arXiv:2603.02163v1 [math.AP] 2 Mar 2026

L^p：最小正则性闭流形上的 Sobolev 理论：标量椭圆方程

GONZALO A. BE NAVIDES、RICARDO H. NOCHETTO 和 MANSUR SH AKIPOV

摘要。本文及其后续工作 [3] 探讨定义在最小正则性流形上的一族典型偏微分方程的适定性，以及相应弱形式的 L^p 型 Sobolev 正则性。具体而言，假设定义域是紧致、连通的 d 维无边界流形，属于 C^k 且 $C^{k-1,\,1}(k \geq 1)$ 类，并嵌入于 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中。本研究计划的重点是 L^p 理论，该理论对于源项和流形的正则性而言是尖锐的。本文聚焦于一般标量椭圆问题。首先，我们通过局部化并将这些方程改写到平坦区域中，结合对偶论证，运用 Calderˊon–Zygmund 理论，建立变系数纯扩散问题的 L^p 型适定性和高阶正则性。随后，我们运用 Fredholm择一定理，为一般标量椭圆问题推导出类似结果，并阐明相较于平坦区域中的理论，几何背景所带来的微妙差异。

目录

1. 引言.11.1. 预备记号 .21.2. 背景.31.3. 主要结果陈述 .32. 微分几何预备知识 .53. 上的索伯列夫空间 Γ .7

3.1. 上的索伯列夫空间的定义 Γ .73.2. 不同定义之间的比较.93.3. 上的 Sobolev 嵌入 Γ .11

4. 标量椭圆理论.124.1. L^p-散度形式问题的正则性.124.2. L^p-一般标量椭圆问题的正则性.154.3. 定理 1.3 和定理 1.4 的推广.184.4. 上的双调和问题 Γ.20致谢.21附录 A. 自反巴拿赫空间中的变分问题.21

附录B. 平坦区域中的正则性估计 .22参考文献.23

1. 引言

令 Γ 为一个 d 维（$d \geq 2$）紧致利普希茨流形，无边界，且嵌入于 $\mathbb{R}^{d+1}$，并记其外单位法向量为 $\boldsymbol{\nu} = (\nu_i)_{i=1}^{d+1}$。本文旨在为定义在 Γ 上的一般标量椭圆问题建立基于 L^p 的适定性理论与正则性理论：

$$-\operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{A}\nabla_\Gamma u + u\,\mathbf{b}) + \mathbf{c}\cdot\nabla_\Gamma u + \mathsf{d}u = f, \tag{1.1}$$

2020 数学主题分类。35A15, 35B65, 35D30, 58J, 35J20, 47B.关键词。流形上的偏微分方程，低正则性流形，Sobolev 正则性，适定性，对偶性，Banach–Nečas–Babuška，Babuška–Brezzi，下确界-上确界，Fredholm择一定理。

其中， f 为给定的标量场，A $=(A_{ij})_i^{(d+1)\times(d+1)}$ 、$_{j=1}$ 、b $=(b_i)_{i=1}^{d+1}$ 、c $=(c_i)_{i=1}^{d+1}$ 和 d 均为给定系数。算子 ∇_Γ 和 div_Γ 分别表示协变梯度和协变散度；参见第2节。(1.1) 中的未知量 u 是一个标量函数 u: $\Gamma \to$ R。当 (A, b, c, d) $=$(I, 0, 0, 0) 时，问题 (1.1) 化为拉普拉斯–贝尔特拉米问题

$$-\Delta_\Gamma u = f, \tag{1.2}$$

其中 $\Delta_\Gamma := \mathrm{div}_\Gamma \nabla_\Gamma$ 称为拉普拉斯–贝尔特拉米算子。

问题 (1.1) 对于薄膜上众多物理现象建模以及分析其背后的偏微分方程，具有基础性的重要意义。一般标量椭圆问题的相关应用包括表面活性剂建模 [37, 23], 双相几何生物膜建模 [12],扩散诱导的晶界运动 [8, 15], 以及彩色图像去噪 [36], 等等。除了建模和应用之外，(1.1) 对演化曲面抛物问题的分析也至关重要 [25], 在这类问题中，定义在运动曲面上的偏微分方程 $\Gamma(t)$ 被拉回到初始曲面 $\Gamma(0)$，从而产生一个带有扩散矩阵的椭圆项 $\mathbf{A}(t)$ 该矩阵依赖于 $\Gamma(t)$。

本工作的目的有三：

- 仔细梳理定义在 Γ上的各种索伯列夫空间定义，其中 Γ的正则性低于 C^2，并确立这些定义等价的条件。
- 在系数（**A**,**b**, **c**, d）满足温和假设的情况下，分别确立方程（1.1）在 Γ 属于 $C^{0,1}$ 和 C^1时基于 L^2 和 L^p 的适定性。
- 在系数（**A**,**b**, **c**, d）的正则性仅满足最低要求的情况下，确立方程（1.1）的解在 Γ 属于 $C^{m-1,1}$ 时的 $W^{m,p}$-正则性。

我们强调，与微分几何中的典型做法（假设 Γ 属于 C^∞）不同，我们针对每个结论明确指出其成立所需的 Γ 最低正则性。此外，由于本文的论述不要求读者具备扎实的黎曼几何基础，因此也可作为通往应用领域相关研究的一座桥梁。本文的结果与数值分析领域尤为相关，因为假设定义域具有无限光滑性过于严格，通常也不切实际。此外，在本文工作的基础上，我们在姊妹论文 [3] 中确立了一类典型向量值超曲面偏微分方程的适定性和正则性结果，例如切向斯托克斯方程和纳维–斯托克斯方程。

通过局部化并将1.1）改写到参数域中，以便应用平坦区域上的经典偏微分方程理论，这是一个相对直接的合理性检验。该检验表明，我们的主要结果（见下文第 1.3 节 ）绝非出人意料；事实上，熟悉此领域的分析学家可能会将它们视为“数学常识”的一部分。然而，这种推理至少是不完整的，因为它预先假定（1.1）的解存在，而对于一般的系数 (**A**,**b**,**c**,d) 和可积性参数 $p \in (1,\infty)$而言，解的存在并非显而易见。此外，尽管我们全面查阅了相关文献，仍未能找到关于我们主要结果的明确参考文献。因此，据我们所知，本文首次为问题（1.1）提供了一套统一、自洽且初等的理论，并且该理论在 Γ的正则性方面是尖锐的。这正是第4节的内容。

最后需要指出的是，关于流形上的索伯列夫空间存在许多种定义：既有采用“ [28] ”和“ [28] ”意义下的“H”和“W”、依赖参数化的定义，也有用外在微积分表述的定义，例如 [11, 定义 2。11], [24,§3], [38, 第 2], [20, §7。1], [22, §2] 以及 [30, 第 76]。通过相当复杂的论证可以证明，在适当的假设下，其中一些定义是等价的 [19]。我们会根据具体语境以及[3], 的正则性，在本文和姊妹论文中采用其中许多种定义 Γ。因此，为了贯彻我们对清晰性和自洽性的强调，我们将系统回顾有限正则性超曲面上的索伯列夫空间，并将其纳入本文的研究计划，详见第3节。

1.1. 预备记号

对于有界 Lipschitz区域 $\Omega \subseteq \mathrm{R}^d$，我们采用 Lebesgue 空间 $L^q(\Omega)$ 和索伯列夫空间 $W^{m,q}(\Omega)$ 与 $W_0^{m,q}(\Omega)$ 的标准记号，其中 $m \geq 0$ 和 $q \in [1,\infty)$，相应的范数分别记为 $\|\cdot\|_{0,q;\Omega}$ 和 $\|\cdot\|_{m,q;\Omega}$。我们还记 $W^{0,q}(\Omega) = L^q(\Omega)$，并记 $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$，其相应范数 $\|\cdot\|_{m,\Omega} := \|\cdot\|_{m,2;\Omega}$ 对于定义在 Ω 上的任意标量函数空间 V，我们用 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbb{V}$ 表示其 d向量对应空间和 $d\times d$张量对应空间，并用相同记号表示它们的范数。

我们将对流形上的*Sobolev*空间 $W^{m,q}(\Gamma)$ 使用类似的记号，这些空间定义在 Γ 上（这些空间将在下文第3节 中正式引入）；对于空间 $C^m(\Gamma)$， m表示定义在 Γ上的 m阶连续可微函数空间。

对于定义在 Γ 上的任意标量函数空间 V，我们用 V 和 $\mathbb{V}$ 表示其 $(d+1)$ 向量值及 $(d+1)\times(d+1)$ 张量对应空间，并对它们各自的范数采用相同记号。此外，我们将 $W^{m,q}\#(\Gamma)$ 中满足 $\int_\Gamma v = 0$ 的标量值函数闭子集记为 $W^{m,q}(\Gamma)$；而 $W_t^{m,q}(\Gamma)$ 表示向量值函数空间，其中 $\mathbf{v}:\Gamma\to\mathbb{R}^{d+1}$ 属于 $W^{m,q}(\Gamma)$，且几乎处处与 Γ 相切（即 $\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu}=0$）。最后，对于任意赋范空间 V，其对偶空间记为 V'，其诱导范数定义为 $\|f\|_{V'} := \sup_{0\neq v\in V} f(v)/\|v\|_V$。我们将 V' 与 V 之间的对偶配对记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V'\times V}$；若无歧义，则简记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$。本文中，对于任意可积性参数 $p\in(1,\infty)$，我们用 $p^* := \frac{p}{p-1}$ 表示其共轭指数。注意，$p^{**}=p$。此外，$1<p<2$ 当且仅当 $p^*>2$。

1.2. 背景

（1.1）中的微分算子满足分部积分公式，其形式与平直区域上的对应公式高度相似 [11, §2]（另见 [4, 引理 1]）。这些恒等式自然导出一组基于 L^2 的弱形式，下面我们将对此进行回顾。据我们所知，大多数文献关注的是拉普拉斯–贝尔特拉米方程（1.2），而非一般的线性椭圆偏微分方程（1.1）。

（1.2）的弱形式如下：给定 $f\in(H^1_{\#}(\Gamma))'$，求 $u\in H^1_{\#}(\Gamma)$ 使得

$$\int_\Gamma \nabla_\Gamma u\cdot\nabla_\Gamma v = \langle f, v\rangle, \qquad \forall v\in H^1_{\#}(\Gamma). \tag{1.3}$$

对于 Γ 类 $C^{0,1}$ 以及任意内蕴维数 $d\geq 2$，（1.3）的适定性是 *Poincar´e–Friedrichs* 不等式 [4, 引理 2] 的推论（另见 [11, 定理 2.12]，关于 Γ 类 C^3的结果）以及 Lax–Milgram 定理。

在平坦有界区域中，一般 $W^{m,p}$-范数下标量拉普拉斯问题的先验估计，是将 Calderón–Zygmund 理论应用于经由牛顿位势给出的解的积分表示所得的推论。对于情形 $m\geq 2$，我们参阅 [18, 第 9] 章；对于情形 $m=1$，我们参阅 [10, 第 3] 节（另见以及[27, 第4节，定理 1] 以及 [7, 定理 1.5]）。我们在本文中通过局部参数化运用这一理论。对于向量值情形 [3],，我们则采用依赖于在第4节中为问题（1.1）和（1.2）导出的估计的无参数化方法。

关于（1.2）的高阶索伯列夫正则性，我们参见 [4, 引理 3] 和 [11, 定理 3。3], 其中给出了H^2正则性的解，其假设是右端函数 f 属于$L^2(\Gamma)$ 且 Γ 属于类C^2。证明的关键在于将（1.3）转化为平坦参数域上的一般椭圆偏微分方程，并利用经典的H^2内部正则性结果，例如 [14, 第 327 页，定理 1]。

在微分形式的背景下，霍奇理论 [30, §7。4] 给出了$W^{2,p}$正则性（$1<p<\infty$），适用于类 $C^{1,1}$流形上的拉普拉斯–贝尔特拉米问题的解；对于0-形式，即标量函数，霍奇拉普拉斯算子与拉普拉斯–贝尔特拉米算子重合。据我们所知，目前似乎没有关于更一般的（1.1）形式系统的正则性结果的现成参考文献。

由于一般问题（1.1）缺乏全面的正则性理论，本文旨在提供一份内容自足的参考资料，对 Γ 及数据的正则性给出精确刻画。

1.3. 主要结果陈述

我们陈述关于（1.1）适定性及其解的高阶正则性的主要结果。前两个结果，即定理 1.1 和定理 1.2，确立了散度形式椭圆问题的适定性和高阶 Sobolev 正则性。这些结果是处理一般标量椭圆问题所需的基石；由于零均值条件，它们不能由后者推出。证明中采用参数化，以便利用平坦区域中的强大 Calder´on–Zygmund 理论及泛函分析对偶论证。这些进展的核心在于这样一个观察：黎曼度量与系数矩阵$\mathbf{A}$ 的正则性相互交织，从而产生参数域中出现的系数矩阵的正则性。

定理 1.1（算子 $-\mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{A}\nabla_\Gamma\cdot)$ 在 $W^{1,p}\#(\Gamma)$）**的适定性**。设 $p\in(1,\infty)$。假设 Γ 属于 C^1类，且 $\mathbf{A}\in\mathbb{C}(\Gamma)$，并且 $\mathbf{A}$ 在 Γ中严格椭圆；也就是说，存在 $\Lambda>0$ 使得

$$\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}\geq\Lambda|\boldsymbol{\xi}|^2, \tag{1.4}$$

对于几乎处处的$\mathbf{x}\in\Gamma$，以及每个在点$\mathbf{x}$处与 Γ相切的 $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^{d+1}$。

则对于每个 $f \in (\mathrm{W}^{1,p^*}_{\#}(\Gamma))'$，存在唯一的 $u \in \mathrm{W}^{1,p}_{\#}(\Gamma)$ 使得

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v = \langle f, v\rangle, \qquad \forall v \in \mathrm{W}^{1,p^*}_{\#}(\Gamma). \tag{1.5}$$

此外，存在一个正数常量 C，它仅取决于 Γ、$\mathbf{A}$ 和 p，使得

$$\|u\|_{1,p;\Gamma} \le C\|f\|_{(\mathrm{W}^{1,p^*}_{\#}(\Gamma))'}. \tag{1.6}$$

若 Γ 和 $\mathbf{A}$ 分别仅属于 $C^{0,1}$ 和 $\mathbb{L}^\infty(\Gamma)$类，则存在 $\varepsilon > 0$，它仅取决于 Γ 和 $\mathbf{A}$，使得(1.5) 和 (1.6) 仍然成立，只要 $p \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$。

定理 *1.2*（算子 $-\mathrm{div}_\Gamma(A\nabla_\Gamma \cdot)$ 在 Γ 上的 $W^{m+2,p}$-正则性）。设 $p \in (1,\infty)$。假设存在某个非负整数 m，使得 Γ 属于 $C^{m+1,1}$ 类，且 $A \in \mathbb{C}^{m,1}(\Gamma)$。此外，设 A 满足椭圆性条件 *(1.4)*。若 $f \in W^{m,p}_{\#}(\Gamma)$（它在 $(W^{1,p^*}_{\#}(\Gamma))'$ 中诱导出一个元素），则方程 *(1.5)* 的解 $u \in W^{1,p}_{\#}(\Gamma)$ 属于空间 $W^{m+2,p}_{\#}(\Gamma)$，并且存在一个常量 $C > 0$，它仅取决于 Γ、A、m 和 p，使得

$$\|u\|_{m+2,p;\Gamma} \le C\|f\|_{m,p;\Gamma}. \tag{1.7}$$

此外，解 $u \in \mathrm{W}^{m+2,p}_{\#}(\Gamma)$ 满足

$$-\operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{A}\nabla_\Gamma u) = f, \qquad \textit{a.e. on } \Gamma. \tag{1.8}$$

我们以定理 1.1和定理 1.2为基础，还通过 Fredholm择一定理证明了一般标量椭圆方程（1.1）的弱解具有适定性（参见定理 1.3）和高阶正则性（参见定理1.4）。

定理 *1.3*（一般标量椭圆方程的适定性）。设 $p \in (1,\infty)$。假设 Γ 属于 C^1 类，并考虑系数 $(A, \mathbf{b}, c, d) \in \mathbb{C}(\Gamma)\times L^\infty_t(\Gamma)\times L^\infty_t(\Gamma)\times L^\infty(\Gamma)$，其中 A 满足椭圆性条件 *(1.4)*。此外，假设存在常数 $\lambda > 0$，以及 Γ 的一个子集 M，其测度为正，使得以下条件至少有一个成立

$$\int_\Gamma (\mathsf{d}\, w + \mathbf{b}\cdot\nabla_\Gamma w) \ge \lambda \int_M w, \qquad \forall w \in \mathrm{W}^{1,1}(\Gamma), w \ge 0 \textit{ on } \Gamma, \tag{1.9a}$$

$$\int_\Gamma (\mathsf{d}\, w + \mathbf{c}\cdot\nabla_\Gamma w) \ge \lambda \int_M w, \qquad \forall w \in \mathrm{W}^{1,1}(\Gamma), w \ge 0 \textit{ on } \Gamma. \tag{1.9b}$$

那么，对于每个 $f \in (\mathrm{W}^{1,p^*}(\Gamma))'$，都存在唯一的 $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Gamma)$ 使得

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\nabla_\Gamma u\cdot\nabla_\Gamma v + u(\mathbf{b}\cdot\nabla_\Gamma v) + (\mathbf{c}\cdot\nabla_\Gamma u)v + \mathsf{d}\, uv = \langle f, v\rangle, \qquad \forall v \in \mathrm{W}^{1,p^*}(\Gamma). \tag{1.10}$$

此外，存在一个常数 $C > 0$，它仅依赖于 Γ、$\mathbf{A}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$、d 和 p，使得

$$\|u\|_{1,p;\Gamma} \le C\|f\|_{(\mathrm{W}^{1,p^*}(\Gamma))'}. \tag{1.11}$$

对于 Γ 属于 $C^{0,1}$ 类且 $\mathbf{A} \in \mathbb{L}^\infty(\Gamma)$ 的情形，只要 $p \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$ 对 $\varepsilon > 0$ 足够小（仅依赖于 Γ 和$\mathbf{A}$），该结果仍然成立。

