sigma,\rho}$ 的递减重排。对于 $M > 0$,

$$d_{u_{\sigma,\rho}}(M) = \left|\left\{((\lambda,(2k+n)|\lambda|),w) : ((2k+n)|\lambda|)^{-\sigma}\,|w|^{-\rho} > M, |\lambda| > 1\right\}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\left\{((\lambda,(2k+n)|\lambda|),w) : |w|^{\rho} < M^{-1}\left((2k+n)|\lambda|\right)^{-\sigma}, |\lambda|>1\right\}\right| \\
&\asymp M^{-2n/\rho} \int\limits_{|\lambda|>1} \sum_{k} \left(\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}\right)^{2} (2k+n)^{-2n\sigma/\rho} |\lambda|^{-2n\sigma/\rho} |\lambda|^{2n} d\lambda \\
&\asymp M^{-2n/\rho},
\end{aligned}
$$

在 $\sigma > \frac{\rho(2n+1)}{2n}$ 的条件下。

根据定义，$u_{\sigma,\ \rho}$ 的递减重排为

$$
\begin{aligned}
u^{*}_{\sigma,\rho}(t) &= \inf\{M>0 : d_{u_{\sigma,\rho}}(M) \leqslant t\} \\
&\asymp t^{-\rho/2n}. \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

当 $\sigma > \frac{\rho(2n+1)}{2n}$ 时。

5.3. **权重的充分条件**。 利用权重的递减重排，我们现在使用定理 3.1确定权重的条件，使 Pitt 不等式（3.2）成立。我们考虑两对权重 v_{α},u_{ρ} 和 v_{α},$u_{\sigma,\ \rho}$。

定理 5.3.1. 设 $1 < p \leqslant q < \infty$。则不等式 (3.2) 对权重 u_{ρ} 和v_{α} 在下列条件成立时满足

$$
0<\alpha,\ 0<\rho,\ \alpha p' < 2(n+1),\ q\rho < 4n+1,
$$

and

$$
-\frac{\alpha}{2(n+1)} + \frac{1}{p'} + \frac{\rho}{4n+1} - \frac{1}{q} = 0.
$$

证明。 记u_{ρ} 的递减重排为 U， $1/v_{\alpha}$ 的递减重排为 $1/V$。

我们找出关于 α, ρ 的条件，使得（3.1）成立，即

$$
\sup_{s>0} \left(\int_0^{1/s} U(t)^q dt\right)^{1/q} \left(\int_0^{s} V(t)^{-p'} dt\right)^{1/p'} < \infty.
$$

利用（5.2），我们有

$$
\begin{aligned}
\left(\int_0^{s} V(t)^{-p'} dt\right)^{1/p'} &\asymp \left(\int_0^{s} t^{-\frac{\alpha p'}{2(n+1)}} dt\right)^{1/p'} \\
&\asymp s^{-\frac{\alpha}{2(n+1)}+\frac{1}{p'}},
\end{aligned}
$$

只要

$$
\frac{\alpha p'}{2(n+1)} < 1. \qquad (5.7)
$$

类似地，利用（5.5），我们有

$$
\left(\int_0^{1/s} U(t)^q dt\right)^{1/q} \lesssim \left(\int_0^{1/s} t^{-\frac{q\rho}{4n+1}} dt\right)^{1/q}
$$

$$\asymp s^{\frac{\rho}{4n+1}-\frac{1}{q}},,$$

只要

$$\frac{q\rho}{4n+1}<1. \tag{5.8}$$

因此我们推得,

$$\sup_{s>0}\left(\int_0^{1/s}U(t)^q dt\right)^{1/q}\left(\int_0^{s}V(t)^{-p'}dt\right)^{1/p'}\lesssim \sup_{s>0}s^{-\frac{\alpha}{2(n+1)}+\frac{1}{p'}+\frac{\rho}{4n+1}-\frac{1}{q}}.$$

上述量有限当且仅当

$$-\frac{\alpha}{2(n+1)}+\frac{1}{p'}+\frac{\rho}{4n+1}-\frac{1}{q}=0. \tag{5.9}$$

证明至此完成。 □

下一个定理给出了 Pitt 不等式（3.2）对权重和,ρ成立的充分条件。

定理 5.3.2. 设 $1<p\leqslant q<\infty$。若满足以下条件，则权重 $u_{\sigma,\rho}$ 和v_α 满足不等式 (3.2)

$$0<\alpha,\ 0<\sigma,\ 0<\rho,\ \rho(2n+1)<2n\sigma,\ \alpha p'<2(n+1),\ q\rho<2n,$$

and

$$-\frac{\alpha}{2(n+1)}+\frac{1}{p'}+\frac{\rho}{2n}-\frac{1}{q}=0.$$

证明。 按照前一定理的相同步骤，我们将 $u_{\sigma,\rho}$ 的递减重排记为 U，将 $1/v_\alpha$ 的递减重排记为 $1/V$。我们有如下估计

$$\left(\int_0^{s}V(t)^{-p'}dt\right)^{1/p'}\asymp s^{-\frac{\alpha}{2(n+1)}+\frac{1}{p'}},$$

其中

$$\frac{\alpha p'}{2(n+1)}<1. \tag{5.10}$$

同样，利用 $u_{\sigma,\rho}$ 的递减重排，我们得到

$$\left(\int_0^{1/s}U(t)^q dt\right)^{1/q}\asymp\left(\int_0^{1/s}t^{-\frac{q\rho}{2n}}dt\right)^{1/q}\asymp s^{\frac{\rho}{2n}-\frac{1}{q}},$$

已提供

$$\frac{q\rho}{2n}<1. \tag{5.11}$$

因此，我们有

$$\sup_{s>0}\left(\int_0^{1/s} U(t)^q dt\right)^{1/q}\left(\int_0^{s} V(t)^{-p'} dt\right)^{1/p'} \asymp \sup_{s>0} s^{-\frac{\alpha}{2(n+1)}+\frac{1}{p'}+\frac{\rho}{2n}-\frac{1}{q}}.$$

上述上确界有限，当且仅当

$$-\frac{\alpha}{2(n+1)}+\frac{1}{p'}+\frac{\rho}{2n}-\frac{1}{q}=0. \tag{5.12}$$

□

5.4. **权重的必要条件**。 在本小节中，我们利用定理 4.1 推导权重的必要条件。注意，式（5.1）中定义的权函数在 $\mathbb{H}^n$ 上是径向的。与上一小节一样，我们首先考虑一对权 v_α、u_ρ。

定理 5.4.1。 假设对于权重 v_α、 u_ρ，*Pitt* 不等式 (3.2) 对 $1<p$、 $q<\infty$成立。那么以下条件必然成立：

$$0<\alpha,\ 0<\rho,\ \alpha p'<2(n+1),$$

and

$$-\rho<-\frac{(n+1)}{q}-\frac{\alpha}{2}+\frac{(n+1)}{p'}<\frac{\rho}{2}.$$

证明。 固定 $1<p$、 $q<\infty$ 。现在回顾定理 4.1，其中关于函数 u_ρ 和 v_α 的必要条件指出，对每个 $k\geqslant 1$,

$$\sup_{s>0}\left(\int_{R_{k,s}}\int_{|w|^2<2\beta_k s} u_\rho((\lambda,(2k+n)|\lambda|,w)^q|\lambda|^{2n}dw\,d\lambda\right)^{1/q}\left(\int_{|z|^2<2\beta_k s}\int_{|t|<s} v_\alpha(z,t)^{-p'}dz\,dt\right)^{1/p'}<\infty,$$

其中 $\beta_k=\frac{j_{n-1}^2}{4M_k}$, $R_{k,s}=\{(\lambda,(2k+n)|\lambda|):|\lambda|<1/s\}$ 且对于 $k=0$,

$$\sup_{s>0}\left(\int_{R_{0,s}}\int_{|w|^2<2s} u_\rho((\lambda,n|\lambda|,w)^q|\lambda|^{2n}dw\,d\lambda\right)^{1/q}\left(\int_{|z|^2<2s}\int_{|t|<s} v_\alpha(z,t)^{-p'}dz\,dt\right)^{1/p'}<\infty.$$

令 $k\geqslant 1$。为推导这些条件，我们首先计算上述表达式中出现的积分。接下来，我们求出其下界

$$I_{k,s}=\left(\int_{R_{k,s}}\int_{|w|^2<2\beta_k s} u_\rho((\lambda,(2k+n)|\lambda|,w)^q|\lambda|^{2n}dw\,d\lambda\right)^{1/q}.$$

对于 $|\lambda|<1/s$ 和 $|w|<\sqrt{2\beta_k}s$，可以看出

$$(u_\rho(a,w))^q=((2k+n+1)|\lambda|+|w|)^{-\rho q}\geqslant((2k+n+1)/s+\sqrt{2\beta_k s})^{-\rho q}$$

Thus

$$I_{k,s} \geqslant \left(\frac{2k+n+1}{s}+\sqrt{2\beta_k s}\right)^{-\rho}\left(\int\limits_{R_{k,s}}\int\limits_{|w|^2<2\beta_k s}|\lambda|^{2n}dw\ d\lambda\right)^{1/q}$$
$$\asymp \left(\frac{2k+n+1}{s}+\sqrt{2\beta_k s}\right)^{-\rho} s^{-\frac{(n+1)}{q}}.$$

