arXiv:2603.02169v1 [math.AP] 2 Mar 2026

库仑/里斯气体的交换子、平均场与超临界平均场极限

MATTHEW ROSENZWEIG

ABSTRACT. 本文旨在作为作者在 2025 *Journées équations aux dérivées partielles*Aussois 举行的“库仑/里斯气体的交换子估计与平均场极限”报告的配套文章。本文旨在简明、通俗地介绍近期针对库仑/里斯相互作用相关调制能量所获得的尖锐交换子估计，以及这些估计如何通过调制能量方法，为库仑/里斯气体动力学的平均场极限和超临界平均场极限带来最优结果。本文主要介绍以下研究成果：[RSb、RS25a]（与 Serfaty 合作），以及 [HCRS25、HCRS25]（与 Hess-Childs 和 Serfaty 合作）。

1. INTRODUCTION

研究由 N 个不同点 $X_N=(x_1,\dots,x_N)\in(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^N$ 组成的系统时，其相互作用能为

$$\sum_{1\le i\ne j\le N}\mathsf{g}(x_i,x_j), \tag{1.1}$$

人们由此被引导去比较经验测度序列 $\mu_N:=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{x_i}$ 与一个平均的、或平均场密度 μ。这一比较可方便地通过考虑 μ_N 与 μ 之间的调制能量，或（平方）“距离”来进行，其定义为

$$\mathsf{F}_N(X_N,\mu):=\frac{1}{2}\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2\setminus\triangle}\mathsf{g}(x,y)d\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{x_i}-\mu\Big)(x)d\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{x_i}-\mu\Big)(y), \tag{1.2}$$

其中 $\triangle\subset(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2$ 表示对角线。从物理上讲，该量对应于一个由位于位置 x_i 处的 N 个离散电荷所组成的系统的总能量，该系统被背景电荷分布 μ 所中和，并且已去除每个电荷的无限自相互作用，后者对应于切除对角线。

量 (1.2) 起源于对库仑/黎曼气体的统计力学研究[SS15a, SS15b, RS16, PS17]，后来被用于平均场动力学的推导 [Due16, Ser20, NRS22]及后续工作。利用调制能量来证明稳定性估计的想法是经典的，据本文作者所知，该术语最早出现在 Brenier 颇具影响的工作 [Bre00]中。在非奇异情形下，对角线可以重新插入，此时调制能量与统计学文献中所称的最大均值差异（MMD） [GBR+06, GBR+07, GBR+12]的平方相一致，而最大均值差异是一种积分概率度量 [M¨ul97]。针对不同核选择的最大均值差异在统计学和机器学习中被广泛用作概率测度之间的距离（参见例如 [MD24, KNSS22, HWAH23]）。

这项比较中的一个关键点是控制沿输运 v 方向 $\mathbb{R}^{\mathsf{d}}\to\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$的 F_N 导数，即这些量：

$$\frac{d^n}{dt^n}\Big|_{t=0}\mathsf{F}_N((\mathbb{I}+tv)^{\oplus N}(X_N),(\mathbb{I}+tv)\#\mu)=\frac{1}{2}\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2\setminus\triangle}\nabla_x^{\otimes n}\mathsf{g}(x,y):(v(x)-v(y))^{\otimes n}d(\mu_N-\mu)^{\otimes 2}, \tag{1.3}$$

其中，$\mathbb{I}:\ \mathbb{R}^{\mathsf{d}}\to\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$是恒等映射，$(\mathbb{I}+tv)^{\oplus N}(X_N):=(x_1+tv(x_1)\dots,x_N+tv(x_N))$，而 : 表示张量之间的内积。这里，$\nabla^{\otimes n}$ 表示分量为$(\partial_{\vec{\alpha}})_{\vec{\alpha}\in[\mathsf{d}]^n}$的 n阶张量。

M.R. 得到了美国国家科学基金会（NSF）项目 DMS-2441170、DMS-2345533 和 DMS-2342349 的资助。

对于平均场极限的应用， v 是当 $N \to \infty$时极限动力学的速度场。对于涨落的中心极限定理（CLT）（对下一阶的描述）的应用，v 是沿着伴随线性化平均场流演化的测试函数的梯度 [HRS、CN25]，这些不等式是正则吉布斯系综涨落的“输运”方法的核心 [LS18、BLS18、Ser23、PS25]（参见随机矩阵理论中的环方程／Dyson–Schwinger 方程，例如 [BG13、BG24、BBNY19]）。

所需的控制可由如下形式的泛函不等式给出

$$|(1.3)| \le C_1(\mathsf{F}_N(X_N,\mu) + C_2 N^{-\alpha}), \tag{1.4}$$

其中 $\alpha \in (0,\infty]$ 取决于 d、g， $C_1 > 0$ 是一个依赖于 d、g n、v 的常数，而 $C_2 > 0$ 取决于 d n、g μ。正如 [Ros20], 所观察到的，表达式 (1.3) 可视为交换子的二次型，类似于著名的 Calder´on 交换子 [Cal80, CM78, CJ87, SSS19]。事实上，忽略对角线的排除条件，

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^2} (v(x)-v(y))\cdot\nabla_x \mathsf{g}(x,y) f(x) g(y) dxdy = \Big\langle f, \Big[v\cdot, \nabla \mathsf{g} * \Big] g \Big\rangle_{L^2}, \tag{1.5}$$

其中 $\langle \cdot,\ \cdot \rangle_{L^2}$ 表示 L^2 内积。因此，形如 (1.4) 的估计称为交换子估计。表达式 (1.3) 还具有应力-能量张量结构，这一点将在第2.1节详述。

迄今为止的讨论涉及一般的（条件）正定核 g。若要有望证明形如 (1.4) 的泛函不等式，就需要对g作出一些假设。对于应用而言，奇异相互作用尤为重要且相关，其典型例子是对数/里斯势[1]定义如下

$$\mathsf{g}(x,y) = \mathsf{g}(x-y) := \begin{cases} \frac{1}{\mathsf{s}}|x-y|^{-\mathsf{s}}, & \mathsf{s} \neq 0 \\ -\log|x-y|, & \mathsf{s} = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

我们考虑任意维数 $\mathsf{d} \ge 1$，并假设 $-2 < \mathsf{s} < \mathsf{d}$。除一个归一化常数 $\mathsf{c}_{\mathsf{d},\mathsf{s}}$外，势函数 g 是分数阶拉普拉斯算子 $(-\Delta)^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}} = |\nabla|^{\mathsf{d}-\mathsf{s}}$的基本解，即 $|\nabla|^{\mathsf{d}-\mathsf{s}}\mathsf{g} = \mathsf{c}_{\mathsf{d},\mathsf{s}}\delta_0$。情形 $0 \le \mathsf{s} < \mathsf{d}$ 和 $-2 < \mathsf{s} < 0$ 分别称为奇异区域和非奇异区间，这是因为 g 在原点处的行为不同。限制 $\mathsf{s} > -2$ 是自然的，因为当 $\mathsf{s} = -2$时，Riesz 势不再是条件正定的。[2] 将范围限制在势区间 $\mathsf{s} < \mathsf{d}$ 内（此时 g 局部可积），是为了排除超奇异情形；本文所考虑的平均场类型并不涵盖这种情形（例如参见[HLSS18、HSST21]）。情形 $\mathsf{s} = \mathsf{d}-2$ 对应于静电学/引力中的经典库仑势。基于这一阈值，将相互作用称为次库仑型（若 $\mathsf{s} < \mathsf{d}-2$）和超库仑型（若 $\mathsf{s} > \mathsf{d}-2$）是很方便的。更一般地，形式为 (1.6) 的长程相互作用在物理学 [DRAW02], 逼近理论 [BHS19], 和机器学习 [AHS23、HWAH23、HBGS23、HHA+23]中都发挥着重要作用——这里只列举几个领域。关于考虑 (3.1) 形式系统的动机，讲义 [Ser24]中有详尽综述。

专门讨论里斯势，并聚焦于一阶 $n = 1$ 情形，估计式（1.4）最初由 Lebl´e 和 Serfaty [LS18] 在二维库仑情形中证明，随后 Serfaty 将其推广至超库仑情形 [Ser20]。证明依赖于识别式（1.3）中上述应力-能量张量结构，并运用分部积分。随后，作者 [Ros20]利用式（1.3）中的交换子结构，为库仑情形给出了新的证明。之后，Q.H. Nguyen 与 Serfaty [NRS22] 采用这一交换子视角，证明了适用于整个奇异区域以及更广泛的一类黎曼型相互作用（包括伦纳德-琼斯型势）的所需泛函不等式。随后，NRS22] 的方法也被推广至

[1]由于对数情形是 Riesz 情形的 $\mathsf{s} \to 0$ 极限，“里斯”一词始终包含对数情形。[2]我们称核 $k\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 为 *conditionally positive definite (CPD)*，当且仅当对任意质量为零的有符号 Borel 测度 ρ，成立 $\int_{(\mathbb{R}d)_2} k(x,y)d\rho(x)d\rho(y) \ge 0$。

非奇异区间，相关工作由 [RSW]与 Slepˆcev 和 Wang 合作完成。正如 [RSb], 所指出的，应力-能量视角与交换子视角实际上是同一事物的两个方面。这些泛函不等式至关重要，不仅用于证明里斯气体涨落的中心极限定理 [LS18, Ser23, PS25],，也用于推导平均场极限 [Ser20, Ros22b, Ros22a, NRS22, CdCRS23, RSb, PCJ25]和大偏差原理 [HC23]。它们还被用于证明粒子量子系统的经典极限与平均场极限的联合极限 [GP22], ，以及经典系统 [HKI21, Ros23, M´24, RS25a] 和粒子量子系统 [Ros21, Por23] 的超临界平均场极限。读者将在下文看到两项应用：平均场极限和超临界平均场极限。

对于这些泛函不等式，核心问题一直是确定加性误差的最优大小，即（1.4）中的指数 α，它先验地依赖于 d 和 s。在讨论最优性时，恰当的比较对象是 $\mathrm{F}_N(X_N,\mu)$ 的最小值。当 $0 \le \mathrm{s} < \mathrm{d}$ 时，已知 $\mathrm{F}(X_N,\mu) + \log(N\|\mu\|_{L^\infty})\, 2\mathrm{d}N \quad \mathbf{1}_{\mathrm{s}=0} \ge -C\|\mu\|\, \mathrm{s}\, \mathrm{d}_{L^\infty} N\mathrm{s}\, \mathrm{d}^{-1}$ for $C = C(\mathrm{d},\mathrm{s}) > 0$，且这一下界是锐利的 [RSb, HCRS25]。$\mathrm{s} = 0$ 情形中的对数项并非像 $\|\mu\|\, \mathrm{s}\, \mathrm{d}_{L^\infty} N\mathrm{s}\, \mathrm{d}^{-1}$ 那样的加性误差；相反，恰当的考察对象是 $\mathrm{F}(X_N,\mu)+\log(N\|\mu\|_{L^\infty})\, 2\mathrm{d}N \quad \mathbf{1}_{\mathrm{s}=0}$。要控制（1.3）的大小，右端也必须非负。因此，所能期望的最佳误差大小为 $N\mathrm{s}\,\mathrm{d}^{-1}$。当 $-2 < \mathrm{s} < 0$ 时，调制能量非负（如上所述，它是一个平方最大均值差异），其最小值为 $\propto N\mathrm{s}\,\mathrm{d}^{-1}$ [HCRS]。此外，由于相互作用是非奇异的，泛函不等式成立且无需加性误差 [RSW]。