常数 λ 在 (1.9a) 和 (1.9b) 中为正的要求乍看之下可能有些不同寻常，因为在具有零狄利克雷边界条件的平坦有界区域中，λ 可以取为零 [18, 式 (8.8)]。这是因为Γ 没有边界，这意味着$\|\nabla_\Gamma\cdot\|_{0,\Gamma}$ 无法控制整个 $\mathrm{H}^1(\Gamma)$-范数，因此 $\lambda > 0$ 是 Poincar´e 型不等式成立所必需的；更多细节请参见命题 4.4 的证明。

在下文的定理中，仅为简化记号，我们令：$\mathbf{C}^{-1,1}_t(\Gamma) := \mathbf{L}^\infty_t(\Gamma)$ 和 $\mathrm{C}^{-1,1}(\Gamma) := \mathrm{L}^\infty(\Gamma)$。

定理 *1.4*（一般标量椭圆方程的高阶正则性）。设 $p \in (1,\infty)$。假设存在某个非负整数 m，使得 Γ 属于 $C^{m+1,1}$ 类，并设 $(A, \mathbf{b}, c, d) \in \mathbb{C}^{m,1}(\Gamma) \times C^{m,1}_t(\Gamma) \times C^{m-1,1}_t(\Gamma) \times C^{m-1,1}(\Gamma)$，其中 A 满足条件 *(1.4)*。此外，假设条件 *(1.9a)* 与 *(1.9b)* 中至少有一个成立。则对每个 $f \in W^{m,p}(\Gamma)$，*(1.10)* 的解 $u \in W^{1,p}(\Gamma)$ 实际上属于 $W^{m+2,p}(\Gamma)$，并且满足

$$-\operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{A}\nabla_\Gamma u + u\,\mathbf{b}) + \mathbf{c}\cdot\nabla_\Gamma u + \mathsf{d}u = f, \qquad \textit{a.e. on } \Gamma. \tag{1.12}$$

此外，存在一个仅依赖于 Γ、$\mathbf{A}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$、d 和 p 的常数 $C>0$，使得

$$\|u\|_{m+2,p;\Gamma} \le C\|f\|_{m,p;\Gamma}. \tag{1.13}$$

尽管我们的所有结果都是针对无边界的 C^m 类紧致流形（或 $C^{m-1,\,1}$）陈述的，但经过适当修改后，我们预计这些结果也可以推广到具有相同正则性、维数为 d 的流形 Γ，前提是其边界 $\partial\Gamma$ 足够正则。具体而言，在参数域中表述问题时，除了本文采用的内部正则性估计外，还需要借助边界正则性估计。

本文其余部分安排如下。我们首先在 第2节 介绍微分几何的基本概念，随后在 第3节 仔细考察流形上的索伯列夫空间。 第4节 致力于证明（1.1）的适定性和高阶正则性。在 第 4.1 节 中，我们证明 定理 1.1 和 定理 1.2，讨论散度型偏微分方程；而在 第 4.2 节 中，我们证明 定理 1.3 和 定理 1.4，讨论一般的标量椭圆偏微分方程。我们在 第 4.3 节 探讨向对流扩散方程的推广，并在 第 4.4 节讨论曲面双调和方程。最后，我们以 附录 A （自反巴拿赫空间中的变分问题）和 附录B（平坦区域中的正则性估计）作结，使本文内容完整自足。

2. 微分几何预备知识　TRY

本节汇集流形上的微积分的经典结果；我们参考 Dziuk 和 Elliott [11, §2], Bonito、Demlow 和 Nochetto [4, §1.2]以及 Shahshahani [34]。我们主要关注流形上几何量和微分算子的定义，特别是正则性低于 C^2的流形上的情形——由于缺乏正则性，这些定义必须涉及参数化。

设 Γ 是一个嵌入于 R^{d+1} 中的 d 维（$d \ge 2$）紧致连通无边界流形，具有 $C^{0,1}$ 类正则性（流形的 C^m 类定义见 [34, 第 102] 页，其中针对 $m \in \mathrm{N}$ 的定义可自然推广到$C^{m-1,1}$；嵌入流形的定义见 [34, 第 134] 页）。为方便起见，我们假设其连通；否则可以对每个连通分支分别处理。由于 Γ 是紧致的，存在一个有限图册 $\{(\mathcal{V}_i,\mathcal{U}_i,\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i)\}_{i=1}^N$，其中每个坐标图 $\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i\colon \mathcal{V}_i \to \mathcal{U}_i \cap \Gamma$ 都是 $C^{0,1}$ 类同构，并与 Γ的定向相容。集合 $\mathcal{V}_i$ 是 R^d 中的开连通子集，而集合 $\mathcal{U}_i$ 是 R^{d+1}中的开子集。不失一般性，我们可以假设存在域 $\mathcal{W}_i \subseteq \mathrm{R}^{d+1}$，使得 $\mathcal{W}_i \subseteq \mathcal{U}_i$，且 $\{\mathcal{W}_i\}_{i=1}^N$ 仍是 Γ [34, 的一个覆盖（第 4 章，引理 10]）。

利用单位分解，一般只需考虑单个坐标图；因此，为了简化记号，只要不会引起歧义，我们就省略指标 i。对于$\mathbf{x} \in \mathcal{U}\cap\Gamma$，记$\mathbf{y} := \widetilde{\boldsymbol{\chi}}^{-1}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$。此外，对于定义在$\mathcal{U}\cap\Gamma$上的每个$\widetilde{\ }$（标量、向量或张量）函数$\mathbf{f}$，令$\widetilde{\mathbf{f}} := \mathbf{f}\circ\widetilde{\boldsymbol{\chi}}$，其定义在$\mathcal{V}$上；等价地，对每个$\mathbf{y} \in \mathcal{V}$和$\mathbf{x} = \widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{y})$，都有$\widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$。

第一基本形式 由 $\widetilde{\mathbf{g}}(\mathbf{y}) = \nabla^T\widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{y})\nabla\widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{y}) \in \mathrm{R}^{d\times d}$ 给出，对每个$\mathbf{y} \in \mathcal{V}$均成立。$\widetilde{\boldsymbol{\chi}}$ 在 $\mathcal{V}$ 上的非退化性确保$\mathbf{g} = (\widetilde{g}_{ij})_{i,j=1}^d$ 在 $\mathcal{V}$上是对称一致正定的。其逆矩阵记为$\widetilde{\mathbf{g}}^{-1} = (\widetilde{g}^{ij})_{i,j=1}^d$。

面积元 $\widetilde{a}_{\boldsymbol{\chi}}$ 由 $\widetilde{a}_{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{y}) = \sqrt{\det\widetilde{\mathbf{g}}(\mathbf{y})}$ 定义。可测函数 $v\colon \mathcal{U}\cap\Gamma \to \mathrm{R}$ 可积，当且仅当可测函数 $\widetilde{v}\colon \mathcal{V} \to \mathrm{R}$ 可积。面积元通过恒等式将它们的积分值联系起来

$$\int_{\mathcal{U}\cap\Gamma} v = \int_{\mathcal{V}} \widetilde{v}\,\widetilde{a}_{\boldsymbol{\chi}}. \tag{2.1}$$

几乎处处定义的单位法向量场 $\boldsymbol{\nu} = (\nu_i)_{i=1}^{d+1}\colon \Gamma \to \mathrm{R}^{d+1}$ 到 Γ 由下式给出：$\boldsymbol{\nu} := \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$，其中 $\widetilde{\mathbf{N}}(\mathbf{y}) := \sum_{j=1}^{d+1}\det(\mathbf{e}_j, \nabla\widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{y}))\mathbf{e}_j$，对于$\mathbf{y} \in \mathcal{V}$；这里 $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^{d+1}$ 是 R^{d+1} 的标准基。我们用 $\mathbf{P} := \mathbf{I} - \boldsymbol{\nu}\otimes\boldsymbol{\nu}$ 表示到 Γ切平面的投影算子，它可以用参数化表示为

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{y}) = \nabla\widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{y})\widetilde{\mathbf{g}}^{-1}(\mathbf{y})\nabla^T\widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{y}). \tag{2.2}$$

外梯度 ∇_M 作用于 $C^{0,1}$ 标量场 $v\colon \Gamma \to \mathrm{R}$ 和向量场$\mathbf{v} = (v_i)_{i=1}^{d+1}\colon \Gamma \to \mathrm{R}^{d+1}$，其定义如下:

$$\nabla_M v(\mathbf{x}) := \nabla\widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{y})\widetilde{\mathbf{g}}(\mathbf{y})^{-1}\nabla\widetilde{v}(\mathbf{y}), \qquad \nabla_M \mathbf{v} := \begin{bmatrix} \nabla_M^T v_1 \\ \vdots \\ \nabla_M^T v_{d+1} \end{bmatrix}; \tag{2.3}$$

注意 $\mathbf{P}\nabla_M v = \nabla_M v$。外散度 div_M 作用于 $C^{0,1}$ 向量场 $\mathbf{v}\colon \Gamma \to \mathrm{R}^{d+1}$，以及张量场$\mathbf{A}\colon \Gamma \to \mathrm{R}^{(d+1)\times(d+1)}$，其定义如下:

$$\mathrm{div}_M \mathbf{v}(\mathbf{x}) := \mathrm{tr}(\nabla_M \mathbf{v}(\mathbf{x})) = \sum_{i,j=1}^{d} \widetilde{g}^{ij}(\mathbf{y})\partial_i\widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{y}) \cdot \partial_j\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{y}), \qquad \mathrm{div}_M \mathbf{A} = (\mathrm{div}_M \mathbf{A}_{i,\cdot})_{i=1}^{d+1}, \tag{2.4}$$

其中，$\mathbf{A}_{i,\cdot}$ 表示$\mathbf{A}$的第 i行。

另一方面，协变梯度 ∇_Γ 定义如下:

$$\nabla_\Gamma v = \nabla_M v, \qquad \nabla_\Gamma \mathbf{v} = \mathbf{P}\nabla_M \mathbf{v} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \nabla_\Gamma^T v_1 \\ \vdots \\ \nabla_\Gamma^T v_{d+1} \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

协变散度 div_Γ 作用于向量场 $\mathbf{v}\colon \Gamma \to \mathrm{R}^{d+1}$，以及张量场 $\mathbf{A}\colon \Gamma \to \mathrm{R}^{(d+1)\times(d+1)}$，其定义如下:

$$\mathrm{div}_\Gamma \mathbf{v} = \mathrm{tr}(\nabla_\Gamma \mathbf{v}), \qquad \mathrm{div}_\Gamma \mathbf{A} = (\mathrm{div}_\Gamma \mathbf{A}_{i,\cdot})_{i=1}^{d+1}. \tag{2.6}$$

事实证明，外散度与协变散度相同，即:

$$\mathrm{div}_M \mathbf{v} = \mathrm{div}_\Gamma \mathbf{v}, \qquad \mathrm{div}_M \mathbf{A} = \mathrm{div}_\Gamma \mathbf{A}.$$

若 Γ 和 $v\colon \Gamma \to \mathrm{R}^{d+1}$ 属于 $C^{1,1}$类，则我们将拉普拉斯–贝尔特拉米算子 Δ_Γ 定义为

$$\Delta_\Gamma v(\mathbf{x}) := \mathrm{div}_\Gamma \nabla_\Gamma v(\mathbf{x}) = \frac{1}{\widetilde{a}_{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{y})}\,\mathrm{div}(\widetilde{a}_{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{y})\mathbf{g}(\mathbf{y})^{-1}\nabla\widetilde{v}(\mathbf{y})). \tag{2.7}$$

有时，将其写成.....是 方便的: $\nabla_\Gamma v = (D_1 v, \ldots, D_{d+1} v)$ 表示 $\nabla_\Gamma v = \nabla_M v$ 的 $d+1$ 分量；也就是说

$$\underline{D}_i v(\mathbf{x}) = \sum_{k,l=1}^{d+1} \partial_k \widetilde{\chi}_i(\mathbf{y})\widetilde{g}^{kl}(\mathbf{y})\partial_l \widetilde{v}(\mathbf{y}). \tag{2.8}$$

这种记号尤其使我们能够以紧致的形式表示 div_Γ 和 Δ_Γ 的作用 m:

$$\mathrm{div}_\Gamma \mathbf{v} = \sum_{k=1}^{d+1} \underline{D}_k v_k, \qquad \Delta_\Gamma v = \sum_{k=1}^{d+1} \underline{D}_k \underline{D}_k v.$$

对于属于 $C^{1,1}$类的 Γ，我们用 $\mathbf{B} := \nabla_M \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{L}^\infty(\Gamma)$ 表示所谓的 Γ 的形状算子（亦称魏因加滕映射）。由于 $|\boldsymbol{\nu}|^2 = 1$, 可得$\mathbf{B}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}$ 在 Γ 上几乎处处成立。注意，对于属于 C^2类的 Γ，可以证明$\mathbf{B}$ 与到 Γ的距离函数的黑塞矩阵一致，因此它是对称的。

注 *2.1*（参数化无关性）。可以证明，对于属于 $C^{0,1}$ 类的 Γ，*P(x)* 和 $\nabla_M v$*(x)* 的定义（*2.2*）和（*2.3*）与参数化的选取无关：若两个参数化 $\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i\colon \mathcal{V}_i \to \mathcal{U}_i \cap \Gamma, i \in \{1,2\}$ 满足 $x \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \Gamma$，则记 $y_i = \widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i^{-1}(x)$，$\widetilde{g}_i = \nabla^T\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i\nabla\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i$ 和 $\widetilde{v}_i = v \circ \widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i$，有

$$\nabla\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_1(\mathbf{y}_1)\widetilde{\mathbf{g}}_1^{-1}(\mathbf{y}_1)\nabla^T\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_1(\mathbf{y}_1) = \nabla\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_2(\mathbf{y}_2)\widetilde{\mathbf{g}}_2^{-1}(\mathbf{y}_2)\nabla^T\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_2(\mathbf{y}_2),$$
$$\nabla\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_1(\mathbf{y}_1)\widetilde{\mathbf{g}}_1^{-1}(\mathbf{y}_1)\nabla\widetilde{v}_1(\mathbf{y}_1) = \nabla\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_2(\mathbf{y}_2)\widetilde{\mathbf{g}}_2^{-1}(\mathbf{y}_2)\nabla\widetilde{v}_2(\mathbf{y}_2).$$

该证明由对恒等式 $\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_2 = \widetilde{\boldsymbol{\chi}}_1 \circ (\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_1^{-1} \circ \widetilde{\boldsymbol{\chi}}_2)$ 和$\widetilde{v}_1 \circ (\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_1^{-1} \circ \widetilde{\boldsymbol{\chi}}_2) = \widetilde{v}_2$直接应用链式法则以及简单的代数运算得出。我们省略进一步的细节。

因此，本节中引入的所有 Γ 微分算子也都与所选参数化无关。

最后我们提及，对于 Γ 属于 C^2 的情形，我们可以用纯粹的外在方式（即与参数化无关）表示 ∇_M：

$$\nabla_M v = \mathbf{P}\,(\nabla v^e)|_\Gamma, \qquad \nabla_M \mathbf{v} = (\nabla \mathbf{v}^e)|_\Gamma \mathbf{P},$$

其中，v^e（分别为 $\mathbf{v}^e$）表示将 v（分别为 $\mathbf{v}$）延拓到 $(d+1)$ 维管状邻域 Ω_δ 中的一个延拓 [4, eq. (1.62)]；对于该邻域，至 Γ 的距离函数 $\mathbf{x} \mapsto \mathrm{dist}(\mathbf{x}\ \Gamma)$ 在 $\mathbf{x} \in \Omega_\delta$ 时仍属于 C^2 [11, Lemma 2.8] 类。

3. Sobolev spaces on Γ

本节将仔细而系统地回顾流形上索伯列夫空间的若干种定义，并特别关注使这些定义等价的 Γ 正则性。

3.1. Γ上的索伯列夫空间定义

我们首先用参数化来定义有限正则性流形上的索伯列夫空间（定义 3.1），接着证明该定义与参数化的选择无关（命题 3.2）。因此，我们可以将微分算子的定义推广到 Sobolev函数（定义 3.3），推导出关键的稠密性结果（定理 3.6），最后在索伯列夫空间上引入一个等价但更方便、且不依赖参数化的范数（命题 3.7）。就我们的目的而言，采用定义 [30, p. 76] 对于紧致流形 Γ。

定义 3.1 (关于 Γ 的索伯列夫空间)。设 Γ 属于 C^{m-1}类，其中 1，某个 $m \in \mathrm{N}$，并设 $\{(\mathcal{V}_i, \mathcal{U}_i, \widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i)\}_{i=1}^N$ 是 Γ 的两个有限图册（参见第2节）。对于 $p \in [1, \infty)$，我们将索伯列夫空间 $\mathrm{W}^{m,p}(\Gamma)$ 定义为

$$\mathrm{W}^{m,p}(\Gamma) := \{u : \Gamma \to \mathrm{R} \mid u \circ \widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i \in \mathrm{W}^{m,p}(\mathcal{V}_i), \quad \forall i = 1, \ldots, N\},$$

赋予范数

$$\|u\|_{m,p;\Gamma} := \left(\sum_{i=1}^N \|u \circ \widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i\|_{m,p;\mathcal{V}_i}^p \right)^{1/p}. \tag{3.1}$$

下面的结果表明，上述定义的索伯列夫空间 $\mathrm{W}^{m,p}(\Gamma)$ 与所选图册无关。此前在 [30, 第 76] 页曾提及这一点，但未给出证明；为完整起见，我们现在给出证明。

