二维超图积码上的常数时间手术与近常数空间开销

Kathleen (Katie) Chang,[1, 2, 3, *] Zhiyang He,[4, *] Theodore J. Yoder,[1] Guanyu Zhu,[1] 和 Tomas Jochym-O'Connor[1]

[1] *IBM Quantum, IBM T. J. Watson Research Center, Yorktown Heights, NY 10598, USA* [2] *Department of Physics, Yale University, New Haven, CT 06520, USA* [3] *Yale Quantum Institute, Yale University, New Haven, CT 06511, USA* [4] *Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139, USA*

广义码手术是一种用途广泛且开销较低的技术，可在量子低密度奇偶校验（qLDPC）码上执行容错计算。在许多情况下，手术展现出实用的空间开销，但其时间开销仍是瓶颈，每次操作需要 $O(d)$ 轮综合征测量。在这项工作中，我们构造了手术构件，可在常数时间开销下对二维超图积码执行并行逻辑测量（$O(1)$），并实现近常数空间开销（$\tilde{O}(1)$）。正如我们所展示的，时间开销的降低源于摊销；按照 Cowtan 等人（arXiv:2510.14895）提出的表述，在 d 时间内执行 $O(d)$次手术操作是容错的。我们的构件结合了不同容错逻辑操作方法的优势：它们在实现可与横向门相媲美的开销的同时，部分保留了手术的灵活性。因此，这些构件非常适合近期实验实现，并展现了快速逻辑计算构件设计的新可能性。

arXiv:2603.02157v1 [quant-ph] 2 Mar 2026

I. 引言

量子纠错（QEC）领域的一个核心目标，是设计空间和时间开销低的容错量子计算（FTQC）系统。近年来，量子低密度奇偶校验（qLDPC）码的研究进展表明，使用高码率 qLDPC 码 [1–3], ，与使用低码率拓扑码 [4]相比，可以显著降低实现容错量子存储器的渐近和实际空间开销。这些进展推动了在 qLDPC 量子存储器上执行容错逻辑计算的方法研究，并使其成为一个备受关注且活跃的研究领域。

一种适用于 qLDPC 码且开销较低、用途广泛的计算技术是码手术，它是晶格手术的推广 [5]，并且在过去几年中迅速发展 [6–19]。关于近期进展的高层次综述，请读者参阅文献 [14]第 3.2 节；此外，本文第 IA 节也对此作了补充。从计算角度看，码手术通过对稳定子码上的逻辑泡利算符进行容错测量来实现计算。这类测量可用于在逻辑量子比特上实现泡利 $\pi/4$-和 $\pi/8$-旋转（在魔态辅助下），足以实现通用量子计算。这种通用计算模型称为基于泡利算符的计算（PBC） [20], ，现代基于晶格手术的表面码架构 [21, 22] 以及基于提取器架构这一总框架下的手术式 qLDPC 码架构均采用了这种模型 [14, 15, 23]。

从操作上来说，手术会向原始码（也称为基码）引入一个由量子比特和稳定子组成的辅助系统，从而将其变形为变形码。辅助系统经过专门设计，使得待测算符是新引入的低权重稳定子的乘积。因此，只要可靠地获知变形码中稳定子的测量结果，就能推断逻辑泡利的测量结果。通常，在存在噪声的情况下，获知这些稳定子的取值需要 $O(d)$轮测量，其中 d 是码距。这种不可忽视的时间开销引出了一个自然的问题：在什么假设下，我们可以用更少的测量轮次执行手术？渐近意义上，能否将时间开销降至常数？为回答这些问题，先前工作研究了两种不同形式的快速手术，我们将其区分为单轮手术和常数时间手术。我们将在第IA节讨论它们的区别以及先前工作的构造。

在本工作中，我们为任意二维超图积（HGP）码提出了常数时间开销手术小工具 [24, 25] ，可灵活并行测量逻辑泡利算符。˜ ˜每个小工具需要 $O(n)$个辅助量子比特，其中 $O(\cdot)$表示省略了多对数因子。总的来说，˜乘法时空开销为 $O(1)$，我们预计在实践中这是一个较小的常数。

相较于关于 qLDPC 计算和码手术的丰富现有文献，我们的构造有两项概念上的创新。首先，先前工作 [26, 27]指出，可以在三维及更高维超图积码上执行时空开销为常数的手术。值得注意的是，已知这些码支持单轮态制备，这意味着它们在 X （或 Z）基下的稳定子校验具有足够的冗余，因此能够在 $O(1)$ 时间内可靠地测量。这一强大性质在很大程度上表明，单轮手术 [26] 是可行的。相比之下，一般的二维HGP码在其稳定子校验中并不具备这种冗余。事实上，大多数二维HGP

* 这些作者对本研究的贡献相同。

码（包括表面码）需要 $O(d)$ 轮综合征测量，才能可靠地推断稳定子值。从这个角度来看，我们关于二维HGP码常数时间手术的构造或许令人意外。我们将在第I A节讨论其与算法容错 的联系。

更广泛地说，在已提出的qLDPC计算方案中，手术以其高度通用性而著称（能够执行大量门），而恒定深度逻辑门则因其开销极小而受到青睐。我们的构造是一个罕见的实例，几乎兼得两者之长：它部分继承了手术的可寻址性，渐近代价大致与横向门相同。此外，该构造适用于所有二维HGP码，也可以推广到高维HGP码。作为示例，我们对环面码进行了详细的案例研究，其中我们的手术小工具具有乘性常数时空开销。我们进一步预期，该构造可以扩展到平衡乘积 [29] 和提升乘积码 [30, 31]

本文其余部分组织如下。我们首先在第I A节中从高层回顾快速手术的现有表述。在第IB节中，我们总结快速手术小工具的主要构造，并逐步讲解一个明确的小型构造示例。我们在第IC节中简要回顾先前工作。我们在第II节中给出理解现有手术技术所需的技术背景。在第III节中，我们给出二维HGP码上的主要构造并证明其性质。在第IV节中，我们讨论应用该构造的多种方式，例如将共享一个公共分量码的两个不同HGP 码纠缠起来。在第V节中，我们给出关于二维环面码的直观而详细的案例研究，其实现了常数空间开销与时间开销。最后，我们在第VI节。

A. 快速码手术的表述

先前关于码手术的工作，无论针对表面码还是通用qLDPC 码，通常都将每次操作的时间视为标准的 $O(d)$。这一瓶颈源于前文提到的事实：对于一般码，在噪声影响下可靠地提取稳定子测量值，需要进行 $O(d)$ 轮重复测量。为克服这一瓶颈，人们提出并研究了两种快速手术形式。

最直接的一种形式是测量基码、变形码，然后再次回到基码，每种状态各持续一轮；相对于故障距离等合理的度量而言，该协议具有容错性。这种手术形式，我们以下称为单轮手术，对于某些允许单次态制备的基码是可行的 [32], ，例如三维 HGP 码 [26, 27]。然而，对于更一般的码，这种手术方式不再具备容错性——

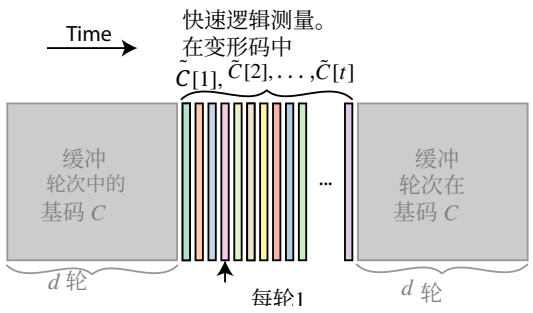


图1. **常数时间手术**。 我们以抽象方式表示 t 手术操作的时空体积，其中时间从左向右流逝。狭窄的切片表示在一系列变形码之间切换， $\tilde{C}[1]...\tilde{C}[t]$每个变形码各执行一种不同的逻辑测量。重要的是，在每个变形码中，我们只需花费一个轮次。为确保在存在含噪测量时的容错性，这些 $t \geq d$ 快速手术测量之前和之后都必须在基码 C中进行 $O(d)$轮综合征测量。

当我们在变形后回到基码时，需要测量出辅助系统，这会以非确定性的方式在基码上引入参考系错误。我们在脚注 [33]中简要解释参考系错误的含义。对于大多数不允许单次态制备的基码，这种参考系错误无法仅凭一轮综合征信息纠正；若不加以纠正便继续操作，就会破坏后续的逻辑操作。参考文献 [19]的第 1.2 节和第 1.3 节对此有更详细的说明。

因此，要设计适用范围更广的快速手术协议，我们需要采用不同的框架。本文采用文献 [19]中的快速超图手术方法。文献 [19] 并不要求单个手术操作在 $O(1)$轮内实现容错，而是要求$t \geq O(d)$个手术操作在$O(t)$轮内实现容错。更准确地说，假设我们有基码 C 以及一系列变形码 $C[1]$、$\cdots$、$C[t]$。快速手术过程是：首先对基码进行 $O(d)$轮综合征测量，然后依次测量 $C[1]$、$\cdots$、$C[t]$ 的稳定子，每个测量耗时 $O(1)$轮，最后以基码的 $O(d)$轮综合征测量结束。这样，每个手术操作经摊销后只需耗费常数轮 [34]。下文将这种第二种形式的快速手术称为常数时间手术。示意见图1。

为什么这种摊销协议能够实现容错，而严格来说，每个单独的操作却不能？我们给出一个简短的直观论证，详细证明请参见文献 [19] 。从较高层面看，在常数轮内执行一次手术操作，无法产生足够的综合征信息来确 t 保容错。然而，通过按2引理 $O(t)$ 时间执行一系列 $O(d)$ 综合征

基码上的轮次，我们可以生成足够的综合征信息，将它们一起解码，并从一系列帧错误中恢复。具体来说，虽然每次手术操作都会引入新的稳定子和帧错误，但每一步都会生成足够数量的探测器，并且我们有一条长度为 $\Omega(d)$ 的探测器链，用于解码以实现容错。摊销过程中，利用跨多个逻辑操作的探测器来确 [28] 保容错，这一思路类似于横向门的算法容错。

我们注意到，在一种常见的计算模型中，顺序执行基于泡利算符的计算时， [20, 21], 常数时间手术有望将总时间开销降低 $O(d)$倍，因为只要以恒定码率提供高质量魔态，计算中唯一的操作就是逻辑测量。若进一步纳入酉逻辑克利福德操作（例如横向门），只要检测器链保持完整，我们预计常数时间手术的容错保证仍然成立。然而，在逻辑非克利福德操作以酉方式频繁执行的情形下，检测器链会被打断，使常数时间手术的使用变得复杂。

我们注意到，文献 [18]近期的工作也研究了快速手术，具体而言，他们在基码上先后进行完美综合征测量，并在两次测量之间以 $O(1)$的时间执行一次手术操作。他们推导出一组条件（文献 [18]的定理5），以保证上述过程具有容错性，并给出了每次操作使用 $O(nkd)$个辅助量子比特的构造。如前所述，要在一般码上获得完美综合征信息的效果，需要进行 $O(d)$轮含噪综合征测量 [35]。因此，当基码支持单轮态制备时，文献 [18]中的手术小工具在单轮手术意义下是快速的；否则，每次操作的时间开销为 $O(d)$。

B. 构造概述

现在，我们从高层次描述本文构造的常数时间手术小工具。我们希望对其执行手术的码，是两个经典码的超图乘积， C 和 D。我们将手术装置附加到经典码 C 上，并运用 [9], 已知技术，构造一个增广经典码，我们将其记为 cone(g)，用以测量一类特定的经典码字（这一记法源于该增广经典码是相对于链映射 g的映射锥，见第II节）。然后，通过取 cone(g) 与 D的超图乘积，构造最终的变形码。该变形码并行测量所有*Quantum*逻辑算符；这些逻辑算符在乘积码上的典范代表对应于被测量的经典码字（见第II节）。通过在经典码上依次采用不同的手术装置，得到 cone(g_1) $\cdots$、cone(g_t)，我们便得到一系列变形码。

列变形码。重要的是，我们将证明，这一系列变形码满足参考文献 [19] 中容错常数时间手术所需的全部性质。

我们在图 2 中展示了一个此类变形码的具体示例。为便于说明，令 C为 $[7,4,3]$汉明码（见图 2 (a)），令 D 为线性三比特重复码的对偶码。这两个码的超图积 $Q = C \otimes D$是一个 $[[27,4,3]]$ 量子码，我们的目标是测量码 Q的一个逻辑算符。在图 2 (a) 中，我们将码 C 表示为一个链复形（左）： $C_\bullet$ ，其中 C_1 是由所有比特张成的线性空间， C_0 是由所有 X 校验张成的空间。同时还展示了 $[7,4,3]$ 的 Tanner 图（右），以及 Z 逻辑算符的支撑。接着，在图 2 (b) 中，我们对 Tanner 图 $[7,4,3]$ 底部的三个量子比特实施码手术，以测量 Z 逻辑算符。这需要引入一个新的辅助码 $G_\bullet = G_1 \to G_0 \to G_{-1}$ （红色虚线框），其中包含 Z 校验（G_1）、量子比特（G_0）以及 X 校验（G_{-1}）。这个辅助码与原始码之间的联系，可用链映射 g_i 形式化表示为 $G_i \to C_i$。我们将此变形经典码记为 cone(g)，关于锥映射的更多背景知识，请参阅第二节。在此例中，$G_\bullet$ 是三比特重复码的对偶码。我们可以看到，所有辅助 Z 校验的乘积等于 $C_\bullet$上的 Z 逻辑算符代表元，因此测量辅助稳定子便能如预期测量 Z 。值得注意的是，对于 $G_\bullet$这一特定选择， G_{-1} 为空；但一般而言， $G_\bullet$ 中可能存在 X 校验。最后，将 cone(g) 与基超图积码中的另一个经典码 $D_\bullet$取积，即得到图 2 (c) 所示的完整变形码。我们将此变形码称为锥化码，记作 (cone(g) $\otimes D$)$_\bullet$。锥化码的完整链复形绘于图 2 (c) 左侧，其中我们用 G_i^j 表示空间 $G_i \otimes D_j$，用 C_i^j 表示空间 $C_i \otimes D_j$。

值得注意的是，合并码在 G_1^1 中包含元校验，用于检查 Z 中辅助比特 G_1^0和 G_0^1 上的测量错误，此外还包含原始码的 Z 校验，即 C_1^1。我们在第二节 C 中讨论这些元校验对于快速手术的重要性。此外，对于我们的具体示例，D 是三比特线性重复码的对偶码。我们的（cone(g) $\otimes D$）$_\bullet$ 示例的 Tanner 图位于右侧。我们还标出了超图乘积码 Q 的三个逻辑 $\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$算符 Z_1、 Z_2、 Z_3 ；事实上，它们都是同一个逻辑算符在逻辑上等价的表示。通过观察可以看出，我们实现了前述目标：测量 $\bar{}$的逻辑算符，即 Q。具体而言，每个表示 Z_i 都在构造（cone(g) $\otimes D$）$_\bullet$ 中被测量，因为该表示等于辅助比特 Z 校验的乘积，即其下方的三个深蓝色方块。直观地说，对同一逻辑算符的不同表示进行冗余测量，可以确保系统能够容忍这样的故障：任意一次逻辑测量因测量错误而发生翻转；在常规非恒定时间手术中，这正是通过重复测量来捕获的同一种故障，

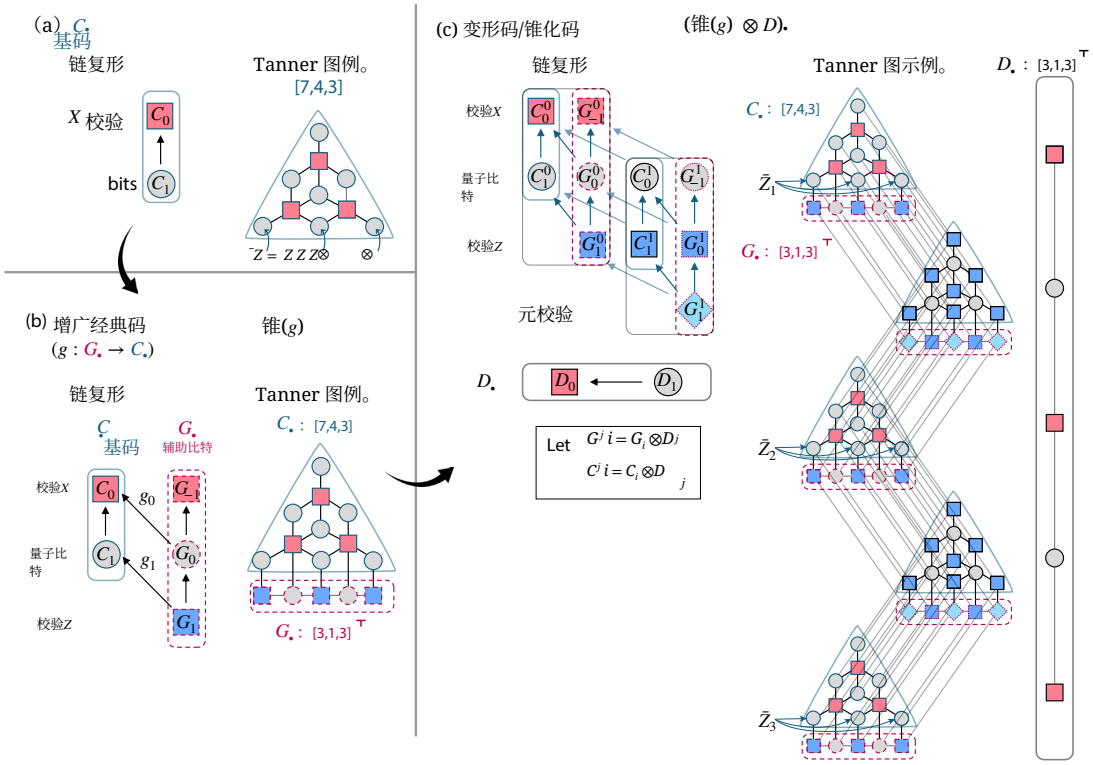


图 2。（a）用于基础超图积码 $Q(C \otimes D)_\bullet$ 的经典码 $C_\bullet = C_1 \to C_0$。图中展示了一个具体示例——$[7,4,3]$ 汉明码，并突出显示了一个逻辑算符 $\bar{Z}$。（b）增广经典码 cone(g)，即通过链映射 g_i：$G_i \to C_i$ 将经典码 $C_\bullet$ 附加到辅助复形 $G_\bullet$：$G_1 \to G_0 \to G_{-1}$ 上。图中展示了增广码 $[7,4,3]$ 的 Tanner 图。值得注意的是，$G_\bullet$ 的所有校验 Z 的乘积等于先前突出显示的逻辑算符 $\bar{Z}$。（c）最终的变形码或锥化码 (cone(g) $\otimes D)_\bullet$，我们切换到该码以对 $(C \otimes D)_\bullet$ 执行快速手术。(cone(g) $\otimes D)_\bullet$ 是 3(b) 中增广码与 $D_\bullet$ 的张量积。这个变形码包含元校验（位于链复形的 G_1^1 中），用于检测 Z 校验的测量错误。我们通过将 3(b) 中增广码示例与 $[3,1,3]$ 重复码的对偶码进行超图乘积，展示一个具体变形码示例的 Tanner 图。该锥化码可并行测量突出显示的逻辑代表元 $\bar{Z}_1$、$\bar{Z}_2$ 和 $\bar{Z}_3$。

对于进一步讨论测量多个表示对于快速手术的重要性，读者可参阅文献 [19] 的附录 E。我们强调，这个示例是一个变形码；只有在与对应于选择不同经典码手术锥 g_i 的其他变形码连续快速配合使用时，它才具备容错性并能够实现常数时间。

C. 先前工作

a. 现有快速手术装置的开销。对于能够在一种或两种（X 且 Z）基下进行单次态制备的三维及更高维超图积码，先前的工作 [26, 27] 指出，可以以常数空间开销执行单轮手术。对于其他能够进行单次态制备的码，文献 [18] 构造了单轮手术小工具，可测量码中的任意泡利算符，但其量子比特开销高得惊人 $O(nkd)$。

文献 [19] 提出了常数时间手术，并将分块读取作为一个示例。分块读取适用于任意 CSS 码，其量子比特开销为 $O(n)$。不过，它在逻辑作用方面的灵活性有限。分块读取会并行测量同一 CSS 码的一个或多个码块中的所有逻辑量子比特，但若不对基码作出强假设，就无法单独处理某些量子比特或其子集。例如，给定 CSS 码的两个码块，分块读取可以同时测量所有带索引的逻辑量子比特对上的 $Z \otimes Z$可观测量。给定 b 个码块以及一组 t 个两两对易的 b 量子比特泡利可观测量，我们可以在常数时间手术模型下，用分块读取在 $O(t)$ 时间内测量所有由 b 个逻辑量子比特组成的 k 个带索引元组上的这些泡利可观测量。值得注意的是，也可以通过横向 CNOT 实现这一逻辑作用。从这个角度看，分块读取建立了手术与横向门之间，以及常数时间手术与算法容错 [28]之间的有趣联系。我们进一步指出，分块读取的逻辑作用还可用于实现 CSS 码的串