直到最近，作者及其合作者才完成了证明最优 $N_{\mathrm{s}\,\mathrm{d}}{}^{-1}$ 误差速率的研究计划：首先是库仑情形 [LS18 、 Ser23 、 Ros23], ，然后是整个（超）库仑情形 [RSb], ，最后是整个奇异里斯情形 [HCRS25]。这一研究计划的完成，得出了调制能量距离下平均场极限的最优收敛速率，以及最优标度假设下超临界平均场极限的收敛速率。此外，这项成果对于研究热平衡内外围绕平均场极限的涨落也至关重要 [LS18、Ser23、PS25、HRS、RSa、Ros]。

本文余下部分将介绍前文所述的结果及其应用。全文安排如下。第 2 节以定理 2.1 的形式给出最优交换子估计，并讨论其证明（第 2.1 节和第 2.2 节）；随后介绍局部化和高阶变体——定理 2.5 和定理 2.6 （第 2.3 节）；最后讨论输运正则性和缺陷估计（第 2.4 节）。第 3 节转向平均场极限，回顾相关背景和主要结果定理 3.1（第 3.1 节和第 3.2 节），再说明交换子估计和调制能量在定理 3.1 证明中的作用（第 3.3 节），包括正则性假设（第 3.4 节），最后简要讨论称为调制自由能的正温度推广（第 3.5 节）。最后，第 4 节专门讨论超临界平均场极限：回顾平均场/准中性联合区制（第 4.1 节）；讨论尺度假设和先前研究（第 4.3 节）；给出主要结果定理 4.1 的非正式表述（第 4.5 节）；概述证明方法；并以关于最优性的评论（第 4.6 节）以及向亚库仑情形（第 4.7 节）和非单动量区制（第 4.8 节）的推广作结。

致谢。 作者感谢 2025 *Journ´ees ´equations aux d´eriv´eespartielles*的组织者，给予他机会在 Aussois 这处风景优美、令人振奋的环境中展示研究成果；他也感谢 Centre Paul-Langevin 的工作人员给予热情款待。他还感谢数学计算与实验研究所（ICERM）的盛情接待。他在该研究所 2021 年秋季学期的“色散方程与波演化方程中的哈密顿方法”项目期间完成了本项目的部分研究。此外，他也感谢纽约大学的库朗数学科学研究所，在他于 2021 年 11 月和 2024 年 4 月访问期间给予接待；他所报告的研究有一部分是在那里完成的。最后，

最重要的是，作者感谢他的合作者 Sylvia Serfaty 和 Elias Hess-Childs；若没有他们，这里所述的研究成果便无法实现。

2. Commutator estimates

我们将详细阐述引言中重点介绍的 Riesz 势的交换子估计。为简化记号，给定点构型 X_N、参考测度 μ 和向量场v，记作

$$n \in \mathbb{N}, \qquad \mathsf{A}_n[X_N,\mu,v] := \int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2\setminus\triangle} \nabla \mathsf{g}(x-y)\cdot(v(x)-v(y))d\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i}-\mu\Big)^{\otimes 2}(x,y). \tag{2.1}$$

以下定理总结了全局一阶交换子估计的最新进展，其中结合了 [NRS22、RS23、RSb、HCRS25、RSW]的结果。特别地，在下文的（2.4）、（2.5）中取 $p=\infty$，即可得到所述的最优 $N^{\frac{\mathsf{s}}{\mathsf{d}}-1}$ 加性误差。如上所述，在非奇异情形（2.7）中不存在加性误差。比较次库仑估计（2.5）和（2.6）可知，后者的输运正则性是最优的，尽管其加性误差并非最优；而前者的加性误差是最优的，尽管其输运正则性并非最优。我们将在第2.4节进一步讨论这一点。稍后，我们将在第2.3节讨论定理2.1向局部化交换子和高阶交换子的推广。

定理 2.1. 设 $-2<\mathsf{s}<\mathsf{d}$。设 $\mu\in L^1\cap L^p$ 对于 $\mathsf{d}\,\mathsf{d}-\mathsf{s}<p\le\infty$ 满足 $\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} d\mu = 1$，并与 μ相关，定义长度尺度

$$\lambda := (N\|\mu\|_{L^p})^{-\frac{1}{\mathsf{d}}}, \tag{2.2}$$

$$\kappa := (N^{\frac{1}{\mathsf{s}+1}}\|\mu\|_{L^p})^{-\frac{1}{\mathsf{d}}}, \tag{2.3}$$

当 $-2<\mathsf{s}\le 0$时，假设 $\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}|\mathsf{g}|(x-y)d|\mu|^{\otimes 2}<\infty$，以确保调制能量有限。设 v 为一个利普希茨向量场。那么对于任意两两不同的点构型 $X_N\in(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^N$，以下结论成立。

[RSb] 若 $\mathsf{s}\ge\max(0,\mathsf{d}-2)$，则

$$|\mathsf{A}_1[X_N,\mu,v]|\le C\|\nabla v\|_{L^\infty}\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu)-\frac{\log\lambda}{2N}\mathbf{1}_{\mathsf{s}=0}+C_p\|\mu\|_{L^p}\lambda^{\frac{\mathsf{d}(p-1)}{p}-\mathsf{s}}\Big). \tag{2.4}$$

[HCRS25] 若 $0\le\mathsf{s}<\mathsf{d}-2$，则对任意 $\mathsf{a}\in(\mathsf{d},\mathsf{d}+2)$，

$$\begin{aligned}&|\mathsf{A}_1[X_N,\mu,v]|\\ &\quad\le C(\|\nabla v\|_{L^\infty}+\||\nabla|^{\frac{\mathsf{a}}{2}}v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{a}-2}}}\mathbf{1}_{\mathsf{a}>2})\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu)-\frac{\log\lambda}{2N}\mathbf{1}_{\mathsf{s}=0}+C_p\|\mu\|_{L^p}\lambda^{\frac{\mathsf{d}(p-1)}{p}-\mathsf{s}}\Big),\end{aligned} \tag{2.5}$$

[NRS22，RS23] 且对任意 $\mathsf{d}\,\mathsf{d}-\mathsf{s}-1<p\le\infty$，

$$\begin{aligned}&|\mathsf{A}_1[X_N,\mu,v]|\\ &\quad\le C(\|\nabla v\|_{L^\infty}+\||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}}v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}}}\mathbf{1}_{\mathsf{s}<\mathsf{d}-2})\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu)+C_p\|\mu\|_{L^p}\kappa^{\frac{\mathsf{d}(p-1)}{p}-\mathsf{s}}(1-(\log\kappa)\mathbf{1}_{\mathsf{s}=0})\Big).\end{aligned} \tag{2.6}$$

[RSW] 若 $-2<\mathsf{s}<0$，则

$$|\mathsf{A}_1[X_N,\mu,v]|\le C(\|\nabla v\|_{L^\infty}+\||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}}v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}}}\mathbf{1}_{\mathsf{s}<\mathsf{d}-2})\mathsf{F}_N(X_N,\mu) \tag{2.7}$$

在所有情形下，常数 $C>0$ 仅取决于d、s，而常数 C_{a}、$C_p>0$ 还分别取决于a p。

注 2.2。 此处，最优性是指“最坏情形”意义下的最优性，即存在一个点构型 X_N 能够达到该界。这应与“平均”意义下的情形加以区分，在后者中， $X_N \sim f_N \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^N)$，并对 $\mathbb{E}_{X_N\sim f_N}[|(1.3)|]$ 进行估计。众所周知，取平均可能会得到更小的误差。例如，若 $f_N \sim \mu^{\otimes N}$(即 μ-独立同分布)，则 $\mathbb{E}_{X_N\sim f_N}[|(1.3)|] \approx N^{-1}$。更一般地，可以证明，对于有界相互作用，高温/熵型交换子估计 [JW18、LLN20]，甚至某些里斯情形 [DGR。

注 2.3。 定理 2.1（及其证明）在平坦环面上同样成立，只需作相应的修改 $\mathbb{T}^{\mathsf{d}}$ 此时，g 取为 $|\nabla|^{\mathsf{d}-\mathsf{s}}\mathsf{g} = \mathsf{c}_{\mathsf{d},\,\mathsf{s}}(\delta_0 - 1)$ 的解。

给定一个测度 ν，其密度属于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})$ 且满足 $\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} d\nu = 1$，令 $f := \nu - \mu$，则可找到一列两两不同的点配置 X_N，使得当 $N \to \infty$ 时，

$$\mathsf{F}_N(X_N, \mu) \to \frac{1}{2}\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} \mathsf{g}(x-y)f(x)f(y)dxdy = \frac{\mathsf{c}_{\mathsf{d},\mathsf{s}}}{2}\|f\|^2_{\dot{H}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}}{2}}} \tag{2.8}$$

and

$$\mathsf{A}_1[X_N, \mu, v] \to \frac{1}{2}\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} \nabla\mathsf{g}(x-y)\cdot(v(x)-v(y))f(x)f(y)dxdy = \frac{1}{2}\Big\langle f, \Big[v\cdot, \nabla|\nabla|^{\mathsf{s}-\mathsf{d}}\Big]f\Big\rangle_{L^2}. \tag{2.9}$$

带有奇异中心化测度加性误差的交换子估计 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - \mu$ 意味着，对于正则中心化测度 f，存在不带加性误差的交换子估计。更准确地说，定理 2.1 推出以下标准的或 未重整化的 交换子估计（参见 [NRS22，命题 3。1]）。

命题 2.4. 设 $\mathsf{d} \geq 1$ 且 $-2 < \mathsf{s} < \mathsf{d}$。则存在 $C > 0$，它仅依赖于 d 和s，使得对所有 f，$g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})$，[3] 都有

$$\begin{aligned}\left|\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} (v(x)-v(y))\cdot\nabla\mathsf{g}(x-y)f(x)g(y)dxdy\right| \\ \leq C\Big(\|\nabla v\|_{L^\infty} + \||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}}v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}}}\mathbf{1}_{\mathsf{s}<\mathsf{d}-2}\Big)\|f\|_{\dot{H}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}}{2}}}\|g\|_{\dot{H}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}}{2}}}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

事实上——正如下文所述—— [Ros20、NRS22、RSb], 以及在较为隐含的程度上 [LS18、Due16、Ser20、Ser23], 的思路是反过来的：先证明命题 2.4 中的未重整化交换子估计，再将其与重整化过程结合，以适用于非正则测试测度 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i}$。正是这一重整化步骤——它是证明中技术上最复杂的部分——导致了奇异情形 $0 \leq \mathsf{s} < \mathsf{d}$ 中依赖于 N 的加性误差。因此，有时将估计式 (2.4)、(2.5)、(2.6) 称为重整化交换子估计，以区别于未重整化估计式 (2.10)。在非奇异情形 $-2 < \mathsf{s} < 0$ 中，无需重整化，可以直接应用交换子估计，因此 (2.7) 中没有加性误差。