命题 3.2 (参数化无关性)。$W^{m,p}(\Gamma)$ 的定义与所选图册无关。此外，给定 Γ 的两个有限图册，它们诱导的范数 (3.1) 在拓扑意义下等价。

证明。设 $\{(\mathcal{V}_i, \mathcal{U}_i, \widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i)\}_{i=1}^N$ 和 $\{(\mathrm{V}j, \mathrm{U}j, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_j)\}_{j=1}^M$ 是 Γ 的两个 C^{m-1}类，其中 1有限图册。设 $u\colon \Gamma \to \mathrm{R}$ 满足：对于每个 $i = 1 \ldots, N$，$u \circ \widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i \in \mathrm{W}^{m,p}(\mathcal{V}_i)$。不失一般性，设 $\mathcal{U}_i \cap \mathrm{U}_j \cap \Gamma \neq \varnothing$。

固定 $j \in \{1, ..., M\}$。由于 $u \circ \widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i \in \mathrm{W}^{m,p}(\mathcal{V}_i)$，且 $\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i^{-1} \circ \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_j$ 及其逆映射属于 C^{m-1},1 类，我们注意到等式 $u \circ \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_j = (u \circ \widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i) \circ (\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i^{-1} \circ \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_j)$ 在 $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_j^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathrm{U}_j \cap \Gamma)$ 中几乎处处成立。因此，根据“坐标变换” [30, 定理 3.1.7], [26, 定理 11.54]（另见 [39, 练习 4.2.11]），可得 $(u \circ \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_j)\big|_{\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_j^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathrm{U}_j \cap \Gamma)} \in \mathrm{W}^{m,p}(\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_j^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathrm{U}_j \cap \Gamma))$，且 $\|u \circ \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_j\|_{m,p;\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_j^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathrm{U}_j \cap \Gamma)} \lesssim \|u \circ \widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i\|_{m,p;\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathrm{U}_j \cap \Gamma)}$。因此，注意到 $\bigcup_{i=1}^N \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_j^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathrm{U}_j \cap \Gamma) = \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_j^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^N \mathcal{U}_i \cap \mathrm{U}_j \cap \Gamma\right) = \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_j^{-1}(\mathrm{U}_j \cap \Gamma) = \mathrm{V}j$，我们推得 $u \circ \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_j \in \mathrm{W}^{m,p}(\mathrm{V}j)$；并根据底层集合的有限重叠性质，得到

$$\|u \circ \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_j\|_{m,p;\mathscr{V}_j} \lesssim \sum_{i=1}^N \|u \circ \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_j\|_{m,p;\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_j^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathscr{U}_j \cap \Gamma)} \lesssim \sum_{i=1}^N \|u \circ \widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i\|_{m,p;\widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathscr{U}_j \cap \Gamma)} \leq \sum_{i=1}^N \|u \circ \widetilde{\boldsymbol{\chi}}_i\|_{m,p;\mathcal{V}_i}.$$

对 $j = 1, \ldots, M$ 求和后，证明即告完成。 □

容易看出 $C^{m-1,1}(\Gamma) \subseteq \mathrm{W}^{m,p}(\Gamma)$。我们记 $\mathbf{W}^{m,p}(\Gamma) := [\mathrm{W}^{m,p}(\Gamma)]^{d+1}$，并赋予其自然的乘积空间范数。对于 $p = 2$，我们也记<style>$\mathrm{H}^m(\Gamma) := \mathbf{W}^{m,2}(\Gamma)$。

现在我们可以定义 $\mathrm{W}^{m,p}(\Gamma)$ 上的微分算子。

定义 *3.3*（ Γ 上的索伯列夫空间上的微分算子）。对于 Γ 属于 C^0，*1* 类且 $p \in [1,\infty)$，我们通过几乎处处成立的公式 *(2.3)*、*(2.4)*、*(2.5)* 和 *(2.6)*，自然地将作用于 C^1，*1*(Γ) 的线性算子 ∇_M、∇_Γ、div_M 和 div_Γ 的定义扩展到 W^1、^{p}(Γ)（及其向量值和张量值版本）。

类似地，若 Γ 属于 C^{m-1}类，$_1(\Gamma)$，其中 $m \in \mathrm{N}$，则通过对上述算子作适当的复合，我们可以定义作用于$\mathrm{W}^{m,p}(\Gamma)$中元素的 m 阶微分算子。

鉴于 注 *2.1*，所有这些算子均与所选的 Γ的有限图册无关。

最后，我们引入以下空间

$$\begin{aligned}\mathrm{L}^p_{\#}(\Gamma) &:= \{q \in \mathrm{L}^p(\Gamma) : \textstyle\int_\Gamma q = 0\},\\ \mathrm{W}^{m,p}_{\#}(\Gamma) &:= \mathrm{L}^p_{\#}(\Gamma) \cap \mathrm{W}^{m,p}(\Gamma),\\ \mathbf{W}^{m,p}_t(\Gamma) &:= \{\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{m,p}(\Gamma) : \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \text{ a.e. on } \Gamma\},\end{aligned}$$

它们分别是 L^p(Γ)、W^{m,p}(Γ) 和 $\mathbf{W}^{m,p}$(Γ) 的闭子空间。注意，若 Γ 属于 C^m类，$_1$，其中 m 为非负整数，则对于每个 $u \in \mathrm{W}^{m+1,p}(\Gamma)$，都有 $\mathrm{W}^{m+1,p}(\Gamma) \subseteq \mathrm{W}^{m,p}(\Gamma)$，且 $\nabla_M u \in \mathbf{W}^{m\,p}_t$,(Γ)。

以下结果表明，在 Γ 上的索伯列夫空间在与足够光滑的函数相乘时具有良好的性质。其证明可直接由平坦区域上的经典莱布尼茨法则推出。

引理 *3.4*（*W^{m,p}(Γ)*上的乘积法则）。设 Γ 属于 C^{m-1},*1*类函数，其中 $m \in N$，且令 $p \in [1,\infty)$。那么，对于每个 $\theta \in C^{m-1}$,*1*(Γ)和 $u \in W^{m,p}(\Gamma)$，乘积 θu属于$W^{m,p}(\Gamma)$，

$$\nabla_M(\theta u) = \theta\nabla_M u + u\nabla_M\theta, \quad \textit{a.e. on } \Gamma. \tag{3.2}$$

并且存在一个常量 $C_\theta > 0$，它仅依赖于 θ，使得

$$\|\theta u\|_{m,p;\Gamma} \le C_\theta \|u\|_{m,p;\Gamma}. \tag{3.3}$$

下面的注释是定义 3.1 的直接推论，适用于支集位于单个坐标图上的函数；这一结论将用于证明稠密性结果（参见定理 3.6）。

注 3.5（范数等价）。令 $p \in [1,\infty)$。根据第*2*节中的记号，若 $u \in \mathrm{W}^{m,\,p}(\Gamma)$ 的支集包含于 $\mathcal{W} \cap \Gamma$，则 $\widetilde{u} \in \mathrm{W}^{m\,p}_0$，$(\mathcal{V})$，并且存在正数常量 C_1 和 C_2，它们仅依赖于 Γ 和 m，使得

$$C_1\|u\|_{m,p;\Gamma} \le \|\widetilde{u}\|_{m,p;\mathcal{V}} \le C_2\|u\|_{m,p;\Gamma}. \tag{3.4}$$

定理 3.6 (稠密性)。设 $p \in [1,\infty)$ 且 $m \in \mathrm{N}$。若 Γ 属于 $C^{m-1,\,1}$（分别属于 C^m）类，则 $C^{m-1,\,1}(\Gamma)$（分别为 $C^m(\Gamma)$）在$\mathrm{W}^{m,\,p}(\Gamma)$中稠密。

证明。回顾第2节中引入的记号。设 $u \in \mathrm{W}^{m,p}(\Gamma)$。令 $\{\theta_i\}_{i=1}^N$ 为与 $\{\mathcal{W}_i\}_{i=1}^N$ 覆盖 Γ [34, Ch. 4, 11. Theorem]相关联的 C^{m-1},1（分别为 C^m）单位分解。根据引理 3.4和注 3.5，我们知道 $\upsilon_i \in \mathrm{W}^{m\,p}_0$,$(\mathcal{V}_i)$，其中 $\upsilon_i := \theta_i u$ 的支集包含于 $\mathcal{W}_i \cap \Gamma$，且属于 W^{m,p}(Γ)。于是，给定 $\varepsilon > 0$，存在 $\widetilde{\varphi}_i \in C^\infty_c(\mathcal{V}_i)$使得 $\|\upsilon_i - \widetilde{\varphi}_i\|_{m,p;\mathcal{V}_i} < \varepsilon/N$。将每个 $\varphi_i : \Gamma \to \mathrm{R}$ 延拓为在 Γ 上取 0，并定义$\varphi := \sum_{i=1}^N \varphi_i \in C^{m-1}$,1(Γ)（分别为 C^m(Γ)）。然后，利用三角不等式并回顾注 3.5可得

$$\|u-\varphi\|_{m,p;\Gamma} \le \sum_{i=1}^N \|\upsilon_i - \varphi_i\|_{m,p;\Gamma} \cong \sum_{i=1}^N \|\widetilde{\upsilon}_i - \widetilde{\varphi}_i\|_{m,p;\mathcal{V}_i} < \varepsilon,$$

由此完成证明。 □

为 W^{m,p}(Γ) 配备一种与参数化无关且类似于其平坦区域对应范数的等价范数很有帮助。以下结果阐述了这一点。

命题 3.7 (W^{m,p}(Γ)中的等价范数)。假设 Γ 属于 $C^{m-1,1}$ 类，对某个 $m \in \mathrm{N}$ 成立，并令 $p \in [1,\infty)$。那么，映射

$$u \mapsto \left(\sum_{k=0}^m \|\nabla^k_M u\|^p_{0,p;\Gamma}\right)^{1/p}, \tag{3.5}$$

在 $W^{m,p}(\Gamma)$ 中定义了一个等价范数。这里，$\nabla_M^k u$ 表示 u 的 k 阶弱外在梯度，它是由 $(\nabla_M^k u)_{\mathbf{j}} = D_{j_k}\cdots D_{j_1}u$ 定义的 k 维张量，对每个 $\mathbf{j}=(j_i)_{i=1}^k \in \{1,\dots,d+1\}^k$ 均成立；我们也记作 $\nabla_M^0 u := u$。

证明。记（3.5）为 $|||\cdot|||_{m,\,p;\Gamma}$。我们分两步进行。

步骤 1：紧支撑。 我们先证明支撑于 $\mathcal{W}\cap\Gamma$ 的函数满足该结论。设 $u\in W^{m,p}(\Gamma)$ 支撑于 $\mathcal{W}\cap\Gamma$。那么，由 注 3.5，$\widetilde{u}\in W_0^{m,p}(\mathcal{V})$ 且 $\|\widetilde{u}\|_{m,p;\mathcal{V}}\cong\|u\|_{m,p;\Gamma}$。回顾（2.3），$\widetilde{\nabla_M u}=\nabla\widetilde{\boldsymbol{\chi}}\,\widetilde{\mathbf{g}}^{-1}\nabla\widetilde{u}$ 属于 $\mathcal{V}$，或者等价地，$\nabla\widetilde{u}=(\nabla^T\widetilde{\boldsymbol{\chi}})\,\widetilde{\nabla_M u}$。因此，由于 $\widetilde{\boldsymbol{\chi}}$ 属于 $C^{m-1,1}$ 类，且 $\mathbf{g}^{-1}$ 属于 $C^{m-2,1}$ 类（若 $m=1$ 则属于 L^∞），由平坦区域中索伯列夫空间的莱布尼茨法则（见 [14, §5.2.3-(iv)]）可得

$$\|\widetilde{\nabla_M u}\|_{m-1,p;\mathcal{V}}\cong\|\nabla\widetilde{u}\|_{m-1,p;\mathcal{V}}.$$

因此，通过“变量替换”（参见 [30, 定理 3.1.7], [39,练习 4.2.11]），我们可推出

$$\|u\|_{m,\,p;\Gamma}\cong\|\widetilde{u}\|_{m,\,p;\mathcal{V}}\cong\|\widetilde{u}\|_{0,\,p;\mathcal{V}}+\|\nabla\widetilde{u}\|_{m-1,\,p;\mathcal{V}}\cong\|\widetilde{u}\|_{0,\,p;\mathcal{V}}+\|\nabla_M u\|_{m-1,\,p;\mathcal{V}}\cong\|u\|_{0,\,p;\Gamma}+\|\nabla_M u\|_{m-1,\,p;\Gamma}.$$

由于 $\nabla_M u\in W^{m-1,\,p}(\Gamma)$（即，对于每个 $i=1,\ \dots,\ d+1$，都有 $D_i u\in W^{m-1,\,p}(\Gamma)$），我们可以递归地进行下去，最终得到

$$\|u\|_{m,p;\Gamma}\cong\sum_{k=0}^{m}\|\nabla_M^k u\|_{0,p;\Gamma}\cong|||u|||_{m,p;\Gamma},$$

至此，步骤 1 的证明完成。

步骤 2：一般情形。 与定理 3.6的证明一样，令 $\mathcal{U}_i:=\theta_i u\in W^{m,\,p}(\Gamma)$ 为 u 到 $\mathcal{W}_i\cap\Gamma$的“局部化”。利用三角不等式，并对每个 $\mathcal{U}_i$应用步骤 1，可得

$$\|u\|_{m,p;\Gamma}\le\sum_{i=1}^{N}\|\mathcal{U}_i\|_{m,p;\Gamma}\cong\sum_{i=1}^{N}|||\mathcal{U}_i|||_{m,p;\Gamma}\lesssim|||u|||_{m,p;\Gamma},$$

其中，在最后一个不等式中，我们使用了引理 3。中的恒等式（3.2），并将其使用4 m次，同时估计了 θ的前 m 个外微分。类似地，我们有

$$|||u|||_{m,p;\Gamma}\le\sum_{i=1}^{N}|||\mathcal{U}_i|||_{m,p;\Gamma}\cong\sum_{i=1}^{N}\|\mathcal{U}_i\|_{m,p;\Gamma}\lesssim\|u\|_{m,p;\Gamma},$$

最后一个不等式由估计式（3.3）得出。至此，证明完成。 □

在本文余下部分中，通常使用（3.5）作为 $W^{m,\,p}(\Gamma)$ 上的“主”范数；因此，在不会引起混淆时，我们也将其记作 $\|\cdot\|_{m,\,p;\Gamma}$。注意，这个等价范数自然地在 Γ 的子集上诱导出 Sobolev 范数的概念：给定 $\gamma\subseteq\Gamma$，一个关于 Γ 上勒贝格测度可测的集合，我们记

$$\|v\|_{m,p;\gamma}:=\left(\sum_{k=0}^{m}\|1_\gamma\,\nabla_M^k v\|_{0,p;\Gamma}^p\right)^{1/p},\qquad\forall v\in W^{m,p}(\Gamma),$$

其中 1_γ 表示 Γ的示性函数。

3.2. 不同定义之间的比较

现在，我们简要比较本文采用的定义 定义 3.1 的索伯列夫空间与文献中发现的其他几种定义。

注 *3.8*（与 *Hebey* 和 *Robert* [22] 的 $H_m^p(\Gamma)$ 进行比较）。定理 *3.6* 和命题 *3.7* 表明，$W^{m,p}(\Gamma)$（参见定义 *3.1*）与 [22, *Definition 2.1, Proposition 2.*2] 中的空间 $H_m^p(\Gamma)$ 一致。我们强调，尽管 [22] 的空间 $H_m^p(\Gamma)$ 最初是针对 Γ 具有 C^∞类正则性的情形引入的，但很容易看出，其定义对于具有适当有限正则性的流形仍然有效。

根据 [5, 引理 B。5]（另见 [4, 命题 12]）以及稠密性论证（参见定理 3.6 和命题 3.7），我们知道，分部积分公式：对于每个 $u \in \mathrm{W}^{1,1}(\Gamma)$ 和 $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^1(\Gamma)$

$$\int_\Gamma u \, \mathrm{div}_\Gamma \, \boldsymbol{\varphi} = -\int_\Gamma \nabla_\Gamma u \cdot \boldsymbol{\varphi} + \int_\Gamma \mathrm{tr}(\mathbf{B}) u \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\nu}, \tag{3.6}$$

对于 Γ 属于 C^2 类的情形成立。这表明，当 Γ 属于 C^2 类时，定义 3.1 与 Dziuk 和 Elliott 的 [11,定义 2.11]一致。对于 Γ 属于 C^1 类的情形，1 论证更为微妙； [5, 引理 B.5] 和 [4, 命题 12]是通过外在微积分操作证明的，其关键在于：若 Γ 属于 C^2 类，则距离函数 d 在 Γ 附近属于 C^2 类；若 Γ 属于 C^2 [16, 类定理 1], , 则结论成立；然而，若 Γ 仅属于 C^1类，1 作者尚未找到现成参考资料说明 d 在 Γ附近具有这样的正则性。考虑到这些因素，我们采用参数化方法，对 Γ 属于 C^1 类，1 的情形证明 (3.6)，从而使定义 3.1 与 Dziuk 和 Elliott 的 [11, 定义 2.11] 在 Γ 属于 C^1 类，1 时相一致。此外，我们还推得，即使 Γ 仅为 C^1，1，一般标量椭圆问题的 $\mathrm{W}^{2,p}(\Gamma)$ 解也是强解；参见第 1.3 节。

命题 3.9 （C^1上的1维流形上的分部积分）。 若 Γ 属于 $C^{1,1}$类，则分部积分公式 （3.6）成立。

证明。 在证明的其余部分，我们采用爱因斯坦求和约定。我们只需证明，对于每个 $u \in C^{1,1}(\Gamma)$ 和 $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}_t^{0,1}(\Gamma)$，均有

$$\int_\Gamma u \, \mathrm{div}_\Gamma \, \boldsymbol{\varphi} = -\int_\Gamma \nabla_\Gamma u \cdot \boldsymbol{\varphi}, \tag{3.7}$$