此外，我们还有

$$J_{k,s} = \left(\int\limits_{|z|^2<2\beta_k s}\int\limits_{|t|<s} v_\alpha(z,t)^{-p'}dz\ dt\right)^{1/p'}$$
$$= \left(\int\limits_{|z|^2<2\beta_k s}\int\limits_{|t|<s} (|z|^4+16t^2)^{-p'\alpha/4}dz\ dt\right)^{1/p'}$$
$$\asymp s^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{n+1}{p'}}.$$

当 $\alpha p' < 2(n+1)$ 时，此结论成立。
结合 $I_{k,\ s}$ 和 $J_{k,\ s}$ 的估计，可得

$$\sup_{s>0}\left(\int\limits_{R_{k,s}}\int\limits_{|w|^2<2\beta_k s} u_\rho((\lambda,(2k+n)|\lambda|,w)^q|\lambda|^{2n}dw\ d\lambda\right)^{1/q}\left(\int\limits_{|z|^2<2\beta_k s}\int\limits_{|t|<s} v_\alpha(z,t)^{-p'}dz\ dt\right)^{1/p'}$$
$$\gtrsim \sup_{s>0} s^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{n+1}{p'}}\left(\frac{2k+n+1}{s}+\sqrt{2\beta_k s}\right)^{-\rho} s^{-\frac{(n+1)}{q}}$$

上述量有限当且仅当

$$-\rho < -\frac{(n+1)}{q}-\frac{\alpha}{2}+\frac{(n+1)}{p'} < \frac{\rho}{2}.$$

□

注 5.4.2. 在推导前述定理中的必要条件时，我们使用了积分的一个下界。虽然这种方法确定了必须满足的条件，但无法涵盖通过显式计算积分所能得到的所有必要约束。

下一个定理讨论权函数对 v_α 和 $u_{\sigma,\ \rho}$ 的必要条件。

定理 5.4.3。 假设对于权重 $u_{\sigma,\ \rho}$，v_α *Pitt* 不等式 (3.2) 对 $1<p,\ q<\infty$成立。那么以下条件必然成立：

$$0<\alpha,\ 0<\sigma,\ 0<\rho,\ \alpha p'<2(1+n),\ q\rho<2n,$$

and

$$-\frac{\alpha}{2}+\frac{n+1}{p'}+\frac{2n-q\rho}{2q}+\frac{-2n+q\sigma-1}{q}\geqslant 0,\quad \textit{if } q\sigma<2n+1,$$
$$-\frac{\alpha}{2}+\frac{n+1}{p'}+\frac{2n-q\rho}{2q}>0,\quad \textit{if } q\sigma=2n+1,$$
$$-\frac{\alpha}{2}+\frac{n+1}{p'}+\frac{2n-q\rho}{2q}\geqslant 0,\quad \textit{if } q\sigma>2n+1.$$

证明。固定 $1<p,\ q<\infty$。令 $k\geqslant 1$。为推导必要条件，我们首先计算式（4.4）中出现的积分。对于 $s>0$，令

$$\begin{aligned} I_{k,s} &= \left(\int_{R_{k,s}}\int_{|w|^2<2\beta_k s} u_{\sigma,\rho}((\lambda,n|\lambda|,w)^q|\lambda|^{2n}dw\ d\lambda\right)^{1/q}\\ &\asymp \begin{cases}\left(\displaystyle\int_{1<|\lambda|<1/s}\int_{|w|^2<2\beta_k s}|w|^{-q\rho}|\lambda|^{-q\sigma}|\lambda|^{2n}dw\ d\lambda\right)^{1/q} & \text{if } s<1,\\ 0 & \text{if } s\geqslant 1\end{cases}\\ &\asymp \begin{cases}\left(s^{(2n-q\rho)/2}\displaystyle\int_{1<|\lambda|<1/s}|\lambda|^{2n-q\sigma}d\lambda\right)^{1/q} & \text{if } s<1,\\ 0 & \text{if } s\geqslant 1.\end{cases}\end{aligned}$$

上述结论在 $q\rho<2n$ 时成立。因此，我们只需考虑 $s<1$ 的情形。此外，

$$\int_{1<|\lambda|<1/s}|\lambda|^{2n-q\sigma}d\lambda=\begin{cases}s^{-2n+q\sigma-1}-1 & \text{if } 2n-q\sigma\neq -1,\\ \log(1/s) & \text{if } 2n-q\sigma=-1.\end{cases}$$

因此，对于 $s<1$,

$$I_{k,s}\asymp\begin{cases}\left(s^{2n-q\rho)/2}\left(\frac{s^{-2n+q\sigma-1}-1}{2n-q\sigma+1}\right)\right)^{1/q} & \text{if } 2n-q\sigma\neq -1,\\ \left(s^{2n-q\rho)/2}\log(1/s)\right)^{1/q} & \text{if } 2n-q\sigma=-1.\end{cases}$$

利用定理 5.4.1 的证明，我们有

$$\begin{aligned} J_{k,s} &= \left(\int_{|z|^2<2\beta_k s}\int_{|t|<s} v_\alpha(z,t)^{-p'}dz\ dt\right)^{1/p'}\\ &\asymp s^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{n+1}{p'}},\end{aligned}$$

若 $\alpha p'<2(n+1)$，则成立。

再次结合$I_{k,s}$ 和 $J_{k,s}$的估计，我们推得

$$\sup_{s>0}\left(\int_{R_{k,s}}\int_{|w|^2<2\beta_k s} u_{\sigma,\rho}(\lambda,(2k+n)|\lambda|,w)^q\,|\lambda|^{2n}\,dw\,d\lambda\right)^{1/q}\left(\int_{|z|^2<2\beta_k s}\int_{|t|<s} v_\alpha(z,t)^{-p'}\,dz\,dt\right)^{1/p'}$$

$$= \sup_{0<s<1} \left(\int_{R_{k,s}} \int_{|w|^2<2\beta_k s} u_{\sigma,\rho}(\lambda,(2k+n)|\lambda|,w)^q\,|\lambda|^{2n}\,dw\,d\lambda \right)^{1/q} \left(\int_{|z|^2<2\beta_k s} \int_{|t|<s} v_\alpha(z,t)^{-p'}\,dz\,dt \right)^{1/p'}$$

$$\asymp \sup_{0<s<1} \begin{cases} s^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{n+1}{p'}+\frac{2n-q\rho}{2q}} \left(\frac{s^{-2n+q\sigma-1}-1}{2n-q\sigma+1}\right)^{1/q} & \text{if } 2n-q\sigma \neq 1, \\ s^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{n+1}{p'}+\frac{2n-q\rho}{2q}} (\log(1/s))^{1/q} & \text{if } 2n-q\sigma = -1. \end{cases} \tag{5.13}$$

最后，为了总结上述量有限的条件，我们将研究分为三种情形。

（1）情形： $2n-q\sigma > -1$

在此情形下，（5.13）中的上确界有限当且仅当

$$-\frac{\alpha}{2}+\frac{n+1}{p'}+\frac{2n-q\rho}{2q}+\frac{-2n+q\sigma-1}{q} \geqslant 0. \tag{5.14}$$

（2）情形： $2n-q\sigma < -1$

在此情形下，（5.13）中的上确界有限当且仅当

$$-\frac{\alpha}{2}+\frac{n+1}{p'}+\frac{2n-q\rho}{2q} \geqslant 0. \tag{5.15}$$

（3）情形： $2n-q\sigma = -1$

在这种情况下，(5.13) 中的上确界有限，当且仅当

$$-\frac{\alpha}{2}+\frac{n+1}{p'}+\frac{2n-q\rho}{2q} > 0. \tag{5.16}$$

□

注 5.4.4. 尽管我们已经得到了上述权函数选择的充分和必要条件，但我们还没有得到像 $\mathbb{R}^n$情形下那样的充要结果。

在欧几里得情形下，若令 $f_r(x)=f(rx),\ r>0$则 $\hat{}\ f_r(\xi)=r^{-n}\hat{}f(r^{-1}\xi).$。这使我们能够得到加权范数不等式的一个必要条件

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^q u(\xi)d\xi\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p v(x)dx\right)^{1/p},$$

当 u 和 v 在上述膨胀下都是齐次的。我们可以为 Strichartz 傅里叶变换证明类似的结果。

根据定义，很容易看出 Strichartz 傅里叶变换具有以下性质。设 $\delta_r f(z,\ t)=f(rz,\ r^2t)$ 是函数 $f.$ 的非各向同性膨胀。由定义可得 $\widetilde{\delta_r f}(a,\ z)=r^{-Q}\tilde{f}(r^{-2}a,\ rz)=:\ r^{-Q}D_{r^{-1}}\tilde{f}(a,\ z).$

定理 5.4.5。 设权函数 u 和 v 满足 $\delta_r v(z、\ t)=r^\alpha v(z、\ t)$ 以及 $D_r u(a,\ z)=r^\beta u(a,\ z).$ 不等式（3.2）成立的必要条件是

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1-\frac{(\alpha+\beta)}{Q}.$$

证明。 设 u和 v 为满足假设中所给条件的权函数，并且 Pitt 不等式（3.2）成立。为了建立关于 α 和 β的条件，我们在（ f 中用 $\delta_r f$ 替换3.2）。通过变量代换，容易看出