我们只讨论（超）库仑估计（2.4）（第2.1节）和次库仑估计（2.5）（第2.2节）的证明，因为这两种情形是尖锐的奇异情形。对于非尖锐次库仑估计（2.6）的证明，感兴趣的读者可参阅 [NRS22]。估计式（2.7）见于 [RSW]，它可由对 [NRS22]的方法作直接推广而得。

2.1. **库仑/超库仑情形**。 按照文献中的时间顺序，我们从$\mathsf{s} \geq \max(0, \mathsf{d}-2)$这一（超）库仑情形开始，该情形已在 [RSb]中讨论。

与先前的工作一样 [Due16、LS18、Ser20], ，出发点是对调制能量（*1.2*）作电学重构，将其视为能量的（重整化）版本

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} |\nabla h_N|^2, \qquad h_N := \mathsf{g} * (\mu_N - \mu), \tag{2.11}$$

[3] 如果 $\mathsf{s} = 0$,那么，我们隐含地假设 f, g 为零均值，以避免 $\dot{H}^{-\frac{\mathsf{d}}{2}}$ 中的低频发散。

其中， h_N 表示电势，并且与之前一样， μ_N 是经验测度。这种重新表述在库仑情形下是有效的。在超库仑情形下，我们可以改用 Caffarelli-Silvestre 延拓方法 [CS07]。该方法使我们能够将 g 视为局部算子 $-\mathrm{div}(|z|^\gamma\nabla\cdot)$ 的核，并在扩展空间 $\mathbb{R}^{d+1}$中工作时，用带权重 $|z|^\gamma$的同一量替换 (2.11)，其中 z 是第 $(d+1)$ 个变量。若 $s < d-2$，则无法以同样方式使用这一方法（此时必须考虑含高阶导数的 Dirichlet 型能量；例如参见 [Yan13, CM22]），正因如此，到目前为止，我们的讨论范围受到限制，即 $s \geq d-2$。

证明诸如（2.4）这类不等式的关键，在于观察到左端具有应力-能量张量结构。更确切地说，令

$$(T_h)_{ij} := 2\partial_i h\partial_j h - |\nabla h|^2\delta_{ij}. \tag{2.12}$$

表示与 h相关的应力-能量张量（来自经典力学或变分法）。众所周知，若 h 足够光滑，则

$$\operatorname{div} T_h = 2\nabla h\Delta h, \tag{2.13}$$

由于张量是对称的，散度可以按行或按列计算。暂且不考虑（1.2）中的对角线问题，关键在于，在库仑情形下，利用（2.13），对左端进行去对称化后，可将（2.4）的左端改写为

$$2\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} v(x)\cdot\nabla \mathsf{g}(x-y)d(\mu_N-\mu)^{\otimes 2} = -\frac{2}{\mathsf{c}_{d,s}}\int_{\mathbb{R}^d} v\cdot\nabla h_N\Delta h_N = -\frac{1}{\mathsf{c}_{d,s}}\int_{\mathbb{R}^d} v\cdot\operatorname{div} T_{h_N}. \tag{2.14}$$

随后通过分部积分即可形式上得出结论，因为 $\int_{\mathbb{R}^d}|T_{h_N}| \leq \int_{\mathbb{R}^d}|\nabla h_N|^2$，这就是能量。上述推理纯属形式上的，因为 $|\nabla h_N|^2$ 在构型的每个点附近都会发散（这与对角线剔除有关），因此必须对这一计算进行适当的重整化。这正是证明中的主要技术障碍。在 Riesz 情形下，扩展空间并加入适当的权重后，处理方式相同。详情请参见 [RSb，第3] 节。

如果采用纯粹的应力张量方法来证明 2.38 中关于 $n \geq 2$ 的高阶估计，那么是否能找到类似（2.14）的代数运算并不明确，这使得 [LS18、Ser23] 中的证明十分精巧，而且似乎无法推广到 $n \geq 3$。在 [RSb], 中，我们得以在高阶变分（1.3）中展示一种合适的——尽管更复杂的——应力张量结构。这种结构要求我们不仅考虑电势 h_N，还要考虑它的迭代对易子。下面先以库仑情形的一阶情况为例，具体说明这一点。更高阶的交换子将在第2.3节讨论。

给定一个在 $\mathbb{R}^d$ 中总质量为 0 的测度 f（可将其视为 $f = \mu_N - \mu$），$h^f = \mathsf{g} * f$ 是它的库仑势，且给定一个向量场 v，我们将 h^f 的一阶交换子定义为

$$\kappa^f(x) := \int_{\mathbb{R}^d}\nabla \mathsf{g}(x-y)\cdot(v(x)-v(y))df(y). \tag{2.15}$$

它是一个交换子，因为可以将其改写为

$$\kappa^f = -\mathsf{g} * (\operatorname{div}(vf)) + v\cdot\nabla \mathsf{g} * f = -h^{\operatorname{div}(vf)} + v\cdot\nabla h^f. \tag{2.16}$$

事实上，交换子 κ^f 通过关系式 (2.14) 与应力张量本身密切相关，该关系一般可改写为

$$2\mathsf{c}_{d,s}\int_{\mathbb{R}^d}\kappa^f dw = \mathsf{c}_{d,s}\int_{\mathbb{R}^d}\kappa^f dw + \mathsf{c}_{d,s}\int_{\mathbb{R}^d}\kappa^w df = -\int_{\mathbb{R}^d} v\operatorname{div}\left[\nabla h^f,\nabla h^w\right] = \int\nabla v : \left[\nabla h^f,\nabla h^w\right], \tag{2.17}$$

其中

$$\left[\nabla h^f,\nabla h^w\right]_{ij} := \partial_i h^f\partial_j h^w + \partial_j h^f\partial_i h^w - \nabla h^f\cdot\nabla h^w\delta_{ij} \tag{2.18}$$

是双线性生成元　应力-能量张量的推广 T_h 由（2.12）得出，我们注意到它是对称的　.

单独来看，函数 κ^f 定义中的每一项都比 h^f 少一个导数的正则性；然而，由于其交换子结构，某种补偿会发生。通过选取$w = -\ ^{1}{}_{\mathsf{cd,s}}\Delta\kappa^f$，在等式左侧分部积分，并在右侧使用柯西-施瓦茨不等式，我们可以证明 $\dot{H}^1$ 控制

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} |\nabla \kappa^f|^2 \le C\|\nabla v\|_{L^\infty} \int_{\operatorname{supp}\nabla v} |\nabla h^f|^2. \tag{2.19}$$

与通过抛物乘积证明交换子估计的经典方法相比，借助应力张量证明（2.19）要简单得多。此外，右端项局部化于输运的支集，这是经典证明方法显然无法做到的。

2.2. **亚库仑情形**。 现在我们讨论亚库仑情形 $\mathsf{s} < \mathsf{d}-2$，沿用[HCRS25] 中 Hess-Childs 和 Serfaty 合作的后续工作。事实上，所引用的工作为完整的里斯情形 $0 \le \mathsf{s} < \mathsf{d}$给出了新的证明，但就输运正则性假设而言，其估计在（超）库仑情形下更差。我们将在第2.4节进一步讨论这一点。

证明包含两个主要要素：（1）一种基于里斯势积分表示的新势截断方案；（2）Kato-Ponce 型交换子估计。

第一项的出发点是恒等式

$$\forall x \neq 0, \qquad \mathsf{g}(x) = \mathsf{c}_{\phi,\mathsf{d},\mathsf{s}} \int_0^\infty t^{\mathsf{d}-\mathsf{s}} \phi_t(x) \frac{dt}{t}, \tag{2.20}$$

ˆ 其中， ϕ 是任意足够良好的径向函数，且其傅里叶变换非负 $\phi \ge 0$, $\phi_t(x) := t^{-\mathsf{d}}\phi(x/t)$，而 $c_{\phi,\mathsf{d,s}}$取决于 ϕ、d、s。在对数情形下，$\mathsf{s} = 0$，由于 $\log|x|$ 在无穷远处不衰减，因此必须在大尺度上进行重整化，才能得到收敛表达式。关于确保该恒等式成立的精确假设，读者可参阅 [HCRS25 第 2] 节。该公式是标度性质的推论，表明 Riesz 势是近似恒等算子族 $\{\phi_t\}_{t>0}$的加权平均。在 [Rub24 中，Rubin 在第 6], 章将其称为“小波型表示”。恒等式 (2.20) 也可以从梅林变换 [FS09 附录 B]的标度与反演性质来理解。

表示式（2.20）的用途在于，只需截去小 t对应的积分，就能方便地截断 Riesz 势的奇点。更准确地说，给定一个尺度$\eta > 0$，我们定义截断势

$$\mathsf{g}_\eta(x) := \mathsf{c}_{\phi,\mathsf{d},\mathsf{s}} \int_\eta^\infty t^{\mathsf{d}-\mathsf{s}} \phi_t(x) \frac{dt}{t}. \tag{2.21}$$

截断势具有若干对分析至关重要的重要性质（参见[HCRS25，引理 2。1] ，其中列出了g_η的所有性质）：

(1) 尽管 g 在原点处是奇异的，但 g_η 是有限的，且有界于 $\mathsf{g}(\eta)$。(2) g_η 是正定核（即具有排斥性，或其傅里叶变换非负）。(3) 在球 $B(0,\ \eta)$之外，$\mathsf{g}_\eta \le \mathsf{g}$ 与差值 $\mathsf{g} - \mathsf{g}_\eta$ 以尺度 η 快速衰减。

如果不使用表示式（2.20），就很难构造出一个g_η，使其同时满足这三个要求，而标准的磨光过程无法做到这一点。此外，对 ϕ 的选择也需要谨慎。得益于这些性质，将F_N（X_N，μ）分解为

$$\begin{aligned}\mathsf{F}_N(X_N,\mu) = \frac{1}{2}\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} \mathsf{g}_\eta(x-y) d\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - \mu\Big)^{\otimes 2} \\ + \frac{1}{2}\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2\setminus\triangle} (\mathsf{g}-\mathsf{g}_\eta)(x-y) d\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - \mu\Big)^{\otimes 2} - \frac{\mathsf{g}_\eta(0)}{2N},\end{aligned} \tag{2.22}$$

由于对角线可以重新加入第一个积分，而只会产生第二行中最后一项所表示的、易于控制的项，我们通过F_N很容易得到两组控制估计。第一组针对右端第一项；该项是非负的（得益于g_η的排斥性），并且是一个真正的最大均值差异的平方。第二组控制右端第二项；除去易于控制的加性误差项后，该项同样是非负的，并且得益于g_η的性质，可以控制$\frac{1}{N^2}\sum_{i\neq j}\mathsf{g}(x_i-x_j)$，即来自小尺度粒子相互作用的相互作用能。关于这些控制估计的精确表述，参见 [HCRS25，命题 2.11] 前一项控制可用于证明，在 [HCRS25，命题 2.15] 中，调制能量控制平方非齐次索伯列夫范数$\|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{x_i}-\mu\|^2_{H^{-\mathsf{d}/2-\varepsilon}}$，对于任意 $\varepsilon>0$，误差至多为 $O(\lambda^{\mathsf{d}-\mathsf{s}})$（即强制性）。选择 $\eta\propto N^{-1/\mathsf{d}}$（微观尺度），后者的控制便能以调制能量为界，估计微观尺度下最近邻产生的相互作用能，从而也能界定最近邻距离低于该微观尺度的点的数量，参见 [HCRS25，推论 2。14]。值得一提的是，此处引入的势截断在我们即将发表的工作中发挥着关键作用，该工作研究了通过 MMD 对具有幂律型谱的核（例如里斯核）进行最优量化。 [HCRS]。