由此，（3.6）便可轻易得到 $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{P}\boldsymbol{\varphi} + (\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu}$ 对于 $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^1(\Gamma)$ 成立，再结合协变导数的乘积法则

$$\mathrm{div}_\Gamma((\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu}) = (\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\nu})\,\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{\nu}\cdot\nabla_\Gamma(\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\nu}) = (\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\nu})\,\mathrm{tr}(\mathbf{B}),$$

以及对 $u \in \mathrm{W}^{1,1}(\Gamma)$的稠密性论证。

先考虑任意一个 $C^{1,1}$ 坐标图 $(\mathcal{V}, \mathcal{U}, \widetilde{\boldsymbol{\chi}})$，其属于 Γ，且 $u \in C^{1,1}(\Gamma)$ 在 $\mathcal{U}\cap\Gamma$上紧支撑。于是，对每个 $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}_t^{0,1}(\Gamma)$，回顾恒等式（2.1）、（2.3）和（2.4），并进行分部积分，我们首先得到

$$\begin{aligned}\int_\Gamma u \, \mathrm{div}_\Gamma \, \boldsymbol{\varphi} &= \int_\mathcal{V} \widetilde{a}_{\boldsymbol{\chi}} \widetilde{u} \, \widetilde{g}^{ij} \partial_i \widetilde{\boldsymbol{\chi}} \cdot \partial_j \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} = -\int_\mathcal{V} \partial_j(\widetilde{a}_{\boldsymbol{\chi}} \widetilde{u} \, \widetilde{g}^{ij} \partial_i \widetilde{\boldsymbol{\chi}}) \cdot \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} = -\int_\mathcal{V} \widetilde{a}_{\boldsymbol{\chi}} (\partial_j \widetilde{u}) \widetilde{g}^{ij} \partial_i \widetilde{\boldsymbol{\chi}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} - \int_\mathcal{V} \widetilde{u} \partial_j(\widetilde{a}_{\boldsymbol{\chi}} \widetilde{g}^{ij} \partial_i \widetilde{\boldsymbol{\chi}}) \cdot \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} \\ &= -\int_\mathcal{V} \widetilde{a}_{\boldsymbol{\chi}} (\nabla \widetilde{\boldsymbol{\chi}} \widetilde{\mathbf{g}}^{-1} \nabla \widetilde{u}) \cdot \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} - \int_\mathcal{V} \widetilde{a}_{\boldsymbol{\chi}} \widetilde{u} \, \widetilde{\Delta_\Gamma \boldsymbol{\chi}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} = -\int_\Gamma \nabla_\Gamma u \cdot \boldsymbol{\varphi} - \int_\mathcal{V} \widetilde{a}_{\boldsymbol{\chi}} \widetilde{u} \, \widetilde{\Delta_\Gamma \boldsymbol{\chi}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\varphi}},\end{aligned}$$

其中 $\Delta_\Gamma \boldsymbol{\chi} := (\Delta_\Gamma \chi_k)_{k=1}^{d+1}$。由于 $\nabla\boldsymbol{\chi}$ 的各列构成 Γ的切平面的一组基，因此只需证明 $\widetilde{\ }$ 对每个 $\Delta_\Gamma \boldsymbol{\chi} \cdot \partial_p \widetilde{\boldsymbol{\chi}} = 0$ 几乎处处成立，其中 $p = 1, \ldots\ldots, d+1$，从而推出（3.7）。

在下文中，仅为避免表达式过于繁杂，我们省略使用 $\sim$ 来表示计算是在参数域中进行的。回顾 $a := a_{\boldsymbol{\chi}} = \sqrt{\det \mathbf{g}}$ 并利用雅可比公式，不难看出$\partial_j a = \frac{1}{2} a g^{kl} \partial_j g_{kl}$ 几乎处处成立，因此 $\Delta_\Gamma \boldsymbol{\chi} = \frac{1}{a}\partial_j a g^{ij} \partial_i \boldsymbol{\chi} + \partial_j (g^{ij} \partial_i \boldsymbol{\chi}) = \frac{1}{2} g^{kl} \partial_j g_{kl} g^{ij} \partial_i \boldsymbol{\chi} + \partial_j g^{ij} \partial_i \boldsymbol{\chi} + g^{ij} \partial_j \partial_i \boldsymbol{\chi}$。于是，再利用 $g^{ij} g_{ip} = \delta_{jp}$ 和 $g_{ip} = \partial_i \boldsymbol{\chi} \cdot \partial_p \boldsymbol{\chi}$，以及根据乘积法则，$\partial_j g^{ij} g_{ip} = -g^{ij} \partial_j g_{ip}$ 和$\partial_j g_{ip} = \partial_j \partial_i \boldsymbol{\chi} \cdot \partial_p \boldsymbol{\chi} + \partial_i \boldsymbol{\chi} \cdot \partial_j \partial_p \boldsymbol{\chi}$，我们得到几乎处处成立。

$$\begin{aligned}\Delta_\Gamma \boldsymbol{\chi} \cdot \partial_p \boldsymbol{\chi} &= \frac{1}{2} g^{kl} \partial_j g_{kl} g^{ij} g_{ip} + \partial_j g^{ij} g_{ip} + g^{ij} \partial_j \partial_i \boldsymbol{\chi} \cdot \partial_p \boldsymbol{\chi} = \frac{1}{2} g^{kl} \partial_p g_{kl} + \partial_j g^{ij} g_{ip} + g^{ij} \partial_j \partial_i \boldsymbol{\chi} \cdot \partial_p \boldsymbol{\chi} \\ &= \frac{1}{2} g^{ij} \partial_p g_{ij} - g^{ij} \partial_j g_{ip} + g^{ij} \partial_j g_{ip} - g^{ij} \partial_i \boldsymbol{\chi} \cdot \partial_j \partial_p \boldsymbol{\chi} = \frac{1}{2} g^{ij} \left(\partial_p \partial_i \boldsymbol{\chi} \cdot \partial_j \boldsymbol{\chi} - \partial_p \partial_j \boldsymbol{\chi} \cdot \partial_i \boldsymbol{\chi} \right) = 0,\end{aligned}$$

其中最后一个等式源于 g^{ij} 的对称性，以及括号中项关于 (i, j) 的反对称性。至此，我们完成了 u 紧支撑于 $\mathcal{U}\cap\Gamma$ 时（3.7）的证明。对于一般的 $u \in C^{1,1}(\Gamma)$，我们按如下方式进行：令 $\{\theta_i\}_{i=1}^N$ 为与 Γ 的覆盖 $\{\mathcal{W}_i\}_{i=1}^N$ 相关联的 $C^{1,1}$ 单位分解（参见第2节），并定义$\mathfrak{V}_i := \underline{\theta_i u \in C^{1,1}}(\Gamma)$，其支撑于 $\mathcal{W}_i \cap \Gamma \subseteq \mathcal{U}_i \cap \Gamma$。于是得到

$$\int_\Gamma u \, \mathrm{div}_\Gamma \, \boldsymbol{\varphi} = \sum_{i=1}^N \int_\Gamma \mathfrak{V}_i \, \mathrm{div}_\Gamma \, \boldsymbol{\varphi} = -\sum_{i=1}^N \int_\Gamma \nabla_\Gamma \mathfrak{V}_i \cdot \boldsymbol{\varphi} = -\int_\Gamma \nabla_\Gamma \left(\sum_{i=1}^N \mathfrak{V}_i \right) \cdot \boldsymbol{\varphi} = -\int_\Gamma \nabla_\Gamma u \cdot \boldsymbol{\varphi}.$$

至此，证明完成。 □

以下稠密性结果是对 [29, 引理3。7]）的轻微改进，将有助于处理本项目第二部分中的向量值超曲面偏微分方程 [3]。

引理 *3.10*（稠密性）。设 $p \in [1,\infty)$， $m \in N$，且 $0 \le k \le m-1$ 为整数。若 Γ 属于 C^m 类，则处处切向的 C^{m-1} 向量场空间 $C_t^{m-1}(\Gamma)$ 在 $W^{k,p}(\Gamma)$ 中稠密。类似地，若 $m \ge 2$ 且 Γ 属于 $C^{m-1,1}$ 类，则几乎处处切向的 $C^{m-2,1}$ 向量场空间 $C_t^{m-2,1}(\Gamma)$ 在 $W^{k,p}(\Gamma)$ 中稠密。

证明。设 Γ 属于 C^m 类（分别地，$C^{m-1,1}$ 类，其中 $m \ge 2$），并令 $u \in W^{k,p}(\Gamma)$。于是，根据定理 3.6（稠密性），存在一个序列 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^m(\Gamma)$（分别地，$\subseteq C^{m-1,1}(\Gamma)$），使得 $\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n - u\|_{k,p;\Gamma} = 0$。接着，由于 $P = I - \nu\otimes\nu$ 属于 C^{m-1} 类（分别地，$C^{m-2,1}$ 类），切向场 $P\varphi_n$ 也属于相应的类。因此，注意到在 Γ 上 $Pu = u$ 几乎处处成立，由引理 3.4（乘积法则）可得

$$\|P\varphi_n - u\|_{k,p;\Gamma} = \|P(\varphi_n - u)\|_{k,p;\Gamma} \le C\|\varphi_n - u\|_{k,p;\Gamma} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

证明至此完成。 □

以下结果将用于证明定理 1.1 （算子 $-\mathrm{div}_\Gamma(A\nabla_\Gamma\cdot)$ 在 $W^{1,p}(\Gamma)$）在参数域中表述问题时的适定性）；证明见第 4.1 节。

注 *3.11*（切向分量）。如果 $p \in (1,\infty)$ 和 Γ 属于 $C^{m,1}$ 类，对于某个整数 $m \ge 0$，则引理 *3.4*（$W^{m,p}(\Gamma)$ 中的乘积法则）意味着：对于每个 $v \in W_t^{m,p}(\Gamma) := W_t^{m,p}(\Gamma, R^{d+1})$ 支持于 $\mathcal{W}\cap\Gamma$，存在唯一的 $\hat{v} = (\hat{v}_i)_{i=1}^d \in W^{m,p}(\mathcal{V}) := W^{m,p}(\mathcal{V}, R^d)$ 支持于 $\mathcal{X} := \tilde{\chi}^{-1}(\mathcal{W}\cap\Gamma) \subseteq \mathcal{V}$，使得

$$\tilde{v} = (\nabla\tilde{\chi})\hat{v} \quad on\ \mathcal{V}, \tag{3.8}$$

其中 $\tilde{v} = v\circ\tilde{\chi} \in W^{m,p}(\mathcal{V},\mathbb{R}^{d+1})$；等价地，$\hat{v} = g^{-1}(\nabla^T\tilde{\chi})\tilde{v}$ 于 $\mathcal{V}$ 上。此外，

$$\|\hat{v}\|_{m,p;\mathcal{X}} \cong \|\tilde{v}\|_{W^{m,p}(\mathcal{X},\mathbb{R}^{d+1})} \cong \|v\|_{m,p;\Gamma}. \tag{3.9}$$

其中，隐含的等价常数仅依赖于 Γ 和 p。

证明。恒等式（3.8）由注意到 $\nabla\tilde{\chi}$ 的列构成 Γ的切平面的一组基可得。进而，（3.9）是由 注 3.5 （范数等价）以及平坦区域中索伯列夫空间的莱布尼茨法则得出的。□

3.3. Sobolev embeddings on Γ

现在我们陈述 Γ 上索伯列夫嵌入结果的若干版本。在本节其余部分，除非另有说明，$p \in [1,\infty)$ 和 $m \in \mathbb{N}$ 均为任意的；每当提到空间 $W^{m,p}(\Gamma)$ 时，我们都默认假设 Γ 属于 $C^{m-1,1}$ 类。

由于 Γ 是紧致的，因此在 Γ上的第一类 Sobolev 嵌入（加利亚多–涅伦贝格–索伯列夫）与有界开子集 of$\mathbb{R}^d$ 且具有 C^1 边界时的对应嵌入表现相同。

命题 3.12（加利亚多–涅伦贝格–索伯列夫不等式 [22, §4.3]）。设 $1 \le p < q < \infty$，且任意整数$0 \le m < k$ 满足条件

$$k - \frac{d}{p} \ge m - \frac{d}{q}.$$

如果 Γ 属于 $C^{k-1,1}$类，那么 $W^{k,p}(\Gamma)$ 连续嵌入于$W^{m,q}(\Gamma)$。

As 因此，若 $kp < d$ 且 $1 \le q \le \frac{dp}{d-kp}$，则~~$W^{k,p}(\Gamma)$~~ 连续嵌入于 $L^q(\Gamma$).

Rellich–Kondrachov紧性定理也可从平坦有界区域推广到紧致的 Γ。关于 H¨older 空间 $C^{0,\alpha}(\Gamma)$ 的定义，请参见[22, 第 389] 页。

命题 *3.13*（紧 *Sobolev* 嵌入 [22, 定理 *8*.1]）。设 $1 \le p < \infty$ 和整数 $0 \le m < k$ 满足 $kp < d$。若 Γ 属于 $C^{k-1,1}$ 类，则对于每个 $1 \le q < \frac{dp}{d-(k-m)p}$，$W^{k,p}(\Gamma)$ 紧致嵌入于 $W^{m,q}(\Gamma)$。特别地，当 $1 \le p < d$且 $1 \le q < \frac{dp}{d-p}$ 属于 $C^{0,1}$ 类时，$W^{1,p}(\Gamma)$ 紧致嵌入于 $L^q(\Gamma)$。

命题 3.14 (在 H¨older 空间中的紧嵌入 [22, 定理 8.2])。设 $d < p < \infty$。若 Γ 属于 1类，则 $W^{1,p}(\Gamma)$ 紧致嵌入于 $H^{\ddot{}}older$ 空间 $C^{0,\alpha}(\Gamma)$，对所有 $\alpha \in (0,\ 1-\frac{d}{p})$均成立。

注 3.15 (紧 Sobolev 嵌入)。 由于 $\frac{dp}{d-p} \to \infty$当 $p \nearrow d$ 时，由 命题 *3.13* 和命题 *3.14* 可知$\mathrm{W}^{1,\,p}(\Gamma)$ 紧致嵌入于 $\mathrm{L}^p(\Gamma)$ ，对所有 $1 \le p < \infty$均成立。

4. The scalar elliptic theory

本节研究问题（1.1）的适定性和基于 L^p 的 Sobolev 正则性。我们首先在 第 4.1 节研究散度形式的问题。在第 4.2 节中，我们将第 4.1 节的结果与 Fredholm择一定理相结合，从而推导出一般标量椭圆问题（1.1）的相应结果。

4.1. 基于 L^p 的散度形式问题的正则性

回顾第3节中引入的 Lebesgue 空间和索伯列夫空间 L^p #(Γ) 与 $\mathrm{W}^{m,p}$ # (Γ) 的记号。问题 $-\mathrm{div}_\Gamma(\mathrm{A}\nabla_\Gamma$ u) $= f$ 的基于 L^2 的弱形式如下：给定 $f \in (\mathrm{H}^1_{\#}(\Gamma))'$ 和满足椭圆性条件（1.4）的 $\mathrm{A} \in \mathbb{L}^\infty(\Gamma)$，求 $u \in \mathrm{H}^1_{\#}(\Gamma)$，使得

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v = \langle f, v\rangle, \qquad \forall v \in \mathrm{H}^1_{\#}(\Gamma). \tag{4.1}$$

（4.1）对 Γ 属于 $C^{0,\,1}$ 的适定性由（1.4）和 Poincar´é–Friedrichs 不等式[4, 引理 2], 以及 Lax–Milgram 定理相结合得到。特别地，存在一个常数 $C > 0$ 仅依赖于 Γ 和 **A**，使得

$$\|u\|_{1,\Gamma} \le C\|f\|_{(\mathrm{H}^1_{\#}(\Gamma))'}. \tag{4.2}$$

现在我们着手证明问题 L^p 型对应形式（1.5）的适定性，该形式对应于问题（4.1）。我们的论证基于 [4, 引理 3]中的“局部化”方法和对偶论证，并以$\mathrm{H}^1_{\#}$（Γ）中（1.1）的适定性为基础。

在参数域中写出弱形式（1.5）的一项困难在于， $f \in (\mathrm{W}^{1,p^*}$ # (Γ))′不一定逐点有意义，因此不容易直接照原样在参数域中写出该弱形式。此时，椭圆偏微分方程的散度形式至关重要——我们不将 f 映射到参数域，而是构造 $\mathrm{u}_f \in \mathrm{L}^p_t$ ，使得 $\mathrm{div}_\Gamma \mathrm{u}_f = f$ 作为 $(\mathrm{W}^{1,p^*}$ #)′ 中的对象成立，并改为提升 $\mathrm{u}_f \in \mathrm{L}^p_t$ 。因此，我们首先需要证明 $\mathrm{div}_\Gamma : \mathrm{L}^p_t \to (\mathrm{W}^{1,p^*}$ #)′ 是满射，其定义受分部积分公式（3.7）的启发。以下结果即为此内容。

命题 4.1 (散度算子的满射性)。 设 $p \in (1, \infty)$。若 Γ 属于 $C^{0,1}$ 类，则线性连续算子 $\mathrm{div}_\Gamma : \mathbf{L}^p_t(\Gamma) \to (\mathrm{W}^{1,\,p^*}{}_{\#}(\Gamma))'$ 定义为

$$\langle \mathrm{div}_\Gamma \mathbf{u}, v\rangle := -\int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \nabla_\Gamma v, \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{L}^p_t(\Gamma),\ \forall v \in \mathrm{W}^{1,p^*}_{\#}(\Gamma),$$

是满射。

证明。 对偶性识别 $(\mathbf{L}^p_t(\Gamma))' \equiv \mathbf{L}^{p^*}_t(\Gamma)$ 以及 $\mathrm{W}^{1,p^*}{}_{\#}(\Gamma)$ 中的 Poincar´e 不等式给出

$$\sup_{\substack{\mathbf{u}\in\mathbf{L}^p_t(\Gamma)\\ \mathbf{u}\neq\mathbf{0}}} \frac{\langle \mathrm{div}_\Gamma \mathbf{u}, v\rangle}{\|\mathbf{u}\|_{0,p;\Gamma}} = \sup_{\substack{\mathbf{u}\in\mathbf{L}^p_t(\Gamma)\\ \mathbf{u}\neq\mathbf{0}}} \frac{\int_\Gamma \mathbf{u}\cdot\nabla_\Gamma v}{\|\mathbf{u}\|_{0,p;\Gamma}} \cong \|\nabla_\Gamma v\|_{0,p^*;\Gamma} \cong \|v\|_{1,p^*;\Gamma}, \qquad \forall v \in \mathrm{W}^{1,p^*}_{\#}(\Gamma).$$

因此，所需的断言 由定理 A.1 （单射性与满射性的刻画）中的 i) 项可得。 □

我们是 现在可以证明定理 1.1 （算子 $-\mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{A}\nabla_\Gamma \cdot)$ 在 $\mathrm{W}^{1,p}{}_{\#}(\Gamma)$ 中的可逆性）).