接，这与文献中单轮码切换技术所研究的情况类似。[27, 36, 37]这些联系值得在未来的研究中进一步探索。

b. HGP 码上的逻辑操作。 由于具有理想的结构性质，HGP 码在以往文献中得到了广泛研究 [25]。我们将讨论范围限定在密切相关的工作，包括文献 [16, 27, 36–38]。

为了讨论文献 [38], , 我们简要介绍文献 [39] 中提出的同态测量 技术。与手术类似，同态测量是一种从基码测量逻辑Pauli可观测量的方法。它不使用变形码，而是使用一个具有足够距离的辅助码块，将该码块制备为稳定子态，并在辅助比特与基码块之间施加 CNOT 电路（通常称为同态 *CNOT*），以纠缠逻辑量子比特。随后测量辅助码块中的物理量子比特，并根据辅助码块的物理测量结果推断基码上所需的逻辑测量结果。

同态测量的效果因基码的结构而有显著差异。对于同调乘积码，文献 [38] 设计了大小为 $O(n)$的辅助码块（其本身也是同调乘积码），可用于并行执行Pauli乘积测量（PPM）。通过使用不同的辅助码和常数深度酉门，文献 [40, 41], [38] 证明了可在HGP码上实现完整的逻辑Clifford群。请注意，如前所述，将辅助码块制备为稳定子态通常需要 $O(d)$时间。因此，对于二维HGP码，他们的装置每次操作需要 $O(d)$时间。相比之下，我们的手术小工具每次操作只需 $O(1)$时间。

通过将我们的构造与文献 [38]中的构造进行比较，可以得到更多见解和观察。值得注意的是，文献 [19] 通过ZX演算证明了CSS 手术与同态测量之间存在电路等价。此外，我们的手术辅助系统同样是HGP码，这与文献 [38] 所用的同调乘积辅助码相似。这些相似之处和联系引出了自然的问题：这两种构造之间有哪些显著区别，为什么其中一种速度更快？在介绍必要的技术工具后，我们将在第IIIB节末回答这些问题。

最近，参考文献 [16]为二维HGP码构造了手术小工具，可并行测量至多 $O(k)$ 个算符（用时 $O(d)$），并提出利用经典码同态，帮助这些小工具测量比同态测量所能实现的范围更加灵活的一组算符。比较链复形（参见参考文献 [16]中的公式（D19）和本文图 4）最能体现他们的构造与我们构造之间的差异。从高层次来看，主要区别在于，我们为 $A_\bullet$构造了一个四项链复形，而非三项链复形。这里额外的一项

其中 $A_\bullet$ 是我们用来检查测量错误的元校验，以此替代变形码中的重复轮次。

对于某些三维及更高维超图积码族，文献 [27, 36]展示了如何在常数时间内，在这些码的低维（包括二维）“切片”与高维“切片”之间切换。利用这些单轮码切换和单轮态制备方法，他们展示了如何在常数时间内对编码的逻辑信息实现各种门。与此同时，文献 [37] 展示了通过取两个量子 CSS 码族的同调积，可以实现单轮码切换。这一基本操作使他们能够在常数时间内实现“批处理”Clifford电路。这里的“批处理”是指，在足够多相同的码块上实现同一个 k量子比特电路，每个码块编码 k 个逻辑量子比特。值得注意的是，这些单轮码切换技术 [27, 36, 37]都要求使用规模大于二维HGP码的码，而且其码率可能更低。

II. 预备知识

A. 链复形与量子码 es

我们首先介绍链复形和量子码的标准记号与定义，这些内容将在本文中贯穿使用。

$\mathbb{F}_2$ 上的链复形 $C_\bullet$ 是一列带基向量空间，并配备了空间之间的线性映射，我们称之为边界映射。

$$C_\bullet = \cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \tag{1}$$

边界映射满足条件 $\partial_{i-1}\circ\ {}_i = 0$，或者等价地，$\mathrm{im}(\partial_i) \subseteq \ker(\partial_{i-1})$。我们考虑有界链复形，即只有有限个空间 C_i 非平凡。上链复形 $C^\bullet$由将边界算子转置为上边界映射 $\delta^{i-1} = \partial_i^\top$构造而成。

$$C^\bullet = \cdots \xleftarrow{\delta^{n+1}} C^{n+1} \xleftarrow{\delta^n} C^n \xleftarrow{\delta^{n-1}} C^{n-1} \xleftarrow{\delta^{n-2}} \cdots \tag{2}$$

这里，对于所有指标 $i \in \mathbb{Z}$，我们都令 $C^i \cong C_i$ 。i-同调空间和 i-上同调空间定义为

$$H_i(C_\bullet) = \ker(\partial_i)/\mathrm{im}(\partial_{i+1}), \tag{3}$$
$$H^i(C^\bullet) = \ker(\delta^i)/\mathrm{im}(\delta^{i-1}). \tag{4}$$

i上同调距离 $d_i(C_\bullet)$ 和 i-余上同调距 离 $d^i(C^\bullet)$ 为

$$d_i(C_\bullet) = \min_{x\in H_i(C_\bullet)} |x|, \tag{5}$$
$$d^i(C^\bullet) = \min_{x\in H^i(C^\bullet)} |x|. \tag{6}$$

我们通常将这些记号简写为 $d_i(C)$ 和 $d^i(C)$。如果（余）同调空间为空，我们遵循参考文献 [42] 中的约定，将距离设为无fty。这一约定对我们后续的距离分析很有帮助。

量子 CSS 码可以用一个长度为 2 的链复形表示，

$$C_\bullet = C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0, \tag{7}$$

其中，2-边界对应于Z-奇偶校验矩阵的转置 $\partial_2 = H_Z^\top$，而 1-边界对应于 X-奇偶校验矩阵 $\partial_1 = H_X$。条件 $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$ 恰好要求稳定子彼此对易，$H_X H_Z^\top = 0$。Z-逻辑算符属于 1-同调，$H_1(C_\bullet) = \ker(H_X)/\mathrm{im}(H_Z^\top)$，因为它们不会被 H_X中的奇偶校验检测到，且不属于 Z-稳定子群。类似地，X-逻辑算符属于 1-上同调，$H^1(C^\bullet) = \ker(H_Z)/\mathrm{im}(H_X^\top)$。该码的 X- 距离和 Z- 距离分别是 1- 余周长距离和周长距离。

在本文中，我们经常同时考虑多个（上）链复形。因此，从现在起，除非上下文已明确指出复形，否则我们将在（上）边界映射上添加下标，以标明其所属的复形。

B. CSS码手术即映射锥

本节简要回顾码手术的方法，该方法使我们能够设计容错方案，以测量量子稳定子码的泡利逻辑算符。逻辑测量是容错量子计算（FTQC）中的一种强大基本操作，正如基于泡利算符的计算（PBC） [20]模型所述。具体而言，克利福德门可以通过 Pauli 测量和前馈泡利校正来实现；借助魔态，非克利福德门也可以用类似方式实现。更多详情请参阅例如参考文献 [14] 的图 11。随着近期进展 [6–11], ，码手术如今已成为在量子 LDPC 码上实现容错量子计算的一种具有实际前景且普遍适用的方法 [14, 15]。

就我们的目的而言，我们将范围限定在 CSS 码的情形，并主要沿用文献 [10] 中的表述。假设我们希望测量一个量子码的 Z 逻辑算符，该量子码由链复形 $C_\bullet$ 表示。概括而言，我们将一个辅助系统附加到 $C_\bullet$，并测量该辅助系统的 Z 校验，以提取逻辑信息的值。形式上，码手术引入一个辅助系统

$$A_\bullet = A_1 \xrightarrow{\partial_{A,1}} A_0 \xrightarrow{\partial_{A,0}} A_{-1}, \tag{8}$$

以及链映射 $f_\bullet : A_\bullet \to C_\bullet$。链映射是两个链复形 $f_i : A_i \to C_i$ 之间的同态。

交换图如下。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \xrightarrow{0} & A_1 & \xrightarrow{\partial_{A,1}} & A_0 & \xrightarrow{\partial_{A,0}} & A_{-1} \\ \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ C_2 & \xrightarrow[\partial_{C,2}]{} & C_1 & \xrightarrow[\partial_{C,1}]{} & C_0 & \xrightarrow{0} & 0 \end{array} \tag{9}$$

具体来说，$f_0\partial_{A,\,1} = \partial_{C,\,1} f_1$。我们取 f 的映射锥，记为 cone(f)，它由将辅助复形 $A_\bullet$ 左移一个度得到。

$$\mathrm{cone}(f) = \begin{array}{ccccc} A_1 & \xrightarrow{\partial_{A,1}} & A_0 & \xrightarrow{\partial_{A,0}} & A_{-1} \\ & \searrow^{f_1} & & \searrow^{f_0} & \\ C_2 & \xrightarrow[\partial_{C,2}]{} & C_1 & \xrightarrow[\partial_{C,1}]{} & C_0 \end{array} \tag{10}$$

由于 f 是一个同态，或者等价地，方程（9）中的图表是交换的，因此 cone(f) 是一个有效的链复形。

可以将（10）视为一个 CSS 码，其中 Z 校验、量子比特和 X 校验分别属于向量空间 $A_1 \oplus C_2$、$A_0 \oplus C_1$ 和 $A_{-1} \oplus C_0$。在手术的语境下，这个码称为合并码或变形码，其校验矩阵为

$$\tilde{H}_Z^\top = \begin{array}{c} \\ A_0 \\ C_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A_1 & C_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \partial_{A,1} & 0 \\ f_1 & \partial_{C,2} \end{pmatrix} \end{array} \tag{11}$$

$$\tilde{H}_X = \begin{array}{c} \\ A_{-1} \\ C_0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A_0 & C_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \partial_{A,0} & 0 \\ f_0 & \partial_{C,1} \end{pmatrix} \end{array} \tag{12}$$

变形码如何帮助我们执行逻辑测量？正如先前工作 [8–10], 中所详述的，基本思路是在基存储码与变形码之间执行码切换。我们从具有可靠综合征信息的基码开始，然后测量变形码的新稳定子，持续 $O(d)$ 轮，最后返回基码并测量其稳定子，持续 $O(d)$ 轮。在此过程中，基码中对应于向量的所有 Z-算子

$$f_1(\ker(\partial_{A,1})) = \{f_1(v) : v \in \ker(\partial_{A,1})\} \subseteq \ker(\partial_{C,1}). \tag{13}$$

由辅助系统进行测量。为此，考虑算符 $Z^{f_1(v)}$，它是作用于$f_1(v)$ 中量子比特上的 Pauli Z算符。注意，这种算符必定是 Z的 $C_\bullet$-稳定子或逻辑算符，并且是 Z中对应于 A_1 里非零指标的变形 v校验的乘积。因此，其测量结果可根据变形校验的测量值推断得出。由于我们连续 $O(d)$ 轮对这些校验进行了测量，因此测量结果可靠。更详细的推导可参见例如参考文献 [10]的引理1。注意，快速量子手术的协议有所不同，我们将在第IIC节详细说明。

因此，真正困难的工作在于构造合适的辅助复形 $A_\bullet$，使码切换协议能够以低开销容错地执行正确的测量。从任意 CSS 码出发，构造能够测量指定逻辑算符的手术系统，这一主要方法由参考文献 [9]提出，称为规范化测量；参考文献 [10] 则独立地将其称为同调测量。下面我们用链复形的语言概述它们的主要结果。

引理1 (主要结果见 [9, 10])。考虑一个三项复形 $C_\bullet = C_2 \xrightarrow{\partial_{C,2}} C_1 \xrightarrow{\partial_{C,1}} C_0$，以及一个元素 $L \in H_1(C_\bullet)$。我们可以构造一个辅助复形 $A_\bullet$、一个链映射 $f: A_\bullet \to C_\bullet$，进而得到映射锥 $\mathrm{cone}(f)$，如方程 (8)、(9) 和 (10)所示，使得以下条件成立。

1. 映射 $\partial_{A,1}$ 的边界切格常数至少为 1（见定义 1）。
2. $\dim(H_0(A_\bullet)) = 0$, $\dim(H_{-1}(A_\bullet)) = 0$。3. $\dim(H_1(A_\bullet)) = 1$，且 $H_1(A_\bullet)$ 中唯一属于 v 的元素是 $\ker(\partial_{A,1})$，即 A_1 上的全1向量。它满足 $f_1(v) = L$。
4. 存在一个常数 w，使得 A 的边界映射和链映射均为 w-稀疏；也就是说，$\partial_{A,1}$、$\partial_{A,0}$ 和 f_0 的行列权重都不超过 w。此外，f_1 是 1-稀疏。
5. $\dim(A_1) + \dim(A_0) + \dim(A_{-1}) \le O(|L| \log^3(|L|))$.

利用这些条件，可以证明 $d_1(\text{锥}(f)) \ge d_1(C)$ 和 $d^1(\text{锥}(f)) \ge d^1(C)$。

定义 1 (边界切格常数)。考虑一个矩阵 $M: \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^m$，使得全1向量 v 属于 M 的核。其边界切格常数 $\beta(M)$ 是满足以下条件的最大值：对所有 $v \in \mathbb{F}_2^n$，均有

$$|Mv| \ge \beta(M) \cdot \min(|v|, n - |v|). \tag{14}$$

为便于说明，我们结合 CSS 码手术的背景来解释上述条件。首先，条件1 是证明引理结论的关键。该引理指出，变形码，锥(f)，至少具有与基码 X和 Z-距离相同的距离。条件 2 确保辅助系统 $A_\bullet$ 自身不含逻辑量子比特，因此将其附加到 $C_\bullet$ 不会引入新的逻辑自由度，这些自由度通常称为规范逻辑量子比特。条件 3指出，逻辑算符 L在变形码中变为稳定子的乘积，这正是逻辑测量所需的（方程（13））。条件 4 限制了变形码中的稳定子校验权重。最后，条件5 限制了空间开销，即辅助系统引入的校验和量子比特总数。

在这些条件下，从距离为 d的基CSS码出发，文献 [9] 表明上述码切换协议具有故障距离 d。形式上，他们考虑了两类物理噪声：物理量子比特上的泡利错误，以及稳定子测量上的翻转错误。故障距离刻画了协议中破坏逻辑信息且不被检测到（由协议中的探测器检测）所需的此类错误的最小数目。这一容错度量在码手术研究中是标准的，并可作为协议在电路级噪声下性能的指标。在本文其余部分，我们将考虑该噪声模型下的故障距离。

我们指出，参考文献 [9] 中的规范测量技术比引理1所述的适用范围更广，因为它可以用于在非 CSS 稳定子码上测量混合类型算符（即作用于不同量子比特的 X、Y、Z算符的乘积）。这对于参考文献 [14], 中的提取器架构等应用至关重要；该架构以稳定子码为输入，构建一个提取器，能够从基码中提取任意所需的逻辑泡利算符。

我们还要指出，尽管引理 1 仅限于测量单个泡利算符（该算符可以支撑在多个逻辑量子比特上），先前工作也研究了使用手术 [12, 13, 16]或同态测量 [38, 39]同时测量（或等价地，并行测量）多个彼此对易的泡利算符。本文构造的装置也能并行测量多个算符，见第 III B节。

C. 快速码手术

在码手术协议中，逻辑测量是通过测量变形码中一组 Z-稳定子的乘积推断出来的。在可能发生测量错误的情况下，通常会采用 $O(d)$ 轮测量，以确保稳定子测量结果得到可靠提取，从而使逻辑测量具有故障距离 d。然而，还有另一种方法，无需重复多轮测量即可可靠提取稳定子值，即使用 元校验。具体而言，某些量子码的稳定子生成元具有冗余性，因此在没有测量错误时，某些稳定子测量结果的乘积必然为 $+1$。这些稳定子的乘积称为元校验，可将其视为对综合征的经典校验。元校验常用于降低量子存储器中综合征提取的时间开销。文献 [19] 利用元校验降低了手术的时间开销。我们在此简要回顾其框架。

形式上，假设一个CSS码具有 m_z 个不同的 Z-稳定子校验。我们将 Z-稳定子上的元校验记为 $M_Z \in \mathrm{F}_2^{r_z \times m_z}$，其中 $M_Z H_Z = 0$。独立元校验的数目为 r_z。元校验可视为描述该量子码的链复形中的一个附加项。示意性地，我们将向辅助量子比特链复形再添加一项，以表示元

校验（作用于 Z-稳定子）。

$$A_\bullet = A_2 \xrightarrow{\partial_{A,2}=M_Z^\top} A_1 \xrightarrow{\partial_{A,1}=H_Z^\top} A_0 \xrightarrow{\partial_{A,0}=H_X} A_{-1}, \tag{15}$$

我们将 $A_\bullet$ 的元校验距离定义为 1-余上同调距离，

$$d^1(A^\bullet) = \min_{x\in H^1(A^\bullet)} |x|, \tag{16}$$

$$H^1(A^\bullet) = \frac{\ker(\delta_A^2)}{\mathrm{im}(\delta_A^1)} = \frac{\ker(M_Z)}{\mathrm{im}(H_Z)}. \tag{17}$$

与之前一样，我们可以构造一个链映射 $f\colon A_\bullet \to C_\bullet$。

$$\begin{array}{ccccccc} A_2 & \xrightarrow{\partial_{A,2}} & A_1 & \xrightarrow{\partial_{A,1}} & A_0 & \xrightarrow{\partial_{A,0}} & A_{-1} \\ \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ C_2 & \xrightarrow[\partial_{C,2}]{} & C_1 & \xrightarrow[\partial_{C,1}]{} & C_0 & \xrightarrow{0} & 0 \end{array} \tag{18}$$

映射锥 cone(f) 现在是一个四项链复形。

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Metachecks} & & \text{Z checks} & & \text{qubits} & & \text{X checks} & & \\ A_2 & \xrightarrow{\partial_{A,2}} & A_1 & \xrightarrow{\partial_{A,1}} & A_0 & \xrightarrow{\partial_{A,0}} & A_{-1} & & \\ & \searrow^{f_2} & & \searrow^{f_1} & & \searrow^{f_0} & & & \\ & & C_2 & \xrightarrow[\partial_{C,2}]{} & C_1 & \xrightarrow[\partial_{C,1}]{} & C_0 & & \end{array} \tag{19}$$

这个新的变形码（19）具有 Z 类元校验、Z 个校验、量子比特，以及 X 个校验，分别对应于向量空间 A_2、$A_1 \oplus C_2$、$A_0 \oplus C_1$ 和 $A_{-1} \oplus C_0$。其校验矩阵为

$$M_Z^\top = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ C_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} A_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \partial_{A,2} \\ f_2 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{20}$$

$$\tilde{H}_Z^\top = \begin{array}{c} \\ A_0 \\ C_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A_1 & C_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \partial_{A,1} & 0 \\ f_1 & \partial_{C,2} \end{pmatrix} \end{array}, \tag{21}$$

$$\tilde{H}_X = \begin{array}{c} \\ A_{-1} \\ C_0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A_0 & C_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \partial_{A,0} & 0 \\ f_0 & \partial_{C,1} \end{pmatrix} \end{array}. \tag{22}$$

现在我们回顾文献 [19] 中讨论的常数时间手术公式，见第 IA 节和图 1。我们不再是在 $O(1)$ 时间内执行单次手术操作，而是考虑在 $A[i]_\bullet$ 和链映射 $f[i]$指定的辅助复形序列中，于 $O(d)$ 时间内执行一系列手术操作。要使该协议具备容错性，这些手术操作必须满足某些条件。我们首先给出以下定义。

定义 2（压缩码）。考虑一个量子 *CSS*码 $C_\bullet$，它带有一列辅助复形$A[1]_\bullet, \cdots, A[t]_\bullet$以及链映射 $f[1]\colon A[1]_\bullet \to C_\bullet, \ldots, f[t]\colon A[t]_\bullet \to C_\bullet$。考虑这些映射的平凡扩展 $f'[i]\colon \oplus_{i\in[t]} A[i]_\bullet \to C_\bullet$，其在 $A[i]_\bullet$ 上的作用与 $f[i]$ 相同，而在其余空间上作用平凡。压缩码 $\mathtt{CC}_\bullet$ 定义为将所有链映射一起取映射锥。

$$\mathtt{CC}_\bullet = \mathrm{cone}\left(\sum_{i\in[t]} f'[i]\right) \tag{23}$$

更直观地说，压缩码是通过一次性将所有辅助系统附加到码$C_\bullet$上得到的。显然，$\mathtt{CC}_\bullet$ 很可能具有较低的码率和较高的稳定子校验权重。然而，压缩码是一种证明构造，不会在手术协议中显式构造。于是，文献 [19] 的主要结果可表述如下。