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{H}^n} |\delta_r f(z,t)|^p\, v(z,t)^p\, dz\, dt\right)^{1/p} &= \left(\int_{\mathbb{H}^n} \left|f(rz,r^2t)\right|^p\, v(z,t)^p\, dz\, dt\right)^{1/p}\\ &= \left(\int_{\mathbb{H}^n} r^{-Q}\, |f(z,t)|^p\, (\delta_{r^{-1}} v(z,t))^p\; dz\, dt\right)^{1/p}\\ &= \left(\int_{\mathbb{H}^n} r^{-Q-p\alpha}\, |f(z,t)|^p\, v(z,t)^p\, dz\, dt\right)^{1/p}\\ &= r^{-Q/p-\alpha}\left(\int_{\mathbb{H}^n} |f(z,t)|^p\, v(z,t)^p\, dz\, dt\right)^{1/p}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

此外，利用关系 $\widetilde{\delta_r f}(a,z) = r^{-Q}\tilde{f}(r^{-2}a, rz)$ 并进行变量代换，我们得到

$$\begin{aligned}\left(\int_{\Omega\times\mathbb{C}^n} \left|\widetilde{\delta_r f}(a,w)\right|^q u(a,w)^q dw\; d\nu_2(a)\right)^{1/q} &= \left(\int_{\Omega\times\mathbb{C}^n} r^{-qQ}\left|\tilde{f}(r^{-2}a, rw)\right|^q u(a,w)^q dw\; d\nu_2(a)\right)^{1/q}\\ &= \left(\int_{\Omega\times\mathbb{C}^n} r^{-qQ+Q}\left|\tilde{f}(a,w)\right|^q (D_r u(a,w))^q\, dw\; d\nu_2(a)\right)^{1/q}\\ &= \left(\int_{\Omega\times\mathbb{C}^n} r^{-qQ+Q+q\beta}\left|\tilde{f}(a,w)\right|^q u(a,w)^q dw\; d\nu_2(a)\right)^{1/q}\\ &= r^{Q/q-Q+\beta}\left(\int_{\Omega\times\mathbb{C}^n} \left|\tilde{f}(a,w)\right|^q u(a,w)^q dw\; d\nu_2(a)\right)^{1/q}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

我们知道，式（3.2）中出现的常数与 f 的选择无关。因此，由（5.17）和（5.18），我们推得

$$-\frac{Q}{p} - \alpha = \frac{Q}{q} - Q + \beta,$$

这意味着必要条件

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 - \frac{(\alpha+\beta)}{Q}.$$

□

6. Paley's Inequality

在 $\mathbb{R}^n$的背景下，Hausdorff–Young 不等式和 Pitt 不等式分别考察傅里叶变换的 $L^p - L^{p'}$和 $L^p - L^q$ 有界性。相比之下，Paley 不等式讨论傅里叶变换从 L^p 到 L^p_ν 关于指定测度 ν的有界性。1960 年，H¨ormander [19,定理 1。10], 建立了以下结果:

定理 6.1. 设 ϕ 为 $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 中的正可测函数。则对 $1 < p \leqslant 2$，我们有

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^p \phi(\xi)^{2-p} d\xi \right)^{1/p} \leqslant C_p \|f\|_p.$$

这里，$|\cdot|$ 表示关于普朗歇尔测度的测度。

我们旨在建立海森堡群上斯特里查茨傅里叶变换的相应结果，为此我们采用马尔琴凯维奇插值定理 [5, 定理 4.13，推论 4.14]。

定理 6.2. 设 $(X、\ \mu)$ 与 $(Y、\ \nu)$ 为两个测度空间，且 $1 \leqslant p_1 < p_2 < \infty$ 与 $1 \leqslant q_1、\ q_2 \leqslant \infty、$ $q_1 \neq q_2、\ p_i \leqslant q_i、\ \{i = 1、\ 2\}$。假设 T 是 $L^{p_1,1}(X、\ \mu) + L^{p_2,1}(X、\ \mu)$上的拟线性算子，取值于 $(Y、\ \nu)$，使得 T 同时为弱型 $(p_1、\ q_1)$ 与 $(p_2、\ q_2)$，则对任意$t \in (0、\ 1)$，以及

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}, \ \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_1} + \frac{t}{q_2},$$

该算子是从 L^p 到 L^q 的有界算子。

现在陈述 Strichartz 傅里叶变换的 Paley 不等式。

定理 6.3. 设 ϕ 是 $\Omega \times \mathbb{C}^n$ 上的正函数，并假设 $\phi \in L^{1,\infty}(\Omega \times \mathbb{C}^n, dw\ d\nu_2)$。那么对于 $1 < p \leqslant 2$，存在一个常数 C_p，使得

$$\left(\int_{\Omega \times \mathbb{C}^n} \left| \tilde{f}(a,w) \right|^p \phi^{2-p}(a,w) dw\ d\nu_2(a) \right)^{1/p} \leqslant C_p \|f\|_p. \tag{6.1}$$

证明. 我们沿用 $\mathbb{R}^n$中的思路证明此定理。注意，对于 $p = 2$，该不等式可直接由普朗歇尔定理推出。现在，固定 $1 < p < 2$，并考虑定义在 $L^{1,1}(\mathbb{H}^n) + L^{2,1}(\mathbb{H}^n)$上的算子 T，其定义如下:

$$T(f) = \frac{\tilde{f}}{\phi}, \tag{6.2}$$

其取值属于测度空间 $(\Omega \times \mathbb{C}^n; \phi^2(a,w) dw\ d\nu_2)$上的可测函数空间。注意，对于 $f \in L^2(\mathbb{H}^n)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times \mathbb{C}^n} (T(f)(a,w))^2 \phi^2(a,w) dw\ d\nu_2(a) &= \int_{\Omega \times \mathbb{C}^n} \left(\tilde{f}(a,w) \right)^2 dw\ d\nu_2(a) \\ &= \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

He因此，算子 T 属于强型 $(2,\ 2)$，进而也属于弱型 $(2,\ 2)$.

接下来，我们证明 T 属于弱型 $(1,\ 1)$，这等价于证明

$$|\{(a,w):|Tf(a,w)|>s\}|_{\phi^2}\leqslant C'\frac{\|f\|_1}{s},\ s>0. \tag{6.3}$$

这里，$|\cdot|_{\phi^2}$ 表示相对于 $\phi^2(a,\ w)$的加权测度。注意，假设$\phi\in L^{1,\ \infty}(\Omega\ \times\mathbb{C}^n)$。因此，存在一个常数 C 使得

$$|\{(a,w):\phi(a,w)>s\}|\leqslant\frac{C}{s}. \tag{6.4}$$

利用估计（2.6），我们得到

$$|Tf(a,w)|=\left|\frac{\tilde{f}(a,w)}{\phi(a,w)}\right|\leqslant c_{n,1}\frac{\|f\|_1}{\phi(a,w)}.$$

因此，若

$$|Tf(a,w)|>s,$$

then

$$\phi(a,w)\leqslant c_{n,1}\frac{\|f\|_1}{s}.$$

因此，为了得到估计（6.3），我们证明对 $\sigma>0$,

$$|\{(a,w):\phi(a,w)\leqslant\sigma\}|_{\phi^2}\leqslant 2K\sigma, \tag{6.5}$$

其中，常数 K 与 σ无关。由 [21] 中的蛋糕层表示定理以及（6.4），可得

$$\begin{aligned}
|\{(a,w):\phi(a,w)\leqslant\sigma\}|_{\phi^2}&=\int\limits_{\phi(a,w)\leqslant\sigma}\phi^2(a,w)dw\ d\nu_2(a)\\
&=\int\limits_0^\infty 2t\,|\{(a,w):t<\phi\leqslant\sigma\}|\,dt\\
&=\int\limits_0^\sigma 2t(m(t)-m(\sigma))dt,\ \text{here } m(t)=|\{(a,w):\phi(a,w)>t\}|\\
&=\int\limits_0^\sigma 2tm(t)dt-\sigma^2m(\sigma)\\
&\leqslant\int\limits_0^\sigma 2tm(t)dt\leqslant 2C\sigma.
\end{aligned}$$

这就证明了（6.5）中的结论。因此，算子 T 是弱型 $(1,1)$。应用马尔琴凯维奇插值定理（定理 6.2）即可得到所需结果。□

7. Hardy's inequality and Pitt's inequality

本节将探讨在某些特定权函数选择下，Pitt 不等式与 Hardy不等式之间的关系。对于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，正如引言中所述， $\mathbb{R}^n$ 中的经典 Pitt 不等式指出：

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-\sigma q} |\widehat{f}(\xi)|^q \, d\xi \right)^{1/q} \leqslant C_\sigma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

当且仅当

$$0 \leqslant \sigma < \frac{n}{q}, \qquad 0 \leqslant \alpha < \frac{n}{p'}, \qquad \text{and} \qquad \alpha - \sigma = n \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right).$$

当 $p = q = 2$ 时，不等式化简为

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-2\sigma} |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{1/2} \leqslant C_\sigma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2\sigma} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}, \tag{7.1}$$

对于 $0 \leqslant \sigma < n/2.$，将上式中的 f 替换为其傅里叶变换，可得

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2\sigma} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \leqslant C_\sigma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\sigma} |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{1/2}. \tag{7.2}$$

我们可以用拉普拉斯算子的分数次幂来改写上述两个不等式。不等式（7.1）导出

$$\langle (-\Delta)^{-\sigma} f, f \rangle \leqslant C_\sigma \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2\sigma} |f(x)|^2 \, dx. \tag{7.3}$$