定理 1.1 的证明。我们分三步进行，具体取决于 p 的取值以及 Γ的正则性。

步骤 1。 我们首先证明 $p > 2$ 和 Γ 属于 C^1。由于 $f \in (\mathrm{W}^{1,p^*}{}_{\#}(\Gamma))' \subseteq (\mathrm{H}^1_{\#}(\Gamma))'$，方程（4.1）的适定性保证存在唯一的 $u \in \mathrm{H}^1_{\#}(\Gamma)$，使得

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v = \langle f, v\rangle, \qquad \forall v \in \mathrm{H}^1_{\#}(\Gamma). \tag{4.3}$$

我们的目标是证明 u 具有更高的正则性，即属于 $W^{1,p}_{\#}(\Gamma)$，由此利用（1.5）即可根据（4.3）以及 $H^1_{\#}(\Gamma)$ 在 $W^{1,p^*}_{\#}(\Gamma)$ 中对测试空间的稠密性轻松推出（参见 定理 3.6 ）。

首先注意到，根据 命题 4.1 （散度算子的满射性）和 注 A.3 可知存在 $\mathbf{u}_f \in \mathbf{L}^p_t(\Gamma)$ 使得

$$\langle f, v\rangle = -\int_\Gamma \mathbf{u}_f \cdot \nabla_\Gamma v \tag{4.4}$$

对每个 $v \in W^{1,p^*}_{\#}(\Gamma)$，并且

$$\|\mathbf{u}_f\|_{0,p;\Gamma} \lesssim \|f\|_{(W^{1,p^*}_{\#}(\Gamma))'}. \tag{4.5}$$

此外，恒等式（4.4）使我们可以自然地将 f 从 $W^{1,p^*}_{\#}(\Gamma)$ 延拓到 $W^{1,p^*}(\Gamma)$。

我们采用引理 [4, 的证明中的“局部化”方法。设 $\{\theta_i\}_{i=1}^N$ 为与 Γ [34, Ch. 4, 11. 定理] 的覆盖 $\{\mathcal{W}_i\}_{i=1}^N$ 相对应的单位分解。我们先只考虑一个坐标图，因此省略下标 i。容易看出，$\mathcal{U} := \theta u \in H^1(\Gamma)$ 在 $\mathcal{W}\cap\Gamma$ 上紧支撑，并且满足

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\nabla_\Gamma \mathcal{U}\cdot\nabla_\Gamma v = \int_\Gamma g v + \int_\Gamma \mathbf{h}\cdot\nabla_\Gamma v, \qquad \forall v \in H^1(\Gamma), \tag{4.6}$$

其中 $g := -\mathbf{A}\nabla_\Gamma\theta\cdot\nabla_\Gamma u - \nabla_\Gamma\theta\cdot\mathbf{u}f$ 以及 $\mathbf{h} := u\mathbf{A}\nabla_\Gamma\theta - \theta\mathbf{u}f$ 也在 $\mathcal{W}\cap\Gamma$上紧支撑。回顾公式（2.3）和（2.7），并结合注 3.11，我们将（4.6）表示为

$$\int_{\mathcal{V}} \widetilde{a}_{\boldsymbol{\chi}}\widetilde{\mathbf{M}}\nabla\widetilde{\mathcal{U}}\cdot\nabla\widetilde{v} = \int_{\mathcal{V}} \widetilde{a}_{\boldsymbol{\chi}}\widetilde{g}\,\widetilde{v} + \int_{\mathcal{V}} \widetilde{a}_{\boldsymbol{\chi}}\hat{\mathbf{h}}\cdot\nabla\widetilde{v}, \qquad \forall \widetilde{v} \in H^1(\mathcal{V}), \tag{4.7}$$

其中 $\widetilde{\mathbf{M}} := \widetilde{\mathbf{g}}^{-1}\nabla^T\widetilde{\boldsymbol{\chi}}\widetilde{\mathbf{A}}\nabla\widetilde{\boldsymbol{\chi}}\widetilde{\mathbf{g}}^{-1}$，而 $\hat{\mathbf{h}}$ 表示$\mathbf{h}$ 在注 3.11意义下的“切向分量”。现在我们通过自举论证继续推导。注意，$\widetilde{\mathbf{g}}$ 和 $\widetilde{a}_{\boldsymbol{\chi}}$ 属于 C^0 类，因为 Γ 属于 C^1类。那么，若$u \in W^{1,\frac{2d}{d-2n}}(\Gamma)$，其中 $0 \le n < d/2$为某个整数，则 Sobolev 嵌入（参见 [14, 第 284-285] 页）

$$\begin{cases} W^{1,\frac{2d}{d-2n}}(\mathcal{V}) \hookrightarrow L^q(\mathcal{V}), & \text{for all } q \in (1,\infty), \text{ if } 2(n+1) \ge d, \\ W^{1,\frac{2d}{d-2n}}(\mathcal{V}) \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2(n+1)}}(\mathcal{V}), & \text{if } 2(n+1) < d, \end{cases}$$

这意味着$\hat{\mathbf{h}} \in \mathbf{L}^{q_{n+1}}(\mathcal{V})$，其中

$$q_{n+1} := \begin{cases} p, & \text{if } 2(n+1) \ge d, \\ \min\{p, \frac{2d}{d-2(n+1)}\}, & \text{if } 2(n+1) < d, \end{cases}$$

并且有如下估计

$$\|\hat{\mathbf{h}}\|_{0,q_{n+1};\mathcal{V}} \overset{(3.4)}{\lesssim} \|\widetilde{u}\|_{1,\frac{2d}{d-2n};\mathcal{V}} + \|\hat{\mathbf{u}}_f\|_{0,p;\mathcal{V}}. \tag{4.8}$$

此外，回顾 $g = -\mathbf{A}\nabla_\Gamma\theta\cdot\nabla_\Gamma u - \nabla_\Gamma\theta\cdot\mathbf{u}f$，我们还得到 $\widetilde{g} \in L^{q_n}(\mathcal{V})$，其中 $q_n = \min\{p, \frac{2d}{d-2n}\}$（因为 $0 \le n < d/2$），并且有类似于（4.8）的估计。因此，由命题 B.1 可推出 $\mathcal{U} \in W^{1,s}(\mathcal{V})$，并且

$$\|\widetilde{\mathcal{U}}\|_{1,s;\mathcal{V}} \lesssim \|\hat{\mathbf{h}}\|_{0,q_{n+1};\mathcal{V}} + \|\widetilde{g}\|_{0,q_n;\mathcal{V}} \overset{(3.4),(4.8)}{\lesssim} \|\widetilde{u}\|_{1,\frac{2d}{d-2n};\mathcal{V}} + \|\hat{\mathbf{u}}_f\|_{0,p;\mathcal{V}}, \tag{4.9}$$

其中

$$s := \begin{cases} \min\{q_{n+1}, \frac{dq_n}{d-q_n}\}, & \text{if } q_n < d, \\ q_{n+1}, & \text{if } q_n \ge d. \end{cases} = q_{n+1}.$$

为了说明这一最后的等式，注意到，如果 $\frac{2d}{d-2n} < d$ 且 $p < d$ （$p \ge d$ 的情形更容易），那么由于映射 $x \mapsto \frac{dx}{d-x}$ 对于 $x \in [1,d)$ 的单调性，可得

$$\frac{dq_n}{d-q_n} = \min\left\{\frac{dp}{d-p}, \frac{d\frac{2d}{d-2n}}{d-\frac{2d}{d-2n}}\right\} = \min\left\{\frac{dp}{d-p}, \frac{2d}{d-2(n+1)}\right\} \ge \min\left\{p, \frac{2d}{d-2(n+1)}\right\} = q_{n+1}.$$

结合每个坐标图的估计（4.9），我们推得 $u \in W^{1,q_{n+1}}(\Gamma)$，且

$$\|u\|_{1,q_{n+1};\Gamma} \le \sum_{i=1}^{N} \|\mathfrak{V}_i\|_{1,q_{n+1};\Gamma} \overset{(3.4)}{\lesssim} \sum_{i=1}^{N} \|\widetilde{\mathfrak{V}}_i\|_{1,q_{n+1};\mathcal{V}_i}$$

$$\overset{(4.9)}{\lesssim} \sum_{i=1}^{N} \left(\|\widetilde{u}_i\|_{1,\frac{2d}{d-2n};\mathcal{V}_i} + \|\hat{\mathbf{u}}_f\|_{0,p;\mathcal{V}_i} \right) \overset{(3.9),(3.1)}{\cong} \|u\|_{1,\frac{2d}{d-2n};\Gamma} + \|\mathbf{u}_f\|_{0,p;\Gamma} \overset{(4.5)}{\lesssim} \|u\|_{1,\frac{2d}{d-2n};\Gamma} + \|f\|_{(\mathrm{W}^{1,p^*}_{\#}(\Gamma))'}.$$

回忆 $u \in \mathrm{W}^{1,2}(\Gamma) = \mathrm{H}^1(\Gamma)$ 满足（1.5）。因此，通过从 n 开始迭代 $n = 0$，并利用$\frac{2d}{d-x} \to \infty$当 $x \to d$时，最终我们找到（第一个） N 使得 $q_{N+1} = p$，于是

$$\|u\|_{1,q_{N+1};\Gamma} \lesssim \|u\|_{1,\frac{2d}{d-2N};\Gamma} + \|f\|_{(\mathrm{W}^{1,p^*}_{\#}(\Gamma))'} = \|u\|_{1,q_N;\Gamma} + \|f\|_{(\mathrm{W}^{1,p^*}_{\#}(\Gamma))'}$$

$$\lesssim \dots \lesssim \|u\|_{1,\Gamma} + \|f\|_{(\mathrm{W}^{1,p^*}_{\#}(\Gamma))'} \overset{(4.2)}{\lesssim} \|f\|_{(\mathrm{W}^{1,p^*}_{\#}(\Gamma))'}.$$

这就完成了对 $p > 2$ 和 Γ 属于 C^1类的情形的证明。

步骤 2. 如果 $p > 2, \Gamma$ 仅属于 C^0类，且 A 仅属于 $\mathbb{L}^\infty(\Gamma)$，我们可以像之前那样，借助一个 $C^{0,1}$ 的单位分解$\widetilde{\ }$，得到系数矩阵为 $\widetilde{a}_{\boldsymbol{\chi}}\mathbf{M} \in \mathbb{L}^\infty(\mathcal{V})$ 的一致椭圆方程 (4.7)。然后，由于备注 B.2（Meyers），只要 p 属于 $[2, 2+\eta)$，自举论证就仍然成立，其中 η 仅依赖于$\sim\Gamma$ 和 A（通过系数 $\widetilde{a}_{\boldsymbol{\chi}}\mathbf{M} \in \mathbb{L}^\infty(\mathcal{V})$）。

步骤 3. 对于 $p \in (1, 2)$，我们利用对偶性进行论证；粗略地说，我们将把情形 $p > 2$ 应用于将 A 替换为 $\mathbf{A}^T$后得到的问题。事实上，我们刚刚证明，映射 $T\colon \mathrm{W}^{1,p^*}_{\#}(\Gamma) \to (\mathrm{W}^{1,p}_{\#}(\Gamma))'$，由 $\langle Tv, u\rangle = \int_\Gamma \mathbf{A}^T \nabla_\Gamma v \cdot \nabla_\Gamma u$ 定义，是一个线性连续双射（因为 $p^* \in (2,\infty)$ 且 $\mathbf{A}^T$满足 (1.4)），只要 Γ 属于 C^1 类且 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}(\Gamma)$，或者 Γ 属于 $C^{0,1}$ 类、$\mathbf{A} \in \mathbb{L}^\infty(\Gamma)$，并且 $p^* > 2$ 充分接近 2。在这些假设下，根据定理 A.1（单射性与满射性的刻画），我们推得伴随算子 $T^{\mathrm{t}}\colon \mathrm{W}^{1,p}_{\#}(\Gamma) \to (\mathrm{W}^{1,p^*}_{\#}(\Gamma))'$，由 $\langle T^{\mathrm{t}}u, v\rangle := \langle Tv, u\rangle = \int_\Gamma \mathbf{A}^T \nabla_\Gamma v \cdot \nabla_\Gamma u = \int_\Gamma \mathbf{A}\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v$定义，同样是连续双射。这就完成了对 $p \in (1, 2)$ 的证明。□

将定理 1.1与 Sobolev 嵌入（参见第3节）直接结合即可得到以下结果。特别地，我们将在姊妹论文 [3] 中运用该结果。

推论 *4.2*。设 $p \in (1,\infty)$ 和 $q \in (1, d)$，并定义 $s := \min\{p, \frac{dq}{d-q}\}$。若 Γ 属于 C^1 类，且 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}(\Gamma)$ 满足椭圆性条件 *(1.4)*，则对于每个 $f \in L^p_t(\Gamma)$ 和 $f \in L^q_\#(\Gamma)$，存在唯一的 $u \in W^{1,s}_\#(\Gamma)$，使得

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v = -\int_\Gamma \mathbf{f} \cdot \nabla_\Gamma v + \int_\Gamma f\, v, \qquad \forall v \in \mathrm{W}^{1,s^*}_{\#}(\Gamma). \tag{4.10}$$

此外，存在一个正数常量 C，仅依赖于 Γ、$\mathbf{A}$、p 和 q，使得

$$\|u\|_{1,s;\Gamma} \le C\left(\|\mathbf{f}\|_{0,p;\Gamma} + \|f\|_{0,q;\Gamma}\right).$$

若 Γ 和 $\mathbf{A}$ 分别仅属于 $C^{0,1}$ 类和 $\mathbb{L}^\infty(\Gamma)$ 类，则存在一个 $\varepsilon > 0$，仅依赖于 Γ 和 $\mathbf{A}$，使得只要 $s \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$，该结果仍然成立。

接下来，我们建立问题 (1.5) 的解的更高阶 L^p-正则性，即 定理 1.2($\mathrm{W}^{m+2,p}$-正则性算子 $-\mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{A}\nabla_\Gamma\cdot)$ 在 Γ 上。与 定理 1.1类似，证明同样通过“局部化”得到。

定理 1.2 的证明。我们先在一个坐标图中论证，因此省略指标 i。与定理 1.1的证明类似，容易看出，“局部化”变量 $\mathfrak{V} := \theta u \in \mathrm{W}^{1,p}_{\#}(\Gamma)$ 在 $\mathcal{W} \cap \Gamma$ 上紧支撑，并满足

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\nabla_\Gamma \mathfrak{V} \cdot \nabla_\Gamma v = \int_\Gamma g v, \qquad \forall v \in \mathrm{W}^{1,p^*}(\Gamma), \tag{4.11}$$

其中

$$g := \theta f - \mathbf{A}\nabla_\Gamma\theta \cdot \nabla_\Gamma u - \mathrm{div}_\Gamma(u\mathbf{A}\nabla_\Gamma\theta) = \theta f - (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma\theta - u\,\mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{A}\nabla_\Gamma\theta)$$

也是紧致的 s 支撑于 $\mathcal{W}_i \cap \Gamma$。固定 $k = 0, \ldots\ldots, m$ 并归纳假设 $u \in W^{k+1,\,p}(\Gamma)$，且

$$\|u\|_{k+1,p;\Gamma} \le C\|f\|_{\max\{0,k-1\},p;\Gamma}; \tag{4.12}$$

鉴于（$k = 0$ 1.6）和$\|f\|_{(W^{1,p^*}{}_{\#}(\Gamma))'} \le C\|f\|_{0,\,p;\Gamma}$。于是，$g \in W^{k,\,p}(\Gamma)$ 以及$\|g\|_{k,\,p;\mathcal{W}\cap\Gamma} \lesssim \|f\|_{k,\,p;\mathcal{W}\cap\Gamma} + \|u\|_{k+1,\,p;\mathcal{W}\cap\Gamma}$。回顾（2.1）和（2.3），我们将（4.11）在参数域中表示为

$$\int_{\mathcal{V}} \widetilde{a}_{\boldsymbol{\chi}} \widetilde{\mathbf{M}} \nabla \widetilde{\upsilon} \cdot \nabla \widetilde{v} = \int_{\mathcal{V}} \widetilde{a}_{\boldsymbol{\chi}} \widetilde{g}\, \widetilde{v}, \qquad \forall \widetilde{v} \in W^{1,p^*}(\mathcal{V}), \tag{4.13}$$