引理2 (快速超图手术，文献 [19]中的定理5.3。设 $C_\bullet$ 是一个距离为 d的 *CSS* 码，并考虑由复形 $A[1]_\bullet, \cdots, A[t]_\bullet$和链映射 $f[1]\colon A[1]_\bullet \to C_\bullet, \ldots, f[t]\colon A[t]_\bullet \to C_\bullet$ 定义的一系列手术操作。那么，图 *1*中描述的手术协议具有故障距离 d，前提是满足以下条件：

1. 压缩码 $\mathtt{CC}_\bullet$ 的 *1*-上同调距离和 *1*-余系统距离至少为 d。*2.* 每个复形 $A[1]_\bullet$ 的 *1*-余系统距离至少为 d。*3.* 对所有 i，标准基向量 u、$v \in A[i]_1$、$f[i]_1(u)$ 与 $f[i]_1(v)$ 互不相交，即它们在 C_1 中的支撑指标互不相同。

在此引理中，条件1 确保协议免受类空错误的影响，即数据量子比特上的泡利错误。条件 2 确保每个手术操作都具有足够的元校验距离。该距离可保护协议免受类时错误的影响，即稳定子测量中的翻转错误。最后，条件 3 用于控制协议中的错误传播。关于此引理的详细证明及示例构造（包括分块读取和部分分块读取），请参阅文献 [19] 。

D. 超图乘积码

本文研究同调乘积码，特别是超图乘积码。超图乘积码是由两个输入经典码的一维链复形表示取张量积（定义3）构造而成的量子 CSS 码。

定义 3（链复形的张量积）。给定两个链复形 $C_\bullet$、$D_\bullet$，它们的张量积

链复形，记作 $(C \otimes D)_\bullet$，其分次向量空间定义如下：

$$(C \otimes D)_k = \bigoplus_{p+q=k} C_p \otimes D_q. \tag{24}$$

对于元素 $c \otimes d \in C_p \otimes D_q$，边界映射的作用为

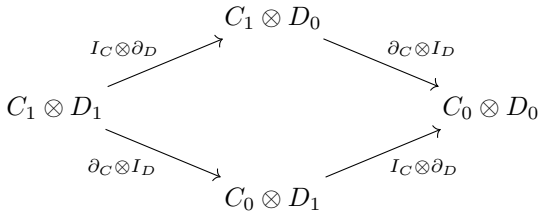
$$\partial_{C\otimes D,k}(c \otimes d) = \partial_{C,p}(c) \otimes d + (-1)^p c \otimes \partial_{D,q}(d). \tag{25}$$

请注意，$\partial_{C,\,p}(c) \otimes d$ 属于空间 $C_{p-1} \otimes D_q$，而$c \otimes \partial_{D,\,q}(d)$ 属于空间 $C_p \otimes D_{q-1}$，二者均为$(C \otimes D)_{k-1}$的子空间。当域为$\mathbb{F}_2$，时，符号$(-1)^p$ 可以省略。

当两个输入经典码$C_\bullet$，$D_\bullet$满足 $p = 0$，1 和 $q = 0$，1 时，其张量积是一个长度为 2 的链复形。

任何 CSS 码都需要 H_z 和 H_x 矩阵满足$H_x H_z^\top = 0$。超图乘积码按照如下方式从张量积 $(C \otimes D)_\bullet$ 中指定 H_z 和H_x。

定义 4 (超图乘积码)。超图乘积码 $HGP(C_\bullet, D_\bullet)$ 是与一个长度为 *2* 的链复形相关联的 *CSS* 码，该链复形是两个长度为 *1* 的链复形 $C_\bullet, D_\bullet$ 的张量积，其边界映射为 ∂_C, ∂_D。链复形可写如下。



(26)

具体而言，Z-校验、量子比特和 X-校验的空间分别对应于 $C_1 \otimes D_1$ $(C_1 \otimes D_0) \oplus (C_0 \otimes D_1)$和$C_0 \otimes D_0$。因此，校验矩阵可写为

$$H_Z^\top = \begin{pmatrix} I_C \otimes \partial_D \\ \partial_C \otimes I_D \end{pmatrix}, \tag{27}$$

$$H_X = (\partial_C \otimes I_D \quad I_C \otimes \partial_D). \tag{28}$$

这些矩阵满足对易关系$H_X H_Z^\top = 0$。

张量积复形的同调空间与各组成复形的同调空间存在自然联系。

引理 3 (K¨unneth 公式)。

$$H_k((C \otimes D)_\bullet) \cong \bigoplus_{p+q=k} H_p(C_\bullet) \otimes H_q(D_\bullet). \tag{29}$$

我们可以将 $C_\bullet$ 和 $D_\bullet$ 视为描述两个经典码，其校验矩阵分别为 $H_C = \partial_C$ 和 $H_D = \partial_D$。这些码的比特向量空间分别为 C_1 和 D_1 维数分别为 n_C 和 n_D。校验向量空间分别为 C_0 和 D_0，维数分别为 m_C和 m_D。设由 $\ker(H_C)$ 定义的码空间参数为 $[n_C, k_C, d_C]$，由 $\ker(H_D)$ 定义的码空间参数为 $[n_D, k_D, d_D]$。此外，设转置码 $\ker(H_C^\top)$ 和 $\ker(H_D^\top)$ 的参数分别为 $[n_{C^\top}, k_{C^\top}, d_{C^\top}]$ 和 $[n_{D^\top}, k_{D^\top}, d_{D^\top}]$。那么，超图积码 $\mathrm{HGP}(C_\bullet, D_\bullet)$ 的参数可根据这些经典码参数计算如下。

$$n = n_C m_D + m_C n_D, \tag{30}$$

$$k = k_C k_{D^\top} + k_{C^\top} k_D, \tag{31}$$

$$d = \min(d_C, d_D, d_{C^\top}, d_{D^\top}). \tag{32}$$

为便于讨论手术小工具对超图积码的逻辑作用，我们描述一组逻辑算符的典范基 [38, 40]。对于每个对应于经典码的线性映射，例如 ∂_C，我们进行行化简，使这些校验矩阵具有如下形式

$$\partial_C = (b_1^C, b_2^C, \ldots b_{k_C}^C, I_{m_C}) \tag{33}$$

其中，b_1^C，$\ldots b_k^C$是 $\mathrm{F}_2^{m_C}$ 中的列向量。我们可以放心地重写这些映射，因为对校验矩阵进行的这些初等操作（包括置换行和列，以及将某一行加到另一行）会保持码空间不变。相应地，这些初等操作会将生成矩阵重排为

$$G_C = \left(\begin{array}{c|c} I_{k_C} & \begin{matrix} \beta_1^C \\ \beta_2^C \\ \vdots \\ \beta_{k_C}^C \end{matrix} \end{array} \right) \tag{34}$$

其中 β_i^C:=$(b_i^C)^\top$。为简洁起见，我们只展示了针对 ∂_C 的行化简，但对 ∂_D、$\partial_C^\top$ 和 $\partial_D^\top$ 也重复进行这一化简。

要写出基，令 $\ell_i^C \in \mathrm{F}_2^{n_C}$ 为 G_C 的第 i 行，其中 $i \in [k_C]$。令 e_j^C 为 $\mathrm{F}_2^{n_C}$ 的第 j 个单位向量。类似地，我们定义 ℓ_i^D、$e_j^D \in \mathrm{F}_2^{n_D}$、$\ell_i^{C^\top}$、$e_j^{C^\top} \in \mathrm{F}_2^{m_C}$ 以及 $\ell_i^{D^\top}$，$e_j^{D^\top} \in \mathrm{F}_2^{m_D}$。于是，$Z$逻辑算符的一个典范基为

$$\bar{Z}_{ij}^L = \begin{pmatrix} \ell_i^C \otimes e_j^{D^\top} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall\, i \in [k_C],\ j \in [k_{D^\top}], \tag{35}$$

$$\bar{Z}_{pq}^R = \begin{pmatrix} 0 \\ e_p^{C^\top} \otimes \ell_q^D \end{pmatrix}, \quad \forall\, p \in [k_{C^\top}],\ q \in [k_D]. \tag{36}$$

这里 $\bar{Z}_{ij}^L$，$\bar{Z}_{pq}^R \in \mathrm{F}_2^{n_C m_D + m_C n_D}$ 是一些向量，其非零项分别对应于 $(C_1 \otimes D_0)$ 和 $(C_0 \otimes D_1)$ 中物理量子比特上的支撑。一个典范基

X 逻辑算符的

$$\bar{X}^L_{ij} = \begin{pmatrix} e^C_i \otimes \ell^{D^\top}_j \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall i \in [k_C],\ j \in [k_{D^\top}] \tag{37}$$

$$\bar{X}^R_{pq} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ell^{C^\top}_p \otimes e^D_q \end{pmatrix}, \quad \forall\ p \in [k_{C^\top}],\ q \in [k_D] \tag{38}$$

可以看出，这些代表元与所有校验都对易。举例来说，考虑算符 $\bar{Z}^{\mathrm{L}}_{ij}$。由于该算符显然与所有 Z 校验对易，我们只考虑 X 中的校验， $C_0 \otimes D_0$ 如方程 (28) 所示。由于ℓ^C_i是 ∂_C的生成矩阵中的一行， $\partial_C \ell^C_i = 0$ 对所有 $i \in [k_C]$均成立。因此 $(\partial_C \otimes I_D)(\ell^C_i \otimes e^{D^\top}_j) = 0$ ，由此可见 $H_X \bar{Z}^{\mathrm{L}}_{ij} = 0.$ 。对所有其他典范逻辑算符也可作类似论证。此外，我们可以定义成对的 X 和 Z 典范逻辑算符，使它们彼此反对易，同时与其他所有典范逻辑算符对易。每一对都对应一个坐标 $(i,\ j)$ 或 $(p,\ q)$，即

$$\{\bar{X}^{\mathrm{L}}_{ij}, \bar{Z}^{\mathrm{L}}_{ij}\} = \{\bar{X}^{\mathrm{R}}_{pq}, \bar{Z}^{\mathrm{R}}_{pq}\} = 0, \forall i, j, p, q. \tag{39}$$

如果我们将物理量子比特排列在 $C_1 \otimes D_0$ 和 $C_0 \otimes D_1$ 的 $n_C \times m_D$ 网格以及 $m_C \times n_D$ 网格中，那么这些典范逻辑代表元便有了很好的几何解释。（$\bar{X}^{\mathrm{L}}_{ij}$，$\bar{Z}^{\mathrm{L}}_{ij}$）分别是仅支撑在 $n_C \times m_D$ 网格第i行和第 j列上的逻辑算符。同样，（$\bar{X}^{\mathrm{R}}_{pq}$，$\bar{Z}^{\mathrm{R}}_{pq}$）分别仅支撑在 $m_C \times n_D$ 网格第 q列和第 p 行上。注意，根据构造， l^C_i和 $l^{D^\top}_j$ 分别仅在其前 k_C 个和 $k_{D^\top}$ 个元素中有一个非零项。因此，当我们将 $n_C \times m_D$ 网格限制为前 k_C 行和前 $k_{D^\top}$ 列时，该 $k_C \times k_{D^\top}$网格中的每个物理量子比特都属于一对典范逻辑算符的支撑。类似地，将 $m_C \times n_D$ 网格限制为一个 $k_{C^\top} \times k_D$ 网格时，情况也相同。从现在起，我们将逻辑量子比特的行称为所有典范逻辑算符支撑在 $k_C \times k_{D^\top}$ 或 $k_{C^\top} \times k_D$ 网格中特定一行量子比特上的逻辑量子比特。逻辑量子比特的列也同理。

为了界定更一般乘积复形的距离，我们援引参考文献 [42] 中的以下结果。

引理4 （参考文献 [42]中的方程（51）、定理17。）对于两个有界链复形 $C_\bullet$ 和 $D_\bullet$，若 $D_\bullet$ 恰有两个非平凡项，则可根据各分量复形的同调距离计算张量积复形 $(C \otimes D)_\bullet$ 的同调距离。

$$d_k(C \otimes D) = \min\left(d_{k-1}(C)d_1(D), d_k(C)d_0(D)\right). \tag{40}$$

取上链复形 $C^\bullet, D^\bullet$ 及其张量积 $(C \otimes D)^\bullet$，我们可以应用上述引理并推论得出

$$d^k(C \otimes D) = \min\left(d^{k-1}(C)d^1(D), d^k(C)d^0(D)\right). \tag{41}$$

III. 超图乘积码上的恒定时空手术

本节中，我们构造常数时间开销的手术操作，以并行测量超图乘积码中 Z 个逻辑算符的一行或一列。测量 X 个逻辑算符的情形类似。概括而言，对于一个 HGP 码 $(C \otimes D)_\bullet$，我们首先对复形 $C_\bullet$ 应用引理1中的手术方法，并得到一系列辅助复形 $G[i]_\bullet$。接着，我们取张量积 $(G[i] \otimes D)_\bullet$ ，并证明它们是 $(C \otimes D)_\bullet$的有效辅助手术复形。如果 $G[i]_\bullet$ 测量来自 $C_\bullet$的一个同调代表元 c_i ，那么 $(G[i] \otimes D)_\bullet$ 会同时测量来自 $(C \otimes D)_\bullet$ 的一组同调代表元，其形式为 $c_i \otimes h$，其中 $h \in H_0(D_\bullet)$。这组代表元可视为对应于 $c_i \in H_1(C_\bullet)$的 Z 算符的一行。

更具体地说，若 c_i 是方程（35）中的向量 l^C_i 之一，那么我们的手术操作会并行测量所有逻辑算符 $\bar{Z}^{\mathrm{L}}_{ij}$，$\forall j \in [k_{D^\top}]$ 。一般而言， c_i 是向量 l^C_i的线性组合，而测得的算符 $\begin{pmatrix} c_i \otimes e^D_j \\ 0 \end{pmatrix}$ 是 $\bar{Z}^{\mathrm{L}}_{ij}$ 对所有 $j \in [m_D]$的乘积。换言之，装置（$G[i] \otimes D$）$_\bullet$会并行测量一行Z 逻辑算符，其中每个算符都是规范 Z 基算符的乘积。类似地，我们可以先为 $D_\bullet$ 构造手术系统，再与 $C_\bullet$取张量积，从而并行测量一列 Z算符。

我们注意到，引理1 中的辅助复形可视为对 [43] 一个已被加入稳定子群的逻辑算符进行降权。从这个角度看，我们用于快速手术的辅助复形可视为对一个逻辑码字进行降权，该逻辑码字属于 $C_\bullet$中的经典码，随后再与未经改动的经典码 $D_\bullet$作超图积。我们想指出， [44] 也对经典码使用降权，以降低校验在两个˜ ˜经典码 $C_\bullet$ 以及 $D_\bullet$中的重量，然后在取这些码的超˜ ˜图积之前，$(C \otimes D)_\bullet$。然而， [44] 中这一构造的动机是得到稳定子权重更低且具有理想$[[n, k, d]]$ 参数的中小规模量子码。

A. 构造

考虑一个距离为 d 的二维超图乘积码 $(C \otimes D)_\bullet$。令 $c_1, \cdots, c_t \in C_1$ 为 $\ker(\partial_C)$ 中任意一组线性无关向量。令 $G[i]_\bullet$ 为将引理1应用于 $C_\bullet$ 和 c_i 后得到的三项链复形，其链映射为 $g[i] : G[i]_\bullet \to C_\bullet$ ，如方程（9）所示。我们用于对量子码 $(C \otimes D)_\bullet$ 进行手术的辅助复形序列为 $A[1]_\bullet = (G[1] \otimes D)_\bullet, \cdots, A[t]_\bullet = (G[t] \otimes D)_\bullet$。链映射为

$$f[i] = g[i] \otimes \mathrm{id}_D : (G[i] \otimes D)_\bullet \to (C \otimes D)_\bullet. \tag{42}$$

这些是有效的链映射，因为 $g[i]$ 是有效的链映射，而恒等映射 id_D 使链图表能够交换。

B. 逻辑作用

为理解这些手术操作的逻辑作用，我们分析锥化码的同调空间。首先陈述以下一个有用的引理，并在附录 A 中给出证明。

引理 5. 设 $A_\bullet, C_\bullet, D_\bullet$ 为链复形，且 $f: A_\bullet \to C_\bullet$ 为一个链映射，它诱导出第二个链映射 $f \otimes \mathrm{id}_D : (A \otimes D)_\bullet \to (C \otimes D)_\bullet$。那么

$$\mathrm{cone}(f \otimes \mathrm{id}_D) \cong (\mathrm{cone}(f) \otimes D)_\bullet. \tag{43}$$

固定 $i \in [t]$，现在考虑变形码

$$\mathrm{cone}(g[i] \otimes \mathrm{id}_D) = (\mathrm{cone}(g[i]) \otimes D)_\bullet, \tag{44}$$

其同调空间可借助 K¨unneth 公式（引理 3）来理解。具体而言，我们有

$$\begin{aligned} H_1((\mathrm{cone}(g[i]) \otimes D)_\bullet) = {} & H_1(\mathrm{cone}(g[i])) \otimes H_0(D_\bullet) \\ & \oplus H_0(\mathrm{cone}(g[i])) \otimes H_1(D_\bullet). \end{aligned} \tag{45}$$

我们将其与以下内容进行比较

$$H_1((C \otimes D)_\bullet) = H_1(C_\bullet) \otimes H_0(D_\bullet) \oplus H_0(C_\bullet) \otimes H_1(D_\bullet). \tag{46}$$

命题 1。 $H_1(\mathrm{cone}(g[i])) \cong H_1(C_\bullet)/\{c_i\}$，且 $H_0(\mathrm{cone}(g[i])) \cong H_0(C_\bullet)$。

证明。 复形 $\mathrm{cone}(g[i])$ 的形式如下。

$$\begin{array}{ccccc} G[i]_1 & \xrightarrow{\partial_{G[i],1}} & G[i]_0 & \xrightarrow{\partial_{G[i],0}} & G[i]_{-1} \\ & \searrow^{g[i]_1} & & \searrow^{g[i]_0} & \\ 0 & \xrightarrow[0]{} & C_1 & \xrightarrow[\partial_C]{} & C_0 \end{array} \tag{47}$$

在此证明的上下文中，我们令 $\partial_{\mathrm{cone},\,1}$，$\partial_{\mathrm{cone},}$ 表示 $\mathrm{cone}(g[i])$ 的边界映射。为证明第一个断言，我们利用如下事实： $H_0(G[i]_\bullet) = 0$，如引理2 中的条件 1所述。

取一条链 $(e,\ b) \in \ker(\partial_{\mathrm{cone},\ 0})$，其中 $e \in G[i]_0$ 且 $b \in C_1$。以下等式必须成立。

$$\begin{pmatrix} \partial_{G[i],1} & 0 \\ g[i]_0 & \partial_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{G[i],1}(e) \\ g[i]_0(e) + \partial_C(b) \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{48}$$

因此， e 必须属于 $\ker(\partial_{G[i],0})$；由于零阶同调是平凡的，这也就是 $\mathrm{im}(\partial_{G[i],1})$。这意味着存在一个元素 $v \in G[i]_1$，使得

$$\partial_{\mathrm{cone},1}((v,0)) + (e,b) = (0,b') \in \ker(\partial_{\mathrm{cone},0}), \tag{49}$$

对于某个 $b' \in C_1$。 $(0,b')$ 必须属于 $\ker(\partial_{\mathrm{cone}},0)$，因为根据假设，$(e,b) \in \ker(\partial_{\mathrm{cone}},0)$，并且 $\partial_{\mathrm{cone},0}\partial_{\mathrm{cone}},1((v,0)) = 0$，因为 $\mathrm{cone}(g[i])$ 是一个有效的链复形。注意，(e,b) 和 (e,b') 在 $H_1(\mathrm{cone}(g[i]))$ 中属于同一个同调类。 $(0,b') \in \ker(\partial_{\mathrm{cone}},0)$ 意味着 b' 必须属于 $\ker(\partial_C)$，因此 $H_1(\mathrm{cone}(g[i]))$ 中的每个类都必须对应于 $H_1(C_\bullet)$ 中的一个独立类。

接下来需要考虑，加入空间 $G[i]_1$ 后， $H_1(C_\bullet)$ 中的类如何变化。如引理 1 所述，$\dim(\ker(\partial_{G[i],\ 1})) = 1$，且元素 $v \in \ker(\partial_{G[i],\ 1})$ 满足 $g[i]_1(v) = c_i$。因此，类 $\{c_i\} \in H_1(C_\bullet)$ 现在属于 $\mathrm{im}(\partial_{\mathrm{cone},\ 1})$，并从 $H_1(\mathrm{cone}(g[i]))$ 中移除，而其余各类仍保持线性无关。这证明了我们的第一个断言。