与 [PS17、Ser20、NRS22、RSb], 不同，我们无需对电荷进行涂抹/正则化 δ_{x_i}，也无需使用依赖于点和构型的涂抹半径——只需考虑截断势g_η。在这些先前的工作中，要证明具有定理2.1 形式的估计，首先需要证明一个在重新纳入对角线、并将 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{x_i}-\mu$ 替换为更正则分布 f时成立的估计。随后，将点电荷 δ_{x_i} 替换为涂抹电荷 $\delta^{(\eta_i)}{}_{x_i}$，并估计这一替换所产生的误差，即所谓的重整化步骤，从而将问题归结到这一正则情形。实施重整化的关键在于证明调制能量同时控制差值 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta^{(\eta_i)}{}_{x_i}-\mu$ 的势能和小尺度相互作用。

HCRS [中的策略25] 在两个方面有关键区别。首先，我们不是通过涂抹来正则化 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{x_i}-\mu$，而是通过截断$\mathsf{g}$ 来正则化g_η。[4] 其次，为了证明g_η的一个估计，我们利用定义（2.21）将问题化为证明以下对象的估计：

$$\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}(v(x)-v(y))\cdot\nabla\phi\Big(\frac{x-y}{t}\Big)d\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{x_i}-\mu\Big)^{\otimes 2}(x,y),\qquad t\in(0,\infty),\tag{2.23}$$

我们对其关于测度 $t^{\mathsf{d}-\mathsf{s}}\frac{dt}{t}$ 在 (η,∞) 上积分。只要我们的估计对 v 的依赖具有标度不变性，问题就化为证明 $t=1$ 的一个估计。

现在我们来讨论证明中的第二个主要要素。恒等映射（2.20）对一大类标度函数 ϕ都成立，但并非所有 ϕ 的选取都能得到所需的估计。事实上，通过一次简单的傅里叶计算可知，不存在形如

$$\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}(v(x)-v(y))\cdot\nabla\phi(x-y)f(x)f(y)\le C_v\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}\phi(x-y)f(x)f(y)\tag{2.24}$$

ˆ 可以在 ϕ 超多项式衰减（例如高斯函数）时成立。事实证明， ϕ的一个好选择是 ˆ 贝塞尔势，即 $\phi(\xi)=\langle 2\pi\xi\rangle^{-\mathsf{a}}$，它是非齐次傅里叶乘子$\langle\nabla\rangle^{\mathsf{a}}$的核，其中我们使用日式括号记号 $\langle x\rangle^a:=(1+|x|^2)^{a/2}$ 表示 $a\in\mathbb{R}$ 和 $x\in\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$。贝塞尔势是对 Riesz 势的一种屏蔽，它保留了其在原点处的局部行为，但避免了导致 Riesz 势空间衰减缓慢的低频问题。令 $h:=\phi*f$ 并利用 $\langle\nabla\rangle^{\mathsf{a}}h=f$，选择贝塞尔势便归结为证明 $\langle\nabla\rangle^{\mathsf{a}/2}$的乘积法则。此类乘积法则在调和

[4]文献 [BJW19a] 也直接在小长度尺度上对相互作用g 进行了正则化。然而，该文中的方法与 [HCRS25], 完全不同；后者局限于空间周期情形，且无法得到最优的误差估计。

分析文献中因其源于 [KP88]。这正是 [HCRS25，命题 3。1], 的内容，亦即主要技术引理。在此，我们依赖于 Li 的交换子估计 [Li19], 以及分数次幂的局部表示 $\langle\nabla\rangle^{\mathsf{a}/2}$ ，通过维数扩张（见 [HCRS25，第 3]），类似于 Caffarelli 与 Silvestre 所推广的分数阶拉普拉斯算子表示 [CS07]。

贝塞尔势的参数 a 受到一些限制。我们需要 $\mathsf{a} > \mathsf{d}$，使得 ϕ连续且有界。另一方面，如果 a 过大，我们就无法得到一个对 v 的依赖能够适当缩放的估计。这要求 $\mathsf{a} < \mathsf{d}+2$。即使对 a 有这些限制，最终仍能通过一个中间的非齐次估计得到齐次估计，这多少有些令人惊讶。

恒等映射 (2.20) 本身表明，可以通过将函数 $t^{\mathsf{d}-\mathsf{s}}$ 替换为 t的一个一般函数来定义一类超出精确里斯情形的势；该函数逐点受 $t^{\mathsf{d}-\mathsf{s}}$上下控制。我们称之为黎斯型 势。读者可在 [HCRS25 第 2 节中找到它们的适当定义。2] 并应将此类势与 [NRS22]中先前提出的相关但不同的黎斯型势类进行比较。事实上，估计定理 2.1(2.5) 是作为黎斯型势的一种更一般的泛函不等式的特例得到的（见 [HCRS25，定理 4。1]）。

2.3. **局部化高阶估计**。 讨论完一阶估计后，接下来我们将看到如何运用应力张量和交换子结构，按照 [RSb]的方法，得到二阶及更高阶（可能是局部化的）估计。本小节讨论的结果仅限于（超）库仑情形。目前尚不清楚如何利用 [HCRS25]的方法，在次库仑情形下得到（尖锐的）高阶估计。关于这个问题的更多讨论，参见 [HCRS25，第 1 节。5] 或 [HCRS25，第 5.2、53]节。

暂且不考虑重整化问题，并限于库仑情形，我们已在（2.14）（结合（1.3））中看到，沿输运映射 $\mathbb{I}+tv$ 的调制能量的一阶变分为

$$-\frac{1}{2\mathsf{c}_{\mathsf{d},\mathsf{s}}}\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} v\cdot\operatorname{div} T_{h_N}dx = \frac{1}{2\mathsf{c}_{\mathsf{d},\mathsf{s}}}\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}\nabla v : T_{h_N}dx. \tag{2.25}$$

因此，为了计算调制能量的二阶变分，我们需要计算当 T_{h_N} 再次由 μ_N 和 μ 推前后，$\operatorname{div}\mathbb{I}+tv$的一阶变分。根据 T_{h_N} 在（2.12）中的表达式，只需计算 h_N^t （采用显然的记号）在 $t=0$处的导数。又因为 $h_N = \mathsf{g}*(\mu_N-\mu)$，由推前的定义可得

$$\frac{d}{dt}\big|_{t=0} h_N^t = -\mathsf{g}*(\operatorname{div}(v(\mu_N-\mu)) = -h^{\operatorname{div}(v(\mu_N-\mu))} = \kappa^{\mu_N-\mu} - v\cdot\nabla h_N, \tag{2.26}$$

在使用（2.16）之后。该表达式的 L^2 梯度范数比能量 $\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}|\nabla h_N|^2$多一个导数的奇异性。仍然取 $f=\mu_N-\mu$，将（2.26）代入（2.25）的变分中，我们可以将二阶变分分解为

$$\frac{1}{\mathsf{c}_{\mathsf{d},\mathsf{s}}}\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}\partial_i v^j : \Big(\Big[\nabla h_N, \nabla\kappa^f\Big] - [\nabla h_N, \nabla(v\cdot\nabla h_N)]\Big). \tag{2.27}$$

借助交换子 $\dot{H}^1$ 的估计（2.19），右端的第一项可以直接由 κ^f按所需方式控制，而第二项则可以通过对平流算子 $C_v\int|\nabla h_N|^2$ 进行分部积分，转化为同样可控的项——尽管 C_v 现在是关于 v 的二次项，并且依赖于 v， $\nabla^{\otimes 2}v$。 $v\cdot\nabla$

随后，通过引入一族 n 阶交换子 $\kappa^{(0),\ f}=h^f$ 并

$$\kappa^{(n),f} := \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}\nabla^{\otimes n}\mathsf{g}(x-y):(v(x)-v(y))^{\otimes n}df(y), \tag{2.28}$$

以及“输运的”交换子

$$\kappa_t^{(n),f} := \int_{\mathbb{R}^d} \nabla^{\otimes n} g(x-y-tv(y)) : (v(x)-v(y))^{\otimes n} df(y), \tag{2.29}$$

并注意到这一优美的递归公式

$$\partial_t \kappa_t^{(n),f} = \kappa_t^{(n+1),f} - v \cdot \nabla \kappa_t^{(n),f}, \tag{2.30}$$

其中 t 与输运映射 $\mathbb{I}+tv$ 中的参数相同。换言之，高阶“含时”交换子 $\kappa_t^{(n),f}$ 满足一个输运方程层级，其源项将第 $(n+1)$ 阶交换子与第 n 阶交换子耦合。利用这一递归，对与（2.19）相同的论证进行迭代，即可证明该估计

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \kappa^{(n),f}|^2 \le C_v \int_{\operatorname{supp} \nabla v} |\nabla h^f|^2, \tag{2.31}$$

对一般函数 f 成立，只要右端有限，其中常数 C_v 现在是 n-线性于 v，并涉及直至 n 阶的 v 的导数。可将关系（2.31）视为一种基于 L^2 的任意阶交换子正则性理论。

迄今为止的讨论仅限于库仑情形，其完整细节见 [RSb，附录 A]。在推广到 Riesz 情形 $s \neq d-1$，$d-2$ 时，我们会遇到困难。向量场 v 可通过将最后一个分量固定为零而平凡地延拓到 $\mathbb{R}^{d+k}$，其中 $k = 1$ 若 $s > d-2$；g 可通过径向对称性平凡地延拓，且所有分布 f 在$\mathbb{R}^d$ 上可视为位于边界 $\mathbb{R}^d \times \{0\}^k$。因此，$\kappa^{(n)}$、$f$ 可视为 $\mathbb{R}^{d+k}$ 上的函数。按照上述计算，所有积分 $\int_{\mathbb{R}^d}$ 都应替换为 $\int_{\mathbb{R}^{d+k}} |z|^\gamma$，其中 $\gamma = s+2-d-k$。障碍在于通过对偶性得到 L^2 梯度界 (2.31)。

令 $L := -\operatorname{div}(|z|^\gamma \nabla \cdot)$，我们希望在 $\int_{\mathbb{R}^{d+k}} \kappa^{(n),f} w$ 中取 $w = {}^1 c_{d,s} L \kappa^{(n),f}$，然后分部积分，从而得出关于 $\int_{\mathbb{R}^{d+k}} |z|^\gamma |\nabla \kappa^{(n),f}|^2$ 的估计。然而，这样选取的 w 先验上并不支撑在 $\mathbb{R}^d \times \{0\}^k$ 上。若 $\operatorname{supp} \phi \not\subset \mathbb{R}^d \times \{0\}^k$，则对于定义在 $\mathbb{R}^{d+k}$ 上的测试函数 ϕ，$g * L\phi = c_{d,s}\phi$ 未必成立，除非 $\gamma = 0$。这迫使我们采用一种新方法。