其中 $\widetilde{\ }\mathbf{M} := \widetilde{\ }\mathbf{g}^{-1}\nabla^T\widetilde{\boldsymbol{\chi}}\widetilde{\ }\mathbf{A}\nabla\widetilde{\boldsymbol{\chi}}\widetilde{\ }\mathbf{g}^{-1}$。由于 $\widetilde{a}_{\boldsymbol{\chi}}\widetilde{\ }\mathbf{M}$ 是一致椭圆的且属于 C^m,1 类（由（1.4）以及 A $\in \mathbb{C}^m$, 1(Γ) 和 Γ 属于 C^{m+1},1 类可知），并且 $\widetilde{g} \in W^{k,p}(\mathcal{V})$（因为 $g \in W^{k,p}(\Gamma)$），由命题 B.3 可推出，$s = p$ 因此 $\widetilde{\upsilon} \in W^{k+2,p}(\mathcal{V})$，并且

$$\|\widetilde{\upsilon}\|_{k+2,p;\mathcal{V}} \lesssim \|\widetilde{g}\|_{k,p;\mathcal{V}} \overset{(3.4)}{\lesssim} \|g\|_{k,p;\mathcal{U}\cap\Gamma} \lesssim \|f\|_{k,p;\mathcal{U}\cap\Gamma} + \|u\|_{k+1,p;\mathcal{U}\cap\Gamma}.$$

结合 Γ 各坐标图的这一最后估计，我们推得 $u \in W^{k+2,\,p}(\Gamma)$ an d

$$\begin{aligned}\|u\|_{k+2,p;\Gamma} \le \sum_{i=1}^{N} \|\mho_i\|_{k+2,p;\Gamma} &\overset{(3.4)}{\lesssim} \sum_{i=1}^{N} \|\widetilde{\mho}_i\|_{k+2,p;\mathcal{V}_i} \\ &\lesssim \sum_{i=1}^{N} (\|f\|_{k,p;\mathcal{U}_i\cap\Gamma} + \|u\|_{k+1,p;\mathcal{U}_i\cap\Gamma}) \lesssim \|f\|_{k,p;\Gamma} + \|u\|_{k+1,p;\Gamma} \overset{(4.12)}{\lesssim} \|f\|_{k,p;\Gamma}.\end{aligned}$$

至此完成归纳步骤，从而完成估计（1.7）的证明。

最后，将分部积分公式（3.6）应用于（1.5）左端，并利用$W^{1,\,p^*}(\Gamma)$ 在$L^{p^*}(\Gamma)$中的稠密性，可得（1.8）。□

有时，考虑比 $u \in W^{1,\,p}{}_{\#}(\Gamma)$ 更弱的解概念会很有用，尤其当右端数据 f 不属于 $(W^{1,\,p^*}{}_{\#}(\Gamma))'$，而是属于 $(W^{2,\,p^*}{}_{\#}(\Gamma))'$ 时。我们称这类解为“超弱解”。这类应用的例子包括：数据为测度的最优控制问题，以及流形上的切向量值问题分析 [3]。

引理 *4.3*（Γ 上 $-div_\Gamma(A\nabla_\Gamma\cdot)$ 算子的超弱解）。设 $p \in (1,\infty)$，Γ 属于 C^1,1 类，且 $A \in \mathbb{C}^0$,1(Γ) 满足 *(1.4)*。则对每个 $f \in (W^{2,p^*}{}_{\#}(\Gamma))'$，存在唯一的 $u \in L^p{}_{\#}(\Gamma)$，使得

$$-\int_\Gamma u\, \mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{A}^T\nabla_\Gamma v) = \langle f, v\rangle, \qquad \forall v \in W^{2,p^*}_{\#}(\Gamma). \tag{4.14}$$

此外，存在仅依赖于 Γ、**A** 和 p 的常数 $C > 0$，使得

$$\|u\|_{0,p;\Gamma} \le C\|f\|_{(W^{2,p^*}_{\#}(\Gamma))'}. \tag{4.15}$$

证明。由于算子 $T := -\mathrm{div}_\Gamma(A\nabla_\Gamma\cdot)$ 是从 $W^{2,p^*}{}_{\#}(\Gamma)$ 到 $L^{p^*}{}_{\#}(\Gamma) \equiv (L^p{}_{\#}(\Gamma))'$ 的连续双射，根据定理 1.2，由附录 A 可知，由$\langle T^{\mathrm{t}}u, v\rangle := \langle Tv, u\rangle = -\int_\Gamma u\,\mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{A}^T\nabla_\Gamma v)$ 定义的伴随算子 $T^{\mathrm{t}} : L^p{}_{\#}(\Gamma) \to (W^{2,p^*}{}_{\#}(\Gamma))'$ 也是连续双射。证毕。□

4.2. 基于L^p的广义标量椭圆问题正则性

本节旨在证明 定理 1.3（适定性）和定理 1.4（高阶正则性）。首先，在条件 (1.10) $p \in [2,\infty)$ 以及 (1.9a) 成立的情况下，我们证明与问题相关的变分表述的唯一性。我们的论证受到平坦区域中椭圆方程弱解的最大值原理证明的启发，详见 [18,第 8 节。1]。

命题 *4.4*（ $p \geq 2$ 的唯一性）。设 Γ 属于 C^0*,1* 类，令 $p \in [2,\infty)$*, (A, b, c, d)* $\in \mathbb{L}^\infty(\Gamma) \times L_t^\infty(\Gamma) \times L_t^\infty(\Gamma) \times L^\infty(\Gamma)$，并假设条件 *(1.4)* 和 *(1.9a)* 成立。若 $u \in W^{1,p}(\Gamma)$ 满足

$$\int_\Gamma (\mathbf{A}\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v + u(\mathbf{b}\cdot\nabla_\Gamma v) + (\mathbf{c}\cdot\nabla_\Gamma u)v + \mathrm{d}\, uv) = 0, \qquad \forall v \in \mathrm{W}^{1,p^*}(\Gamma), \tag{4.16}$$

那么在 Γ 上 $u = 0$ 几乎处处成立。

证明。只需考虑以下情形 $p = 2$。设 $u \in \mathrm{H}^1(\Gamma)$ 满足（4.16）。

注意，对于每个 $v \in \mathrm{H}^1(\Gamma)$，都有 $w := uv \in \mathrm{W}^{1,1}(\Gamma)$ 且 $\nabla_\Gamma w = v\nabla_\Gamma u + u\nabla_\Gamma v$ 在 Γ 上几乎处处成立（参见 定义 3.3 以及 [18, 第 150-151]页）。因此，对于每个 $v \in \mathrm{H}^1(\Gamma)$ 满足 $w \geq 0$ 在 Γ上几乎处处成立的情形，条件（1.9a）意味着

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Gamma (\mathbf{A}\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v + u(\mathbf{b}\cdot\nabla_\Gamma v) + (\mathbf{c}\cdot\nabla_\Gamma u)v + \mathrm{d}\, uv) \\ &= \int_\Gamma (\mathbf{A}\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v + u(\mathbf{b}\cdot\nabla_\Gamma v) + (\mathbf{c}\cdot\nabla_\Gamma u)v - \mathbf{b}\cdot\nabla_\Gamma(uv)) + \int_\Gamma (\mathrm{d}\, uv + \mathbf{b}\cdot\nabla_\Gamma(uv)) \\ &\geq \int_\Gamma (\mathbf{A}\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v + v(\mathbf{c}-\mathbf{b})\cdot\nabla_\Gamma u) + \lambda \int_M uv, \end{aligned} \tag{4.17}$$

由此可得

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v + \lambda \int_M uv \leq C \int_\Gamma |\nabla_\Gamma u||v|. \tag{4.18}$$

记 $M := \operatorname{esssup}_{x\in\Gamma} u(x) \in (-\infty,\infty]$ 并反设 $M > 0$。那么，对每个 $0 < k < M$，定义 $v_k := (u-k)^+ := \max\{u-k, 0\}$。根据定义 3.1 以及平坦区域上索伯列夫空间的标准结果 [18, 引理 7.6], 可知 $v_k \in \mathrm{H}^1(\Gamma)$ 且

$$\nabla_\Gamma v_k := \begin{cases} \nabla_\Gamma u, & \text{if } u > k, \\ 0, & \text{if } u \leq k. \end{cases}$$

因此，由（4.18），并注意到 $u - k = v_k \leq u$ 若 $u \geq k$，可得

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\nabla_\Gamma v_k \cdot \nabla_\Gamma v_k + \lambda \int_M v_k^2 \leq \int_\Gamma \mathbf{A}\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v_k + \lambda \int_M u\, v_k \overset{(4.18)}{\leq} C \int_{\gamma_k} |\nabla_\Gamma v_k||v_k|, \tag{4.19}$$

其中 $\gamma_k := \{x \in \Gamma : (\nabla_\Gamma v_k)(x) \neq 0\} \subseteq \{x \in \Gamma : v_k(x) > 0\}$。然后，容易证明（利用 $\mathrm{H}^1(\Gamma)$ 连续嵌入 $\mathrm{L}^2(\Gamma)$ 的紧性，类似于 [4, 引理 2]），$v \mapsto \left(\int_\Gamma \mathrm{A}\nabla_\Gamma v \cdot \nabla_\Gamma v + \lambda \int_M v^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 是 $\mathrm{H}^1(\Gamma)$ 上的等价范数。因此，由（4.19）进一步得到

$$\|v_k\|_{1,\Gamma}^2 \lesssim \int_{\gamma_k} |\nabla_\Gamma v_k||v_k| \leq \|v_k\|_{1,\Gamma}\|v_k\|_{0,\gamma_k}.$$

反过来，对于任意固定的 $q \in (2, \frac{2d}{d-2}]$ 若 $d \geq 3$ 或 $q \in (2, \infty)$ 若 $d = 2$，连续嵌入 $\mathrm{H}^1(\Gamma) \hookrightarrow \mathrm{L}^q(\Gamma)$（参见 第3节）以及 H¨older 不等式进一步给出

$$\|v_k\|_{0,q;\Gamma} \lesssim \|v_k\|_{1,\Gamma} \lesssim \|v_k\|_{0,\gamma_k} \leq |\gamma_k|^{\frac{q-2}{2q}} \|v_k\|_{0,q;\Gamma},$$

因此，由于$\|v_k\|_{0,\ q;\Gamma} > 0$,

$$|\gamma_k| \geq C, \qquad \forall k < M,$$

其中常数 $C > 0$ 与 k无关。

我们断言 $M < \infty$。否则，根据切比雪夫不等式

$$C \leq \liminf_{n\to\infty} |\gamma_n| \leq \liminf_{n\to\infty} |\{v_n > 0\}| \leq \liminf_{n\to\infty} |\{u > n\}| \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\|u\|_{0,1;\Gamma} = 0,$$

这是矛盾的。由于 $|\{u = M : \nabla_\Gamma u \neq 0\}| = 0$根据 [18, 引理 77]及其与定义 3.1的关系，我们得到

$$|\gamma_M| = |\{\nabla_\Gamma v_M \neq 0\}| = |\{u > M : \nabla_\Gamma u \neq 0\}| = |\{u \geq M : \nabla_\Gamma u \neq 0\}| = \left|\bigcap_{n\in\mathrm{N}} \gamma_{M-\frac{1}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\gamma_{M-\frac{1}{n}}\right| \geq C,$$

根据勒贝格测度在 Γ上的连续性。然而， $|\gamma_M| \le |\{u > M\}| = 0$因为 $u \le M$在 Γ上几乎处处成立，这就产生了矛盾；因此 $M \le 0$ 且 $u \le 0$ 在 Γ上几乎处处成立。由于（4.16）关于 u是线性的，将此估计应用于 $-u$而非u，可得 $-u \le 0$ 在 Γ上几乎处处成立，从而 $u = 0$在 Γ 上几乎处处成立，如所述。□

现在我们继续证明定理 1.3 （一般标量椭圆方程的适定性）。尽管我们沿用平坦区域中使用的一般论证，但 Γ 没有边界这一点对我们不利。因此，系数1.9a）和（1.9b上的条件**b**、**c**、d 似乎不可避免。此外，为了对 $p \in$ （1、 ∞）的任意选取都保留这两个条件，我们采用下文所示的一种精细论证。

定理 1.3 的证明。粗略地说，论证如下。对于 $p = 2$，我们利用命题 4.4 和 Fredholm择一定理，在假设条件 (1.9a) 成立的前提下证明 (1.10) 的适定性。随后我们注意到，同一论证也适用于伴随问题，其中 (A, b, c, d) 被替换为 (A^T, c, b, d)——由此得到第二个充分条件，即 (1.9b)。此时，对于 $p = 2$，只要条件 (1.9a)、(1.9b) 中至少一个成立，我们就能得到 (1.10) 的适定性。基于定理 1.1（算子 $-\mathrm{div}_\Gamma(A\nabla_\Gamma\cdot)$ 在 $W^{1,p}$ # (Γ) 中的适定性），通过可积性自举 p，在相同条件下可得 $p \in (2, \infty)$ 的适定性；对偶性给出 $p < 2$ 的相应结果。Meyers 的论证则给出 Γ 属于 C^0,1 和 $p \in (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ 时的适定性。为便于阅读，我们将证明分为三种情形。

情形 1： Γ属于 C 类 ^{0,1} 且 $p = 2$。我们进一步根据条件 (1.9a) 或 (1.9b) 是否成立来划分证明 .

子情形 1.1：条件(1.9a)。回顾命题 命题 4.4证明中 (4.17) 和 (4.18) 中进行的代数运算，可知，定义线性有界算子 L， $K : \mathrm{H}^1(\Gamma) \to (\mathrm{H}^1(\Gamma))'$ 如下

$$\langle Lu, v\rangle := \int_\Gamma (\mathbf{A}\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v) + \int_\Gamma (\mathsf{d}\, uv + \mathbf{b} \cdot \nabla_\Gamma(uv)),$$
$$\langle Ku, v\rangle := \int_\Gamma v(\mathbf{c} - \mathbf{b}) \cdot \nabla_\Gamma u,$$

我们可以将 (1.10) 等价地表述为：求 $u \in \mathrm{H}^1(\Gamma)$ 使得

$$(L + K)u = f. \tag{4.20}$$

取 $v = u$，按照命题 4.4 的证明进行推导，并利用条件 (1.9a)，得到 Poincar´型不等式$\langle Lu,$ $u\rangle \ge \Lambda \int_\Gamma |\nabla_\Gamma u|^2 + \lambda \int_M |u|^2$。由此可知， L 是从$\mathrm{H}^1(\Gamma) \to (\mathrm{H}^1(\Gamma))'$到
另一方面，对于算子 K，H¨older 不等式给出

$$|\langle Ku, v\rangle| \le C\|\nabla_\Gamma u\|_{0,\Gamma}\|v\|_{0,\Gamma}, \qquad \forall u, v \in \mathrm{H}^1(\Gamma),$$

因此

$$\|K^{\mathrm{t}}(v)\|_{(\mathrm{H}^1(\Gamma))'} \le C\|v\|_{0,\Gamma}, \qquad \forall v \in \mathrm{H}^1(\Gamma),$$

其中， K^{t}： $\mathrm{H}^1(\Gamma) \to (\mathrm{H}^1(\Gamma))'$ 是 K 的“伴随算子”（见附录 A）。因此，由于嵌入 $\mathrm{H}^1(\Gamma) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(\Gamma)$ 是紧致的（参见注 3.15），我们推得 K^{t} 是紧致算子；根据 [6, 定理 6.4], ， K也同样如此。

由于 L 是双射且 K 是紧致的，根据自反巴拿赫空间上的弗雷德霍姆择一定理 [6,定理 6.6]（另见 [17, 定理 6.9]），可知 $L + K$的值域是闭的，且 $\dim\ker(L + K) = \dim\ker((L + K)^{\mathrm{t}}) < \infty$。为得出 $L + K$ 可逆，只需证明 $\ker(L + K) = \{\mathbf{0}\}$，这由命题 4.4推出。有界逆定理意味着（1.11）成立，从而完成子情形 1.1 的证明。

子情形 1.2：条件 (1.9b)。 我们利用对偶性进行论证。定义线性算子 T： $\mathrm{H}^1(\Gamma) \to (\mathrm{H}^1(\Gamma))'$ 为：

$$\langle Tv, u\rangle := \int_\Gamma \mathbf{A}^T\nabla_\Gamma v \cdot \nabla_\Gamma u + v(\mathbf{c} \cdot \nabla_\Gamma u) + (\mathbf{b} \cdot \nabla_\Gamma v)u + \mathsf{d}\, vu.$$

这与式（4.16）中的算子类似，只需将 **A**、**b** 和 **c** 分别替换为 $\mathbf{A}^T$、**c** 和 **b**。由于在当前情形下，式（1.9a）变为式（1.9b），应用子情形 1.1 可知 T是一个同构。因此，由定理 A.1（单射性与满射性的刻画）可知 T^{t}： H^1（Γ） → （ H^1（Γ））′定义为

$$\langle T^{\mathrm{t}}u, v\rangle := \langle Tv, u\rangle = \int_\Gamma \mathbf{A}^T\nabla_\Gamma v \cdot \nabla_\Gamma u + v(\mathbf{c} \cdot \nabla_\Gamma u) + (\mathbf{b} \cdot \nabla_\Gamma v)u + \mathsf{d}\, vu$$

$$= \int_\Gamma \mathbf{A}\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v + u(\mathbf{b}\cdot\nabla_\Gamma v) + (\mathbf{c}\cdot\nabla_\Gamma u)v + \mathsf{d}\,uv$$

也是一个同构，且式（1.11）成立。子情形 1.2 的证明至此完成。

情形 2： 设 $p \in (2,\infty)$，且 Γ 属于 C^1 类，或 Γ 属于 $C^{0,1}$类，并且 p 充分接近 2。若 (1.9a) 或 (1.9b) 成立，则由情形 1（$p=2$）以及基于定理 1.1 （算子 $-\mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{A}\nabla_\Gamma\cdot)$ 在 $\mathrm{W}^{1,p}_{\#}(\Gamma)$ 中的可逆性）的自举论证，可得问题 (1.10) 的唯一可解性及先验估计 (1.11)。

情形 3：设 $p \in (1,2)$，且 Γ 属于 C^1 类，或 Γ 属于 $C^{0,1}$类，1，并且 p 充分接近 2。若 (1.9a) 或 (1.9b) 成立，则将子情形 1.2 中定义的线性算子 T 重新解释为 $T : \mathrm{W}^{1,p^*}(\Gamma) \to (\mathrm{W}^{1,p}(\Gamma))'$，由情形 2（因为 $p^* > 2$）可知 T 是一个同构，因此 $T^{\mathrm{t}} : \mathrm{W}^{1,p}(\Gamma) \to (\mathrm{W}^{1,p^*}(\Gamma))'$ 也是同构，且 (1.11) 成立。至此，情形 3 的证明完成，整体证明也随之完成。□

我们现 建立了问题L^p-based Sobolev 正则性（1.10）（参见 定理 1.4).