为证明第二个断言， $H_0(\mathrm{cone}(g[i])) \cong H_0(C_\bullet)$，我们利用以下事实： $g[i]$ 是一个链映射，且 $H_{-1}(G[i]_\bullet) = 0$。取 $(r,h) \notin \mathrm{im}(\partial_{\mathrm{cone},0})$，其中 $r \in G[i]_{-1}$ 且 $h \in C_0$。由于 $H_{-1}(G[i]_\bullet) = 0$，存在 $e \in G[i]_0$ 使得

$$\partial_{\mathrm{cone},0}((e,0)) + (r,h) = (0,h') \in H_0(\mathrm{cone}(g[i])). \tag{50}$$

要使 $(0,h')$ 属于 $H_0(\mathrm{cone}(g[i]))$， h' 必须属于 $H_0(C_\bullet)$。因此， $H_0(\mathrm{cone}(g[i]))$ 中的每个类都必须对应于 $H_0(C_\bullet)$ 中的一个类。在此映射下， $H_0(\mathrm{cone}(g[i]))$ 中相互独立的类里的链被映射为 $H_0(C_\bullet)$ 中相互独立的类里的链。

反过来，取 $h \in H_0(C_\bullet)$，则 $(0,h)$ 必属于 $H_0(\mathrm{cone}(g[i]))$。为导出矛盾，假设 $(0,h) \in \mathrm{im}(\partial_{\mathrm{cone},0})$，那么必存在 (e,b)，使得 $e \in G[i]_0, b \in C_1$，

$$\partial_{\mathrm{cone},0}((e,b)) = (0,h). \tag{51}$$

特别地，这意味着 $\partial_{G[i],\ 0}(e) = 0$，这意味着 $e = \partial_{G[i],\ 1}(v)$，其中 $v \in G[i]_1$。由于 $g[i]$ 是一个链映射，方程（47）中的图表可交换，因此我们有

$$g[i]_0 \circ \partial_{G[i],1} = \partial_C \circ g[i]_1. \tag{52}$$

取 $b' = g[i]_1(v)$，我们看到

$$\partial_{\mathrm{cone},0}((0,b+b')) = (0,\partial_C(b+b')) = (0,h), \tag{53}$$

这意味着 $h \in \mathrm{im}(\partial_C)$，矛盾。因此， $H_0(C_\bullet)$ 中的每个类都会在 $H_0(\mathrm{cone}(g[i]))$ 中产生一个独立的类。我们得出 $H_0(\mathrm{cone}(g[i])) \cong H_0(C_\bullet)$。 □

注释 1. 锥 锥$(g[i])$ 的动机源于将规范化或同调测量（引理 *1*）应用于经典码 $C_\bullet = 0 \xrightarrow{0} C_1 \xrightarrow{\partial_C} C_0$。促进码字 $c_i \in H_1(C_\bullet)$ 的规范化测量的辅助复形是三项复形 $G[i]_\bullet$，使得位于 $G[i]_1$ 中的所有元素之积为 c_i。几何上，三项复形 $G[i]_\bullet$ 在锥$(g[i])$ 中可解释为介于顶点 $G[i]_1$、边 $G[i]_0$ 与面 $G[i]_{-1}$ 之间的复形，并附着于经典码的比特与校验 $C_\bullet$ *[9]*。

自然地，由于 $G[i]_\bullet$ 具有三个非平凡项，故 $G[i]_\bullet$ 与 $D_\bullet = D_1 \xrightarrow{\partial_D} D_0$的张量积具有四项，而非基码中的三项，$(C \otimes D)_\bullet$。关键的是，我们将这些项中的一项，$A_2 = G[i]_1 \otimes D_1$，指定为用于快速手术的映射锥中的辅助复形元校验（方程 (19)）。

命题 1和方程（45）表明，在变形码锥 cone($g[i] \otimes \mathrm{id}_D$) 中，$(C \otimes D)_\bullet$ 中对应于同调类$\{c_i\} \otimes H_0(D_\bullet)$ 的逻辑量子比特现在属于 $\mathrm{im}(\partial_{\mathrm{cone},1})$；等价地，这些$Z$-逻辑算符现在是辅助系统 $A[i]_\bullet$中新引入的 Z-稳定子的乘积。在码手术的语境下，这些逻辑算符现在会被同时测量。由 $A[1]_\bullet, \cdots, A[t]_\bullet$ 给出的手术操作序列，随后会依次测量对应于 $\{c_1\} \otimes H_0(D_\bullet) \cdots, \{c_t\} \otimes H_0(D_\bullet)$ 的算符。

虽然同时测量多个算符可能非常高效，但理想情况下，我们也希望构造既快速又可寻址的手术操作，即能够针对单个逻辑算符进行操作。一个自然的想法是考虑将辅助复形从 $(G[i] \otimes D)_\bullet$改为 $(G[i] \otimes D')_\bullet$，其中 $D'_\bullet$ 是与 $D_\bullet$同态的另一个复形。例如，$D'_\bullet$ 可以通过对 $D_\bullet$ 打孔或增广得到，这与参考文献 [38]中的构造类似。然而，这种方法在技术上的一个难点是，我们的核心引理 5不再适用，因此需要新的证明来分析锥化复形和压缩码。我们将这一有前景的方向留待未来研究。

我们进一步指出，我们的构造与文献 [38] 中为同调乘积码构造的同态测量小工具 [39]密切相关。我们简要回顾其构造。具体而言，文献 [38] 还分别构造了 $C'_\bullet$，$D'_\bullet$，并配有同态链映射f，g到 $C_\bullet$，$D_\bullet$。他们将 $(C' \otimes D')_\bullet$ 视为辅助量子码，将其初始化为逻辑乘积态，并应用由乘积链映射 $f \otimes g$ 指定的一组物理 CNOT 门（控制量子比特位于 $(C' \otimes D')_\bullet$，目标量子比特位于 $(C \otimes D)_\bullet$）。该物理 CNOT 电路（下文称为“同态 CNOT”）在 $(C' \otimes D')_\bullet$ 的逻辑量子比特与 $(C \otimes D)_\bullet$ 的逻辑量子比特之间诱导出一个逻辑 CNOT 电路。通过对 $(C' \otimes D')_\bullet$ 中的物理量子比特进行横向测量，他们实现了对基码 $(C \otimes D)_\bullet$ 中某些算符的逻辑测量（具体取决于 $C'_\bullet$ 和 $D'_\bullet$）。

我们的方法与他们的方法之间的关键差异，体现在各自协议的时间开销上。在本工作中，我们的手术小工具在摊销意义下只产生常数时间开销。在文献 [38]，中，虽然同态 CNOT 只需常数时间，但每一轮逻辑测量都需要该码的一个制备良好的逻辑态（$C' \otimes D'$）$_\bullet$。对于一般的 HGP 码，这种态制备需要 $O(d)$ 轮综合征测量。熟悉文献 [28] 工作的读者可能会认为，算法容错的技术或许可以被应用，即我们仅对每个态制备 $O(1)$ 轮，从而得到用于测量的制备不良的态。其希望在于，通过连续执行许多此类测量并将它们全部一起解码（类似于我们的快速手术表述），整个协议将是容错的。然而，这种方法在一般情况下并不奏效 [45]。因此，从表面上看，本工作中构造的小工具确实要快得多。

深入来看，算法容错无法直接应用于文献 [38] 中的小工具，部分原因实际上在于：通常情况下，压缩码（将辅助复形（$C' \otimes D'$）$_\bullet$ 视为手术小工具而非辅助码块得到，见脚注 [46]）的距离低于 d [45]。因此，我们的工作与文献 [38] 真正的区别在于，我们构造了辅助复形和链映射，从而确保压缩码具有较高的距离。正是这一额外条件使常数时间开销手术成为可能。

最后，我们指出，文献 [19]通过 ZX 演算证明了 CSS 手术与同态测量之间存在电路等价。这样的等价关系并不令人意外；毕竟，两者都基于同态链映射。基于这一等价关系，我们认为，我们的构造也可以用作同态测量小工具，其中辅助码块各自经过 O轮（1）轮准备，从而以容错方式实现相同的测量。

C. 压缩码的距离

我们首先回顾压缩码的定义（定义 2）。为构造压缩码，我们考虑链映射 $f[i] : A[i]_\bullet \to (C \otimes D)_\bullet$ 到

$$f'[i] : \bigoplus_{i \in [t]} A[i]_\bullet \to (C \otimes D)_\bullet, \tag{54}$$

其在 $A[i]_\bullet$ 上的作用相同，而在其余空间 $A[j]_\bullet$、$j \neq i$ 上作用平凡。$f'[i]$ 的定义域是 t 中所有连续快速测量所涉及辅助复形的直和，并映射到基码（$C \otimes D$）$_\bullet$。注意，这等价于对映射 $g[i]$作类似的扩展，即

$$g'[i] : \bigoplus_{i \in [t]} G[i]_\bullet \to C_\bullet, \tag{55}$$

并设定 $f'[i] = g'[i] \otimes \mathrm{id}_D : \bigoplus_{i \in [t]} (G[i] \otimes D)_\bullet \to (C \otimes D)_\bullet$。进一步定义

$$\bar{g} := \sum_{i \in [t]} g'[i], \quad \bar{f} := \sum_{i \in [t]} f'[i] = \bar{g} \otimes \mathrm{id}_D. \tag{56}$$

$\bar{g}$ 而 f 只是所有扩展链映射的和¯，这些映射遍历满足以下条件的 t 手术： f 在$A[i]_\bullet$, $\forall i \in [t]$上作为 $f[i]$ 非平凡地作用。压缩码随后定义为¯ f的映射锥。

$$\mathtt{CC}_\bullet := \mathrm{cone}(\bar{f}) = \mathrm{cone}(\bar{g} \otimes \mathrm{id}_D) = (\mathrm{cone}(\bar{g}) \otimes D)_\bullet. \tag{57}$$

上面的最后一个等式由引理 5 得出。复锥($\bar{g}$) 具有以下形式，

$$\begin{array}{ccccc} \oplus_{i\in[t]} G[i]_1 & \xrightarrow{\partial_{G,1}} & \oplus_{i\in[t]} G[i]_0 & \xrightarrow{\partial_{G,0}} & \oplus_{i\in[t]} G[i]_{-1} \\ & \searrow^{\bar{g}_1} & & \searrow^{\bar{g}_0} & \\ 0 & \xrightarrow[0]{} & C_1 & \xrightarrow[\partial_C]{} & C_0 \end{array} \tag{58}$$

在上式中，我们有

$$\bar{g}_1 = \sum_{i\in[t]} g'[i]_1, \quad \bar{g}_0 = \sum_{i\in[t]} g'[i]_0, \tag{59}$$

$$\partial_{G,1} = \bigoplus_{i\in[t]} \partial_{G[i],1}, \quad \partial_{G,0} = \bigoplus_{i\in[t]} \partial_{G[i],0}. \tag{60}$$

命题 2. H_0(锥($\bar{g}$)) $\cong H_0(C_\bullet)$，并且

$$H_1(\mathrm{cone}(\bar{g})) \cong H_1(C_\bullet)/\mathrm{span}\{\{c_1\}, \cdots, \{c_t\}\}. \tag{61}$$

证明。通过反复应用命题 1 中的论证即可得出。 □

命题 3. d^0(锥($\bar{g}$)) $\geq d$。

证明。 考虑 $(h, r) \in H^0$(锥($\bar{g}$)) $=$核 $\left(\delta^0_{\mathrm{cone}(\bar{g})}\right)$，其中 $h \in C_0$ 且 $r \in \oplus_{i\in[t]} G[i]_{-1}$。由于对于所有 i， H^0($G[i]_\bullet$) $= 0$，因此必有 $h \neq 0$，这意味着 $h \in$ 核(δ_C)。由此可得 $|h| \geq d$。 □

命题 4. d^1(锥($\bar{g}$)) ≥ 1，以及 d_1(锥($\bar{g}$)) $\geq d$。

我们在附录A中证明该命题，并指出该证明是一个相当标准的扩展论证，类似于参考文献 [8–11]中所建立的论证。直观上，该论证考虑 H_1(锥($\bar{g}$))中一个我们不予测量的逻辑算符。这些逻辑算符中的每一个都对应于一个完全支撑在 C_1（即原始码的比特）上的逻辑算符，按假设其重量至少为 d。为看出距离得以保持，我们用任意一组校验 $v \in \oplus_{i\in[t]} G[i]_1$ 对逻辑算符 $c_j \in C_1$ 进行形变，并证明跨越$C_1 \oplus (\bigoplus_{i\in[t]} G[i]_0)$的重量至少为 d。给定映射$\partial_{G[i],1}$： $G[i]_1 \to G[i]_0$在引理1 中的扩张条件1，可将其应用于压缩码的扩展域与边界$\partial_{G,1}$：$\bigoplus_{i\in[t]} G[i]_1 \to \bigoplus_{i\in[t]} G[i]_0$，从而证明从$\partial_{G,1}(v)$添加支撑不会降低该逻辑算符的重量。

命题 5. 由辅助复形 $A[i]_\bullet$ 与链映射 $f[i]$ 定义的压缩码具有至少为 d的*1*-上同调距离和*1*-余系统距离。

证明。由引理 4、公式 (41)、命题 3和 4，我们可以给出压缩码距离的上界。

$$\begin{aligned} & d^1(\mathtt{CC}_\bullet) \\ &= \min(d^1(\mathrm{cone}(\bar{g}))d^0(D_\bullet), d^0(\mathrm{cone}(\bar{g}))d^1(D_\bullet)) && (62)\\ &\geq \min(1 \times d, d \times 1) = d. && (63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & d_1(\mathtt{CC}_\bullet) \\ &= \min(d_1(\mathrm{cone}(\bar{g}))d_0(D_\bullet), d_0(\mathrm{cone}(\bar{g}))d_1(D_\bullet)) && (64)\\ &\geq \min(d \times 1, 1 \times d) = d. && (65) \end{aligned}$$

我们看到，引理2 的条件 1 得到满足。 □

D. 元校验距离

最后，我们证明辅助复形具有较大的元校验距离。

命题6。 每个辅助复形 $A[i]_\bullet = (G[i] \otimes D)_\bullet$ 满足条件*2* 和 *3*，即引理 *1*中的条件。

证明。 为了证明 $d^1(A[i]_\bullet) \geq d$，我们使用引理 4 和方程（41）。

$$\begin{aligned} & d^1((G[i] \otimes D)_\bullet) \\ &= \min(d^1(G[i]_\bullet)d^0(D_\bullet), d^0(G[i]_\bullet)d^1(D_\bullet)) && (66)\\ &= \min(1 \times d, \infty \times 1). && (67) \end{aligned}$$

这里我们遵循参考文献 [42]中的约定，并设$d^0(G[i]_\bullet)$ 为 in fty，因为如引理 1所述，上同调空间为空。条件 3 由以下事实可知： $f[i] = g[i] \otimes \mathrm{id}_D$ 且 $g[i]_1$ 是 1-稀疏的。 □

将所有结果综合起来，我们得到本文的主要结果。

定理1。 给定一个 $[[n, k, d]]$ 超图乘积码$(C \otimes D)_\bullet$，我们可以构造一列辅助复形 $A[1]_\bullet$， $\cdots$， $A[t]_\bullet$ 它们满足引理*2*中的快速手术条件。按照第 *IIC*节的表述，使用这些复形执行快速手术，使我们能够并行测量 Z 逻辑算符的各行（列的情况类似），并行测量 X 算符的各列（行的情况类似），每次手术操作的摊销时间为 $O(1)$。此外，˜每个复形使用 $O(n)$个物理辅助量子比特。因此，这些逻辑门的总时空开销˜为 $O(1)$。

每个辅助复形的空间开销为

$$\begin{aligned} & \dim(A[i]_0) \\ &= \dim(G[i]_0)\dim(D_0) + \dim(G[i]_{-1})\dim(D_1) && (68)\\ &\leq O(|c_i| \log^3(|c_i|)) \cdot 2n_D. && (69) \end{aligned}$$

对于该不等式，我们利用引理1的条件5，以 $|c_i|$（即锥($g[i]$)的测量算符）来界定 $G[i]_0$ 和 $G[i]_{-1}$ 的大小。假设我们取一个由经典码 $C_\bullet$ 和 $D_\bullet$ 构造的 $[[n, O(n)\ \sqrt{n}]]$ 超图乘积码，二者各自的参数为$[O(\sqrt{n})\ O(\sqrt{n})\ O(\sqrt{n})]$。必然有 $|c_i| \leq O(\sqrt{n})$，因此可得

$$\dim(A[i]_0) \leq O(\sqrt{n}\log^3(\sqrt{n})) \cdot O(\sqrt{n}) \tag{70}$$
$$= O(n\log^3(n)). \tag{71}$$

我们注意到，上述方程给出了每个手术小工具空间开销的上界。在实践中，我们预计，因使用 [9, 10] 中的去拥塞引理而产生的额外多对数因子大多是不必要的。这一预期得到了现有手术小工具实用构造的支持，例如参见文献 [7–9, 15, 47]。最后，我们指出，对于距离为 $d \geq O(n^a)$ 的 LDPC 超图乘积码，这些手术小工具具有非零阈值$a > 0$，这是因为定理 1 中的手术小工具使所有校验保持 LDPC，并保留基码的距离。阈值的存在性可由标准的计数论证得到，例如参见文献 [48],的第5节以及文献 [1], 的第6.3节 [49]。

IV. 示例与应用 S

从较高层次来看，我们通过同调乘积，将一维手术辅助系统提升为二维辅助系统，从而构造出常数时间手术组件。这一方案具有广泛的适用性，也很容易推广。在本节中，我们将展示该构造在各种逻辑处理任务中的一些有趣应用和扩展。

a. 一维手术组件的选择。 在第IIIA节中，我们采用了参考文献 [9, 10] 的标准结果作为我们的一维手术组件，并通过同调乘积将它们提升为用于HGP码块的手术构件。将我们的证明推广到使用其他手术小工具 [11, 13, 14, 16] 作为一维分量是直接的。例如，我们考虑参考文献 [11],中的通用适配器，它们可以通过同调乘积提升，从而在多个不同的超图乘积码之间执行并行纠缠测量，只要它们至少共享一个经典码。

更形式地说，考虑共享一个经典分量码的 m 个超图乘积码码块，

$$(C^{(1)} \otimes D)_\bullet \oplus (C^{(2)} \otimes D)_\bullet \oplus ...(C^{(m)} \otimes D)_\bullet \tag{72}$$
$$= \bigoplus_{j\in[m]} (C^{(j)} \otimes D)_\bullet = ((\bigoplus_{j\in[m]} C^{(j)}) \otimes D)_\bullet \tag{73}$$
$$= (C' \otimes D)_\bullet. \tag{74}$$

请注意， $C^{(i)}$ 和 $C^{(j)}$ 可以是任意不同的码（但所有超图积码的距离至少为 d）。最后一行中，$(C' \otimes D)_\bullet$ 是$D_\bullet$ 与

$$C'_\bullet = (\bigoplus_{j\in[m]} C_1^{(j)}) \xrightarrow{\partial'_C} (\bigoplus_{j\in[m]} C_0^{(j)}), \partial'_C = \bigoplus_{j\in[m]} \partial_C^{(j)}. \tag{75}$$

与单个码块的情形类似，我们可以并行测量逻辑算符 $c_i \otimes H_0(D_\bullet)$，其中 $c_i = (c_i^{(1)}, c_i^{(2)}, ...c_i^{(m)}) \in H_1(C'_\bullet)$，且带有 $c_i^{(j)} \in H_1(C_\bullet^{(j)})$，对所有$j$。该测量需要一个用于测量 c_i的一维手术小工具，可利用参考文献 [11]的通用适配器来构建。更具体地说，可以利用参考文献 [11]的定理11构造一个手术系统 $G[i]_\bullet$，用以测量 c_i，并给定分别测量 $c_i^{(1)}$，.....，$c_i^{(m)}$ 的辅助复形（可用引理1构建）。与直接用引理1构建一个完整系统相比，这种构造具有更加模块化、更灵活的优点。构造的其余部分随这一新的 $G[i]_\bullet$进行。因此，只要它们共享一个共同的基底经典码 $D_\bullet$，我们就可以测量逻辑算符，从而在两个或多个不相同的超图乘积码之间纠缠逻辑量子比特。

我们在此指出一个重要的技术细节：文献 [11] 中的构造采用了一种更为宽松的扩展概念，称为相对扩张，而我们的命题4 则利用了引理 1所给出的更强扩展保证。这一相对扩张概念后来也在提取器架构 [14] 中得到应用。为确保技术上的正确性，我们证明了命题 4 的一个采用相对扩张的版本，见附录A。（参见命题 7）。