此外，不等式 (7.2) 可化简为

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2\sigma} |f(x)|^2 \, dx \leqslant C_\sigma \langle (-\Delta)^{\sigma} f, f \rangle, \tag{7.4}$$

这就是拉普拉斯算子的分数次幂的 Hardy不等式。反向推导后，我们可以通过 Hardy不等式得出 Pitt 不等式。我们可以将其概括为以下命题。

命题 7.1. 对于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 和 $0 \leqslant \sigma < n/2,$，*Pitt* 不等式

$$\langle (-\Delta)^{-\sigma} f, f \rangle \leqslant C_\sigma \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2\sigma} |f(x)|^2 \, dx.$$

等价于 *Hardy*不等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2\sigma} |f(x)|^2 \, dx \leqslant C_\sigma \langle (-\Delta)^{\sigma} f, f \rangle.$$

这表明了 Pitt 不等式与 Hardy不等式之间的联系。

不等式（7.3）也可以通过以下论证从不等式（7.4）推出。

$$\langle(-\Delta)^{\sigma} f, f\rangle^2 \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{\sigma} f(x)|^2 |x|^{2\sigma}\, dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2\sigma} |f(x)|^2\, dx\right).$$

现在应用 Hardy不等式，上式可写为

$$\langle(-\Delta)^{\sigma} f, f\rangle \leqslant C_{\sigma}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{\sigma} f(x)|^2 |x|^{2\sigma}\, dx\right).$$

最后，将 f 替换为 $(-\Delta)^{-\sigma} f$，即可得到所需结果。

对于海森堡群，作者在 [26] 中为非齐次权和齐次权情形建立了海森堡群上的 Hardy不等式的若干版本。首先，他们针对次拉普拉斯算子的共形不变分数次幂建立了该不等式，记为 $\mathcal{L}_s$。算子 $\mathcal{L}_s$ 自然出现在海森堡群上的 CR几何背景中。更多细节可参见 [7, 15] 。我们在此回顾 $\mathcal{L}_s$ 的定义。

对于定义在 $\mathbb{H}^n$ 上的函数 f，以及 $\lambda \in \mathbb{R}^*$，我们将其通常的傅里叶变换记作 $\widehat{f}(\lambda)$ 。该变换是算子值的，相关细节可见 [32]。傅里叶变换作用于 $\mathcal{L}f$ 上为

$$\widehat{(\mathcal{L}f)}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda) H(\lambda).$$

利用 Hermite算子 $H(\lambda)$ 的谱分解，次拉普拉斯算子 $\mathcal{L}$ 的谱分解可写为

$$\mathcal{L}f(z,t) = (2\pi)^{-n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (2k+n)|\lambda| f^{\lambda} * \varphi_k^{\lambda}(z)\right) e^{-i\lambda t} |\lambda|^n d\lambda.$$

次拉普拉斯算子的分数次幂以一种标准方式通过谱分解定义为

$$\mathcal{L}^s f(z,w) = (2\pi)^{-n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} ((2k+n)|\lambda|)^s f^{\lambda} * \varphi_k^{\lambda}(z)\right) e^{-i\lambda w} |\lambda|^n d\lambda.$$

注意到 $\widehat{(\mathcal{L}^s f)}(\lambda) = f(\lambda) H^s(\lambda)$。

对于 $0 \leqslant s < (n+1)$，算子 $\mathcal{L}_s$ 定义为

$$\mathcal{L}_s f(z,w) = (2\pi)^{-n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (2|\lambda|)^s \frac{\Gamma\left(\frac{2k+n}{2} + \frac{1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+n}{2} + \frac{1-s}{2}\right)} f^{\lambda} * \varphi_k^{\lambda}(z)\right) e^{-i\lambda w} |\lambda|^n d\lambda. \tag{7.5}$$

对中心变量作傅里叶逆变换，得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_s f(z,w) e^{i\lambda w} dw = (2\pi)^{-n} |\lambda|^n \sum_{k=0}^{\infty} (2|\lambda|)^s \frac{\Gamma\left(\frac{2k+n}{2} + \frac{1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+n}{2} + \frac{1-s}{2}\right)} f^{\lambda} * \varphi_k^{\lambda}(z). \tag{7.6}$$

众所周知，算子 $\mathcal{L}_s$ 存在显式基本解 [11]。

受 $\mathbb{R}^n$情形的启发，我们推导出不等式（7.3）的一个类似结果，适用于非零函数$f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$ 和 $p = q = 2$。

我们从以下内容开始

$$\langle \mathcal{L}_{-s} f, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1} \langle L_{-s}^{\lambda} f^{\lambda}, f^{\lambda}\rangle \, d\lambda$$

其中 $L_{-s}^{\lambda} f^{\lambda} = (\mathcal{L}_{-s} f)^{\lambda}$and 由下式明确给出

$$L_{-s}^{\lambda} f^{\lambda}(z) = (2|\lambda|)^{-s} (2\pi)^{-n} |\lambda|^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{2k+n+1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+n+1+s}{2}\right)} f^{\lambda} *_{\lambda} \varphi_{k,\lambda}^{n-1}(z). \tag{7.7}$$

对于 $0 < s < 1$，我们使用麦克唐纳函数 [10] 的以下展开式

$$\pi^{-1/2} 2^{s+n-1} \frac{\Gamma(\frac{n-1-s}{2})}{\Gamma(s)} (|\lambda||z|^2)^{-(n-s)/2} K_{(n-s)/2}\left(\frac{|\lambda|}{2}|z|^2\right) = \frac{2}{\Gamma(n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{2k+n+1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+n+1+s}{2}\right)} \varphi_{k,\lambda}^{n-1}(z). \tag{7.8}$$

利用这一点，我们得到

$$L_{-s}^{\lambda} f^{\lambda}(z) = (2|\lambda|)^{-s} (2\pi)^{-n} |\lambda|^{n} \, f^{\lambda} *_{\lambda} k_s(z)$$

其中核 k_s 由下式给出

$$k_s(z) = \pi^{-1/2} 2^{s+n-1} \frac{\Gamma(n)\Gamma(\frac{(n-1-s)}{2})}{\Gamma(s)} (|\lambda||z|^2)^{-(n-s)/2} K_{(n-s)/2}\left(\frac{|\lambda|}{2}|z|^2\right)$$

由 [1]， 对于 $y > 0$ ，麦克唐纳函数 K_{ν} 的积分表示为

$$K_{\nu}(y) = \frac{\Gamma(\nu + 1/2)}{\Gamma(1/2)} (2y)^{\nu} \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{(t^2 + y^2)^{\nu+1/2}} \, dt.$$

利用右侧积分的界，我们得到如下估计

$$K_{\nu}(y) \leqslant \frac{\Gamma(\nu + 1/2)}{\Gamma(1/2)} (2y)^{\nu} y^{-2\nu} \int_0^{\infty} (t^2 + 1)^{-\nu-1/2} \, dt.$$

Now,

$$2\int_0^{\infty} (t^2 + 1)^{-\nu-1/2} \, dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{-1/2}}{(1+t)^{\nu+1/2}} \, dt = B(1/2, \nu) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu + 1/2)}.$$

由此得到估计 $K_{\nu}(y) \leqslant \Gamma(\nu) 2^{\nu-1} y^{-\nu}$。
随后，由此可推得 $k_s(z) \leqslant d_{n,\ s}(|\lambda|)^{-n+s} |z|^{-2n+2s}$ 其中

$$d_{n,s} = 2^{2n-2} \frac{\Gamma(\frac{n-1-s}{2})\Gamma(n)\Gamma(n-s)}{\Gamma(s)\Gamma(1/2)}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
\left|\langle L_{-s}^{\lambda} f^{\lambda}, f^{\lambda}\rangle\right| &= |\lambda|^{n-s} \int_{\mathbb{C}^n} |f^{\lambda}| * k_s(z) |f^{\lambda}|(z) dz \\
&\leqslant d_{n,s} \int_{\mathbb{C}^n} (-\Delta^{-s}) |f^{\lambda}|(z) |f^{\lambda}|(z) dz \\
&= d_{n,s} \langle (\Delta^{-s}) |f^{\lambda}|, |f^{\lambda}|\rangle \\
&\leqslant d_{n,s} \pi^{2s} \left(\frac{\Gamma(\frac{n-2s}{4})}{\Gamma(\frac{n+2s}{4})}\right)^2 \int_{\mathbb{C}^n} |z|^{2s} |f^{\lambda}(z)|^2 dz.
\end{aligned}$$

最后一个不等式由 $\mathbb{R}^{2n}$上的Pitt 不等式得出。

因此我们有

$$\langle \mathcal{L}_{-s} f, f\rangle \leqslant d_{n,s}\pi^{2s}\left(\frac{\Gamma(\frac{n-2s}{4})}{\Gamma(\frac{n+2s}{4})}\right)^2 \int_{\mathbb{H}^n} |z|^{2s}|f(z,t)|^2\,dz\,dt. \tag{7.9}$$

上述不等式是不等式（7.3）的类似结果。此外，它导出如下Hardy不等式

$$\langle \mathcal{L}_{s} f, f\rangle \geqslant d_{n,s}^{-1}\pi^{-2s}\left(\frac{\Gamma(\frac{n+2s}{4})}{\Gamma(\frac{n-2s}{4})}\right)^2 \int_{\mathbb{H}^n} |z|^{-2s}|f(z,t)|^2\,dz\,dt, \tag{7.10}$$