出发点是如下观察：$Lg = c_{d,s}\delta_0$ 属于 $\mathbb{R}^{d+k}$，这正是将分数阶拉普拉斯算子表示为 $\mathbb{R}^{d+k}$ 上的退化椭圆算子的 Caffarelli-Silvestre表示的基础。由此可知，$\kappa^{(n),f}$ 满足方程

$$\begin{aligned} L\kappa^{(n),f} = c_{d,s}(-1)^n \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \partial_{i_{\sigma_1}} v^{i_1} \cdots \partial_{i_{\sigma_n}} v^{i_n} f \delta_{\mathbb{R}^d \times \{0\}^k} - n\partial_i (|z|^\gamma \partial_i v \cdot \nu^{(n-1),f}) \\ - n|z|^\gamma \partial_i v \cdot \partial_i \nu^{(n-1),f} + n(n-1)|z|^\gamma (\partial_i v)^{\otimes 2} : \mu^{(n-2),f}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

其中，$\mathbb{S}_n$ 表示 $[n]$ 上的对称群，重复出现的指标表示对该指标求和。在右端，ν 是 $\mathbb{R}^{d+k}$ 上的一个向量场，从“本质上”看类似于 $\nabla \kappa^{(n)}$、f；而μ 是 $\mathbb{R}^{d+k}$ 上的一个对称矩阵场，从本质上看类似于 $\nabla^{\otimes 2}\kappa^{(n)}$、$f$（精确定义分别见 [RSb, (4.12), (4.14)]）。(2.32)式的右端性质良好，因为它只依赖于低阶（即 $n-1$、$n-2$）交换子。按照椭圆方程正则性的标准方法，我们希望通过用 $\kappa^{(n)}$、f 检验方程(2.32)，并利用一个归纳假设来保证低阶交换子及其导数具有良好的界，从而得到 $\int_{\mathbb{R}^{d+k}} |z|^\gamma |\nabla \kappa^{(n)}, f|^2$ 的估计。然而，(2.32)式右端的非散度形式以及对 $\kappa^{(n)}$、f 进行 L^2 估计时存在一个困难（详见 [RSb, Section 4.1] 开头），因此当 $n \ge 3$时需要使用庞加莱不等式；而当 ℓ变大时，估计会恶化，其中 v的支撑大小为 ℓ。

因此，当 $\operatorname{supp} v$ 不是紧的时（前述中心极限定理的应用并非这种情况），这种方法行不通，并且（2.38）的右端为无穷。然而，获得非局部化的 L^2 交换子估计要容易得多，并且可以按照

[NRS22] 的方法：分部积分以及 Sobolev 半范数的差商刻画 $\dot{H}^{\frac{s-d}{2}}$，当 $s > d-2$ 时；以及 L^2 Calderón 在 d-交换子上的有界性，当 $s = d-2$ 时。

关于上述结果的精确表述，请参阅 [RSb，定理 4。1]（更一般地，见第 4.1 节），该结果是我们关于交换子的综合 L^2 正则性估计。

至此，讨论尚未涉及重整化问题，即如何处理 h_N中的 Dirac 质量奇点；这可以说是分析中最微妙的部分。如第2.1 节关于一阶估计所述，重整化采用 [Ser20]及其后续研究中的方法，通过电荷涂抹和势截断来处理，截断长度尺度尤为关键，它依赖于每个点 x_i，且与其最近邻距离成正比。$n \geq 2$ 情形下的重整化要微妙得多，占据了论文的大部分篇幅，并需要若干创新。

首先，将式（2.38）左边的 Dirac 质量替换为其涂抹形式 $\delta^{(\eta_i)}{}_{x_i}$，除非$s = d-2$，否则无法应用我们的未重整化交换子估计，因为 $\mu\delta_{\mathbb{R}^d\times\{0\}^k} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i}^{(\eta_i)}$ 的支集并不包含在 $\mathbb{R}^d \times \{0\}^k$中。为克服这一困难，我们引入一种新的涂抹 $\rho_{x_i}^{(\eta_i)}$，只需对 $\mathbb{R}^d$中的 Dirac 质量进行卷积平滑即可得到，并以调制能量估计两种正则化之间的电能差。随后，我们便可直接将 L^2 交换子界 $\mu - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \rho_{x_i}^{(\eta_i)}$ 应用于此。与以往工作的不同之处在于，我们会选择具有足够高阶消失矩的光滑核，以获得最优误差率。有关上述构造和估计的细节，请参阅 [RSb，第 5 节。1]。

其次，为了处理这种涂抹带来的误差，我们建立了一套基于 L^∞ 的交换子正则性理论（见 [RSb，第 4.5–4.6] 节）。该理论表明，对于任意小的球，限制在其中的“水平”导数 $\nabla_x^{\otimes m}\kappa^{(n),f}$（其中 $\nabla_x := (\partial_1, \dots, \partial_d)$ 的 L^∞ 范数，可以用双倍球内 $\nabla\kappa^{(n),f}$ 的 L^2 范数来估计。交换子估计通常不允许这种局域化，因此这一结果可能具有独立的研究价值。证明依赖于带有 A_2 权的二阶散度型椭圆算子正则性理论，即 Fabes 等人 [FKS82] 所提出的理论，并应用于扩展空间 $\mathbb{R}^{d+k}$；借助 Caffarelli-Silvestre 延拓，这可以视为分数阶拉普拉斯算子的正则性理论。证明还关键地利用了 $L\kappa^{(n),f}$ 的方程 (2.32) 形式的交换子结构，以及关于 $\kappa^{(n),f}$，$\nu^{(n),f}$ 和 $\mu^{(n),f}$ 的递推关系。当 $\ell \asymp 1$ 时，可以用较粗略的估计来避免这种局部正则性理论，这些估计的优点是对向量场 v 的正则性要求较低。然而，当 $\ell \ll 1$ 时，这些较粗略的估计会导致误差的尺度次优。

第三，我们将截断误差估计从 [Ser20], 改进为对 μ具有最优依赖关系，并给出新的可局域化介观尺度相互作用能估计，将[Ser23] 的结果推广到里斯情形。参见 [RSb第 2.2–2 节。3]。

重整化步骤的完整细节见 [RSb第 5 节。2] 更一般地，见所引文献第 5 节。在讨论了证明策略和主要创新之后，我们以陈述主要结果作为本小节的结尾。

第一个定理给出一个全局估计，无需对向量场v进行任何局域化。注意，加性误差项为 $\lambda^{d-s} \propto (N^{-1+\frac{s}{d}})$，这正是所宣称的最优估计。与下文的局域化估计 (2.38) 相比，v 的正则性要求不依赖于交换子的阶数 n。读者可以验证，若 $s > d-1$，只需 $\|\nabla v\|_{L^\infty}(m=0)$即可得到尖锐误差 λ^{d-s}。若 $d-2 < s \leq d-1$，则还需要 $\|\nabla^{\otimes 2} v\|_{L^\infty}(m=1)$。若 $s = d-2$，则还需要 $\|\nabla^{\otimes 3} v\|_{L^\infty}(m=2)$。

定理 2.5（全局估计）。存在常数 $C > 0$，仅依赖于 d、s，使得以下结论成立。设 $\mu \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$，且 $\int_{\mathbb{R}^d} \mu = 1$。若 $s \leq 0$，进一步假设 $\int (\mathbb{R}^d)^2 |g(x-y)| d|\mu|^{\otimes 2} < \infty$。设 $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 为 *Lipschitz* 向量场，并假设 $\lambda < 1$，其中$\lambda := (N\|\mu\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)})^{-1} d$。对任意整数 $m \geq 0$ 与 $n \geq 1$，存在常数 $C > 0$，其依赖于

仅 d、s m、n，使得以下结论成立。设 $v\colon \mathbb{R}^{\mathsf{d}} \to \mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ 为 $C^{m,1}$ 向量场。对任意两两互异的构型 $X_N \in (\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^N$，我们有

$$
\begin{aligned}
|\mathsf{A}_n[X_N,\mu,v]| &\le C(\|\nabla v\|_{L^\infty})^n\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu)-\Big(\frac{\log\lambda}{2N}\Big)\mathbf{1}_{\mathsf{s}=0}+C\|\mu\|_{L^\infty}\lambda^{\mathsf{d}-\mathsf{s}}\Big)\\
&\quad + C\sum_{q=1}^{m+1}\sum_{r=0}^{q} D_{v,q,r}\Bigg(\lambda^{m+1}+\lambda^{m+1-q}\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu)-\Big(\frac{\log\lambda}{2N}\Big)\mathbf{1}_{\mathsf{s}=0}+C\|\mu\|_{L^\infty}\lambda^{\mathsf{d}-\mathsf{s}}\Big)\\
&\quad + \lambda^{m+1}\|\mu\|_{L^\infty}\begin{cases}1, & \mathsf{s}+q\neq\mathsf{d}\\ \log(1/\lambda), & \mathsf{s}+q=\mathsf{d}\end{cases}+\lambda^{m+1}\begin{cases}\|\mu\|_{L^\infty}\lambda^{\mathsf{d}-\mathsf{s}-q}, & \mathsf{s}+q>\mathsf{d}\\ \|\mu\|_{L^\infty}(1-\lambda^{\mathsf{d}-\mathsf{s}-q})+\|\mu\|_{L^1}, & \mathsf{s}+q<\mathsf{d}\\ \|\mu\|_{L^\infty}\log(1/\lambda)+\|\mu\|_{L^1}, & \mathsf{s}+q=\mathsf{d}\end{cases}\Bigg),
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

其中

$$
D_{v,q,r} := \sum_{\substack{1\le c_1,\dots,c_r\\ c_1+\cdots+c_r=m+1-(q-r)}} \|\nabla^{\otimes c_1}v\|_{L^\infty}\cdots\|\nabla^{\otimes c_r}v\|_{L^\infty}\|\nabla v\|_{L^\infty}^{n-r}.
\tag{2.34}
$$

在研究介观尺度上的库仑/里斯气体涨落时，$N^{-1/\mathsf{d}} \ll \ell \ll 1$交换子估计至关重要，它必须具有局部形式，即右端可以用限制在 v 支集所在区域内的调制能量来表示（边界误差除外）。这类估计是运用输运方法证明中心极限定理的关键分析工具[LS18、Ser23、PS25]（参见 [Ser24，第 3]部分，其中给出了综合论述）。

我们的第二个定理是定理2.1的局部化推广，同时也是一个高阶版本。现在，右端的调制能量局部化到一个与 v 的支集大小相当的区域，且估计随支集的直径缩放。每个点的加性误差项为 $N^{-1}\lambda^{\mathsf{d}-\mathsf{s}} \propto (N^{-2+\mathsf{s}_{\mathsf{d}}})$，这是最优的。不过，误差现在取决于 v 的高阶导数，并且当 v 的支集变大时，估计会变差。值得一提的是，定理2.6 是 Peilen 与 Serfaty 关于超库仑黎兹气体涨落的近期工作 [PS25] 中的一个重要组成部分。

为表述该结果，令 $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathsf{d}}$，表示 $\operatorname{supp} v$。与 Ω 相关联，定义微观长度尺度

$$
\lambda := (N\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)})^{-\frac{1}{\mathsf{d}}},
\tag{2.35}
$$

它可以看作典型的粒子间距，并定义 $\hat{\Omega} := \{x : \operatorname{dist}(x,\Omega) \le \frac{1}{4}\lambda\}$。我们用 ℓ 表示 Ω（或 $\operatorname{supp} v$）的典型大小，它也可能取决于 N，唯一的限制是其必须大于微观尺度 λ。最后，令 $I_\Omega := \{1 \le i \le N : x_i \in \Omega\}$，并用 # 表示有限集合的基数。