迄今为止，我们将每个一维手术小工具限制为测量基底经典码中的一个逻辑算符（或码字）。通过审慎选择一个描述超图而非图的 $G_\bullet$，可以同时测量经典码 $C_\bullet$ 的若干码字 [9],，例如对 $I \in [i, i+1, ..., i+p]$取 $c_I \in H_1(C_\bullet)$。于是，$(\text{锥}(g) \otimes D)_\bullet$ 将并行测量更多逻辑算符，$c_I \otimes h$ 对所有 I 以及 $h \in H_0(D_\bullet)$。这一方法的挑战在于构造用于并行测量的低空间开销超图。我们将这一有趣方向留待未来的工作，并指出并行手术已在文献 [12, 13], 中从理论上得到探讨，并在文献 [16]中以启发式方式得到研究。

b. 高维同调乘积与 *HGP* 码。我们的装置可以自然地推广到高维同调乘积码。在这种情况下，根据高维乘积码的具体构造方式，我们可以测量逻辑算符的“直线”或“平面”。举一个具体例子，考虑一个三维同调乘积码，$(Q \otimes C)_\bullet$，它是量子 $Q_\bullet$ 的张量积：$Q_2 \xrightarrow{\partial_{Q_\cdot}{}^2} Q_1 \xrightarrow{\partial_{Q_\cdot}{}^1} Q_0$ 以及一个经典码 $C_\bullet$。假设我们将空间 $Q_0 \otimes C_0$ 与 X 校验相关联，并希望测量形式为 $L \otimes h$ 的逻辑算符，其中 $h \in H_0(C_\bullet)$。可以粗略地将这些 $L \otimes h$ 视为一条逻辑算符直线，我们将并行测量它们。这一推广的主要思想是将以下结果提升到

第 III节中的压缩锥码，使其成为一个对量子码执行手术的压缩锥码。我们可以应用引理1中的结果来测量逻辑算符 $L \in H_1(Q_\bullet)$，因为 $Q_\bullet$ 是一个三项链复形。由此构造出锥化码 cone($q[i]$)，其中$q[i]$: $A_\bullet[i] \to Q_\bullet$。执行快速手术的变形码是 cone($q[i]$) 与经典码 $C_\bullet$的张量积码。压缩锥码距离得以保持的论证与命题3和4 中的论证相同，因为其证明仅用到 cone($q[i]$) 的同调和扩张条件，而这些条件由引理 1保证。可以利用公式（40）论证，最终的压缩码是压缩锥码与经典码的张量积，也具有较大的距离。

我们也可以并行测量更高维超图乘积码中的逻辑算符平面。与一般的同调乘积码不同，这些码是由多个经典码构成的乘积。假设我们取三个经典码的超图乘积: $C_\bullet: C_1 \to C_0$、 $D_\bullet: D_1 \to D_0$ 和 $E_\bullet: E_1 \to E_0$。我们将 X校验分配给 $C_0 \otimes D_0 \otimes E_0$，将量子比特分配给 $(C_1\otimes D_0\otimes E_0)\oplus(C_0\otimes D_1\otimes E_0)\oplus(C_0\otimes D_0\otimes E_1)$，将 Z 校验分配给 $(C_1 \otimes D_1 \otimes E_0) \oplus (C_1 \otimes D_0 \otimes E_1) \oplus (C_0 \otimes D_1 \otimes E_1)$，最后将元校验从 Z 校验分配到 $C_1 \otimes D_1 \otimes E_1$。一个可测量的逻辑算符平面的例子是 $c_i \otimes h_D \otimes h_E$，其中 $h_D \in H_0(D_\bullet)$ 且 $h_E \in H_0(E_\bullet)$，这对应于并行测量 Z 个逻辑算符；它们的典范代表元 [38]在一个维度为 $k_C \times k_{D^\top} \times k_{E^\top}$ 的网格中支撑于一个平面上。运用第三节中的相同技巧，我们可以构造一个一维锥码 cone(g)，用于测量经典码 $C_\bullet$、$c_i \in H_1(C_\bullet)$ 的一个逻辑算符。变形码是该锥化码 cone(g) 与另外两个经典码 $D_\bullet$ 和 $E_\bullet$ 的张量积。根据引理4和引理3，关于压缩码的同调和距离的结论（命题5）可以推广，因为我们只是再与码 $E_\bullet$ 取了一次张量积。

c. 批处理计算。 对于二维HGP码，我们的装置可以对逻辑量子比特的行（或列）进行并行测量。目前，这些装置尚不具备测量更复杂量子比特模式的灵活性。尽管如此，我们仍可采用这种按行和按列并行操作的方式，运行同一逻辑电路的多个副本，这与文献 [37] 中的批处理计算思路一致。逻辑电路的批量执行是指并行运行同一逻辑电路的多个副本。其主要优势在于：与串行执行相同数量的操作相比，对许多逻辑量子比特副本容错地执行相同操作或逻辑测量，成本更低。我们可以利用这一思路，通过按行和按列进行测量，在许多逻辑量子比特上并行执行相同的 X 或 Z 测量，其中每次测量都在一个独立的逻辑电路上进行。

例如，设我们希望执行的逻辑电路所用的逻辑量子比特集合为 $\{L_i\}$、 $i \in [N]$。假设我们希望多次运行该电路， T。自然的做法是将这些 T 逻辑电路的运行串行化。也就是说，一个逻辑电路执行完毕后，我们再运行一次相同的逻辑电路。这意味着，我们的系统必须有足够的量子比特来编码 N 个逻辑量子比特并对其执行逻辑操作。在这种串行运行逻辑电路的设置下，为了利用快速手术小工具，我们要运行的逻辑电路需要编译为对逻辑算符行进行的统一 Pauli 测量。

与串行运行该电路不同，我们可以在不同的 N 逻辑量子比特组上同时运行该逻辑电路的 k_C 个副本。这意味着，在任意给定时刻，我们必须至少对 Nk_C 个逻辑量子比特进行编码并执行逻辑操作。将这些逻辑量子比特记为 $\{L_{it}\}$，其中 $i \in [N]$ ，且 $t \in [k_C]$。那么，对于固定的 i，也就是说，对于电路中的某个固定逻辑量子比特，我们将逻辑量子比特 $\{L_{it} | t \in [k_C]\}$ 编码在一个 $(C \otimes D)_\bullet$ 超图乘积码的一行逻辑量子比特上。对应于不同 $i \in [N]$ 的不同批次量子比特，可以编码在不同的HGP 码块中。通过使用快速手术小工具并行测量各行上的 Z 算符，我们可以在所有并行运行的逻辑电路实例上执行相同的 Z 测量。这一策略使我们能够在对逻辑电路结构要求较少的情况下，使用快速手术小工具；代价是需要更多物理量子比特，以便并行运行多个电路实例。

与参考文献 [37], 中提出的批处理计算相比，我们还有两点补充说明。使用我们的小工具进行批处理计算时，一个值得注意的挑战是： X 基测量作用于逻辑量子比特列，而 Z 基测量作用于逻辑量子比特行。因此，如果将逻辑电路的一个实例编码在逻辑量子比特列上（这样便可进行批量 Z 基测量），就无法直接进行批量 X 基测量。探索如何绕过这一对齐问题将很有意思，例如将横截 Hadamard 门隐形传态到码块中。我们注意到，参考文献 [37] 中不存在这一对齐问题，因为他们考虑的是两个距离为d的量子码的同调乘积。不过，参考文献 [37]中的批处理计算在实现上面临的挑战是需要大量物理量子比特（尽管其码率在渐近意义下为常数）。我们的小工具只需作用于一个二维 HGP 码块即可实现，因此所需的物理量子比特少得多。基于这一点，我们认为，我们的快速手术小工具非常适合在实践中用于批处理计算。

d. 实际前景。渐近而言，我们的装置会带来多对数空间开销，这源于引理1中的开销。根据若干项研究中的观察，我们预计实际空间开销只是一个较小的常数 [8–10, 15, 50]。另一方面，在这项工作中，我们始终没有讨论常数时间手术的解码任务。我们将这个问题留待未来研究，并指出

解码效率对我们方案的实际性能至关重要。

V. 直观示例：恒定时空开销与可寻址的环面码测量

本节以环面码上的快速手术辅助系统为例，直观地加以说明。尽管这些小工具与第IIIA节介绍的构造有关，但即使基码不具备任何扩张性质，或辅助复形映射不具备任何扩张性质，这些小工具仍然是容错的（参见附录B）。此外，我们发现，对于每次逻辑测量，这些小工具都能实现渐近恒定的时空开销。

在图3(a) 中，我们展示了一个基环面码，其数据量子比特位于边上， Z 校验位于面上， X 校验位于顶点上。为了将其与针对一般超图乘积码的构造联系起来，我们还可以将该环面码解释为两个循环重复码的超图乘积， $(C \otimes D)_\bullet$。量子比特空间为 $(C_1 \otimes D_0) \oplus (C_0 \otimes D_1)$，我们可以将其解释为分别平行于环面经向环和纬向环的边的并集。为便于后文引用，我们用浅蓝色标出待测逻辑 Z_1 的一个最小权代表元中的边。此外，该代表元完全包含在 $\bar{}$ 的量子比特支撑中，且位于 $C_1 \otimes D_0$ 内。我们还用绿色实线标出（ Z_2 $\bar{}$ ）中的逻辑 $C_0 \otimes D_1$ 的一个代表元，用橙色点线标出 X_1 中逻辑 $\bar{}$ （ $C_1 \otimes D_0$ ）的一个代表元，并用红色点线标出（ X_2 ）中逻辑 $C_0 \otimes D_1$ 的一个代表元。

从将晶格手术视为码变形 [51]，以测量逻辑算符的角度来看，我们需要将该算符添加到稳定子群中，使得测量变形码的稳定子也能测量该逻辑算符。这意味着，图 3(b) 中所示的锥化码 cone($f[i]$) 必须将 Z_1 包含在稳定子群中。在图 3(b) 中，量子比特仍位于边上， X 校验位于顶点上，而 Z 校验位于面上。然而，与环面码不同的是，这里还存在体积；我们将看到，体积是 Z 校验的元校验。在图 3(a) 中标出的 Z_1 代表元，在图 3(b) 中也以浅蓝色标出。锥化码右侧展示了填充环面的一个切片，其中有一组蓝色的 Z 校验；这些校验的乘积是 Z_1 代表元，因为橙色边上的校验支撑相互抵消。这证实了可以通过测量 Z 校验来推断逻辑 $\bar{}$ 算符 Z_1 。如果我们只观察填充环面的这一切片，那么这正是 cone($g[i]$) （见公式（47））， 其中蓝色的环面码量子比特是 C_1 中的量子比特，橙色的辅助量子比特位于 $G[i]_0$ 中，而蓝色顶点是 C_0 中 $C_\bullet$ 重复码的校验。最后，标出的蓝色 Z 校验位于空间 $G[i]_1$ 中，它们在 Z_1 中的 $\bar{}$ 量子比特上的支撑由映射 $g[i]_1 : G[i]_1 \to C_1$ 给出。对于该示例中的特定 $G[i]_\bullet$ ， $G[i]_{-1}$ 中没有校验。

假设 $G[i]_\bullet$ 是我们附加到环面码上的唯一辅助系统，并且我们在 $G[i]_1$ 中进行一轮校验测量。由于 $G[i]_0$ 中的辅助量子比特被初始化为 $|+\rangle$，每个 $G[i]_1$ 校验的测量结果都是随机的。如果这些标出的蓝色校验中有一个发生测量翻转，那么这是无法检测到的，因为这些校验的值本质上是随机的。更糟的是， Z_1 的推断值也会发生翻转，从而因一次测量错误得到错误的逻辑测量结果。我们如何确保逻辑算符测量能够抵抗测量错误？一个直观的解决方案是通过测量其他 Z_1 逻辑代表元，使我们的测量具有冗余性。具体来说，我们将 $G[i]_\bullet$ 与重复码 $D_\bullet$ 取积，并通过映射 $g[i] \otimes \mathrm{id}_D : (C \otimes D)_\bullet \to (G[i] \otimes D)_\bullet$ 将其连接到原始环面码，这正是我们所做的。在图 3(b) 中，可以将这一构造理解为使用 $G[i]_\bullet$ 的副本来“填充”每个 Z_1 的内部。

供参考，我们将 cone($f[i]$) $= (\mathrm{cone}(g[i]) \otimes D)_\bullet$ 的详细链复形列于下方，以便将 cone($f[i]$) 与 3(b) 中的空间直观对应起来。

$\bar{}$ 在3(b) 中，我们通过与面对应的辅助比特校验来测量 Z_1 代表元；这些面的乘积构成一个 $\bar{}$ 曲面，其边界对应于每个 Z_1 代表元。这些校验位于 $G[i]_1 \otimes D_0$ 图 4中。辅助量子比特是3(b) 中的橙色边，以及图 $G[i]_0 \otimes D_0$ （4）中的橙色边。此外，我们还引入水平 Z 校验，它们在图3(b) 中以灰色阴影标示于环面内部，并在 $G[i]_0 \otimes D_1$ 图 4中也有标示。cone($f[i]$) 的链映射表明， $G[i]_0 \otimes D_1$ 中的校验作用于 $G[i]_0 \otimes D_0$ 中的辅助比特以及原始环面码中的量子比特 $C_0 \otimes D_1$。

虽然推断对 Z_1 的测量并不严格要求 $G[i]_0 \otimes D_1$ 中的校验 $\bar{}$ ，但这些校验的作用如下所述：假设 $G[i]_0 \otimes D_1$ 中不存在校验，这等同于使用 d 个独立的手术辅助量子比特，并行测量 $\bar{}$ 个互不相交的 Z_1 代表元。每个代表元的测量结果发生翻转的概率，大致等于 $\bar{}$ 上乘积中任意一个校验发生一次测量错误的概率，而该乘积等于 Z_1。随着环面码距离增大， Z_1 的重量 $\bar{}$ 也随之增加，参与构成表示 Z_1 的 $\bar{}$ 乘积的 Z 个校验 $G[i]_1 \otimes D_0$ 的数量也会增加。因此，当 $d \to \infty$ 时， Z_1 测量发生测量翻转的概率趋近于 1。因此，尽管逻辑测量错误只有在不同代表元上至少发生 $\lceil d/2 \rceil$ 次测量错误后才会出现，但单个代表元发生测量错误的概率渐近趋近于 1，因此总体而言，这种测量只有伪阈值，而没有阈值。在 $G[i]_0 \otimes D_1$ 中纳入 Z 个校验，会产生大小恒定的元校验；因此，校验测量错误可由元校验检测，其翻转概率在码距增大时仍保持恒定。

元校验是体积，位于3(b)中，以及 $G[i]_1 \otimes D_1$ 在图4中。例如，取一次测量错误，针对单个 Z 校验，位于 $G[i]_1 \otimes D_0$，用红色“X”表示。这会导致两个相邻的元检查体积发生翻转

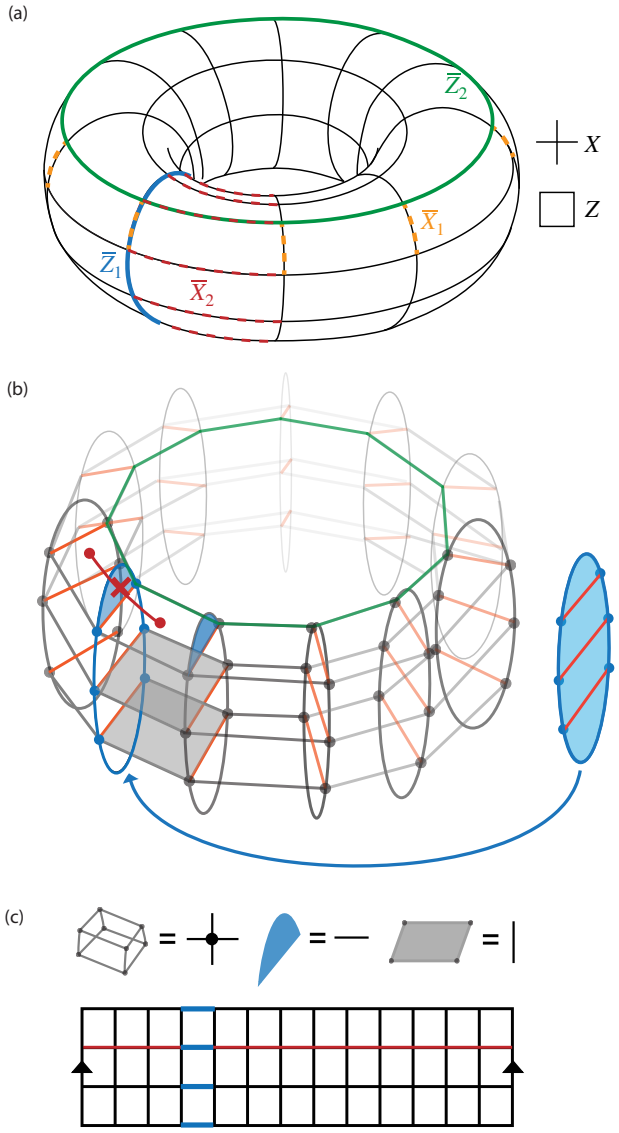


图 3。（a）一个环面码，量子比特位于边上， X 校验分配给顶点， Z 校验分配给面。 $\bar{Z}_1$（蓝色实线）、 $\bar{X}_1$（橙色虚线）、 $\bar{Z}_2$（绿色实线）和 $\bar{X}_2$（红色虚线）逻辑算符以高亮显示。（b）用于测量 $\bar{Z}_1$ 逻辑算符的 cone($f[i]$) 码（以浅蓝色勾勒），其最小权代表元位于（$C_1 \otimes D_0$）中。注意，高亮显示为绿色的 $\bar{Z}_2$仍属于这个填充环面的同调，因此未被测量。灰色边是空间（$C_0 \otimes D_1$） $\oplus$ （$C_1 \otimes D_0$）中的量子比特，它们与基环面码（$C \otimes D$）•中的量子比特相关联。橙色边是（$G_0 \otimes D_0$） $\oplus$ （$G_{-1} \otimes D_1$）中的量子比特，也就是辅助复形（$G \otimes D$）•中的量子比特。面分配给 Z 校验。填充环面表面上的面是基环面码的 Z 校验。此外还引入了其他面，包括填满每个最小权 $\bar{Z}_1$ 环的蓝色实线校验。这些校验位于 $G_1 \otimes D_0$ 中，且相乘后等于一个 $\bar{Z}_1$ 代表元（见右侧填满的 $\bar{Z}_1$ 环）。 $G_0 \otimes D_1$ 中的校验以灰色高亮显示。顶点分配给 X 校验。注意，环面码的 X 校验经过变形后成为权重为五的校验，其中包含辅助复形中的量子比特（橙色边）。（c）$\partial_{\mathrm{cone}(f[i])\text{的译码图},\ 3} = M_Z$，其中顶点是元校验（b）中的体积），错误可能出现在边上，这些边对应 Z 校验测量（b）中的面）。具体而言，垂直边是 $G_1 \otimes D_0$ 中的校验（b）中的蓝色面），水平边是 $G_0 \otimes D_1$ 中的校验（b）中的灰色面）。这个译码图是带有一个周期边界条件的方格晶格。以蓝色勾勒的边是 Z 校验，其乘积就是（b）中的蓝色 $\bar{Z}_1$ 代表元。若要翻转逻辑测量且不使任何元校验失效，就需要一条（红色）弦错误，使其延伸至译码图的另一端并环绕一周，因此它是重量为 d的测量错误。

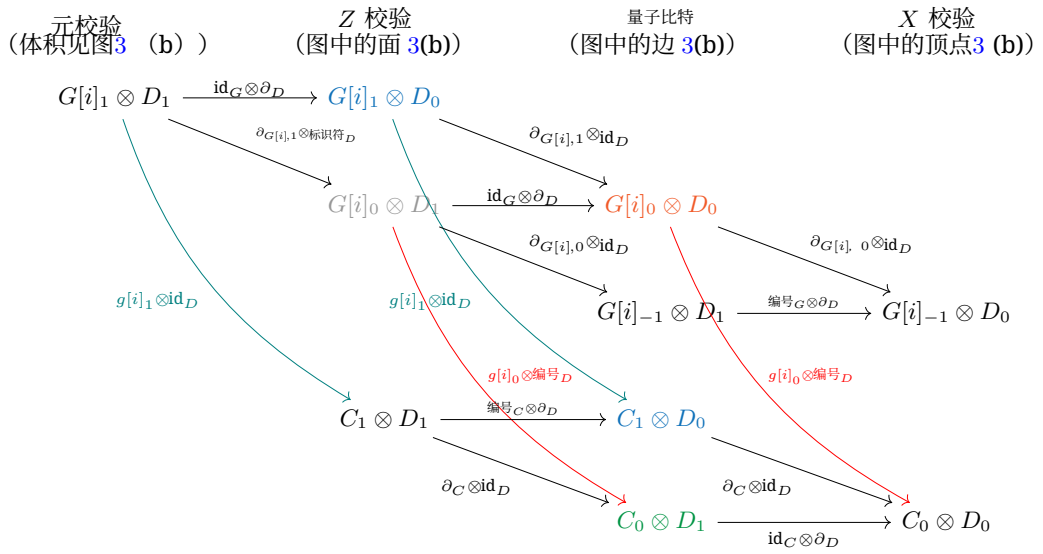


图4. 变形码锥的完整链复形$(f[i]) = (\text{锥}(g[i]) \otimes D)_\bullet$。空间采用颜色编码，以与图 3中的示例相对应。不过，这里我们明确展示了一般锥化码中图 3未显示的所有空间，例如 $G[i]_{-1} \otimes D_1$ 和 $G[i]_{-1} \otimes D_0$。