它是（7.4）的类似结果。

我们也可以将（7.9）借助 $\mathbb{H}^n$上的Strichartz 傅里叶变换改写。按 $L^{\lambda}_{-s}f^{\lambda}$ 在（7.7）中的表达式，我们得到恒等式

$$\langle \mathcal{L}_{-s} f, f\rangle = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}(2|\lambda|)^{-s}(2\pi)^{-2n}|\lambda|^{2n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{2k+n+1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+n+1+s}{2}\right)}\|f^{\lambda}*_{\lambda}\varphi_{k,\lambda}^{n-1}\|_2^2\,d\lambda. \tag{7.11}$$

此外，我们有

$$\|f^{\lambda}*_{\lambda}\varphi_{k,\lambda}^{n-1}\|_2^2 = (2\pi)^n|\lambda|^{-n}\|\widehat{f}(\lambda)P_k(\lambda)\|_{HS}^2,$$

其中 $P_k(\lambda)$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 在Hermite算子 $H(\lambda)$的第 k个特征空间上的正交投影。

将其代入（7.11），得到

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_{-s} f, f\rangle &= (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}(2|\lambda|)^{-s}(2\pi)^{-n}|\lambda|^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{2k+n+1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+n+1+s}{2}\right)}\|\widehat{f}(\lambda)P_k(\lambda)\|_{HS}^2\,d\lambda\\ &= (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}(2|\lambda|)^{-s}(2\pi)^{-2n}|\lambda|^{2n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{2k+n+1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+n+1+s}{2}\right)}\left(c_{n,k}^{-2}\int_{\mathbb{C}^n}|\tilde{f}(\lambda,(2k+n)|\lambda|),w)|^2\,dw\right)d\lambda\\ &= \int_{\Omega\times\mathbb{C}^n}(2|\lambda|)^{-s}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2k+n+1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+n+1+s}{2}\right)}\right)\left|\tilde{f}(a,w)\right|^2 d\nu_2(a)\,dw.\end{aligned} \tag{7.12}$$

最后一个等式用到了 [33] 中的以下关系

$$\int_{\mathbb{C}^n}\left|\tilde{f}(a,w)\right|^2 dw = c_{n,k}^2\int_{\mathbb{C}^n}\left|\widehat{f}(a,w)\right|^2 dw = c_{n,k}^2(2\pi)^n|\lambda|^{-n}\left\|\widehat{f}(\lambda)P_k(\lambda)\right\|_{HS}^2. \tag{7.13}$$

我们将这一结果总结为以下定理。

定理7.2. 设 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$ 和 $0<s<1$。则下列 *Pitt* 不等式成立

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega\times\mathbb{C}^n}(2|\lambda|)^{-s}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2k+n+1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+n+1+s}{2}\right)}\right)\left|\tilde{f}(a,w)\right|^2 d\nu_2(a)\,dw\\ &\qquad\leqslant d_{n,s}\pi^{2s}\left(\frac{\Gamma(\frac{n-2s}{4})}{\Gamma(\frac{n+2s}{4})}\right)^2\int_{\mathbb{H}^n}|z|^{2s}|f(z,t)|^2\,dz\,dt.\end{aligned}$$

我们可以利用实直线上的 Pitt 不等式推导出另一种形式。回顾式（7.11），我们有如下恒等式

$$\langle \mathcal{L}_{-s} f, f\rangle = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (2|\lambda|)^{-s} (2\pi)^{-2n} |\lambda|^{2n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{2k+n+1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+n+1+s}{2}\right)} \|f^{\lambda} *_{\lambda} \varphi_{k,\lambda}^{n-1}\|_2^2 \, d\lambda.$$

因此，利用特殊厄米展开，我们得到

$$\langle \mathcal{L}_{-s} f, f\rangle \leqslant (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{C}^n} \int_{-\infty}^{\infty} (2|\lambda|^{-s}) |f^{\lambda}(z)|^2 \, d\lambda \, dz.$$

应用实直线上的傅里叶变换的 Pitt 不等式，我们得到 n

$$\langle \mathcal{L}_{-s} f, f\rangle \leqslant 2^{-s}\pi^{s} \left(\frac{\Gamma(\frac{1-s}{4})}{\Gamma(\frac{1+s}{4})}\right)^2 \int_{\mathbb{C}^n} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{s} |f(z,t)|^2 \, dz \, dt \leqslant 2^{-s}\pi^{s} \left(\frac{\Gamma(\frac{1-s}{4})}{\Gamma(\frac{1+s}{4})}\right)^2 \int_{\mathbb{H}^n} |(z,t)|^{2s} |f(z,t)|^2 \, dz \, dt. \tag{7.14}$$

上述不等式是权函数 7.3 对应的 Pitt 不等式的类似结果， $|(z,\ t)|^{-2s}$。此外，它还导出了 Hardy不等式

$$\langle \mathcal{L}_{s} f, f\rangle \geqslant 2^{s}\pi^{-s} \left(\frac{\Gamma(\frac{1+s}{4})}{\Gamma(\frac{1-s}{4})}\right)^2 \int_{\mathbb{H}^n} |(z,t)|^{-2s} |f(z,t)|^2 \, dzdt. \tag{7.15}$$

遵 循前述方法，我们得到关于权函数 $|(z,\ t)|^{-2s}$ 的以下定理。

定理 7.3。 设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$ 和 $0 < s < n+1$。则以下 *Pitt* 不等式成立

$$\int_{\Omega\times\mathbb{C}^n} (2|\lambda|)^{-s} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{2k+n+1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+n+1+s}{2}\right)}\right) \left|\tilde{f}(a,w)\right|^2 d\nu_2(a) \, dw$$

$$\leqslant 2^{-s}\pi^{s} \left(\frac{\Gamma(\frac{1-s}{4})}{\Gamma(\frac{1+s}{4})}\right)^2 \int_{\mathbb{H}^n} |(z,t)|^{2s} |f(z,t)|^2 \, dz \, dt.$$

Re注 7.4。 以下评论适用于前面两个定理 $r.$

(1) L^p- 版本的 (7.9) 及其最佳常数已在 [25] 中得到。*(2)* 定理 *7.2*和 *7.3* 中用于导出 *Pitt* 不等式的方法，基于 *H ¨older* 不等式并结合适当的常数。尽管这种方法给出了有效的界，但无法保证常数是最佳的。

还有另一种方法可以为 $\mathcal{L}_s$ 导出 Hardy不等式，并得到不同于前两种方法所得结果的常数。我们沿用 [27] 中的方法和记号。对于 $\gamma > 0$ 和 $\rho > 0$，定义

$$\psi_{s,\gamma}(z,t) = (\gamma + |z|^4 + \gamma t^2)^{-\frac{n+1+s}{4}} \quad \text{and} \quad \varphi_{s,\rho}(z,t) = \left((\rho^2 + |z|^2)^2 + 16t^2\right)^{-\frac{n+1+s}{2}}.$$

按照 [27], ，若我们选择

$$c(n,s) = 4\pi^{-n-1/2} \frac{\Gamma(n+s)\Gamma(\frac{n+1+s}{2})}{\Gamma(s)\Gamma(\frac{n+s}{2})},$$

则积分 al of $c(n,\ s)\rho^{2s}\varphi_{s,\ \rho}$ 等于 1。此外， $c(n,\ s)\rho^{2s}\varphi_{s,\ \rho}$ 构成一个近似恒等元。

在 φ_s 替换为 $\psi_{s,\,\gamma}$ 并采用与 [27, 定理 1。5] 证明中相同的技巧， [27,推论 1。6], 中的技巧，我们得到以下命题。

命题 7.5。设 $0 < s < 1$ 且 f， $\mathcal{L}_s f \in L^2(\mathbb{H}^n)$ 则

$$\langle \mathcal{L}_s f, f\rangle \geqslant c(n,s)^{-1} 4^{2s} \left(\frac{\Gamma(\frac{n+1+s}{2})}{\Gamma(\frac{n+1-s}{2})}\right)^2 \int\limits_{\mathbb{H}^n} \frac{\psi_{s,\gamma}(z,t)}{\psi_{s,\gamma} * |\cdot|^{-Q+2s}(z,t)} |f(z,t)|^2 \, dz\, dt. \tag{7.16}$$

在上述方程中， $Q = 2n + 2$ 表示 $\mathbb{H}^n$的齐次维数。我们没有给出该命题的证明，因为这只是 [27, 推论 1.6] 的逐字重复，仅作了一些显而易见的改动。

在（7.16）中应用 Fatou 引理，我们推得不等式

$$\langle \mathcal{L}_s f, f\rangle \geqslant c(n,s)^{-1} 4^{2s} \left(\frac{\Gamma(\frac{n+1+s}{2})}{\Gamma(\frac{n+1-s}{2})}\right)^2 \int\limits_{\mathbb{H}^n} \frac{\psi_{s,0}(z,t)}{\psi_{s,0} * |\cdot|^{-Q+2s}(z,t)} |f(z,t)|^2 \, dz\, dt. \tag{7.17}$$

注意，$\psi_{s,\,0}(z,\ t) = |z|^{-(n+1+s)}$ 这样的选择使我们能够计算 $|\cdot|^{-Q+2s} * \psi_{s,\,0}(z,\ t) = \psi_{s,\,0} * |\cdot|^{-Q+2s}(z,\ t)$。