定理 2.6（局部化估计）。存在一个仅依赖于 d、s 的常数 $C>0$，使得下述结论成立。设 $\mu \in L^1(\mathbb{R}^{\mathsf{d}}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})$，且 $\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}\mu = 1$。若 $s \le 0$，进一步假设 $\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} |g(x-y)|d|\mu|^{\otimes 2} < \infty$。令 $v\colon \mathbb{R}^{\mathsf{d}} \to \mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ 为一个利普希茨向量场，Ω 为包含 $\operatorname{supp}\nabla v$ 的一个 2λ-邻域的闭集，其中 λ 如 *(2.35)* 中所定义，且 $\lambda < 1$。对于任意两两不同的构型 $X_N \in (\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^N$，有

$$
|\mathsf{A}_1[X_N,\mu,v]| \le C\|\nabla v\|_{L^\infty}\Big(\int_{\Omega\times[-\ell,\ell]^{\mathsf{k}}} |z|^\gamma |\nabla h_{N,\mathsf{r}}|^2 + C\frac{\#I_\Omega\|\mu\|_{L^\infty(\hat{\Omega})}\lambda^{\mathsf{d}-\mathsf{s}}}{N}\Big).
\tag{2.36}
$$

这里，$h_{N,\vec{\mathsf{r}}}$ 是截断电势，且 $\vec{\mathsf{r}} = (\mathsf{r}_i)_{i=1}^N$ 是如下定义的最近邻型距离

(2.37)
$$h_{N,\vec{\mathsf{r}}} := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \mathsf{g}_{\mathsf{r}_i}(\cdot - x_i) - \mathsf{g} * \mu, \qquad \mathsf{g}_{\mathsf{r}_i} := \min(\mathsf{g}, \mathsf{g}(\mathsf{r}_i)), \qquad \mathsf{r}_i := \frac{1}{4}\min\Big(\min_{j\neq i}|x_i - x_j|, \lambda\Big),$$

其中我们利用g 的径向对称性，以简化记号。

此外，假设 $v \in C^{2n-1,\,1}$ 并且 Ω' 是半径为 ℓ 的球，包含 λ-邻域 $\operatorname{supp} v$，且 Ω 包含 5ℓ-邻域 Ω'，[5] 其中 λ，ℓ 满足 $\min(\lambda,\ \lambda/\ell) < \frac{1}{2}$。对于任意$n \geq 2$，我们有

(2.38)
$$|\mathsf{A}_n[X_N, \mu, v]| \leq C\sum_{p=0}^n (\ell\|\nabla^{\otimes 2} v\|_{L^\infty})^p \sum_{\substack{1\leq c_1,\dots,c_{n-p}\\ n-p\leq c_1+\cdots+c_{n-p}\leq 2n}} \lambda^{-(n-p)+\sum_{k=1}^p c_{n-k}}$$
$$\times \|\nabla^{\otimes c_1} v\|_{L^\infty}\cdots\|\nabla^{\otimes c_{n-p}} v\|_{L^\infty}\Big(\int_{\Omega\times[-\ell,\ell]^{\mathsf{k}}} |z|^\gamma |\nabla h_{N,\vec{\mathsf{r}}}|^2 + C\frac{\#I_\Omega \|\mu\|_{L^\infty(\hat{\Omega})}\lambda^{\mathsf{d}-\mathsf{s}}}{N}\Big),$$

其中 $C > 0$ 可能 可能取决于 n；当 $p = n$ 时，c_i 的求和视为空和 .

注意，估计式（2.38）不允许取 $\Omega = \mathbb{R}^{\mathsf{d}}$，因为这意味着 $\ell = \infty$，此时右端为无穷大。这是该结果一个令人遗憾的局限，我们认为这只是技术性问题。感兴趣的读者可参阅 [RSb，第 4 节。1]以及 [HCRS25，第 5 节。3]，其中讨论了这一问题及可能的规避方法。

注 2.7. 虽然初读时，关于 Ω,Ω', λ 的条件可能看起来有些循环，但这些条件确实有可能成立。详见 [RSb, 注 1。4] 。

2.4. **输运正则性与缺陷估计**。 除了上文讨论的这些交换子估计中加性误差的尖锐性之外，另一个重要问题是输运速度 [HCRS25] 的最优正则性假设；我们近期在与 Hess-Childs 和 Serfaty 的合作论文中研究了这一问题 v，关注的是上述交换子估计中的输运速度。与前一个问题相比，文献对后一个问题关注甚少。

自然会有人问，是否可以减弱对 v 的利普希茨假设，同时仍保持标度。例如，能否将 $\|\nabla v\|_{L^\infty}$ 替换为 $\|\nabla v\|_{BMO}$? 此外，在次库仑区制 $\mathsf{s} < \mathsf{d} - 2$下，形如 $\||\nabla|^{\frac{\mathsf{a}}{2}} v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-2}}}$的附加项是否必要，也尚不清楚，而且指数 a可以取多小。由 Sobolev 嵌入可知，$\||\nabla|^{\frac{\mathsf{a}}{2}} v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-2}}} \lesssim \||\nabla|^{\frac{\mathsf{a}'}{2}} v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{a}'-2}}}$ 对于 $2(\mathsf{d}+1) > \mathsf{a}' \geq \mathsf{a}$。此外，我们的两个次库仑估计（2.5）、（2.6）之间存在一个间隙。

这一正则性问题源于实际应用。在偏微分方程中有一条普遍原则：如果一个方程具有尺度不变性，那么研究该方程的自然函数空间应当在方程的标度变换下保持不变 [Kla10]。这类尺度临界或尺度不变的空间被认为是方程适定性与不适定性的分界阈值，也与其他现象有关，例如有限时爆破与整体存在性。

当$\mathsf{V}^t = 0$时，读者可以验证：若 μ 是满足3.3式且$\beta = \infty$的平均场方程的一个解，则 $\tilde{\mu}(t,x) := a\mu(bt, cx)$，对于 $a, b, c > 0$，只要 $bc^{\mathsf{d}-2-\mathsf{s}} = a$，也是一个解。固定$b = 1$ 使解的存在时间在重新缩放下保持不变，可得关系 $a = c^{\mathsf{d}-2-\mathsf{s}}$。对于$1 \leq p \leq \infty$，读者可以验证

(2.39)
$$\|\tilde{\mu}\|_{L^p} = c^{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2-\frac{\mathsf{d}}{p}}\|\mu\|_{L^p},$$

[5]对于整数 $k \geq 0$ 和实数 $\alpha \in [0,1]$, $C^{k,\,\alpha}$ 表示非齐次 H¨older 空间，其中的函数具有 k 阶连续导数，且其 k 阶导数是 α-H¨older 连续的。

这意味着 $p = \mathsf{d}\,\mathsf{d}-\mathsf{s}-2$ 是缩放临界指数。因此，若要存在临界 L^p 空间，势至多只能是库仑势。更一般地，令 $W^{a,p}$ 表示齐次贝塞尔位势（分数阶 Sobolev）空间（例如参见 [Ste70，第3节.3] 或 [Gra14，第1节.3]），我们看到，$\dot{W}^{a,p}$ 是临界空间，当且仅当 $a = \mathsf{d}\,{}_p{}^+\,\mathsf{s}\,+2-\mathsf{d}$。其他标度的函数空间，例如 H¨older-Zygmund 空间（例如参见 [Ste70，第 4]节），也值得作为临界空间加以研究。

当 $\mu \in \dot{W}\,\mathsf{d}\,{}_p{+}\mathsf{s}{+}2{-}\mathsf{d}^p$ 时，对于 $1 < p < \infty$，一些基本的傅里叶分析表明，相应的平均场速度 $v = \mathbb{M}\nabla\mathsf{g}\ *\mu$ is 属于 $\dot{W}\,\mathsf{d}\,{}_p{+}1、{}^p$。遗憾的是，$\dot{W}\,\mathsf{d}\,{}_p{+}1、{}^p$ does 并不嵌入齐次利普希茨空间 $\dot{W}^1、{}^\infty$。如果 $f \in \dot{W}\mathsf{d}\,{}_p{+}1、{}^p$，那么只能得到 $\|\nabla f\|_{BMO} \le C\|f\|_{\dot{W}}\,\mathsf{d}_{p+1}、{}_{p\circ}$ 即使 $\mathsf{s}\ +2-\mathsf{d}\ = k$ 是整数并取 $p = \infty$，有 $\mu \in \dot{W}^k、{}^\infty$ 也不意味着 $v \in \dot{W}^1、{}^\infty$。这是一个问题，因为定理 2.1 的所有交换子估计在右端都包含 $\|\nabla v\|_{L^\infty}$。因此，为了在平均场密度 μ^t 属于临界空间时证明平均场收敛，最好能够得到一种交换子估计，其正则性假设在 $\mu \in \dot{W}\,\mathsf{d}\,{}_p{+}\mathsf{s}{+}2{-}\mathsf{d}^p$ 时成立。

在 [HCRS25], 中，我们证明了，只要向量场范数中的任意一个被削弱，估计式（2.10）就可能不成立。我们还给出了更广泛的一类相互作用势下，类似交换子估计成立的必要条件。特别是，控制 v 的范数必须包含足够多的导数，以补偿ˆg的高频衰减。这揭示了交换子估计中相互作用与输运之间正则性权衡的一般原理。所有这些结果均可见于 [HCRS25，第 3], 节，并且都是通过显式反例得到的。鉴于定理2.1中的重整化交换子估计蕴含未重整化交换子估计，问题便归结为：当 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - \mu$ 被零均值施瓦茨函数替代时，证明反例的存在。

HCRS [HCRS25], 的第二项贡献受到尺度临界正则性下平均场收敛应用的启发，关注的是考虑临界空间中的平均场向量场 $v = \mathbb{M}\nabla\mathsf{g}\ *\mu$ 时 μ 定理2.1的泛函不等式的替代方案。上一段的结果表明，在这种情况下，无论加性误差有多大，交换子估计都不可能成立。尽管如此，仍然存在一个带缺陷项的交换子估计：也就是说，存在一个局部可积函数 $\rho\colon\ [0,\infty) \to [0,\infty)$，称为缺陷项，使得对所有 $\epsilon > 0$,

$$|\mathsf{A}_1[X_N,\mu,v]| \le \rho(\epsilon)C_v\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu) + C_\mu N^{-\alpha}\Big) + \epsilon^\beta N^\gamma C_v'\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu) + C_\mu' N^{-\alpha}\Big), \tag{2.40}$$

其中 $\alpha > 0$，β，$\gamma \ge 0$ 以及 C_v，C_v'，C_μ，$C_\mu' > 0$ 是依赖于d、s且定量依赖于 v、μ的范数的常数。如我们稍后将在第3.4节中解释的那样，若 $\rho(\epsilon) = O(|\log\epsilon|)$ 随 $\epsilon \to 0^+$变化，那么缺陷交换子估计足以推出调制能量估计，进而蕴含平均场收敛。