测量错误。要使这种测量错误未被探测到，必须沿环面上的纵向循环出现一串长度与该循环相同的测量错误。cone$(f[i])$ 的链映射形式化地描述了元校验如何检查 $G[i]_1 \otimes D_0 \oplus G[i]_0 \otimes D_1$ 中校验的测量错误：它通过元校验矩阵$M_Z = (\mathrm{id}_G \otimes \partial_D) \oplus (\partial_{G[i],1} \otimes \mathrm{id}_D)$实现，其中 ∂_D 只是另一个循环重复码校验矩阵。这得到图3(c)中的元校验解码图，其中元校验表示为顶点，水平（垂直）边是 Z $G[i]_1 \otimes D_0$ $(G[i]_0 \otimes D_1)$中的校验。未被探测到的逻辑测量错误是 M_Z 的码字，也就是环绕图3(c)中环带的闭环。图3(c)中以红色标出了一个示例。严格来说，这些元校验也支撑在环面码的原始面校验上， $C_1 \otimes D_1$（图4）。解码器如何判断元校验综合征是由 $G[i]_1 \otimes D_0 \oplus G[i]_0 \otimes D_1$ 的测量错误导致，还是由 $C_1 \otimes D_1$ 的测量错误导致？解决方法是利用 $C_1 \otimes D_1$ 先前和之后的测量结果，纠正 cone$(f[i])$ 中 $C_1 \otimes D_1$ 上的测量错误。与结果随机的 $G[i]_1 \otimes D_0 \oplus G[i]_0 \otimes D_1$ 校验不同，切换到锥化码 cone$(f[i])$ 前后， $C_1 \otimes D_1$ 中的校验都属于稳定子群。因此，可以利用它们的测量结果构造探测器，使其延伸至 cone$(f[i])$ 时间片之前和之后，并据此推断 $C_1 \otimes D_1$ 上测量错误的位置。总之，尽管我们只对 cone$(f[i])$ 的稳定子进行一轮测量，但过去和当前的 d 轮综合征历史对于纠正原始码 Z 校验上的测量错误至关重要。不过，这些 d 缓冲轮次的时间开销可以分摊到多次逻辑测量中。

该辅助系统的空间开销为

$$\begin{aligned}&\dim(G[i]_0 \otimes D_0) + \dim(G[i]_{-1} \otimes D_1)\\ &= \dim(G[i]_0)\dim(D_0) + 0 = O(d^2)\end{aligned} \tag{76}$$

因此，cone$(f[i])$ 的总空间开销也是 $O(d^2)$，相对于基环面码的空间开销 $O(d^2)$ 为常数。

在附录 B 中，我们证明了这些小工具的压缩码距离；它们还可能在多个环面码副本之间执行纠缠测量。映射 $\partial_{G[i]}$缺乏扩展性，这意味着命题 5 中关于 d_1(CC$_\bullet$) 的证明必须修改。幸运的是，这意味着我们只需证明压缩码中逻辑 Z 距离的保持。证明概要如下。我们考虑基环面码中 d个两两不相交且重量最小的 X_2 逻辑代表元。对于一般情形，我们对映射$g[i]_1$ 施加一个条件，使得我们能为每个与未测量的 Z 逻辑共轭的 X 逻辑，找到一组合适的、 d 变形后且彼此不相交的代表元。在图 3 的示例中，我们只需考虑 X_2。直观来看，我们可以验证，锥$(f[i])$中的每个新 Z 校验都与这些特定的 X_2 逻辑代表元对易，因此它们仍是锥$(f[i])$中的逻辑代表元。由于有 d个两两不相交的 X_2 代表元，我们要求 Z_2，即共轭逻辑 Z，的重量至少为 d ，才能与每个 X_2 代表元反对易。在附录 B 中，我们将这一论证正式推广到多个环面码副本上更多未测量的 Z逻辑算符的情形，适用于可能使多个环面码纠缠的逻辑测量。

VI. 未来方向

我们的工作表明，精心构造辅助复形，能够使超图乘积码在近乎恒定的时空开销下实现可寻址的并行逻辑测量。我们的装置通过将测量图与定义基码的某个原始经典码作超图乘积，沿行或列并行测量逻辑算符。或许可以先对原始经典码进行精心打孔来增广，再进行乘积，从而进一步提升给定逻辑量子比特行或列内的可寻址性 [38]。难点在于证明，经过这样的增广后，压缩码的距离仍至少为 d。我们指出，对于环面码，每个码块的逻辑量子比特数量足够少，因此可以对任意一组逻辑量子比特执行任意可寻址的 CSS 测量。当这些测量与环面码的折叠横截门交错进行时，任何深度为 至少 d 可以在恒定时空开销下执行。这将是一个有趣的例子，展示如何将算法容错 [28], 扩展到码块上的晶格手术，且这些码块包含多个逻辑量子比特；此前，这种算法容错仅在带有横向门的表面码中得到证明。关于带有间歇性横向门的环面快速手术小工具能否保持距离，我们将其证明留待未来工作。一个自然的后续方向是，为其他码寻找快速且低开销的手术小工具，例如自行车双变量码，以及距离标度更优的乘积码，即提升乘积码和平衡乘积码。

致谢

我们感谢 Louis Golowich、Alexander Cowtan、John Blue 和 Qian Xu 所作的真知灼见的讨论。Z.H. 感谢 MIT 数学系、MIT-IBM Watson人工智能实验室以及 NSF 研究生研究奖学金计划（资助编号 2141064）提供的支持。K.C. 感谢 Alfred。

[1] D. Gottesman, 《常数开销的容错量子计算》, Quantum Info. Comput. 14, 1338–1372 (2014)。[2] S. Bravyi、A. W. Cross、J. M. Gambetta、D. Maslov、P. Rall 和 T. J. Yoder, 《高阈值、低开销的容错量子存储器》, 自然 627, 778–782 (2024)。[3] Q. Xu、J. P. Bonilla Ataides、C. A. Pattison、N. Raveen- dran、D. Bluvstein、J. Wurtz、B. Vasi´c、M. D. Lukin、L. Jiang 和 H. Zhou, 《利用可重构原子阵列实现常数开销的容错量子计算》, Nature Physics 20, 1084–1090 (2024)。[4] E. Dennis、A. Kitaev、A. Landahl 和 J. Preskill, 《拓扑量子存储器》, Journal of Mathematical Physics 43, 4452–4505 (2002)。[5] D. Horsman、A. G. Fowler、S. Devitt 和 R. V. Meter, 《通过晶格手术实现表面码量子计算》, 新物理学杂志 14, 123011 (2012)。[6] L. Z. Cohen、I. H. Kim、S. D. Bartlett 和 B. J. Brown, 《利用长程连通性实现低开销容错量子计算》, Science Advances 8, eabn1717 (2022)。[7] A. Cowtan, 《SSIP：使用量子低密度奇偶校验码进行自动化手术》（2024）, arXiv:2407.09423 [量子物理]。[8] A. Cross、Z. He、P. Rall 和 T. Yoder, 《改进的 QLDPC 手术：逻辑测量与桥接码》（2024）, arXiv:2407.18393 [量子物理]。[9] D. J. Williamson 和 T. J. Yoder, 《通过逻辑算符规范化实现低开销容错量子计算》（2024）, arXiv:2410.02213 [量子物理]。[10] B. Ide、M. G. Gowda、P. J. Nadkarni 和 G. Dauphi- nais, 《通过同调测量实现容错逻辑测量》, 《物理评论X》 15, 10.1103/phys- revx.15.021088 (2025)。[11] E. Swaroop、T. Jochym-O'Connor 与 T. J. Yoder，量子低密度奇偶校验码之间的通用适配器（2024）, arXiv:2410.03628 [量子物理]。[12] G. Zhang 与 Y. Li，量子低密度奇偶校验码上的时间高效逻辑操作，《物理评论快报》134, 10.1103/physrevlett.134.070602（2025）。[13] A. Cowtan、Z. He、D. J. Williamson 与 T. J. Yoder，通过量子码手术实现并行逻辑测量（2025）, arXiv:2503.05003 [量子物理]。[14] Z. He、A. Cowtan、D. J. Williamson 与 T. J. Yoder，提取器：面向高效基于泡利算符的计算的量子低密度奇偶校验码架构（2025）, arXiv:2503.10390 [量子物理]。[15] T. J. Yoder、E. Schoute、P. Rall、E. Pritchett、J. M. Gambetta、A. W. Cross、M. Carroll 与 M. E. Beverland，Tour de gross：基于双变量自行车码的模块化量子计算机（2025）, arXiv:2506.03094 [量子物理]。[16] G. Zheng、L. Jiang 与 Q. Xu，高码率手术：迈向恒定开销逻辑操作（2025）, arXiv:2510.08523 [量子物理]。[17] G. Zhang、Y. Zhu 与 Y. Li，利用优良量子低密度奇偶校验码加速容错量子计算（2025）, arXiv:2510.19442 [量子物理]。[18] N. Baspin、L. Berent 与 L. Z. Cohen，面向量子低密度奇偶校验码的快速手术（2025）, arXiv:2510.04521 [量子物理]。[19] A. Cowtan、Z. He、D. J. Williamson 与 T. J. Yoder，快速且容错的逻辑测量：辅助超图与横向手术（2025）, arXiv:2510.14895 [量子物理]。[20] S. Bravyi、G. Smith 与 J. A. Smolin，经典与量子计算资源的权衡，《物理评论X》6, 10.1103/physrevx.6.021043（2016）。

[21] D. Litinski，表面码博弈：利用晶格手术实现大规模量子计算，Quantum 3，128（2019）。[22] C. Gidney，如何用不到一百万个含噪量子比特分解 2048 比特 RSA 整数（ 2025 2505 15917 ），[ ] arXiv: . 量子物理 。[23] P. Webster、L. Berent、O. Chandra、E. T. Hockings、N. Baspin、F. Thomsen、S. C. Smith 与 L. Z. Cohen，Pinnacle 架构：利用量子低密度奇偶校验码将破解 RSA-2048 的成本降至 100 000 个物理量子比特（2026），arXiv:2602.11457 [量子物理]。[24] J.-P. Tillich 与 G. Z´emor，具有正码率且最小距离与码长平方根成正比的量子低密度奇偶校验码，IEEE 信息论汇刊 60，1193（2014）。[25] 超图乘积（HGP）码，载于 *The Error Correction Zoo* 2024 ，

V. V. Albert 与 P. Faist 编（ ）。[26] T. Hillmann、G. Dauphinais、I. Tzitrin 与 M. Vasmer，经由故障复形的单次与基于测量的量子纠错（ 2024 2410 12963 ），[ ] arXiv: . 量子物理 。[27] S. J. S. Tan、Y. Hong、T.-C. Lin、M. J. Gullans 与 M.-H. Hsieh，通过码切换实现量子低密度奇偶校验码中的单次普适性（ 2025 2510 08552 ），[ ] arXiv: . 量子物理 。[28] H. Zhou、C. Zhao、M. Cain、D. Bluvstein、C. Duckering、H.-Y. Hu、S.-T. Wang、A. Kubica 与 M. D. Lukin，面向快速量子计算的算法容错（2024）。[29] N. P. Breuckmann 与 J. N. Eberhardt，平衡乘积量子码，IEEE 信息论汇刊 67，6653（2021）。[30] P. Panteleev 与 G. Kalachev，具有良好有限长度性能的退化量子 LDPC 码，Quantum 5，585（2021）。[31] P. Panteleev 与 G. Kalachev，渐近优良的量子 LDPC 码与局部可测试经典 LDPC 码，载于 *Proceedings of the 54th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*，计算理论研讨会 2022（计算机协会，美国纽约州纽约市，2022），第 375–388 页。[32]我们指出，单次态制备不同于、且通常强于单次纠错 [52, 53], 这一性质；后者在文献中有若干变体，并且已知适用于更广泛的一类量子 LDPC 码 [54–56]。[33] 要理解何为参考系错误，考虑通常的态制备协议：我们将 n 个物理量子比特制备于 $|+\rangle$ 态，然后测量 CSS码的稳定子。在不发生错误的情况下，所有 X 稳定子的测量结果均为 $+1$，而 Z 稳定子的结果则是非确定性的。换言之， Z 参考系经历了一次随机偏移，因此得名“参考系错误”。这种参考系偏移还会被随机错误进一步掩盖，从而难以恢复和纠正。因此，通常的方法是对稳定子重复测量 $O(d)$ 轮，以使综合征可靠，并恢复参考系偏移。某些码，例如三维及更高维超图积码，允许单次态制备，这意味着稳定子中有足够的冗余，使得$O(1)$ 轮测量就足以提取参考系偏移。这正是此类码能够进行单轮手术的原因。

[34] 一般而言，可以选择在基码缓冲综合征测量轮次之间执行 $t < d$ 逻辑操作；然而，这会增加每次手术操作的开销。[35] 我们注意到，在一般码上获取可靠综合征数据有几种方法。最直接的方法是测量稳定子 $O(d)$轮。也可以采用 Steane 式测量 [57, 58] ，但这需要预先制备好辅助码态。在这种情况下，制备该码态需要 $O(d)$轮，但对目标码进行综合征测量只需 $O(1)$ 时间。最后，也可以读取码的所有物理量子比特，但遗憾的是，这会破坏码态。[36] L. Golowich、K. Chang 和 G. Zhu，《通过单次码切换实现恒定开销可寻址门》（2025），arXiv:2510.06760 [量子物理]。[37] Q. Xu、H. Zhou、D. Bluvstein、M. Cain、M. Kalinowski、J. Preskill、M. D. Lukin 和 N. Maskara，《用于量子低密度奇偶校验码的批量高码率逻辑操作》（2025），arXiv:2510.06159 [量子物理]。[38] Q. Xu、H. Zhou、G. Zheng、D. Bluvstein、J. P. B. Ataides、M. D. Lukin 和 L. Jiang，《利用同调乘积码实现快速且可并行化的逻辑计算》，《物理评论X》15，021065（2025）。[39] S. Huang、T. Jochym-O'Connor 和 T. J. Yoder，《同态逻辑测量》，PRX Quantum 4，030301（2023）。[40] A. O. Quintavalle、P. Webster 和 M. Vasmer，《对超图乘积码中的量子比特进行分区以实现逻辑门》，Quantum 7，1153（2023）。[41] N. Berthusen、M. J. Gullans、Y. Hong、M. Mudassar 和 S. J. S. Tan，《同调乘积码中的自同构构件》（2025），arXiv:2508.04794 [量子物理]。[42] W. Zeng 和 L. P. Pryadko，《某些量子乘积码及链复形张量积的最小距离》，《物理评论A》102，062402（2020）。[43] M. B. Hastings，《量子码的重量约化》，《量子信息与计算》17，1307（2017）。[44] E. Sabo、L. G. Gunderman、B. Ide、M. Vasmer 和 G. Dauphinais，《低开销重量约化稳定子码》，PRX Quantum 5，040302（2024）。[45] H. Zhou，个人通信。[46] 更具体地说，当我们将复形（$C' \otimes D'$）•视为辅助码块时，我们会按照链映射 $f \otimes g$施加一个 CNOT 电路。当我们将该复形视为手术构件时，则将映射锥 cone($f \otimes g$)作为变形码；特别是，这意味着复形（$C' \otimes D'$）• 的度数整体偏移一位。在此语境下，压缩码是根据定义 2 得到的：将一系列辅助复形（$C' \otimes D'$）•——它们原本用于参考文献 [38], 中的同态测量——视为快速手术构件。[47] B. Ide、M. G. Gowda、P. J. Nadkarni 和 G. Dauphinais，《通过同调测量实现容错逻辑测量》，《物理评论X》15，021088（2025）。[48] A. A. Kovalev 和 L. P. Pryadko，《具有次线性距离标度的量子低密度奇偶校验码的容错性》，《物理评论A》87，10.1103/phys-reva.87.020304（2013）。[49] Z. He、Q. T. Nguyen 和 C. A. Pattison，《可组合量子容错》（ 2025 2508 08246 ），[ ] arXiv: . 量子物理 .

[50] P. Webster、S. C. Smith 和 L. Z. Cohen，《量子低密度奇偶校验码门的低开销构件的显式构造》（2025），arXiv:2511.15989 [量子物理]。[51] C. Vuillot、L. Lao、B. Criger、C. Garc´ıa Almud´ever、K. Bertels 和 B. M. Terhal，《码变形与晶格手术即规范固定》，新物理学杂志 21，033028（2019）。[52] H. Bomb´ın，《单次容错量子纠错》，《物理评论X》5，031043（2015）。[53] E. T. Campbell，《对抗性噪声下单次纠错理论》，量子科学与技术 4，025006 （ 2019 ）。[54] O. Fawzi 、 A. Grospellier 和 A. Leverrier，《利用量子扩展子码实现恒定开销量子容错》，载于 *2018 IEEE 59th Annu. Symp. Found. Comput. Scie. (FOCS)* 64 第 卷（ACM，纽约州纽约市，美国，2018），第 106–114 页。[55] S. Gu、E. Tang、L. Caha、S. H. Choe、Z. He 和 A. Kubica，《优良量子低密度奇偶校验码的单次解码》，数学物理通讯 405，10 1007 00220 024 04951 6 2024。[56] T. R. Scruby、T. Hillmann 和 J. Roffe，《高阈值、低开销且可单次解码的容错量子存储器》（2024），arXiv:2406.14445 [量子物理]。[57] A. M. Steane，《主动稳定、量子计算与量子态合成》，《物理评论快报》78，2252–2255（1997）。[58] E. Knill，《使用现实噪声设备进行量子计算》，自然 434，39–44（2005）。

附录 A：常数时间手术 HGP 码的省略证明

引理 5. 设 $A_\bullet$、$C_\bullet$、$D_\bullet$ 为链复形，且 $f\colon A_\bullet \to C_\bullet$ 为一个链映射，它诱导出第二个链映射 $f\otimes \mathrm{id}_D : (A\otimes D)_\bullet \to (C\otimes D)_\bullet$。那么

$$\mathrm{cone}(f\otimes \mathrm{id}_D) \cong (\mathrm{cone}(f)\otimes D)_\bullet. \tag{43}$$

证明。 根据链复形的同调乘积和映射锥的定义，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{cone}(f\otimes \mathrm{id}_D)_k &= (A\otimes D)_{k-1} \oplus (C\otimes D)_k && \text{(A1)}\\
&= \left(\bigoplus_{i+j=k-1} A_i\otimes D_j\right) \oplus \left(\bigoplus_{l+m=k} C_l\otimes D_m\right). && \text{(A2)}\\
(\mathrm{cone}(f)\otimes D)_k &= \bigoplus_{p+q=k} \mathrm{cone}(f)_p \otimes D_q && \text{(A3)}\\
&= \bigoplus_{p+q=k} (A_{p-1}\oplus C_p)\otimes D_q && \text{(A4)}\\
&= \bigoplus_{p+q=k} (A_{p-1}\otimes D_q) \oplus (C_p\otimes D_q). && \text{(A5)}
\end{aligned}$$

我们看到，这两个复形的分次向量空间是同构的。为检验它们的边界映射，取 p,q使得 $p+q=k$。对于元素 $a\otimes d \in A_p\otimes D_q$，我们看到

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathrm{cone}(f\otimes \mathrm{id}_D),k+1}(a\otimes d) &= f_p\otimes \mathrm{id}_{D_q}(a\otimes d) - \partial_{A\otimes D,k}(a\otimes d) && \text{(A6)}\\
&= f_p(a)\otimes d - \partial_{A,p}(a)\otimes d - (-1)^p a\otimes \partial_{D,q}(d). && \text{(A7)}\\
\partial_{\mathrm{cone}(f)\otimes D,k+1}(a\otimes d) &= \partial_{\mathrm{cone}(f),p+1}(a)\otimes d + (-1)^{p+1} a\otimes \partial_{D,q}(d) && \text{(A8)}\\
&= (f_p(a) - \partial_{A,p}(a))\otimes d + (-1)^{p+1} a\otimes \partial_{D,q}(d). && \text{(A9)}
\end{aligned}$$