我们有

$$\begin{aligned} |\cdot|^{-Q+2s} * \psi_{s,0}(z,t) &= \int\limits_{\mathbb{C}^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |(z,t)(w,b)^{-1}|^{-Q+2s} |w|^{-(n+1+s)} \, db\, dw \\ &= \int\limits_{\mathbb{C}^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |(z,t)(-w,-b)|^{-Q+2s} |w|^{-(n+1+s)} \, db\, dw. \end{aligned}$$

我们可以明确计算内层积分，得到

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |(z,t)(-w,-b)| \, db &= \int\limits_{\mathbb{C}^n} \left(|z-w|^4 + 16(t-b-\mathrm{Im}(z\bar{w}))^2\right)^{-\frac{(n+1-s)}{2}} \, db \\ &= \int\limits_{\mathbb{C}^n} \left(|z-w|^4 + 16b^2\right)^{-\frac{(n+1-s)}{2}} \, db. \end{aligned}$$

利用以下事实

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+b^2)^{-\nu-1/2} db = B(1/2,\nu),$$

wh其中 $\nu > 0$和 $B(1/2,\nu)$ 表示在 $(1/2,\nu)$处取值的贝塔函数。我们可以看到 t

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |(z,t)(-w,-b)|^{-Q+2s} \, db = \frac{1}{4} B(1/2,(n-s)/2) |z-w|^{-2n+2s}.$$

因此，

$$|\cdot|^{-Q+2s} * \psi_{s,0}(z) = \frac{1}{4} B(1/2,(n-s)/2) \int\limits_{\mathbb{C}^n} |z-w|^{-2n+2s} \, |w|^{-2n+(n-1-s)} \, dw.$$

接下来，我们使用以下公式（参见 [29,第 5]章）

$$\int_{\mathbb{C}^n} |z-w|^{-2n+\alpha}\,|w|^{-2n+\beta}\,dw = \frac{\zeta(\alpha)\zeta(\beta)}{\zeta(\alpha+\beta)}\,|z|^{-2n+(\alpha+\beta)},$$

其中

$$\zeta(\alpha) = \frac{\pi^n 2^\alpha \Gamma(\alpha/2)}{\Gamma((2n-\alpha)/2)}.$$

这意味着

$$|\cdot|^{-Q+2s} * \psi_{s,0}(z) \;= \frac{1}{4}\,B(1/2,(n-s)/2)\frac{\zeta(n-1-s)\zeta(2s)}{\zeta(n-1+s)}\,|z|^{-(n+1-s)}.$$

因此将其应用于（7.17），可得

$$\langle \mathcal{L}_s f, f\rangle \geqslant c(n,s)^{-1}\,b(n,s)^{-1}\,4^{2s}\Big(\frac{\Gamma(\frac{n+1+s}{2})}{\Gamma(\frac{n+1-s}{2})}\Big)^2 \int_{\mathbb{H}^n} |z|^{-2s}\,|f(z,t)|^2\,dz\,dt,$$

其中我们记

$$b(n,s) = \frac{1}{4}\,B(1/2,(n-s)/2)\frac{\zeta(n-1-s)\zeta(2s)}{\zeta(n-1+s)}.$$

经过简单计算可得

$$b(n,s) = \frac{\pi^{n+1/2}}{4}\,\frac{\Gamma(\frac{n-s}{2})}{\Gamma(n-s)}\,\frac{\Gamma(\frac{n-1-s}{2})}{\Gamma(\frac{n-1+s}{2})}\,\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{n+1+s}{2})}.$$

此外，利用勒让德倍增公式

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z)$$

并化简后，我们得到

$$b(n,s)c(n,s) = 4^s\,\frac{\Gamma(\frac{n-1-s}{2})}{\Gamma(\frac{n-1+s}{2})}\,\frac{\Gamma(\frac{n+1+s}{2})}{\Gamma(\frac{n+1-s}{2})} \;= 4^s\,\frac{n-1+s}{n-1-s}.$$

最后，我们得到如下 Hardy 不等式:

$$\langle \mathcal{L}_s f, f\rangle \geqslant\; 4^s\,\frac{n-1-s}{n-1+s}\left(\frac{\Gamma(\frac{n+1+s}{2})}{\Gamma(\frac{n+1-s}{2})}\right)^2 \int_{\mathbb{H}^n} |z|^{-2s}\,|f(z,t)|^2\,dz\,dt. \tag{7.18}$$

利用上述结果，我们可以写出 Pitt 不等式

$$\langle \mathcal{L}_{-s} f, f\rangle \leqslant 4^{-s}\,\frac{n-1+s}{n-1-s}\left(\frac{\Gamma(\frac{n+1-s}{2})}{\Gamma(\frac{n+1+s}{2})}\right)^2 \int_{\mathbb{H}^n} |z|^{2s}\,|f(z,t)|^2\,dz\,dt. \tag{7.19}$$

Writing，用 Strichartz 傅里叶变换来表示，我们得到如下定理。

定理 7.6。 设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$ 和 $0 < s < 1$，则下列 *Pitt* 不等式成立

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\mathbb{C}^n} (2|\lambda|)^{-s}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2k+n+1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+n+1+s}{2}\right)}\right)\left|\tilde{f}(a,w)\right|^2 d\nu_2(a)\,dw \\ \leqslant (2\pi)^{-1}4^{-s}\,\frac{n-1+s}{n-1-s}\left(\frac{\Gamma(\frac{n+1-s}{2})}{\Gamma(\frac{n+1+s}{2})}\right)^2 \int_{\mathbb{H}^n} |z|^{2s}\,|f(z,t)|^2\,dz\,dt.\end{aligned}$$

不等式（7.18）中得到的常数可能是最佳常数，也可能不是，因此我们给出（7.18）中最佳常数的界。假设我们有

$$(\mathcal{L}_s f, f) \geqslant C \int_{\mathbb{H}^n} |z|^{-2s} |f(z,t)|^2 \, dz \, dt,$$

对于最佳常数 C。
在上述不等式中取 $f = \varphi_{-s,\rho}$ ，可得

$$\rho^{2s} C_2(n,s) \int_{\mathbb{H}^n} \left((\rho^2 + |z|^2)^2 + 16t^2\right)^{-(n+1)} dz \, dt \geqslant C \int_{\mathbb{H}^n} \varphi_{-s,\rho}(z,t)^2 \, |z|^{-2s} \, dz \, dt,$$

其中

$$C_2(n,s) = 4^{2s} \Big(\frac{\Gamma(\frac{n+1+s}{2})}{\Gamma(\frac{n+1-s}{2})} \Big)^2.$$

注意，我们使用了 Cowling-Haagerup 恒等式 [27, 定理 3。7] 来简化 $\langle \mathcal{L}_s f, f \rangle$ 的表达式。

通过变量代换，可由上式得到不等式

$$C \leqslant C_2(n,s) \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{H}^n} \left((1 + |z|^2)^2 + 16t^2\right)^{-(n+1)} dz \, dt}{\displaystyle\int_{\mathbb{H}^n} \left((1 + |z|^2)^2 + 16t^2\right)^{-(n+1-s)} |z|^{-2s} \, dz \, dt}.$$

此外，变量代换$t \to \frac{1}{4}(1 + |z|^2)t$ 将右边的比值简化为

$$\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + t^2\right)^{-(n+1)} dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + t^2\right)^{-(n+1-s)} dt} \; \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{C}^n} (1 + |z|^2)^{-2n-1} \, dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{C}^n} (1 + |z|^2)^{-2n+2s-1} \, |z|^{-2s} \, dz}.$$

我们显式计算上述积分。回忆公式 [23,(5.12.3)]

$$\int_0^{\infty} (1+t)^{-b} t^{a-1} \, dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)},$$

对于 $a > 0,\ b > a$。由此可得

$$\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + t^2\right)^{-(n+1)} dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + t^2\right)^{-(n+1-s)} dt} = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)} \frac{\Gamma(n-s+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(n-s+1/2)}.$$

此外，将剩余的积分写成极坐标形式，可得

$$\frac{\int_{\mathbb{C}^n}(1+|z|^2)^{-2n-1}\,dz}{\int_{\mathbb{C}^n}(1+|z|^2)^{-2n+2s-1}\,|z|^{-2s}\,dz}=\frac{\int_0^\infty\left(1+r^2\right)^{-2n-1}r^{2n-1}dr}{\int_0^\infty\left(1+r^2\right)^{-2n+2s-1}r^{2n-2s-1}dr}.$$

计算后可得

$$\frac{\int_{\mathbb{C}^n}(1+|z|^2)^{-2n-1}\,dz}{\int_{\mathbb{C}^n}(1+|z|^2)^{-2n+2s-1}\,|z|^{-2s}\,dz}=\frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)}\frac{\Gamma(2n-2s+1)}{\Gamma(n-s)\Gamma(n+1-s)}.$$

因此，我们推得不等式

$$C\leqslant C_2(n,s)\,\frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(2n+1)}\frac{\Gamma(2n-2s+1)}{\Gamma(n-s+1/2)}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-s)}.$$

I根据勒让德倍增公式，上述表达式可化简为

$$C\leqslant C_2(n,s)\,\frac{\sqrt{\pi}2^{-2n}}{\Gamma(n+1)}\,\frac{2^{2n-2s}\Gamma(n+1-s)}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-s)}=C_2(n,s)4^{-s}\frac{n-s}{n}.$$