定理 1.4 的证明定理 1.4。利用分部积分公式（3.6）（以及 引理 3.4（W^m 上的乘积法则，$^{p}(\Gamma)$），容易看出，解 $u \in \mathrm{W}^{1,\,p}(\Gamma)$ 也满足（1.10）的散度形式方程

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v = \int_\Gamma h\, v, \qquad \forall v \in \mathrm{W}^{1,p^*}(\Gamma),$$

其中 $h := f + u\mathrm{div}_\Gamma \mathsf{b} + \mathsf{b}\cdot\nabla_\Gamma u - \mathbf{c}\cdot\nabla_\Gamma u - \mathsf{d}u$。因此，基于定理 1.2（算子 $-\mathrm{div}_\Gamma(\mathrm{A}\nabla_\Gamma\cdot)$ 在 Γ 上的 $\mathrm{W}^{m+2,p}$-正则性）进行直接的自举论证，可得 $u \in \mathrm{W}^{m+2,p}(\Gamma)$ 以及估计 (1.13)。另一方面，将分部积分公式 (3.6) 应用于 (1.10)，并利用 $\mathrm{W}^{1,p^*}(\Gamma)$ 在 $\mathrm{L}^{p^*}(\Gamma)$ 中的稠密性，我们得到偏微分方程的强形式 (1.12)。证明至此完成。□

4.3. 定理 1.3 的扩展和定理 1.4

本节讨论推论 4.5和定理 4.6，进一步探讨一般标量椭圆方程的可解性。推论 4.5涉及经典的对流扩散反应方程

$$-\,\mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{A}\nabla_\Gamma u) + \mathbf{c}\cdot\nabla_\Gamma u + \mathsf{d}u = f,$$

对于该方程，作为定理 1.3和定理 1.4的推论，我们可以得到L^p意义下的适定性与高阶正则性，前提是$\mathsf{d} \geq 0$ 在 Γ 上一个正测度子集上严格为正，且，$\mathbf{c}$仅属于$\mathbf{L}^\infty_t(\Gamma)$。证明归结为验证假设（1.9a）。

另一方面，定理 4.6关注的是对流扩散方程

$$-\,\mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{A}\nabla_\Gamma u) + \mathbf{c}\cdot\nabla_\Gamma u = f,$$

假设对流项$\mathbf{c}$ 是散度$_\Gamma$自由的。该偏微分方程可视为一般方程（1.1）在$(\mathbf{b},\ \mathsf{d}) = (\mathbf{0},\ 0)$这一特殊情形，此时（1.9a）不成立。此外，只需令 w 为常数即可排除（1.9b）。因此，定理 1.3 在此情形下不适用。

Recall the notation: $\mathbf{C}^{-1,1}_t(\Gamma) := \mathbf{L}^\infty_t(\Gamma)$ and $\mathrm{C}^{-1,1}(\Gamma) := \mathrm{L}^\infty(\Gamma)$.

推论 *4.5*（对流-扩散-反应）。设 $p \in (1,\infty)$，且 Γ 属于 C^1类。考虑系数 $(A, \mathbf{c}, d) \in \mathbb{C}(\Gamma) \times L^\infty_t(\Gamma) \times L^\infty(\Gamma)$，其中 A 满足椭圆性条件 *(1.4)*，且 $d \geq 0$ 几乎处处满足 $d > 0$ 在 Γ上的一个正测度子集上成立。那么，对每个 $f \in (W^{1,p^*}(\Gamma))'$，都存在唯一的 $u \in W^{1,p}(\Gamma)$，使得

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v + (\mathbf{c}\cdot\nabla_\Gamma u)v + \mathsf{d}\,uv = \langle f, v\rangle, \qquad \forall v \in \mathrm{W}^{1,p^*}(\Gamma). \tag{4.21}$$

此外，存在常数 $C > 0$，它仅依赖于 Γ、$\mathbf{A}$、$\mathbf{c}$、d 和 p，使得

$$\|u\|_{1,p;\Gamma} \leq C\|f\|_{(\mathrm{W}^{1,p^*}(\Gamma))'}. \tag{4.22}$$

该结果对于类为 $C^{0,1}$ 的 Γ 以及 $\mathbf{A} \in \mathbb{L}^\infty(\Gamma)$ 仍然成立，只要 $p \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$，且 $\varepsilon > 0$ 充分小，其充分小程度仅依赖于 Γ 和 $\mathbf{A}$。

若在上述假设之外，Γ 还属于类 $C^{m+1,1}$，其中 m 为某个非负整数，且 $(A,c,d) \in \mathbb{C}^{m,1}(\Gamma) \times C_t^{m-1}$，$(\Gamma) \times C^{m-1,1}(\Gamma)$，则对每个 $f \in W^{m,p}(\Gamma)$，(4.21) 的解 $u \in W^{1,p}(\Gamma)$ 实际上属于 $W^{m+2,p}(\Gamma)$，并且满足

$$-\operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{A}\nabla_\Gamma u) + \mathbf{c}\cdot\nabla_\Gamma u + \mathsf{d}u = f, \qquad a.e.\ on\ \Gamma. \tag{4.23}$$

此外，存在一个常数 $C>0$，它仅依赖于 Γ、$\mathbf{A}$、$\mathbf{c}$、d 和 p，使得

$$\|u\|_{m+2,p;\Gamma} \le C\|f\|_{m,p;\Gamma}. \tag{4.24}$$

证明。由于 $0<|\{\mathsf{d}>0\}| = \big|\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\mathsf{d} \ge \tfrac{1}{n}\}\big| = \lim_{n\to\infty}|\{\mathsf{d}\ge\tfrac{1}{n}\}|$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得 $M := \{x\in\Gamma : \mathsf{d}(x) \ge \tfrac{1}{N}\}$ 具有正测度。因此，对于每个满足 $w\ge 0$ 在 Γ 上几乎处处成立的 $w\in \mathrm{W}^{1,1}(\Gamma)$，都有

$$\int_\Gamma \mathsf{d}\,w \ge \int_M \mathsf{d}\,w \ge \frac{1}{N}\int_M w,$$

这表明问题 (4.21) 满足条件 (1.9a)，其中$\mathbf{b}=\mathbf{0}$。然后，直接应用定理 1.3 和定理 1.4即可完成证明。□

定理 *4.6*（对流扩散）。设 $p\in(1,\infty)$，且 Γ 属于 C^1类。考虑系数 $(A,c)\in\mathbb{C}(\Gamma)\times L_t^\infty(\Gamma)$，其中 A 满足椭圆性条件 *(1.4)*，且 c 弱散度$_\Gamma$-自由：

$$\int_\Gamma \mathbf{c}\cdot\nabla_\Gamma w = 0, \qquad w\in \mathrm{W}^{1,1}(\Gamma). \tag{4.25}$$

那么，对于每个 $f\in(\mathrm{W}^{1,p^*}_{\#}(\Gamma))'$，存在唯一的 $u\in \mathrm{W}^{1,p}_{\#}(\Gamma)$ 使得

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\nabla_\Gamma u\cdot\nabla_\Gamma v + (\mathbf{c}\cdot\nabla_\Gamma u)v = \langle f, v\rangle, \qquad \forall v\in \mathrm{W}^{1,p^*}_{\#}(\Gamma). \tag{4.26}$$

此外，存在一个常数 $C>0$，仅依赖于 Γ、$\mathbf{A}$、$\mathbf{c}$ 和 p，使得

$$\|u\|_{1,p;\Gamma} \le C\|f\|_{(\mathrm{W}^{1,p^*}_{\#}(\Gamma))'}. \tag{4.27}$$

若 Γ 属于 $C^{0,1}$ 类，且 $\mathbf{A}\in\mathbb{L}^\infty(\Gamma)$ 满足 $p\in(2-\varepsilon,2+\varepsilon)$，其中 $\varepsilon>0$ 足够小且仅依赖于 Γ 和$\mathbf{A}$，则该结论对 Γ 仍然成立。

若除上述假设外，Γ 属于 $C^{m+1,1}$ 类（其中 m 为某个非负整数），且 $(A,c)\in\mathbb{C}^{m,1}(\Gamma)\times C_t^{m-1}$，$(\Gamma)$，那么对于每个 $f\in W^{m,p}(\Gamma)$，方程 *(4.26)* 的解 $u\in W^{1,p}(\Gamma)$ 实际上属于 $W^{m+2,p}(\Gamma)$，并且满足

$$-\operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{A}\nabla_\Gamma u) + \mathbf{c}\cdot\nabla_\Gamma u = f, \qquad a.e.\ on\ \Gamma. \tag{4.28}$$

此外，存在一个常数 $C>0$，它仅依赖于 Γ、$\mathbf{A}$、$\mathbf{c}$ 和 p，使得

$$\|u\|_{m+2,p;\Gamma} \le C\|f\|_{m,p;\Gamma}. \tag{4.29}$$

证明。**适定性：** 我们先处理 $p=2$ 的情形。注意到（如同 命题 4.4 的证明中一样），对于每个$v\in \mathrm{H}^1(\Gamma)$，我们有 $\nabla_\Gamma(uv) = v\nabla_\Gamma u + u\nabla_\Gamma v$ 几乎处处成立，因此由（4.25）可推出

$$\int_\Gamma (\mathbf{c}\cdot\nabla_\Gamma u)v = -\int_\Gamma (\mathbf{c}\cdot\nabla_\Gamma v)u, \qquad \forall u,v\in \mathrm{H}^1(\Gamma); \tag{4.30}$$

因此 $\int_\Gamma(\mathbf{c}\cdot\nabla_\Gamma u)u = 0$。由于椭圆性条件（4.26）在 $p=2$ 上的适定性以及相应的估计（4.27），均可由 Lax–Milgram 定理推出，因为椭圆性条件（1.4）和 Poincar´é–Friedrichs 不等式在$\mathrm{H}^1_{\#}(\Gamma)$ [4, 引理 2] 表明（4.26）是强制的。

对于 $p\in(2,\infty)$，问题 (4.26) 的唯一可解性以及估计 (4.27) 可由情形 $p=2$ 以及基于定理 1.1（算子–$\operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{A}\nabla_\Gamma\cdot)$ 在 $\mathrm{W}^{1,p}_{\#}(\Gamma)$ 中的可逆性）对解的可积性进行自举论证得出。因此，映射 $f\mapsto u$ 是从 $(\mathrm{W}^{1,p^*}_{\#}(\Gamma))'$ 到 $\mathrm{W}^{1,p}_{\#}(\Gamma)$ 的同构。

对于 $p\in(1,2)$，我们通过对偶性进行论证：考虑算子 $T\colon \mathrm{W}^{1,p^*}_{\#}(\Gamma)\to(\mathrm{W}^{1,p}_{\#}(\Gamma))'$，其定义为 $\langle Tv,\ u\rangle := \int_\Gamma \mathbf{A}^T\nabla_\Gamma v\cdot\nabla_\Gamma u - (\mathbf{c}\cdot\nabla_\Gamma v)u$。根据前一步关于 $p^*>2$ 的结果，该算子是同构。因此，根据定理 A.1（单射性与满射性的刻画），伴随算子 $T^{\mathrm{t}}\colon \mathrm{W}^{1,p}_{\#}(\Gamma)\to(\mathrm{W}^{1,p^*}_{\#}(\Gamma))'$

由 $\langle T^{\mathrm{t}}u,\ v\rangle := \langle Tv,\ u\rangle$ 也是同构。此外，由于恒等式（4.30）（通过密度论证可将其推广至 $u \in \mathrm{W}^{1,\,p^*}_{\#}(\Gamma)$ 和 $v \in \mathrm{W}^{1,\,p^*}_{\#}(\Gamma)$），我们可以写成

$$\langle T^{\mathrm{t}}u, v\rangle = \langle Tv, u\rangle = \int_\Gamma \mathbf{A}\nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v + (\mathbf{c}\cdot\nabla_\Gamma u)v,$$

这就是（4.26）的左端。这就完成了对（4.26）在 $p \in (1,\infty)$ 中适定性的证明。

高阶正则性： 最后，基于 定理 1.2 ($\mathrm{W}^{m+2,p}$-正则性对于算子$-\mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{A}\nabla_\Gamma\cdot)$ 在 Γ 上的结果，采用类似于 定理 1.4（一般标量椭圆方程的高阶正则性）的证明，可得恒等式（4.28）以及先验估计（4.29）。进一步细节从略。□

4.4. Γ 上的双调和问题

双调和问题对于板和斯托克斯流的建模至关重要（通过流函数公式）。除了其自身的研究价值之外，我们还将利用它在 [3, §6] 中证明由向量拉普拉斯算子的各种定义所驱动的切向量值偏微分方程的解的高阶正则性估计。考虑如下关于双调和问题 $\Delta_\Gamma^2 u = f$ 在 Γ上的弱形式：给定 $f \in (\mathrm{W}^{2,\,p^*}_{\#}(\Gamma))'$，求 $u \in \mathrm{W}^{2,\,p}_{\#}(\Gamma)$，使得

$$\int_\Gamma \Delta_\Gamma u\, \Delta_\Gamma v = \langle f, v\rangle, \qquad \forall v \in \mathrm{W}^{2,p^*}_{\#}(\Gamma). \tag{4.31}$$

接下来的两个定理讨论（4.31）的适定性和高阶正则性。

定理 *4.7*（双调和问题的适定性）。设 $p \in (1,\infty)$，并设 $p^* := \frac{p}{p-1}$ 是p的对偶指数。假设 Γ 是 C^1类的。那么，对任意 $f \in (W^{2,p^*}_{\#}(\Gamma))'$，都存在唯一的 $u \in W^{2,p}_{\#}(\Gamma)$，使其满足 *(4.31)*。此外，存在一个常数 $C>0$，仅依赖于 Γ 和 p，使得

$$\|u\|_{2,p;\Gamma} \le C\|f\|_{(\mathrm{W}^{2,p^*}_{\#}(\Gamma))'}.$$

证明。设 $v \in \mathrm{W}^{2,\,p^*}_{\#}(\Gamma)$ 满足：对每个 $u \in \mathrm{W}^{2,\,p}_{\#}(\Gamma)$，都有 $\int_\Gamma \Delta_\Gamma u\, \Delta_\Gamma v = 0$。首先注意，由于定理 1.2（算子 $-\mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{A}\nabla_\Gamma\cdot)$ 在 Γ 上的 $\mathrm{W}^{m+2,p}$-正则性），这等价于对所有$w \in \mathrm{L}^p_{\#}(\Gamma)$，都有 $\int_\Gamma w\, \Delta_\Gamma v = 0$。由此可推得 $v = 0$。</output>

另一方面，同样由定理 1.2，我们还有

$$\sup_{\substack{v\in \mathrm{W}^{2,p^*}_{\#}(\Gamma)\\ v\neq 0}} \frac{\int_\Gamma \Delta_\Gamma u\, \Delta_\Gamma v}{\|v\|_{2,p^*;\Gamma}} \gtrsim \sup_{\substack{v\in \mathrm{W}^{2,p^*}_{\#}(\Gamma)\\ v\neq 0}} \frac{\int_\Gamma \Delta_\Gamma u\, \Delta_\Gamma v}{\|\Delta_\Gamma v\|_{0,p^*;\Gamma}} = \sup_{\substack{w\in \mathrm{L}^{p^*}_{\#}(\Gamma)\\ w\neq 0}} \frac{\int_\Gamma w\, \Delta_\Gamma u}{\|w\|_{0,p^*;\Gamma}} = \|\Delta_\Gamma u\|_{0,p;\Gamma} \gtrsim \|u\|_{2,p;\Gamma}.$$

这验证了定理 A.2（Banach–Nečas–Babuška 定理）的条件，因此得到了所述的适定性和先验估计。□

我们想强调的是，前述结果成立并不要求 Γ 具有 C^2-正则性，因为该结果取决于拉普拉斯–贝尔特拉米问题的 $\mathrm{W}^{2,p}(\Gamma)$-正则性，而这只要求 Γ 为 $C^{1,1}$。作为比较，拉普拉斯–贝尔特拉米问题的 $\mathrm{W}^{1,p}(\Gamma)$-正则性要求 Γ 为 C^1，而当 Γ 属于 $C^{0,1}$ 类时并不成立，除非 p 足够接近 2。

定理 4.8（双调和问题的高阶正则性）。设 Γ 属于 $C^{m+2,1}$ 类，其中 m 为非负整数，并设 $f \in X_{m-1,p}$，其中

$$X_{m-1,p} := \begin{cases} (\mathrm{W}^{1,p^*}_{\#}(\Gamma))', & m=0,\\ \mathrm{W}^{m-1,p}_{\#}(\Gamma), & m\ge 1. \end{cases}$$

那么，式$\mathrm{W}^{2,\,p}_{\#}(\Gamma)$ 的解（(4.31)）实际上属于$\mathrm{W}^{m+3}_{\#}(\Gamma)$，并且存在 $C = C(\Gamma,p) > 0$ 使得

$$\|u\|_{m+3,p;\Gamma} \le C\|f\|_{X_{m-1,p}}.$$

证明。根据定理 1.1（当 $m=0$ 时，算子 $-\mathrm{div}_\Gamma(A\nabla_\Gamma\cdot)$ 在 $W^{1,p}_{\#}(\Gamma)$ 中的可逆性）或定理 1.2（当 $m\geq 1$ 时，算子 $-\mathrm{div}_\Gamma(A\nabla_\Gamma\cdot)$ 在 Γ 上的 $W^{m+2,p}$- 正则性），存在唯一的 $u_f\in W^{m+1,p}_{\#}(\Gamma)$，它在 (1.5) 的意义下满足 $\Delta_\Gamma u_f=f$，并且 $\|u_f\|_{m+1,p;\Gamma}\lesssim\|f\|_{X_{m-1,p}}$。因此，通过分部积分，问题 (4.31) 可等价地表述为

$$\int_\Gamma \Delta_\Gamma u\,\Delta_\Gamma v=-\int_\Gamma \nabla_\Gamma u_f\cdot\nabla_\Gamma v=\int_\Gamma u_f\,\Delta_\Gamma v,\qquad \forall v\in W^{2,p^*}_{\#}(\Gamma).$$