在 [HCRS25, 定理 2.6], 中，我们证明了一个新的缺陷估计，其缺陷项为 $\rho(\epsilon) = O(|\log\epsilon|^\theta)$，适用于$\theta \in (0,1)$。此前，作者在仅限于库仑情形的工作 [Ros22b, Ros22a] 中，得到了对应于 $\theta = 1$ 的缺陷项。这一改进得益于著名的 Brezis-Wainger-Hansson 不等式 [BW80, Han79]：若 $1 < p < \infty$、$1 \le q \le \infty$，且 $aq > \mathsf{d}$，则

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\mathsf{d}),\qquad \|f\|_{L^\infty} \le C\|f\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p},p}}\Big(1 + \log^{\frac{p-1}{p}}\big(1 + \frac{\|f\|_{\dot{W}^{a,q}}}{\|f\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p},p}}}\big)\Big), \tag{2.41}$$

其中 $C = C(\mathsf{d}\ p,a,q) > 0$。注意，指数 $\frac{p-1}{p}$ 是尖锐的。Brezis 和 Wainger [BW80，定理 1] 首次证明了估计（2.41），这是 Brezis 和 Gallou¨et [BG80]提出的早期 $\mathsf{d}\ = p = 2$ 不等式的推广。Hansson [Han79] 独立地证明了一个等价的不等式，并以位势论语言表述；此外，（2.41）的另一种证明也

见 [Eng89]。不等式（2.41）是对错误的端点 Sobolev 嵌入$\|f\|_{L^\infty} \lesssim \|f\|_{\dot{W}^{\mathsf{d}p\text{的替代},\,p}}$但 $\mathsf{d} = p = 1$时例外。从某种意义上说，它也是著名的 Trudinger-Moser 不等式 [Tru67、Mos70]（参见 [BW80，定理 A]）。

3. Mean-field limits

下面转向定理 2.1的应用，首先讨论里斯气体平均场动力学的最优收敛速率。本节依据以下研究成果 [RSb、HCRS25、HCRS25]（与 Hess-Childs 和 Serfaty 合作完成）。

3.1. 背景与动机。 近年来，相互作用粒子系统平均场极限的研究取得了显著进展。一个基本模型是如下的一阶系统

$$dx_i^t = \frac{1}{N}\sum_{1\le j\le N: j\neq i} \mathbb{M}\nabla_x \mathsf{g}(x_i^t, x_j^t)dt - \mathsf{V}^t(x_i^t)dt + \sqrt{2/\beta}dW_i^t, \qquad i \in [N], \tag{3.1}$$

其中，$\beta \in (0,\infty]$ 的含义是逆温度，W_1，……，W_N是独立同分布的 d 维维纳过程，而随机微分 dW_i 按 Itô 意义理解。这里，g 是一个相互作用势，其形式将在下文指定；V^t 是一个（可能随时间变化的）外场。$\mathbb{M}$是一个实数 $\mathsf{d}\times\mathsf{d}$ 矩阵，用于指定动力学类型，其中 $\mathbb{M} = -\mathbb{I}$ （梯度/耗散型）和 $\mathbb{M}$ 反对称（哈密顿/守恒型）是最常见的。我们假设

$$\mathbb{M}\xi\cdot\xi \le 0 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^{\mathsf{d}}, \tag{3.2}$$

这是一种排斥性假设。可以验证，对于3.2，我们的假设 $\mathbb{M}$ 确保系统（3.1）的能量几乎必然（a.s.）不增，因此，如果粒子初始时彼此分离，那么它们几乎必然会始终保持分离，从而系统（3.1）存在唯一的全局强解。

平均场极限是指当 $N\to\infty$ 时，与系统（ μ_N^t 的一个解 X_N^t 相关的经验测度3.1收敛。假设初始点 X_N^0 满足 μ_N^0 收敛到一个足够正则的测度 μ^0，形式计算表明，当 $t>0$时，μ_N^t收敛到以下平均场方程

$$\partial_t\mu = \operatorname{div}((\mathsf{V} - \mathbb{M}\nabla\mathsf{g}*\mu)\mu) + \frac{1}{\beta}\Delta\mu. \tag{3.3}$$

经验测度的收敛在定性上等价于分子混沌传播（参见 [Gol16, HM14] 及其中的参考文献）。后一概念是指：如果 $f_N^0(x_1,\dots,x_N) = \mathrm{Law}(X_N^0)$ 是 μ^0-混沌的（即，对每个固定的k，k点边缘分布 $f_{N;k}^0 \rightharpoonup (\mu^0)^{\otimes k}$ 当 $N\to\infty$ 时），那么 $f_N^t = \mathrm{Law}(X_N^t)$ 就是 μ^t- 混沌的。还有一个更强的概念，即混沌生成，文献 [RS25b], 对此进行了讨论；它表示联合分布在 $t\to\infty$时变为 μ^t-混沌的。

形式为 (3.1) 的系统的平均场极限历史悠久，最初研究的是正则漂移（通常为利普希茨）[Dob79、Szn91]，随后数年来，研究逐渐扩展到越来越奇异的相互作用。全面回顾这段历史超出了本讲义的范围。感兴趣的读者可参阅综述 [CD22], 讲义 [Gol22、Gol16、JW17、Jab14、Ser24], 以及 [Ser20、NRS22]的引言。本文将转而聚焦于较近时期对奇异相互作用（特别是对数势／黎曼势）的研究；在此我们沿用上述假设，并重点讨论零温情形 $\beta=\infty$。最后，我们将在第3.5节讨论正温度情形。

全范围 $-2<\mathsf{s}<\mathsf{d}$ 上的平均场收敛直到最近几年才得以解决：非奇异情形 $-2<\mathsf{s}<0$ [RSW], 次库仑情形 $\mathsf{s}<\mathsf{d}-2$, [Hau09, CCH14], 该¨库仑/超库仑情形 $\mathsf{d}-2\le\mathsf{s}<\mathsf{d}$ [Due16, CFP12, BO19, Ser20], 以及完全奇异情形 $0\le\mathsf{s}<\mathsf{d}$ [NRS22]。这些进展在很大程度上归功于调制能量方法，我们将在下一小节中加以综述。

其他技术，例如基于累积量层级或边缘分布层级的加权估计，即使对某些 Riesz 相互作用也能证明混沌传播 [BDJ24]。该方法更适用于正温度/扩散情形，这与我们的零温度设定形成对照，而在该设定中已有更强的结果 [BJS25, BDJ24, DJ25]。尽管无法处理 Riesz 势的全部范围，这些方法确实具有优势：对一阶与二阶动力学均适用，对相互作用的具体形式具有稳健性，并且在某些情形下能达到最优速率[Lac23, LLF23,HCR25, Wan26]，不过本质上至多只针对对数奇异性。这些结果蕴含关于平均场收敛速率的概率性陈述，但并不蕴含我们的方法所能得到的确定性收敛速率。

3.2. 主要结果。经验测度 μ_N^t收敛到方程 (3.3) 的解 μ^t 时，在距离 F_N 下的最优收敛速率为 $N^{\mathsf{s}}\,\mathsf{d}^{-1}$。这是因为，已知在 $\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ 中或平坦环面上的适当约束 V 下，里斯相互作用能的极小化子 X_N 满足 $|\mathsf{F}_N(X_N,\mu_V)| \propto N^{\mathsf{s}}\,\mathsf{d}^{-1}$，其中 μ_V是平均场能量的极小化子，称为平衡测度（见第 4.1 节）。这一结果已针对（超）库仑情形 [SS15a, SS15b, RS16, PS17]，、一般奇异情形（在平坦环面上）$0 \le \mathsf{s} < \mathsf{d}$ [HSSS17]，以及非奇异情形 $-2 < \mathsf{s} < 0$ [HCRS]得到证明。由于极小化子是能量的临界点，因此当 $\mathsf{V}^t = \nabla V$时，它们给出方程 (3.1) 的定常解，且满足 $\mathbb{M} = -\mathbb{I}$ 和 $\beta = \infty$。类似地，μ_V 是方程 (3.3) 的定常解。非平稳情形下的最优速率直到最近才得到完整确立：库仑情形 [Ser23, Ros22b]，、（超）库仑情形 [RSb]，、完全奇异情形 [HCRS25]，以及非奇异情形 [RSW]。

下面的定理 3.1 概述了在完整势型里斯情形 $-2 < \mathsf{s} < \mathsf{d}$ 下（零温度时）平均场收敛的最新成果，并给出了最优速率。$\mathsf{d}-2 \le \mathsf{s} < \mathsf{d}$ 部分取自 [RSb]，， $0 \le \mathsf{s} < \mathsf{d}$ 部分取自 [HCRS25]，，而 $-2 < \mathsf{s} < 0$ 部分取自[RSW]。值得注意的是，在非奇异情形 $-2 < \mathsf{s} \le 0$ 中，不存在加性 $N^{\mathsf{s}}\,\mathsf{d}^{-1}$ 误差，因为对于任何适当的 μ，已有结果表明 $\min_{X_N}\mathsf{F}_N(X_N,\mu) \propto N^{\mathsf{s}}\,\mathsf{d}^{-1}$，特别是非负的。正如下一小节所述，该证明可由如今已成为标准的调制能量方法和定理 2.1 直接推出。陈述定理之后，我们将对其假设和推论作一些说明。

定理 3.1. 设 g 具有如下形式 (1.6)，并假设对于某个 $\mathsf{a} \in (\mathsf{d},\mathsf{d}+2)$ 以及 $T > 0$，V满足

$$\int_0^T \Big(\|\nabla \mathsf{V}^t\|_{L^\infty} + \||\nabla|^{\frac{\mathsf{a}}{2}}\nabla \mathsf{V}^t\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{a}-2}}}\mathbf{1}_{\substack{\mathsf{a}>2\\ 0\le \mathsf{s}<\mathsf{d}-2}} + \||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}}\mathsf{V}^t\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}}}}\mathbf{1}_{-2<\mathsf{s}<0}\Big)dt < \infty. \tag{3.4}$$

假设方程 (3.3) 存在一个解 $\mu \in L^\infty([0,T],\mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})\cap L^\infty(\mathbb{R}^{\mathsf{d}}))$ 使得 $\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}|\mathsf{g}|(x-y)d(\mu^t)^{\otimes 2} < \infty$ 对每个 $t \in [0,T]$ 都成立，并且

$$\mathcal{N}(u^T) := \int_0^T \Big(\|\nabla u^t\|_{L^\infty} + \||\nabla|^{\frac{\mathsf{a}}{2}}u^t\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{a}-2}}}\mathbf{1}_{\substack{\mathsf{a}>2\\ 0\le \mathsf{s}<\mathsf{d}-2}} + \||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}}u^t\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}}}}\mathbf{1}_{-2<\mathsf{s}<0}\Big)dt < \infty, \tag{3.5}$$

$$\text{where } u^t := -\mathbb{M}\nabla \mathsf{g} * \mu^t + \mathsf{V}^t.$$

存在一个常数 $C > 0$，它仅取决于 d、s，使得对于任意解 X_N，满足 (3.1)，

$$\begin{aligned}\mathsf{F}_N(X_N^t,\mu^t) + \frac{\log(N\|\mu^t\|_{L^\infty})}{2N\mathsf{d}}\mathbf{1}_{\mathsf{s}=0} + C\|\mu^t\|_{L^\infty}^{\frac{\mathsf{s}}{\mathsf{d}}}N^{\frac{\mathsf{s}}{\mathsf{d}}-1} \\ \le Ce^{C\mathcal{N}(u^t)}\left(\mathsf{F}_N(X_N^0,\mu^0) + \sup_{\tau\in[0,t]}\left(\frac{\log(N\|\mu^\tau\|_{L^\infty})}{2N\mathsf{d}}\mathbf{1}_{\mathsf{s}=0} + C\|\mu^\tau\|_{L^\infty}^{\frac{\mathsf{s}}{\mathsf{d}}}N^{\frac{\mathsf{s}}{\mathsf{d}}-1}\right)\right).\end{aligned} \tag{3.6}$$

因此，如果极限$\lim_{N\to\infty} F_N(X_N^0,\mu^0) = 0$，那么对每个 $t \in [0,T]$，$\mu_N^t \rightharpoonup \mu^t$.