注意，对于 $0<s<n+1$, $\frac{n-1-s}{n-1+s}<\frac{n-s}{n}$。因此，对于 $0<s<1$，我们得到最佳常数 C 满足以下界

$$4^s\,\frac{n-1-s}{n-1+s}\left(\frac{\Gamma(\frac{n+1+s}{2})}{\Gamma(\frac{n+1-s}{2})}\right)^2\leqslant C\leqslant 4^s\,\frac{n-s}{n}\left(\frac{\Gamma(\frac{n+1+s}{2})}{\Gamma(\frac{n+1-s}{2})}\right)^2. \tag{7.20}$$

在继续研究 Hardy不等式中最佳常数的界时，我们想对权函数为 $|(z,\ a)|^{-2s}$ 的 Hardy不等式的最佳常数补充一条说明。

注7.7。 如果 C_H 表示带权函数 $|(z$的 *Hardy*不等式中的最佳常数，$a)|^{-2s}$则应有 $C\leqslant C_H$. 由 [28] 可知 $C_H\leqslant C_2(n,\ s)$。因此有

$$4^s\,\frac{n-1-s}{n-1+s}\left(\frac{\Gamma(\frac{n+1+s}{2})}{\Gamma(\frac{n+1-s}{2})}\right)^2\leqslant C_H\leqslant 4^{2s}\left(\frac{\Gamma(\frac{n+1+s}{2})}{\Gamma(\frac{n+1-s}{2})}\right)^2.$$

在进一步研究 Hardy不等式与 Pitt 不等式之间的关系之外，我们现在陈述 [26] 中证明的非齐次权的 Hardy 不等式。记 $W^{s,\,2}(\mathbb{H}^n)$ 为由所有在 $\mathbb{H}^n$ 上平方可积且满足 $\mathcal{L}^{s/2}f\in L^2(\mathbb{H}^n)$的函数 f 组成的 Sobolev空间。

定理 7.8. （对于非齐次权函数）设 $0<s<\frac{n+1}{2}$ 和 $\delta>0$。那么对于所有 $f\in W^{s,2}(\mathbb{H}^n)$，以下结论成立

$$(4\delta)^s\frac{\Gamma\left(\frac{1+n+s}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1+n-s}{2}\right)^2}\int_{\mathbb{H}^n}\frac{|f(z,t)|^2}{\left(\left(\delta+\frac{1}{4}|z|^2\right)^2+t^2\right)^s}dz\,dt\leqslant\langle\mathcal{L}_sf,f\rangle.$$

接下来使用算子 $U_s = \mathcal{L}_s\mathcal{L}^{-s}$，其中

$$\|U_s\| = \sup_{k\geqslant 0}\left(\frac{2k+n}{2}\right)^{-s}\frac{\Gamma\left(\frac{2k+n}{2}+\frac{1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+n}{2}+\frac{1-s}{2}\right)},$$

作者在 [26]推导出了以下关于 $\mathcal{L}^s$的类似结果。

Theo注 7.9. 设 $0 < s < \frac{n+1}{2}$和 $\delta > 0$。那么对所有 $f \in W^{s,\,2}(\mathbb{H}^n)$ 以下结论均成立 s

$$(4\delta)^s\frac{\Gamma\left(\frac{1+n+s}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1+n-s}{2}\right)^2}\int_{\mathbb{H}^n}\frac{|f(z,t)|^2}{\left(\left(\delta+\frac{1}{4}|z|^2\right)^2+t^2\right)^s}dz\,dt \leqslant \|U_s\|\langle\mathcal{L}^s f, f\rangle.$$

沿用前面的类似论证思路，我们可以推导出非零函数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$ 和 $p = q = 2$的 Pitt 不等式类似结果。

Let

$$v(z,t) = \left(\left(\delta+\frac{1}{4}|z|^2\right)^2+t^2\right)^{s/2}.$$

由定理 7.8，可得

$$(4\delta)^s\frac{\Gamma\left(\frac{1+n+s}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1+n-s}{2}\right)^2}\int_{\mathbb{H}^n}\left(\frac{f(z,t)}{v(z,t)}\right)^2 dz\,dt \leqslant \langle\mathcal{L}_s f, f\rangle.$$

相应的 Pitt 不等式于是可写为

$$\langle\mathcal{L}_{-s} f, f\rangle \leqslant (4\delta)^{-s}\frac{\Gamma\left(\frac{1+n-s}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1+n+s}{2}\right)^2}\int_{\mathbb{H}^n}\left(\frac{f(z,t)}{v(z,t)}\right)^2 dz\,dt. \tag{7.21}$$

就 Strichartz 傅里叶变换而言，我们得到

$$\int_{\Omega\times\mathbb{C}^n}(2|\lambda|)^{-s}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2k+n+1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+n+1+s}{2}\right)}\right)\left|\tilde{f}(a,w)\right|^2 d\nu_2(a)\,dw \leqslant (4\delta)^{-s}\frac{\Gamma\left(\frac{1+n-s}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1+n+s}{2}\right)^2}\int_{\mathbb{H}^n}\left(\frac{f(z,t)}{v(z,t)}\right)^2 dz\,dt.$$

利用定理 7.9并采用类似的方法，我们得到带非齐次权的 Pitt 不等式的另一个类似结果如下

$$\int_{\Omega\times\mathbb{C}^n}((2k+n)|\lambda|)^{-s}\left|\tilde{f}(a,w)\right|^2 d\nu_2(a)\,dw \leqslant \|U_s\|\left((4\delta)^s\frac{\Gamma\left(\frac{1+n+s}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1+n-s}{2}\right)^2}\right)^{-1}\int_{\mathbb{H}^n}|v(z,t)f(z,t)|^2\,dz\,dt. \tag{7.22}$$

除了非齐次权之外，齐次权的Hardy不等式也已在同一篇论文 [26]中对 $\mathcal{L}^s$ 得到证明。

定理 7.10。 （齐次权的 *Hardy* 不等式）设 $0 < s < 1$。则对所有 $f \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$,

$$\frac{2^{2n+3s}\Gamma(\frac{n+s}{2})^2}{\Gamma(1-s)\Gamma(\frac{n}{2})^2}\int_{\mathbb{H}^n}\frac{|f(z,t)|^2}{|(z,t)|^{2s}}dz\,dt \leqslant \|V_s\|\langle\mathcal{L}^s f, f\rangle.$$

采用与非齐次权情形相同的推理方法，可以得到齐次权 $|(z,\ w)|^s$下 Pitt 不等式的形式，其中 $0<s<1$。即

$$\int_{\Omega\times\mathbb{C}^n}((2k+n)|\lambda|)^{-s}\left|\tilde{f}(a,w)\right|^2 d\nu_2(a)\,dw \leqslant (2\pi)^{-n}\|V_s\|\left(\frac{2^{2n+3s}\Gamma(\frac{n+s}{2})^2}{\Gamma(1-s)\Gamma(\frac{n}{2})^2}\right)^{-1}\int_{\mathbb{H}^n}|(z,t)|^{2s}\left(f(z,t)\right)^2 dz\,dt. \tag{7.23}$$

我们将不等式（7.21）、（7.22）和（7.23）中的结果总结为如下定理。

定理 7.11. 设 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$。则下列结论成立

- 非齐次情形：设 $0<s<\frac{n+1}{2}$ 和 $\delta>0$。则下列结论成立 (a)

$$\int_{\Omega\times\mathbb{C}^n}(2|\lambda|)^{-s}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2k+n+1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+n+1+s}{2}\right)}\right)\left|\tilde{f}(a,w)\right|^2 d\nu_2(a)\,dw \leqslant (4\delta)^{-s}\frac{\Gamma\left(\frac{1+n-s}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1+n+s}{2}\right)^2}\int_{\mathbb{H}^n}\left(\frac{f(z,t)}{v(z,t)}\right)^2 dz\,dt.$$

(b)

$$\int_{\Omega\times\mathbb{C}^n}((2k+n)|\lambda|)^{-s}\left|\tilde{f}(a,w)\right|^2 d\nu_2(a)\,dw \leqslant \|U_s\|\left((4\delta)^s\frac{\Gamma\left(\frac{1+n+s}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1+n-s}{2}\right)^2}\right)^{-1}\int_{\mathbb{H}^n}\left(\left(\delta+\frac{1}{4}|z|^2\right)^2+t^2\right)^s|f(z,t)|^2\,dz\,dt.$$

- 齐次情形：设 $0<s<1$，则下列结论成立

$$\int_{\Omega\times\mathbb{C}^n}((2k+n)|\lambda|)^{-s}\left|\tilde{f}(a,w)\right|^2 d\nu_2(a)\,dw \leqslant \|V_s\|\left(\frac{2^{2n+3s}\Gamma(\frac{n+s}{2})^2}{\Gamma(1-s)\Gamma(\frac{n}{2})^2}\right)^{-1}\int_{\mathbb{H}^n}|(z,t)|^{2s}\left(f(z,t)\right)^2 dz\,dt.$$

Concluding Remarks

在本文中，我们研究了如下形式的加权 Pitt 型不等式

$$\left(\int_{\Omega\times\mathbb{C}^n}|\tilde{f}(a,w)|^q u(a,w)^q dw\,d\nu_2(a)\right)^{1/q}\leqslant C\left(\int_{\mathbb{H}^n}|f(z,t)|^p v(z,t)^p dz\,dt\right)^{1/p},$$