再次由定理 1.2，我们推得 $\Delta_\Gamma u=u_f$ 在 Γ 上几乎处处成立，且 $u_f\in W^{m+1,\,p}_{\#}(\Gamma)$。因此，由于 Γ 属于 $C^{m+2,\,1}$类，再次由定理 1.2，我们推得 $u\in W^{m+3,\,p}_{\#}(\Gamma)$，并且

$$\|u\|_{m+3,p;\Gamma}\lesssim\|u_f\|_{m+1,p;\Gamma}\lesssim\|f\|_{X_{m-1,p}}.$$

至此，证明完成。 □

请注意，我们只用到了 $W^{m,\,p}(\Gamma)$-正则性，以及 Laplace– Beltrami 问题在 $W^{1,\,p}_{\#}(\Gamma)$ 中的适定性，进而得出双调和问题（4.31）的适定性和高阶正则性。

致谢

作者感谢 Giuseppe Savar´e 教授（博科尼大学），他对本稿早期版本提出的深刻意见促使我们精简论文的整体论证并改进其结果。

附录 A. 自反巴拿赫空间中的变分问题

本节回顾自反巴拿赫空间中变分问题适定性的相关结果。该主题的经典参考文献包括 [13, 9, 6]。我们还提及近期的一项工作 [17]（西班牙语）。

对于任意连续线性算子 $T\colon X\to Y'$（即 $T\in L(X,Y')$），其中 X 和 Y 是巴拿赫空间，我们记 $T'\colon Y''\to X'$ 为其巴拿赫伴随算子，其定义为：对每个 $G\in Y''$，$T'(G)=G\circ T$。若 Y 是自反的，我们还定义 $T^{\mathrm t}\colon Y\to X'$ 为 $T'\circ\mathcal{J}_Y$，其中 $\mathcal{J}_Y\colon Y\to Y''$ 是将 Y 典范嵌入到其二重对偶 Y'' 中的映射。在这种情况下，T 和 $T^{\mathrm t}$ 通过以下恒等式相关联

$$\langle T(x),y\rangle_{Y'\times Y}=\langle T^{\mathrm t}(y),x\rangle_{X'\times X},\qquad \forall x\in X,\ y\in Y. \tag{A.1}$$

算子 T 和 $T^{\mathrm t}$ 的单射性与满射性之间的关系由以下结果给出 [6,第2节.7]。

定理 A.1（单射性与满射性的刻画）。设 X 和 Y 是两个巴拿赫空间，且 Y 自反，并考虑 $T\in\mathscr{L}(X,Y')$。那么，以下等价关系成立

$$\textit{i)}\quad T\ \textit{is surjective}\iff T^{\mathrm t}\ \textit{is injective and has closed range}\iff \textit{there is } \alpha>0 \textit{ such that } \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}}\frac{\langle T(x),y\rangle}{\|x\|}\geq\alpha\|y\|,\quad\forall y\in Y$$

$$\textit{ii)}\quad T\ \textit{is injective and has closed range}\iff T^{\mathrm t}\ \textit{is surjective}\iff \textit{there is } \widetilde{\alpha}>0 \textit{ such that } \sup_{\substack{y\in Y\\ y\neq 0}}\frac{\langle T(x),y\rangle}{\|y\|}\geq\widetilde{\alpha}\|x\|,\quad\forall x\in X$$

.

定理 A.1 的一个直接推论是著名的 Banach–Nečas–Babuška 定理。

定理 A.2 (Banach–Nečas–Babuška)。 设 X 和 Y 是两个巴拿赫空间，且 Y 自反，并考虑 $T \in \mathscr{L}(X, Y')$。那么， T 可逆（因此根据有界逆定理， $T^{-1} \in \mathscr{L}(Y', X)$ 也可逆）当且仅当以下两组条件之一成立

i) *If $x \in X$ is such that $\langle T(x), y\rangle = 0$ for each $y \in Y$, then $x = 0$.*
ii) *There is $\alpha > 0$ such that*
$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\langle T(x), y\rangle}{\|x\|} \geq \alpha\|y\|, \quad \forall y \in Y.$$

i)' *If $y \in Y$ is such that $\langle T(x), y\rangle = 0$ for each $x \in X$, then $y = 0$.*
ii)' *There is $\widetilde{\alpha} > 0$ such that*
$$\sup_{\substack{y\in Y\\ y\neq 0}} \frac{\langle T(x), y\rangle}{\|y\|} \geq \widetilde{\alpha}\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

此外，若 T 可逆，则"最优"常数 α 和 $\widetilde{\alpha}$ 相同，即

$$\alpha_{opt} = \inf_{\substack{y\in Y\\ y\neq 0}} \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\langle T(x), y\rangle}{\|x\|\|y\|} = \inf_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \sup_{\substack{y\in Y\\ y\neq 0}} \frac{\langle T(x), y\rangle}{\|x\|\|y\|},$$

并且还成立：

$$\|T^{-1}\|_{\mathscr{L}(Y',X)} = \|(T^{\mathrm{t}})^{-1}\|_{\mathscr{L}(X',Y)} = \frac{1}{\alpha_{opt}}.$$

定理 A.1 和 定理 A.2 中所述泛函分析框架的发展，是数十年来研究的成果，其基础是 Ne˘cas 的开创性工作 [31, 32], ，之后又经 Hayden 的工作进一步发展 [21],Babu˘ska [1], Babu˘ska 和 Aziz [2] 以及 Simader [35]; 关于其历史发展，详见 [33] 。经典参考文献 第 章中给出了 [13,定理 A.2 2] 的完整且自成体系的推导（另见 [17,第 ´章 5]）。

注 A.3 (满射算子的连续逆)。 若 $T \in \mathscr{L}(X, Y')$ 是满射的（但不一定是单射），则存在常数 $\beta > 0$，使得对于 $F \in Y'$，存在 $x \in X$ 满足 $T(x) = F$ 且 $\|x\| \leq \frac{1}{\beta}\|F\|$。若 X 是自反的，则 β 可取为定理 *A.1* 的第 *i)* 项所给出的常数 α。

Appendix B. Regularity estimates in flat domains

本节包含平坦区域中椭圆型偏微分方程高阶索伯列夫正则性的结果，这些结果对我们在第4节中的论证至关重要。

以下是 [10,引理 2]的一个具体化。

命题 B.1 （一般标量椭圆方程的适定性）。 设Ω 为R^d 的一个开连通子集，具有 C^1 边界，并设$\mathbf{A} \in \mathbb{C}(\Omega)$ 在Ω上一致椭圆，即存在 $\Lambda > 0$ 使得

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi} \geq \Lambda|\boldsymbol{\xi}|^2, \qquad \forall \xi \in \mathrm{R}^d, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

此外，设 $p \in (1, \infty)$ 且 $q \in (1, d)$。则对每个$\mathbf{f} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ 和 $f \in \mathrm{L}^q(\Omega)$，该问题

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\mathbf{A}\nabla u) &= \operatorname{div}\mathbf{f} + f, \qquad \text{in } \Omega, \\ u &= 0, \qquad \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \tag{B.1}$$

有一个弱解 $u \in \mathrm{W}^{1,s}_0(\Omega)$，其中 $s := \min\{p, \frac{dq}{d-q}\}$。此外，存在仅依赖于$\Omega$、$\mathbf{A}$、 p 和 q的常数 $C > 0$ ，使得如下先验估计成立

$$\|u\|_{1,s;\Omega} \leq C\left(\|\mathbf{f}\|_{0,p;\Omega} + \|f\|_{0,q;\Omega}\right).$$

此外， u 在如下意义下是唯一的：若对于某个 $t \in (1, \infty)$ 存在一个弱解 $\widetilde{u} \in \mathrm{W}^{1,t}_0(\Omega)$ 满足(B.1)，那么$\widetilde{u} = u$几乎处处

备注 *B.2*（*Meyers*）。由 [10, 注 2] 和 [27, 定理 1] 可知，若 Ω 仅属于 C^0*,1* 类，且 A 仅属于 $L^\infty(\Omega)$，则存在一个仅依赖于 Ω 和 A 的 $\varepsilon > 0$，使得只要$p, s \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$，命题 *B.1* 也成立。

下述关于（B.1）之解的高阶正则性的结果，是L^p理论的一个简单推论，该理论见于 [18, 第 9]章。为完整起见，我们在下面给出一个简短证明。

命题 B.3（高阶正则性）。 除命题 *B.1* 的假设外，假设存在 $m \in \mathbb{N}$，使得Ω 属于类 $C^{m,\,1}$，$\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m-1,\,1}(\Omega)$，$\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{m,\,p}(\Omega)$ 且 $f \in \mathrm{W}^{m,\,q}(\Omega)$。则 $u \in \mathrm{W}^{m+1,\,s}(\Omega)$ 且

$$\|u\|_{m+1,s;\Omega} \le \widetilde{C}\,(\|\mathbf{f}\|_{m,p;\Omega} + \|f\|_{m,q;\Omega})\,, \tag{B.2}$$

其中 $s := \text{最小值}\{p, \frac{dq}{d-q}\}$，且 $\widetilde{C} > 0$ 仅依赖于 Ω、$\mathbf{A}$、p 和 q。

证明。首先注意，对于 $u \in \mathrm{W}^{2,s}(\Omega)$，我们可以写成 $\operatorname{div}(\mathrm{A}\nabla u) = \mathrm{A} : \nabla^2 u + \operatorname{div}(\mathrm{A}^T) \cdot \nabla u =: Lu$，其中 $\operatorname{div}(\mathrm{A}^T)$ 在 $m = 1$ 时属于 $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$，或在 $m \ge 2$ 时属于 $\mathrm{C}^{m-2,1}(\Omega)$。因此，由于 [18, Theorem 9.15] 适用于 $m = 1$，且 [18, Theorem 9.19] 适用于 $m \ge 2$，可知 L 是从 $\mathrm{W}^{m+1,s}(\Omega) \cap \mathrm{W}^{1,s}_0(\Omega)$ 到 $\mathrm{W}^{m-1,s}(\Omega)$ 的线性连续双射。由有界逆定理可得，对于每个 $g \in \mathrm{W}^{m-1,s}(\Omega)$，都有 $\|L^{-1}g\|_{m+1,s;\Omega} \lesssim \|g\|_{m-1,s;\Omega}$。特别地，取 $g := -(\operatorname{div}\mathbf{f} + f)$，它满足 $\|g\|_{m-1,s;\Omega} \lesssim \|\mathbf{f}\|_{m,s;\Omega} + \|f\|_{m-1,s;\Omega} \lesssim \|\mathbf{f}\|_{m,p;\Omega} + \|f\|_{m,q;\Omega}$，这意味着 (B.1) 的解 u 实际上属于 $\mathrm{W}^{m+1,s}(\Omega)$，并满足先验估计 (B.2)。□

参考文献

[1] I. Babuˇska. 有限元方法的误差界。Numer. Math., 16:322–333, 1970/71.[2] I. Babuˇska 和 A. K. Aziz. 有限元方法数学基础讲座综述。载于《有限元方法的数学基础及其在偏微分方程中的应用》（1972年马里兰大学巴尔的摩分校研讨会论文集），第1–359页。Academic Press, New York-London, 1972。G. Fix 和 R. B. Kellogg 协助完成。[3] G. A. Benavides、R. H. Nochetto 和 M. Shakipov. 最小正则性闭流形上偏微分方程的 L^p 型索伯列夫理论：向量值问题。arXiv:2508.11109. [4] A. Bonito、A. Demlow 和 R. H. Nochetto. 拉普拉斯-贝尔特拉米算子的有限元方法。载于《几何偏微分方程》第一部分，Handb. Numer. Anal. 第21卷，第1–103页。Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2020. [5] L. Bouck、R. H. Nochetto 和 V. Yushutin. 具有一般取向有序状态的向列液晶薄膜流体动力学模型。J. Nonlinear Sci., 34(1):论文编号5，共63页，2024. [6] H. Brezis. 泛函分析、索伯列夫空间与偏微分方程。Universitext. Springer, New York, 2011. [7] S.-S. Byun 和 L. Wang. 雷芬伯格区域上的 BMO 系数椭圆方程。Comm. Pure Appl. Math., 57(10):1283–1310, 2004. [8] J. Cahn、P. Fife 和 O. Penrose. 扩散诱导晶界运动的相场模型。Acta Mater., 45(10):4397–4413, 1997. [9] P. G. Ciarlet. 线性与非线性泛函分析及其应用。工业与应用数学学会，Philadelphia, PA, 2013.[10] G. Dolzmann 和 S. M¨uller. 利用 L^p 理论估计椭圆系统的格林矩阵。Manuscripta Math., 88(2):261–273, 1995. [11] G. Dziuk 和 C. M. Elliott. 曲面偏微分方程的有限元方法。Acta Numer., 22:289–396, 2013.[12] C. M. Elliott 和 B. Stinner. 利用曲面有限元对双相几何生物膜进行建模与计算。J. Comput. Phys., 229(18):6585–6612, 2010.[13] A. Ern 和 J.-L. Guermond. 有限元理论与实践，应用数学科学第159卷。Springer-Verlag, New York, 2004.[14] L. C. Evans. 偏微分方程，数学研究生教材第19卷。美国数学会，Providence, RI，第二版，2010.[15] P. C. Fife、J. W. Cahn 和 C. M. Elliott. 扩散诱导晶界运动的自由边界模型。Interfaces Free Bound., 3(3):291–336, 2001. [16] R. L. Foote. 距离函数的正则性。Proc. Amer. Math. Soc., 92(1):153–155, 1984. [17] G. N. Gatica. 泛函分析导论。Editorial Revert´e, 2024. 理论与应用。（第二版）。[18] D. Gilbarg 和 N. S. Trudinger. 二阶椭圆偏微分方程。数学经典。Springer-Verlag, Berlin, 2001。重印1998年版。[19] gpr1 (https://math.stackexchange.com/users/115197/gpr1). 紧流形上的索伯列夫空间的等价描述。Mathematics Stack Exchange. URL:https://math.stackexchange.com/q/3516631（版本：2020-01-21）。[20] A. Grigor'yan. 热核与流形上的分析，AMS/IP 高等数学研究第47卷。美国数学会，Providence, RI；International Press, Boston, MA, 2009. [21] T. L. Hayden. 自反巴拿赫空间中的表示定理。Math. Z., 104:405–406, 1968. [22] E. Hebey 和 F. Robert. 流形上的索伯列夫空间。载于《全球分析手册》，第375–415页，1213。Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2008.[23] A. J. James 和 J. Lowengrub. 用于含不溶性表面活性剂界面流的表面活性剂守恒流体体积法。J. Comput. Phys., 201(2):685–722, 2004.[24] D. Jerison 和 C. E. Kenig. Lipschitz区域上的非齐次狄利克雷问题。J. Funct. Anal., 130(1):161–219, 1995. [25] B. Kov´acs 和 B. Li. 演化曲面偏微分方程后向差分时间离散的最大正则性及其在非线性问题中的应用。IMA J. Numer. Anal., 43(4):1937–1969, 2023. [26] G. Leoni. 索伯列夫空间入门，数学研究生教材第105卷。美国数学会，Providence, RI, 2009.

[27] N. G. Meyers. 二阶椭圆散度型方程解的梯度估计。Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3), 17:189–206, 1963.[28] N. G. Meyers 和 J. Serrin. $H = W$. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 51:1055–1056, 1964. [29] T.-H. Miura. 曲线薄区域中的 Navier-Stokes 方程，第一部分：Stokes 算子的一致估计。J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 29(2):149–256, 2022.[30] C. B. Morrey, Jr. 变分法中的多重积分。数学经典。Springer-Verlag, Berlin, 2008。重印1966年版 [MR 0202511].[31] J. Neˇcas. 关于一种求解邻近变分型椭圆偏微分方程的方法。Czechoslovak Math. J., 11:632–633, 1961.[32] J. Neˇcas. 关于一种求解邻近变分型椭圆偏微分方程的方法。Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3), 16:305–326, 1962.[33] N. Saito. 关于巴拿赫-内卡斯-巴布什卡定理及算子 Kato 最小模的注记。arXiv 电子预印本，页码 arXiv:1711.01533，2017年11月。[34] S. Shahshahani. 可微流形入门课程。Dover Publications, Inc, Mineola, New York, 2016. [35] C. G. Simader. 关于狄利克雷边值问题，数学讲义第268卷。Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972。基于 G˙arding 不等式推广的 L^p理论。[36] N. Sochen、R. Kimmel 和 R. Malladi. 低层视觉的一般框架。Trans. Img. Proc., 7(3):310–318, 1998年3月。[37] H. A. Stone. 变形界面上表面活性剂输运的时变对流扩散方程的简易推导。Phys. Fluids, 2(1):111–112, 1990年1月。[38] M. E. Taylor. 偏微分方程 III：非线性方程，应用数学科学第117卷。Springer International Publishing, 2023. [39] J. Weber. 索伯列夫空间导论。MM692课程讲义（2018年12月23日）。坎皮纳斯州立大学。URL:https: // www.math.stonybrook.edu/~joa/PUBLICATIONS/SOBOLEV.pdf（检索日期：2025-09-14）。

数学系，马里兰大学帕克分校，马里兰州 20742电子邮件地址：gonzalob@umd.edu，
rhn@umd.edu，shakipov@umd.edu