请注意，在计算 $\partial_{\mathrm{cone}(f\otimes \mathrm{id}_D)\ k+1}(a\otimes d)$ 时，我们考虑了链映射 $f\otimes \mathrm{id}_D$ 的作用以及 $(A\otimes D)_\bullet$的边界映射，然后展开第二项。在计算 $\partial_{\mathrm{cone}(f)\otimes D,k+1}(a\otimes d)$ 时，我们先展开同调乘积的边界映射，再展开映射锥的边界映射。我们看到这两种计算结果相同。

类似地，对于元素 $c\otimes d \in C_p\otimes D_q$，我们有

$$\partial_{\mathrm{cone}(f\otimes \mathrm{id}_D),k}(c\otimes d) = \partial_{C\otimes D,k}(c\otimes d) \tag{A10}$$

and

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathrm{cone}(f)\otimes D,k}(c\otimes d) &= \partial_{\mathrm{cone}(f),p}(c)\otimes d + (-1)^p c\otimes \partial_{D,q}(d) && \text{(A11)}\\
&= \partial_{C,p}(c)\otimes d + (-1)^p c\otimes \partial_{D,q}(d) && \text{(A12)}\\
&= \partial_{C\otimes D,k}(c\otimes d). && \text{(A13)}
\end{aligned}$$

因此，我们得出结论：这两个链复形是同构的，其中的同构只是它们的分次向量空间之间的恒等映射。

□

命题 4. $d^1(\text{锥}(\bar{g})) \geq 1$，且 $d_1(\text{锥}(\bar{g})) \geq d$。

证明。 为便于查阅，我们将锥化复形重新绘制如下，如公式（58）所示。

$$\begin{array}{ccccccc}
\oplus_{i\in[t]} G[i]_1 & \xrightarrow{\partial_{G,1}} & \oplus_{i\in[t]} G[i]_0 & \xrightarrow{\partial_{G,0}} & \oplus_{i\in[t]} G[i]_{-1} \\
& \searrow^{\bar{g}_1} & & \searrow^{\bar{g}_0} & \\
0 & \xrightarrow[0]{} & C_1 & \xrightarrow[\partial_C]{} & C_0
\end{array} \tag{A14}$$

显然 $d^1(\mathrm{cone}(\bar{g})) \geq 1$ 成立，因此我们着重分析 $d_1(\mathrm{cone}(\bar{g}))$。根据命题 2，我们知道， $H_1(\mathrm{cone}(\bar{g}))$ 中的元素恰好是 $H_1(C_\bullet)$ 中未被辅助比特测量的元素

系统 $G[i]_\bullet$。令 $c_{t+1},\cdots,c_{k_C}$ 为 $\ker(\partial_C)/\mathrm{span}\{\{c_1\},\cdots,\{c_t\}\}$ 的线性无关基。每个向量 c_j for$t+1\le j\le k_C$ 都对应于一条链 $(c_j,0,\cdots,0)\in H_1(\mathrm{cone}(\bar{g}))$，其中 0 位于空间 $G[i]_0$ 中。我们只需分析这些链如何因新增的空间 $\oplus_{i\in[t]}G[i]_1$ 而变形。

固定这样一条链（c_j, 0,$\cdots$， 0)，考虑任意元素 $(v_1,\ \cdots,\ v_t)\in\oplus_{i\in[t]}G[i]_1$ 其中 $v_i\in G[i]_1$。我们有 e

$$\partial_{G,1}((v_1,\cdots,v_t))+(c_j,0,\cdots,0)=(c_j+\sum_{i\in[t]}g[i]_1(v_i),\partial_{G[1],1}(v_1),\cdots,\partial_{G[t],1}(v_t)). \tag{A15}$$

由引理 1，我们知道 $\partial_{G[i],\ 1}$ 的边界切格常数至少为 1。这意味着对于所有 $i\in[t]$,

$$|\partial_{G[i],1}(v_i)|\ge\min(|v_i|,\dim(G[i]_1)-|v_i|). \tag{A16}$$

由于映射 $g[i]_1$ 是 1-稀疏的，且将 $g[i]_1$ 应用于 $G[i]_1$ 上的全 1 向量会得到 c_i，因此我们看到 $\dim(G[i]_1)\ge|c_i|$且 $|v_i|\ge g[i]_1(v_i)$。我们只需证明

$$\left|(c_j+\sum_{i\in[t]}g[i]_1(v_i),\partial_{G[1],1}(v_1),\cdots,\partial_{G[i],1}(v_i))\right|=\left|c_j+\sum_{i\in[t]}g[i]_1(v_i)\right|+\sum_{i\in[t]}|\partial_{G[i],1}(v_i)|\ge d. \tag{A17}$$

不失一般性，设对于 $i\le\ell$，我们有$|\partial_{G[i],\ 1}(v_i)|=|v_i|$，而对于 $\ell+1\le i\le t$，我们有$|\partial_{G[i],\ 1}(v_i)|=\dim(G[i]_1)-|v_i|$。根据三角不等式，我们有

$$\left|c_j+\sum_{i\in[t]}g[i]_1(v_i)\right|+\sum_{i\in[t]}|\partial_{G[i],1}(v_i)|\ge\left|c_j+\sum_{i>\ell}g[i]_1(v_i)\right|-\sum_{i\le\ell}|g[i]_1(v_i)|+\sum_{i\in[t]}|\partial_{G[i],1}(v_i)|, \tag{A18}$$

$$\ge\left|c_j+\sum_{i>\ell}g[i]_1(v_i)\right|+\sum_{i>\ell}|\partial_{G[i],1}(v_i)|, \tag{A19}$$

$$\ge\left|c_j+\sum_{i>\ell}g[i]_1(v_i)\right|+\sum_{i>\ell}(\dim(G[i]_1)-|v_i|). \tag{A20}$$

N注意到， $g[i]_1(v_i)$ 的支撑严格包含于 c_i 的支撑中。记

$$c_j+\sum_{i>\ell}g[i]_1(v_i)=c_j+\sum_{i>\ell}(c_i+(c_i-g[i]_1(v_i))). \tag{A21}$$

请注意，由于我们是在 $\mathbf{F}_2$ 上运算，符号可以灵活选择。令 $\tilde{c}=c_j+\sum_{i>\ell}c_i$。我们看到 $\tilde{c}\in\ker(\partial_C)$，这意味着 $|\tilde{c}|\ge d$。换言之， $\tilde{c}$ 是码 $C_\bullet$ 中且属于 C_1 的另一个逻辑算符，因此其重量至少为 qd。根据反三角不等式，我们有

$$\left|c_j+\sum_{i>\ell}g[i]_1(v_i)\right|=\left|\tilde{c}-\sum_{i>l}(c_i-g[i]_1(v_i))\right|\ge|\tilde{c}|-\sum_{i>\ell}|c_i-g[i]_1(v_i)|. \tag{A22}$$

令 $\mathbb{1}_i$ 表示 $G[i]_1$ 上的全1向量，并注意到 $|\mathbb{1}_i-v_i|=\dim(G[i]_1)-|v_i|$。此外， $g[i]_1(\mathbb{1}_i-v_i)=c_i-g[i]_1(v_i)$。由于 $g[i]_1$ 是 1- 稀疏的，我们有

$$|c_i-g[i]_1(v_i)|=|g[i]_1(\mathbb{1}_i-v_i)|\le|\mathbb{1}_i-v_i|=\dim(G[i]_1)-|v_i| \tag{A23}$$

重新审视不等式的左侧 以及A17）中的不等式，并利用方程（A20）、（A22）和（A23），我们有 e

$$\left|c_j+\sum_{i\in[t]}g[i]_1(v_i)\right|+\sum_{i\in[t]}|\partial_{G[i],1}(v_i)|\ge|\tilde{c}|-\sum_{i>\ell}(\dim(G[i]_1)-|v_i|)+\sum_{i>\ell}(\dim(G[i]_1)-|v_i|)\ge|\tilde{c}|\ge d. \tag{A24}$$

这证明了我们的主张： $d_1(\text{锥}(\bar{g}))\ge d$。 □

1. 放宽为相对扩张

现在，我们放宽命题 4 的证明，改用一种较弱的扩展概念，称为相对扩展，该概念在文献 [11] 中提出。

定义 5（相对扩张）。考虑一个矩阵 $M:\mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^m$，使得全*1*向量 v 属于 M 的核。令 $P \subseteq [n]$ 为 $\mathbb{F}_2^n$ 中的一个指标子集。对于向量 $v \in \mathbb{F}_2^n$，令 $S(v)$ 表示 v 中取值为 *1* 的指标集合。令 t 为一个整数。我们将相对切格常数 $\beta_t(M, P)$ 定义为满足以下条件的最大值：对于所有 $v \in \mathbb{F}_2^n$，均有

$$|Mv| \geq \beta_t(M,P) \cdot \min(t, |S(v) \cap P|, |P \setminus S(v)|). \tag{A25}$$

命题 7。假设辅助复形 $G[i]$ 对所有 i 都满足 $\beta_d(G[i]_i, P_i) \geq 1$，其中 P_i 对应于 $G[i]_1$ 中通过 $\partial_{G[i],1}$ 与 c_i 建立一对一连接的指标。换言之，

$$|\partial_{G[i],1}(v_i)| \geq \min(d, |S(v_i) \cap P_i|, |P_i \setminus S(v_i)|).$$

那么 d_1（锥$(\bar{g})$ $\geq d$。

证明。我们沿用命题 4中的证明，并再次参考方程（58）中的复形。令 c_{t+1}，$\cdots$，c_{k_C}为 $\ker(\partial_C)$/张成空间 $\{\{c_1\},\cdots,\{c_t\}\}$的一组线性无关基。每个向量 c_j对应于一个链（c_j，0，$\cdots$，0）$\in H_1(\mathrm{cone}(\bar{g}))$，其中 0 位于空间 $G[i]_0$中。我们只需分析这些链在新增空间 $\oplus_{i\in[t]}G[i]_1$下如何变形。

固定一个 hain $(c_j, 0, \cdots, 0)$，考虑任意元素 $(v_1, \cdots, v_t) \in \oplus_{i\in[t]}G[i]_1$ 其中 $v_i \in G[i]_1$。我们有 ve c

$$\partial_{G,1}((v_1,\cdots,v_t)) + (c_j,0,\cdots,0) = (c_j + \sum_{i\in[t]} g[i]_1(v_i), \partial_{G[1],1}(v_1), \cdots, \partial_{G[t],1}(v_t)). \tag{A26}$$

只需证明

$$\left|(c_j + \sum_{i\in[t]} g[i]_1(v_i), \partial_{G[1],1}(v_1), \cdots, \partial_{G[i],1}(v_i))\right| = \left|c_j + \sum_{i\in[t]} g[i]_1(v_i)\right| + \sum_{i\in[t]} |\partial_{G[i],1}(v_i)| \geq d. \tag{A27}$$

根据 $\partial_{G[i],1}$ 的相对扩张性质，对于所有 $i \in [t]$，我们有

$$|\partial_{G[i],1}(v_i)| \geq \min(d, |S(v_i) \cap P_i|, |P_i \setminus S(v_i)|). \tag{A28}$$

如果存在 i 使得$|\partial_{G[i],1}(v_i)| \geq d$，则等式 (A27) 成立。因此，不失一般性，设对于$i \leq \ell$ 我们有

$$|\partial_{G[i],1}(v_i)| = |S(v_i) \cap P_i| = |g[i]_1(v_i)|, \tag{A29}$$

且对于 $\ell + 1 \leq i \leq t$，我们有

$$|\partial_{G[i],1}(v_i)| = |P_i \setminus S(v_i)| = |c_i| - |g[i]_1(v_i)|. \tag{A30}$$

根据三角不等式，我们有

$$\left|c_j + \sum_{i\in[t]} g[i]_1(v_i)\right| + \sum_{i\in[t]} |\partial_{G[i],1}(v_i)| \geq \left|c_j + \sum_{i>\ell} g[i]_1(v_i)\right| - \sum_{i\leq\ell} |g[i]_1(v_i)| + \sum_{i\in[t]} |\partial_{G[i],1}(v_i)|, \tag{A31}$$

$$\geq \left|c_j + \sum_{i>\ell} g[i]_1(v_i)\right| + \sum_{i>\ell} |\partial_{G[i],1}(v_i)|, \tag{A32}$$

$$\geq \left|c_j + \sum_{i>\ell} g[i]_1(v_i)\right| + \sum_{i>\ell} (|c_i| - |g[i]_1(v_i)|). \tag{A33}$$

记

$$c_j + \sum_{i>\ell} g[i]_1(v_i) = c_j + \sum_{i>\ell}(c_i + (c_i - g[i]_1(v_i))). \tag{A34}$$

请注意，由于我们是在 $\mathbb{F}_2$ 上进行运算，符号可以灵活处理。令 $\tilde{c} = c_j + \sum_{i>\ell} c_i$。我们看到 $\tilde{c} \in \ker(\partial_C)$，这意味着 $|\tilde{c}| \geq d$。换言之， $\tilde{c}$ 是码 $C_\bullet$ 中且属于 C_1 的另一个逻辑算符，因此其重量至少为 qd。根据反三角不等式，我们有

$$\left| c_j + \sum_{i>\ell} g[i]_1(v_i) \right| = \left| \tilde{c} - \sum_{i>l}(c_i - g[i]_1(v_i)) \right| \geq |\tilde{c}| - \sum_{i>\ell} |c_i - g[i]_1(v_i)|. \tag{A35}$$

将其与方程（A33）结合，可得

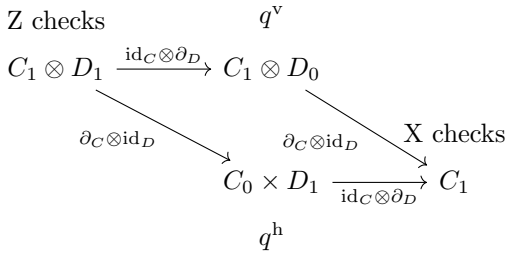
$$\left| c_j + \sum_{i\in[t]} g[i]_1(v_i) \right| + \sum_{i\in[t]} |\partial_{G[i],1}(v_i)| \geq |\tilde{c}| - \sum_{i>\ell}(\dim(G[i]_1) - |v_i|) + \sum_{i>\ell}(\dim(G[i]_1) - |v_i|) \geq |\tilde{c}| \geq d. \tag{A36}$$

这就证明了我们的断言： $d_1(\mathsf{cone}(\bar{g})) \geq d$。 □

附录 B：环面码的恒定时空开销手术

我们提出的环面码构件遵循正文中的相同构造，但所用的 $G_\bullet$ 复形与引理1不同，因为条件 1 得到了放宽。由于 $\partial_{G[i]}$,1 的边界切格常数不至少为 1，我们必须采用不同于命题 4 证明的方法；该证明依赖于 $\partial_{G[i]}$,1 的扩展来证明 $d_1(\mathsf{cone}(\bar{g})) \geq d$ ，进而证明 $d_1(\mathsf{CC}_\bullet) \geq d$。此前，命题 4 的证明考察了一维锥 $\mathsf{cone}(g[i])$。相反，我们将直接证明 $d_1(\mathsf{cone}(f[i])) \geq d$，然后迭代构造压缩码 $\mathsf{CC}_\bullet = \mathsf{cone}(f) = \bigoplus_{i\in[t]} \mathsf{cone}(f[i])$。

环面码是超图乘积码，其中 $C_\bullet$ 和 $D_\bullet$ 为循环重复码。我们假设$n_C = n_D = d_C = d_D = m_C = m_D = d$。这对对偶码同样成立， $C^\bullet$： $C^0 \xrightarrow{\delta^C} C^1$ 以及 $D^\bullet$： $D^0 \xrightarrow{\delta^D} D^1$，其中 $\partial_C = \delta^C$ 和 $\partial_D = \delta^D$。作为参考，环面码的链复形为：



(B1)

设（$q^{\mathrm{v}}, q^{\mathrm{h}}$） ∈ （$\mathbb{F}_2^{n_C m_D}, \mathbb{F}_2^{m_C n_D}$）为一个向量，表示两个空间 $C_1 \otimes D_0$和 $C_0 \otimes D_1$中量子比特的支撑。环面码的逻辑算符可写为

$$\{(c \otimes e_l, 0), (0, e_h \otimes d)\} \in H_1((C \otimes D)_\bullet), \tag{B2}$$

$$\{(e_g \otimes \bar{d}, 0), (0, \bar{c} \otimes e_k)\} \in H^1((C \otimes D)^\bullet), \tag{B3}$$

其中 c、 $e_g \in \mathbb{F}_2^{n_c}$、 $\bar{d}$、 $e_l \in \mathbb{F}_2^{m_d}$、 $\bar{c}$、 $e_h \in \mathbb{F}_2^{m_c}$，以及 d、 $e_k \in \mathbb{F}_2^{n_d}$。向量 c、 d、 $\bar{c}$和 $\bar{d}$分别属于$\ker(\partial_C)$、$\ker(\partial_D)$、$\ker(\delta^C)$和$\ker(\delta^D)$。具体而言， $c = d = \bar{c} = \bar{d} = \mathbb{1}_d$，即$\mathbb{F}_2^d$中的全 1 列向量。设 e_g为$\mathbb{F}_2^{n_c}$中的第 g个单位向量， e_k 为$\mathbb{F}_2^{n_d}$中的第 k个单位向量， e_h 为$\mathbb{F}_2^{m_c}$中的第 h个单位向量， e_l 为$\mathbb{F}_2^{m_d}$中的第 l个单位向量。

我们关注用于 t 手术操作的压缩码的距离，该码将包含对多个环面码的测量。设有 M 个环面码， t 手术操作将在这些码上执行，

$$\bigoplus_{j\in[M]} (C_\bullet \otimes D_\bullet)^{(j)} = (\bigoplus_{j\in[M]} C_\bullet^{(j)}) \otimes D_\bullet = C_\bullet \otimes (\bigoplus_{j\in[M]} D_\bullet^{(j)}). \tag{B4}$$

并令 $C'_\bullet = C'_1 \xrightarrow{\partial'_C} C'_0$，其中

$$C'_i = \bigoplus_{j\in[M]} C_i^{(j)}, \qquad \partial'_C = \bigoplus_{j\in[M]} \partial_C^{(j)} = I_M \otimes \partial_C. \tag{B5}$$

对 ∂'_C 的最后一个等式用到了这样一个事实：对所有 $j \neq j'$，$\partial_C^{(j)} = \partial_C^{(j')}$。$I_M$ 是 $M \times M$ 单位矩阵。由于 $(C' \otimes D)_\bullet$ 只是许多份环面码的复制，我们可以将逻辑算符写为

$$\{(c'_m \otimes e_l, 0), (0, e_H \otimes d)\} \in H_1((C \otimes D)_\bullet), \tag{B6}$$

$$\{(e_G \otimes \bar{d}, 0), (0, \bar{c}'_m \otimes e_k)\} \in H^1((C \otimes D)^\bullet). \tag{B7}$$

其中，$\{e_H\}_{H=1}^{M\cdot m_c}$是 $\mathbf{F}_2^{m\cdot m_C}$ 的单位向量基，我们将其改写为两个单位向量的张量积 $\{e_m \otimes e_h\}$。这里，$\{e_m\}_{m=1}^{M}$是 $\mathbf{F}_2^M$ 的单位向量基。类似地，$\{e_G\}_{G=1}^{m\cdot n_C}$是 $\mathbf{F}_2^{m\cdot n_C}$ 的单位向量基，我们也将其改写为 $\{e_m \otimes e_g\}$。设对于 $m \in [M]$，$\{b_m\}$ 是 $\mathbf{F}_2^M$ 的另一组基。我们可以证明，作为 $\ker(\partial'_C)$ 和 $\ker(\delta'^C)$ 的基的 $\{c'_m\}_{m=1}^M$ 和 $\{\bar{c}'\}_{m=1}^M$，可以选为

$$c'_m = b_m \otimes c, \qquad \bar{c}'_m = b_m \otimes \bar{c}. \tag{B8}$$

我们针对 $\ker(\partial'_C)$ 展开这一论证，因为同样的论证也适用于 $\ker(\delta'^C)$。

引理 6. 设 $\{b_m\}$ 是 $\mathbb{F}_2^M$ 的一组基。设 $\partial'_C = I_M \otimes \partial_C$。设 $c \in \ker(\partial_C)$。那么，

$$\ker(\partial'_C) = \mathrm{Span}\{b_m \otimes c\}.$$

证明。任取 $b_m \otimes c$，其中 $c \in \ker(\partial_C)$。我们看到

$$(I_M \otimes \partial_C)(b_m \otimes c) = b_m \otimes \partial_C c = 0, \tag{B9}$$

因此，对于所有 $m \in [M]$，$b_m \otimes c \in \ker(\partial'_C)$。现在，任取 $x \in \mathbf{F}_2^M \otimes C_1$ 中的一个元素，

$$x = \sum_{m=1}^{M} b_m \otimes c_m \tag{B10}$$

对于某些向量 $c_m \in C_1$。如果 x 属于 ∂'_C 的核，那么这意味着

$$(I_M \otimes \partial_C)x = \sum_{m=1}^{M} b_m \otimes \partial_C c_m = 0 \tag{B11}$$