其中，$\tilde{f}$ 指的是海森堡群上的 Strichartz 傅里叶变换，u 和 v 分别表示 $\Omega\times\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{H}^n$ 上的两个非负可测函数。

- 首先，通过运用 Calder´on 算子和加权 Hardy 不等式，我们建立了海森堡群上 Strichartz 傅里叶变换的 Pitt 不等式的充分条件，该结论在定理3.1中得到了证明。

• 在第 4 节中，我们利用拉盖尔多项式 L_k^{n-1} 的第一个零点的估计，推导出由 Pitt 不等式蕴含的权重必要条件（由式（4.4）和（4.5）给出）。• 在第 5 节中，我们得到了某些非平凡权重的充分必要条件。

此外，我们在第6节研究了 Strichartz 傅里叶变换的 Paley 不等式，并在第7节考察了 Hardy 不等式与 Pitt 不等式之间的关系。在回顾了它们在 $\mathbb{R}^n$ 情形下的等价性之后，我们得到了 $\mathbb{H}^n$情形下的相应结果。更具体地说，我们得到了

• 共形次拉普拉斯算子的 Pitt 不等式 (7.9)，其权函数为 $|z|^{2s}$ ，由此得到 Hardy 不等式 (7.10)。改写为 Strichartz 傅里叶变换的形式后，我们得到定理7.2。• 共形次拉普拉斯算子的 Pitt 不等式 (7.14)，其权函数为 $|(z,\ t)|^{2s}$ 由此得到 Hardy 不等式 (7.15)。改写为 Strichartz 傅里叶变换的形式后，我们得到定理 7.3。•通过调整 [27, 28]中使用的技巧，我们得到了另一种形式的 Hardy 不等式 (7.18) 及相应的 Pitt 不等式 (7.19)。此外，还得到了最佳常数的界。• 利用共形次拉普拉斯算子和分数阶次拉普拉斯算子 $\mathcal{L}^s$在非齐次权函数下的 Hardy 不等式，我们得到了 Pitt型不等式 (7.21) 和 (7.22)。• 利用分数阶次拉普拉斯算子在齐次权函数下的 Hardy 不等式，我们得到了 Pitt 不等式 (7.23)。

我们想指出，所推导的Pitt型不等式中出现的常数并非最佳。

Acknowledgement

我们衷心感谢Tapendu Rana博士推荐了一篇有助于改进证明的文章。第二作者衷心感谢印度理工学院德里分校提供学院奖学金。此外，本工作的一部分是在第四作者访问印度理工学院孟买分校期间完成的，他对学院提供的款待表示感谢。

Conflict of Interest

作者声明他们没有利益冲突。

References

[1] Abramowitz, M., and Stegun, I. A. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and math-ematical tables, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*第55卷。美国政府印刷局，华盛顿特区，1964年。[2] Beckner, W.Pitt 不等式与不确定性原理。 *Proc. Amer. Math. Soc. 123*，6(1995)，1897–1905。[3] Beckner, W. Pitt 不等式及其最佳卷积估计。 *Proc. Amer. Math. Soc. 136*，5 (2008)，1871–1885。

[4] Benedetto, J. J., and Heinig, H. P. 加权傅里叶不等式：新的证明与推广。 *J. FourierAnal. Appl. 9*, 1 (2003), 1–37。[5] Bennett, C., and Sharpley, R. *Interpolation of operators*, *Pure and Applied Mathematics* 第129卷。学术出版社，波士顿，马萨诸塞州，1988年。[6] Bradley, J. S.混合范数下的Hardy 不等式。 *Canad. Math. Bull. 21*, 4 (1978), 405–408。[7] Branson, T. P., Fontana, L., and Morpurgo, C. CR球面上的Moser-Trudinger与Beckner-Onofri不等式。 *Ann. of Math. (2) 177*, 1 (2013), 1–52。[8] Calderón, A.-P. L^1 与 L^∞ 之间的空间及Marcinkiewicz定理。 *Studia Math. 26* (1966), 273–299。[9] Chen, L.-P., Kou, K. I., and Liu, M.-S. 四元数傅里叶变换相关的Pitt不等式与不确定性原理。 *J. Math. Anal. Appl. 423*, 1 (2015), 681–700。[10] Ciaurri, O., Roncal, L., and Thangavelu, S. Dunkl-Hermite算子分数次幂的Hardy型不等式。 *Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 61*, 2 (2018), 513–544。[11] Cowling, M., and Haagerup, U. 实秩一单李群的傅里叶代数的完全有界乘子。 *Invent. Math. 96*, 3 (1989), 507–549。[12] Cowling, M. G., and Price, J. F. 带宽与时间集中：海森堡-泡利-外尔不等式。 *SIAM J. Math. Anal. 15*, 1 (1984), 151–165。[13] De Carli, L., Gorbachev, D., and Tikhonov, S. 傅里叶变换与汉克尔变换的Pitt不等式和Boas不等式。 *J. Math. Anal. Appl. 408*, 2 (2013), 762–774。[14] De Carli, L., Gorbachev, D., and Tikhonov, S. 傅里叶变换的Pitt不等式与限制定理。 *Rev. Mat. Iberoam. 33*, 3 (2017), 789–808。[15] Frank, R. L., and Lieb, E. H. 海森堡群上若干不等式的最佳常数。 *Ann. of Math.(2) 176*, 1 (2012), 349–381。[16] Gorbachev, D., Liflyand, E., and Tikhonov, S. 积分变换的加权范数不等式。 *IndianaUniv. Math. J. 67*, 5 (2018), 1949–2003。[17] Grafakos, L. *Classical Fourier analysis*, 第二版， *Graduate Texts in Mathematics*第249卷。施普林格出版社，纽约，2008年。[18] Heinig, H. P.算子类的加权范数不等式。 *Indiana Univ. Math. J. 33*, 4 (1984), 573–582。[19] Hörmander, L. L^p 空间中平移不变算子的估计。 *Acta Math. 104* (1960), 93–140。[20] Kumar, P., Pusti, S., Rana, T., and Singh, M. 非紧型秩一黎曼对称空间上的加权傅里叶不等式及限制定理的应用。 *arXiv:2406.06268* (2024)。[21] Lieb, E. H., and Loss, M. *Analysis*, 第二版， *Graduate Studies in Mathematics* 第14卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001年。[22] Liflyand, E., and Tikhonov, S. 双边加权傅里叶不等式。 *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.(5) 11*, 2 (2012), 341–362。[23] Olver, F. W. *NIST handbook of mathematical functions hardback and CD-ROM*。剑桥大学出版社，2010年。[24] Pitt, H. R. 关于傅里叶级数与幂级数的定理。 *Duke Math. J. 3*, 4 (1937), 747–755。[25] Roncal, L., and Tao, C. 海森堡群上的最佳 L^p Hardy与Stein-Weiss不等式。（预印本）。[26] Roncal, L., and Thangavelu, S. 海森堡群上次拉普拉斯算子分数次幂的Hardy不等式。 *Adv. Math. 302* (2016), 106–158。[27] Roncal, L., and Thangavelu, S. 关于H型群上的次拉普拉斯算子的延拓问题与迹Hardy不等式。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 14 (2020), 4238–4294。[28] Roncal, L., and Thangavelu, S. 勘误：关于 H型群上的次拉普拉斯算子的延拓问题与迹Hardy不等式。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 12 (2022), 9598–9602。[29] Samko, S. G., Kilbas, A. A., and Marichev, O. I. *Fractional integrals and derivatives*。戈登与布雷奇科学出版社，伊韦尔东，1993年。理论与应用，[30] Szegö, G. *Orthogonal Polynomials*, *American Mathematical Society Colloquium Publications*第23卷。美国数学会，纽约，1939年。

[31] Thangavelu, S. *An introduction to the uncertainty principle*，第 217 卷，收录于 *Progress in Mathematics*。Birkh¨auser Boston, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，2004 年。李群上的 Hardy 定理，前言由 Gerald B. Folland 撰写。[32] Thangavelu, S. *Harmonic analysis on the Heisenberg group*，第 159 卷。Springer Science& Business Media，2012 年。[33] Thangavelu, S. 海森堡群上的标量值傅里叶变换。载于 *From classical analysis to analysis on fractals. Vol. 1. A tribute to Robert Strichartz*，Appl. Numer. Harmon. Anal. Birkh¨auser/Springer，瑞士尚，(2023)，第 137–163 页。[34] Wong, M. W. *Weyl transforms*。Universitext。Springer-Verlag，纽约，1998 年。

Aparajita Dasgupta:Department of Mathematics
Indian Institute of Technology Delhi, Hauz Khas
New Delhi-110016India*E-mail address:*
adasgupta@maths.iitd.ac.in

Prerna Gulia:Department of Mathematics
Indian Institute of Technology Delhi, Hauz Khas
New Delhi-110016India*E-mail address:*
prernagulia64@gmail.com

Sanjoy Pusti:
Department of Mathematics
Indian Institute of Technology Bombay
Mumbai-400076India*E-mail address:*
sanjoy@math.iitb.ac.in

Sundaram Thangavelu:National Science Chair,
Department of Mathematics
Indian Institute of Science, Bangalore
Bangalore-560012IndiaandHonorary Professor
University of Queensland, BrisbaneAustralia
E-mail address: veluma@iisc.ac.in