由于 $\{b_m\}$ 是一组基，这意味着对于所有 m，$\partial_C c_m = 0$。因此，$x \in \mathbf{F}_2^M \otimes \ker(\partial_C)$。由于 $\{c\}$ 是 $\ker(\partial_C)$ 的一组基，所以 $\{b_m \otimes c\}$ 张成该空间且线性无关。 □

我们将考虑对这些环面码的 Z 逻辑算符的乘积进行常数时间测量 M。例如，取逻辑算符 $Z\mathrm{logical}\,((b \otimes c) \otimes e_l, 0)$，其中 $b \in \mathbf{F}_2^M$。该算符是对所有满足 $b_m = 1$ 的指标 m 所对应的逻辑算符 $((e_m \otimes c) \otimes e_l, 0)$ Z 的乘积。我们改用 $\ker(\partial'_C)$ 的一个基会更方便，该基包含作为基向量的 b，而不是 $\{e_m \otimes c\}$。这个选择使得描述变形码剩余的逻辑算符 Z 变得简单。这些逻辑算符包括 $((b_i^\perp \otimes c) \otimes e_l, 0)$，其中 $\{b_i^\perp\}$ 构成 $\mathbf{F}_2^M / \mathrm{Im}(b)$ 的一个基。在引理 7 中，我们利用这个新的逻辑算符基证明一个有用的对易关系。

引理 7. 令 $B = \{b_1 \quad \ldots, b_t\} \subset \mathbb{F}_2^M$为一组线性无关向量。定义正交子空间

$$B^\perp := \{x \in \mathbb{F}_2^M : x^\top b_i = 0 \ for\ all\ i \in [t]\}. \tag{B12}$$

那么，$B^\perp$ 是一个维数为 $M-t$ 的子空间，因此存在一组由 $M-t$ 个线性无关向量构成的基 $\{b_i^\perp\}$。由此可知，逻辑算符 $Z_{b_j}^{\mathrm{v}} = ((b_j \otimes c) \otimes e_l, 0)$ *for* $b_j \in B$ 与所有形如 $\bar{X}_i^{\mathrm{v}} = ((b_i^\perp \otimes e_g) \otimes \bar{d}, 0)$ *for* $b_i^\perp \in B^\perp$ 的逻辑算符对易。

证明。子空间 $B^\perp$ 由对 $\mathbf{F}_2^M$ 中向量的 t 个线性无关的线性约束定义，因此 $\dim(B^\perp) = M - t$。因此，该空间必定存在一组由 $M-t$ 个线性无关向量构成的基。要得到最后一个结果，我们可以直接 $\bar{\quad}$ $\bar{\quad}$看出 Z_b^{v} 算符与 X_i^{v} 算符对易，

$$(\bar{X}_i^{\mathrm{v}})^\top \bar{Z}_{b_j}^{\mathrm{v}} = (((b_i^\perp)^\top \otimes e_g^\top) \otimes \bar{d}^\top)((b_j \otimes c) \otimes e_l) + 0 = b_i^{\perp\top} b_j \otimes e_g^\top c \otimes \bar{d}^\top e_l = 0, \tag{B13}$$

通过对所有 i, j 使用 $(b_i^\perp)^\top b_j = 0$，因为 $b_i^\perp \in B^\perp$。 □

不失一般性，假设我们对 $c'=(b\otimes c)\in\ker(\partial'_C)$ 的一个 Z逻辑算符 $Z_b^{\mathrm{v}}=(c'\otimes e_l,0)$ 进行测量。这里，$b\in\mathrm{F}_2^M$ 表示该算符 $\bar{Z}_g^{\mathrm{v}}$在哪个 M环面码上具有非平凡作用。用于实现测量的变形码是锥化码 $\mathrm{cone}(g[i])$，

$$\begin{array}{ccccc} G[i]_1 & \xrightarrow{\partial_{G,1}} & G[i]_0 & \xrightarrow{\partial_{G,0}} & G[i]_{-1} \\ & \searrow^{g[i]_1} & & \searrow^{g[i]_0} & \\ 0 & \xrightarrow[0]{} & C'_1 & \xrightarrow[\partial'_C]{} & C'_0. \end{array} \tag{B14}$$

这里 $g[i]_\ell:\ \mathrm{F}_2^{|G[i]_\ell|}\to\mathrm{F}_2^{M\cdot|C_\ell|}$。此外，我们还施加条件：

$$g[i]_1^{-1}(b_i^\perp\otimes e_g)=0,\quad b_i^\perp\in B^\perp\subset\mathbb{F}_2^M,\ e_g\in\mathbb{F}_2^{n_C} \tag{B15}$$

其中 $b_i^\perp$是 b的正交补的一个基向量，e_g 是 $\mathrm{F}_2^{n_c}$的第 g个单位向量。令 $\mathrm{cone}(f[i])=(\mathrm{cone}(g[i])\otimes D)_\bullet$。请注意，放宽引理1的条件 1 并施加方程 (B15)，不会影响引理 5、命题 1 或命题 3 的证明或陈述。因此，这些环面码构件的逻辑作用和 $d^1(\mathrm{CC}_\bullet)$ 与第三节 III A 中的相同。

注2。 Z原环面码的逻辑算符，$\bar{Z}_m^{\mathrm{h}}=(0,\ (e_m\otimes e_h)\otimes d)$ 以及 $\bar{Z}_i^{\mathrm{v}}=((b_i^\perp\otimes c)\otimes e_l,\ 0)$ 在切换到变形码时不会发生变形，因为没有新的辅助比特校验 X 其支撑覆盖 $C_1\otimes D_0$ 或$C_0\otimes D_1$ (图 4)。因此，将以下平凡扩展 $\bar{Z}_m^{\mathrm{h}}$ 和 $\bar{Z}_i^{\mathrm{v}}$扩展到完整的辅助比特与码系统后，得到的锥化码逻辑算符在同调上等价，

$$\bar{Z}_m^{\mathrm{h,cone}}=(0,0,0,(e_m\otimes e_h)\otimes d)\in(G[i]_0\otimes D_0,G[i]_{-1}\otimes D_0,C'_1\otimes D_0,C'_0\otimes D_1) \tag{B16}$$

$$\bar{Z}_i^{\mathrm{v,cone}}=(0,0,(b_i^\perp\otimes c)\otimes e_l,0)\in(G[i]_0\otimes D_0,G[i]_{-1}\otimes D_0,C'_1\otimes D_0,C'_0\otimes D_1) \tag{B17}$$

命题8。 逻辑算符 $\bar{Z}^{\mathrm{h},\ m^{\mathrm{cone}}}=(0,\ 0,\ 0,\ (e_m\otimes e_h)\otimes d)\in H_1(\text{锥化}(f[i]))$ 的距离至少为 d。

证明。 取原环面码的 $\bar{X}_m^{\mathrm{h}}=(0,\ \vec{c}'_m\otimes e_k)$ 逻辑算符，其中 $\vec{c}'_m\in\ker(\delta'^C)$，且 e_k 是 $\mathrm{F}_2^{n_d}$ 的第 k 个单位向量。我们声称，辅助量子比特与编码量子比特向量空间上的以下算符是锥化码的一个 X 逻辑算符，

$$\begin{aligned}\bar{X}_m^{\mathrm{h,cone}}&=(0,\partial_{G,0}(g_0^{-1}[i](\vec{c}'_m))\otimes e_k,0,\vec{c}'_m\otimes e_k)\\&\in(G[i]_0\otimes D_0,G[i]_{-1}\otimes D_1,C'_1\otimes D_0,C'_0\otimes D_1).\end{aligned} \tag{B18}$$

我们可以验证 $\bar{X}^{\mathrm{h},\ m^{\mathrm{cone}}}$确实属于 $H^1(\text{锥化}(f[i]))$，因为它属于 $\ker(\delta^{\mathrm{cone}(f[i]),\ 1})$，其中

$$\delta^{\mathrm{cone}(f[i]),1}=\begin{array}{c} \\ G[i]_1\otimes D_0\\ G[i]_0\otimes D_1\\ C'_1\otimes D_1\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} G[i]_0\otimes D_0 & G[i]_{-1}\otimes D_1 & C'_1\otimes D_0 & C'_0\otimes D_1\end{array}\\ \begin{pmatrix}\partial_{G,1}^\top\otimes\mathrm{id}_D & 0 & g[i]_1^{-1}\otimes\mathrm{id}_D & 0\\ \mathrm{id}_G\otimes\partial_D^\top & \partial_{G,0}^\top\otimes\mathrm{id}_D & 0 & g[i]_0^{-1}\otimes\mathrm{id}_D\\ 0 & 0 & \mathrm{id}_{C'}\otimes\partial_D^\top & \partial'^\top_C\otimes\mathrm{id}_D\end{pmatrix}\end{array}, \tag{B19}$$

因此，

$$\delta^{\mathrm{cone}(f[i]),1}\begin{pmatrix}0\\ \partial_{G,0}(g_0^{-1}[i](\vec{c}'_m))\otimes e_k\\ 0\\ \vec{c}'_m\otimes e_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \partial_{G,0}^\top(\partial_{G,0}(g[i]_0^{-1}(\vec{c}'_m))\otimes e_k+g[i]_0^{-1}(\vec{c}'_m)\otimes e_k\\ \partial_{C'}^\top(\vec{c}'_m)\otimes e_k\end{pmatrix} \tag{B20}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\ g[i]_0^{-1}(\vec{c}'_m)\otimes e_k+g[i]_0^{-1}(\vec{c}'_m)\otimes e_k\\ \partial_{C'}^\top(\vec{c}'_m)\otimes e_k\end{pmatrix}=\vec{0}. \tag{B21}$$

在最后一个等式中，我们使用 $\partial_C^\top(\vec{c}'_m)=\delta^C(\vec{c}'_m)=0$，因为 $\vec{c}'_m\in\ker(\delta^{C'})$。对于固定的 $\vec{c}'_m$，让 $k\in[n_d]$ 在 $\bar{X}^{\mathrm{h},\ m^{\mathrm{cone}}}$ 中变化，会得到属于同一同调类的逻辑算符。因此，对于不同的$k\in[d]$，由方程 (B18) 给出的不相交逻辑算符共有 $n_d=d$ 个。每个 $\bar{X}^{\mathrm{h},\ m^{\mathrm{cone}}}$都有一个共轭的 Z逻辑算符，即 $\bar{Z}^{\mathrm{h},\ m^{\mathrm{cone}}}=(0,\ 0,\ 0,\ (e_m\otimes e_h)\otimes d)$（见备注 2）。每个 Z逻辑算符都必须与其共轭 X逻辑算符的每个代表元反对易。由于存在 d个不相交的 $\bar{X}_m^{\mathrm{h}}$算符，$\bar{Z}^{\mathrm{h},\ m^{\mathrm{cone}}}$的重量至少必须为 d，才能与每个 $\bar{X}_m^{\mathrm{h}}$ 各相交 $k\in[d]$ 次。

□

命题 9。 逻辑算符 $Z^{\mathrm{v}} = (0,\ 0,\ c'_m \otimes e_l,\ 0) \in H_1(\mathrm{cone}(f[i]))$ 对于 $c'_m \in \ker(\partial'_C)/\{b\}$，其距离至少为 d。

证明。 取逻辑算符 X_i^{v} 的平凡扩展，

$$\bar{X}_i^{\mathrm{v,cone}} = (0, 0, (b_i^{\perp} \otimes e_g) \otimes \bar{d}, 0), \quad \bar{d} \in \ker(\delta^D), \tag{B22}$$

其中 $b_i^{\perp}$ 是 $\mathbb{F}_2^M / \mathrm{Im}(b$的一个基向量。该算符不可能是测量逻辑算符$\bar{Z}_b^{\mathrm{v}} = (0,\ 0,\ (b \otimes c) \otimes e_l,\ 0)$ 的共轭逻辑算符，因为根据引理 7，直接应用即可得知它们对易。事实上，$\bar{X}^{\mathrm{v},\ i\ \mathrm{cone}}$ 是未测量的 $\bar{Z}^{\mathrm{v},\ i\ \mathrm{cone}} = (0,\ 0,\ (b_i^{\perp} \otimes c) \otimes e_l,\ 0)$ 逻辑算符的共轭X逻辑算符。

$$(\bar{X}_i^{\mathrm{v,cone}})^{\top} \bar{Z}_{i'}^{\mathrm{v,cone}} = 0 + 0 + ((b_i^{\perp})^{\top} \otimes e_g^{\top} \otimes \bar{d}^{\top})(b_{i'}^{\perp} \otimes c \otimes e_l) + 0 \tag{B23}$$

$$= (b_i^{\perp})^{\top} b_{i'}^{\perp} \otimes e_g^{\top} c \otimes \bar{d}^{\top} e_l = \delta_{ii'} \tag{B24}$$

因此，我们看到 $\bar{Z}^{\mathrm{v},\ i\ \mathrm{cone}}$ 和 $\bar{X}^{\mathrm{v},\ i\ \mathrm{cone}}$ 满足构成共轭对所需的正确对易关系。我们可以验证，$\bar{X}^{\mathrm{v},\ i\ \mathrm{cone}}$ 确实属于 $H^1(\mathrm{cone}(f[i]))$，因为

$$\delta^{\mathrm{cone}(f[i]),1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (b_i^{\perp} \otimes e_g) \otimes \bar{d} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g[i]_1^{-1}(b_i^{\perp} \otimes e_g) \otimes \bar{d} \\ 0 \\ e_g \otimes \partial_D^{\top}(\bar{d}) \end{pmatrix} = \vec{0}. \tag{B25}$$

在最后一个等式中，我们根据假设使用了 $g[i]_1^{-1}(b_i^{\perp} \otimes e_g) = 0$（方程（B15））， 以及 $\partial_D^{\top}(\bar{d}) = \delta^D(\bar{d}) = 0$。我们看到，对于 $g \in [n_C]$，存在 $n_C = d$ 个互不相交的 $\bar{X}^{\mathrm{v},\ i\ \mathrm{cone}}$ 逻辑算符。对于每个 $i \in [M-1]$，$\bar{Z}^{\mathrm{v},\ i\ \mathrm{cone}}$ 都必须与所有 d 个互不相交的共轭逻辑算符 $\bar{X}^{\mathrm{v},\ i\ \mathrm{cone}}$ 反对易。因此，$\bar{Z}^{\mathrm{v},\ i\ \mathrm{cone}}$ 的重量至少为 d。 □

综上，命题 8 和 9 意味着 $d_1(\mathrm{cone}(f[i])) \geq d$。我们来考虑 t中所有辅助系统上的扩展链映射，

$$f'[i] : (\bigoplus_{i \in [t]} G[i] \otimes D)_{\bullet} \to (C' \otimes D)_{\bullet}. \tag{B26}$$

进一步，令

$$\bar{f}[\tau] := \sum_{\substack{i \in [t] \\ i \leq \tau}} f'[i]. \tag{B27}$$

$\bar{\mathrm{cone}}(f[\tau])$ 是压缩码，前提是我们构造它时将截至 $\tau \leq t$ 的所有手术都包含在内。换言之，$\mathrm{CC}_{\bullet} = \bar{\mathrm{cone}}(f[t])$。

命题 10. $d_1(\mathrm{cone}(f)) \geq d$。

证明。 命题 8和 9适用于将 $\mathrm{cone}(f[i])$ 扩展到 $\mathrm{cone}(f'[i])$ 的情形。为说明这一点，考虑环面码和锥化码的扩展逻辑算符。

$$\bar{X'}_m^{\mathrm{h}} = (0, \ldots, 0, \bar{c}'_m \otimes e_k) \in (\bigoplus_{t' \in [t]} (G[t']_0 \otimes D_0, G[t']_{-1} \otimes D_1,)) \oplus (C'_1 \otimes D_0, C'_0 \otimes D_1) \tag{B28}$$

$$\bar{X'}_m^{\mathrm{h,cone}} = (0, \ldots, 0, \partial_{G,0}(g[i]_0^{-1}(\bar{c}'_m))0, \ldots, 0, \bar{c}'_m \otimes e_k)$$

$$\in (\bigoplus_{t' \in [t]} (G[t']_0 \otimes D_0, G[t']_{-1} \otimes D_1,)) \oplus (C'_1 \otimes D_0, C'_0 \otimes D_1) \tag{B29}$$

$\delta^{\mathrm{cone}(f'[i]),1}$ 仅包含与 $\delta^{\mathrm{cone}(f[i]),1}$共有的非零项。这意味着扩展后的 $\bar{X}^{\mathrm{h,cone}}$ 仍属于 $\ker(\delta^{\mathrm{cone}(f'[1]),1})$，其余论证依此类推。我们对扩展 $\bar{X'}^{\mathrm{v}}$ ^{cone} 在命题9。假设压缩码由 t 次手术组成，每次手术测量一个不同且可能产生纠缠的环面码 $\bar{Z}_{b_i}^{\mathrm{v}}$ 算符（$b_i \otimes c \otimes e_l, 0$）。定义一组基 $\{b_j^{\perp}\}$，使其构成 $\mathrm{Span}\{b_i\}$ 的正交补。因此，$\bar{X}_j^{\mathrm{v}} = (b_j^{\perp} \otimes e_g \otimes e_l, 0)$ 是与那些在整个 t 次手术中从未测量的 $\bar{Z}_j^{\mathrm{v}}$ 算符共轭的 X 逻辑算符。现在，我们将迭代构造 $\mathrm{CC}_{\bullet}$，每次只考虑一次手术。回顾方程 (B27)，添加来自 τ 次手术的链映射时，我们用 $\bar{}$ 记号 $f[\tau]$ 表示累积链映射。根据方程 (B27)，$\bar{f}[1] = f'[1]$。注意，$\{\bar{X'}_m^{\mathrm{h,cone}}\}$ 和 $\{\bar{X'}_j^{\mathrm{v,cone}}\}$ 仍是 $\mathrm{cone}(f'[1])$ 的逻辑算符，因此扩展后的距离

Z 逻辑算符 $\{\bar{Z}'^{\mathrm{h,cone}}_m\}$ 和 $\{\bar{Z}'^{\mathrm{v,cone}}_j\}$ 必须大于 d，这可由命题 8 和 9 中给出的论证得出。现在，取 $\tau = 2$ 并考虑 cone($\bar{f}[2]$)。 $\delta^{\mathrm{cone}(f'[2])}$,1 与 $\delta^{\mathrm{cone}(f[2])}$ 有相同的非零项，其他位置则为 0。因此， $\delta^{\mathrm{cone}(\bar{f}[2])}$) $_1$ = $\delta^{\mathrm{cone}(f'[1])}$ $_1$ $\oplus$ $\delta^{\mathrm{cone}(f'[2])}$ $_{,1}$ 只能包含 $\delta^{\mathrm{cone}(f[1])}$,1 和 $_{\delta^{\mathrm{cone}(f[2])}}$,1 中已有的非零项。这意味着 $\bar{X}'^{\mathrm{v}}_{,i}$ ^{cone} 属于 ker($\delta^{\mathrm{cone}(\bar{f}[2])}$)·1)，并且仍是 cone($\bar{f}[2]$)) 的逻辑算符。然而，与之前一样， $_{\bar{X}'^{\mathrm{h}}_{,m}}$ ^{cone} 必须在 $G[2]_{-1} \otimes D_1$ 上获得支撑，使其属于 ker($\delta^{\mathrm{cone}(\bar{f}[2])}$)·1)，

$$\bar{X}'^{\mathrm{h,cone}}_m = (0, \partial_{G,0}(g[1]_0^{-1}(\bar{c}'_m)) \otimes e_k, 0, \partial_{G,0}(g[2]_0^{-1}(\bar{c}'_m)) \otimes e_k, 0, \ldots, 0, \bar{c}'_m \otimes e_k) \tag{B30}$$

$$\in (G[1]_0 \otimes D_0, G[1]_{-1} \otimes D_1, G[2]_0 \otimes D_0, G[2]_{-1} \otimes D_1, \ldots, G[t]_{-1} \otimes D_1,) \oplus (C'_1 \otimes D_0, C'_0 \otimes D_1). \tag{B31}$$

尽管如此，对于变化的 $k \in [d]$，仍然存在 $\bar{X}'^{\mathrm{h}}$的 d 不相交代表元， $_m$ ^{cone} 。因此，

¯ ¯命题 8 和 9中的论证仍然适用，并且 d_1(锥($f[2]$)) $\geq d$。对锥($f[\tau]$) 中的 $\tau = 3$、4、.....迭代此论证，直到 $\tau = t$。¯当 $\tau = t$时， d_1(锥($f[t]$)) $= d_1$(CC•) $\geq d$ 得证。 □