注 3.2. 当 $V^t = 0$ 时，范数 $\|\mu^t\|_{L^\infty}$。因此，

$$\sup_{\tau\in[0,t]}\Big(\frac{\log(N\|\mu^\tau\|_{L^\infty})}{2Nd}\mathbf{1}_{s=0}+C\|\mu^\tau\|_{L^\infty}^{\frac{s}{d}}N^{\frac{s}{d}-1}\Big)\le\frac{\log(N\|\mu^0\|_{L^\infty})}{2Nd}\mathbf{1}_{s=0}+C\|\mu^0\|_{L^\infty}^{\frac{s}{d}}N^{\frac{s}{d}-1}. \tag{3.7}$$

注 3.3. 读者可以验证，$V^t=-c^tx+\Phi^t(x)$ 满足上述条件，其中 $\int_0^T|c^t|dt<\infty$，且 $\int_0^T(\|\nabla\Phi^t\|_{L^\infty}+\||\nabla|^{\frac{a}{2}}\Phi^t\|_{L^{\frac{2d}{a-2}}}\mathbf{1}_{a>2})dt<\infty$。关于 3.5 中对 μ^t 的正则性假设，可参见偏微分方程文献中的多项研究。关于（超）库仑情形的参考文献，请参见 [Ser20 第 1 节。3] 关于次库仑情形的直接验证，请参见 [HCRS25 第 5 节。2]

注 3.4. 通过一个标准论证（例如，详见 [Ser20，注 3。7] 或 [RS23，注 1。5]），定理 3.1 可推出系统（3.1）的混沌传播。不过，这种“由整体到局部”的论证通常会导致次优速率 [Lac23]。

3.3. **调制能量与交换子。** 由于微观系统（μ_N^t 3.1）对应的经验测度是平均场方程（3.3）的弱解，因此证明平均场收敛的一种自然方法，是对（3.3）建立弱强稳定性估计。对于里斯相互作用，利用调制能量的强制性，可以方便地表述这种稳定性——调制能量趋于零可度量 μ_N^t 收敛到 μ^t。

利用调制能量方法证明平均场收敛，关键在于为 ¨建立 Gronwall 关系，其中 $_N(X_N^t,\mu^t)$ 中，X_N^t是微观系统（3.1）的一个解，而 μ^t是平均场方程（3.3）的一个解。关键的观察是，$F_N(X_N^t,\mu^t)$ 满足耗散不等式（例如参见 [Ser20，第3节。1]）

$$\frac{d}{dt}F_N(X_N^t,\mu^t)\le\int_{(\mathbb{R}^d)^2\setminus\triangle}\nabla g(x-y)\cdot(u^t(x)-u^t(y))d(\mu_N^t-\mu^t)^{\otimes2}, \tag{3.8}$$

其中 u^t 是（3.5）中的平均场速度。右端恰好是关于 $v=u^t$ 的一阶交换子表达式。重要的是，输运仅依赖于平均场密度μ^t，而非经验测度 μ_N^t。调制能量方法的妙处在于，有了这个不等式，便可应用定理 2.1 中的估计，再由 Gr¨onwall 引理得出结论。关于如何具体闭合微分不等式并得到定理 3.6中所述估计（3.1），详见 [RSb，第 6] 节，或 [HCRS25，第5节。1]。

3.4. 最优正则性假设。对 $\mu^t\in L^\infty$ 的假设并不十分重要，可以大幅放宽，代价是收敛速率变差。更根本的是定理 3.1 陈述中的条件 (3.5)，这是应用定理 2.1 所必需的，该条件对 μ^t施加了一定的正则性要求。鉴于尺度临界正则性与预期保证 (3.3) 唯一性的正则性之间的关系，自然会想知道，当 μ^t属于临界空间 $\dot W^{d_p+s+2-d^p}$时，$1<p<\infty$的结论是否仍然成立。若 $p\le\frac{2d}{d-2}$，则有$\||\nabla|^{d-s-2}u^t\|_{L^{\frac{2dd}{d-2}}}\lesssim\|\mu^t\|_{\dot W^{d_p+s+2-d_p}}$。但一般而言，当 $\mu^t\in\dot W^{d_p+s+2-d^p}$时，$\nabla u^t$ 仅属于 BMO。正如我们在 [Ros22b, Ros22a], 中观察到的，即使在这种临界正则性情形下，仍可对调制能量得到一种 Gr¨onwall 型[6] 估计。虽然它弱于 (3.6)，但仍足以证明平均场收敛。回到第 2.4 节的讨论，关键要素是一个缺陷交换子估计。这些工作 [Ros22b, Ros22a] 仅考虑了库仑情形，此时自然的尺度不变空间是 L^∞，并且当 $d\ge3$时存在短时间限制。

在 [HCRS25的定理 2 中，8], 我们利用新的缺陷交换子估计，将 [Ros22b、Ros22a] 中的结果推广到了整个里斯情形，对平均场收敛成立的时间区间不作任何限制。在次库仑情形中，我们证明了，如果初始

[6]更确切地说，可得到一个符合 Osgood 引理形式的估计（例如，参见 [BCD11，第 3.1.1 节]).

密度为 $\mu^\circ \in L^{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}$ 尺度临界，那么平均场方程（3.3）存在唯一的全局解，且该解是微观系统（3.1）的（定量）平均场极限。关于应用缺陷交换子估计后，如何闭合调制能量所满足的微分不等式，详见 [HCRS25第 2.3 节和第 4 节。4]。

3.5. **正温度**。 迄今为止，我们只讨论了零温度情形 $\beta = \infty$。在正温度下 $\beta < \infty$，此时 (3.1) 的动力学变为随机过程，上文所述的纯调制能量方法可以推广：此时考虑调制能量的矩，至少在亚库仑情形 $\mathsf{s} < \mathsf{d} - 2$中是如此。这一限制源于能量演化中的 Itô 修正；当 $\mathsf{s} \geq \mathsf{d} - 2$ 时（此时库仑情形几乎也无法处理），尚不清楚如何对其进行适当控制。有关这一推广及其所得收敛速率的详情，请参阅 [RS23、HC23、HCRS25]。

对于正温度下的梯度动力学（即 $\mathbb{M} = -\mathbb{I}$），Bresch 等人 [BJW19b、BJW19a、BJW23] 精彩地指出，调制能量与此前使用的相对熵 [JW18、GBM24、FW24、RS24] 自然结合，形成调制自由能

(3.9)
$$\mathsf{E}_N(f_N^t, \mu^t) \coloneqq \frac{1}{\beta N}\mathsf{H}\left(f_N^t \mid (\mu^t)^{\otimes N}\right) + \mathbb{E}_{X_N \sim f_N^t}\left[\mathsf{F}_N(X_N, \mu^t)\right] = \frac{1}{N}\mathsf{H}(f_N^t \mid \mathbb{Q}_{N,\beta}(\mu^t)) - \frac{\log \mathsf{K}_{N,\beta}(\mu^t)}{N},$$

其中 H 是相对熵/KL散度。第二个等式是用作者与 Serfaty 引入的调制吉布斯测度和配分函数重新表述的 [RS25b]，

$$d\mathbb{Q}_{N,\beta}(\mu) \coloneqq \frac{e^{-\beta N \mathsf{F}_N(X_N,\mu)}}{\mathsf{K}_{N,\beta}(\mu)}\, d\mu^{\otimes N}, \qquad \mathsf{K}_{N,\beta}(\mu) \coloneqq \int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^N} e^{-\beta N \mathsf{F}_N(X_N,\mu)}\, d\mu^{\otimes N}(X_N). \tag{3.10}$$

量（3.9非常适合用于证明熵混沌传播 [BJW19b、BJW19a、BJW23、CdCRS23、RS25b、RS24、CFGW24]，甚至还能处理对数型吸引相互作用 [BJW19b、BJW23、CdCRS25]。在正温度情形下，交换子估计也发挥着同样关键的作用。更确切地说，若 $f_N^t \coloneqq \mathrm{Law}(X_N^t)$，则用我们的记号，原始的 BJW 量可写为

4. Supercritical mean-field limits

最后，我们介绍将尖锐交换子估计应用于所谓超临界平均场极限的第二个例子。具体而言，这些估计结合调制能量方法，在最优尺度假设下，可在平均场与准中性联合极限中，从牛顿 N体问题推导出 Lake 方程，适用于（超）库仑里斯相互作用。本节内容摘自与 Serfaty 合作的论文 [RS25a]。

4.1. **背景与动机**。考虑一个由 N 个粒子组成的牛顿系统，其两两相互作用势为 g，外部约束势为 V：

$$\begin{cases} \dot{x}_i^t = v_i^t \\ \dot{v}_i^t = -\gamma v_i^t - \dfrac{1}{\varepsilon^2 N}\displaystyle\sum_{1\leq j\leq N: j\neq i} \nabla \mathsf{g}(x_i^t - x_j^t) - \dfrac{1}{\varepsilon^2}\nabla V(x_i^t) \\ (x_i^0, v_i^0) = (x_i^\circ, v_i^\circ), \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq N. \tag{4.1}$$

假设位置和速度属于 $\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$。这里，$\gamma \geq 0$ 是摩擦系数，而 $\varepsilon > 0$ 是一个小参数，可能依赖于 N，它编码了系统的物理信息。与（3.1）中的一阶动力学不同，（4.1）中的动力学现在是二阶的。为求具体起见，并且由于我们的结果最终将针对这一类情形，我们将注意力限制在（库仑/超库仑）里斯势上。不过，在这个阶段的大部分讨论也适用于更一般的相互作用势。

我们关注（ N 趋于大、 ε 趋于小的极限4.1），后者我们将其理解为准中性极限，将在下一小节中详细阐述。我们的设定有两种（数学上等价的）动机。

第一个研究动机是非中性等离子体 [OD98] (另见 [WBIP85、MKTL08]，这些工作与受限中性系统有关)。系统(4.1描述了接近热力学平衡的受限离子系统的演化，也就是说，空间密度 μ_N^t : $= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i^t}$ 接近平衡测度 μ_V。该平衡测度定义为使宏观能量或平均场能量达到最小值的概率测度

$$\mathcal{E}(\mu) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^d} V d\mu + \frac{1}{2}\int_{(\mathbb{R}^d)^2} \mathrm{g}(x-y)d\mu(x)d\mu(y). \tag{4.2}$$

关于库仑／里斯背景下的平衡测度及其与分数阶障碍问题之解的联系（下文也将讨论），详情请参阅 [Ser24，第 2] 章。对于无限延伸的受限系统，可以将平衡测度视为环面上均匀测度的一种推广。

第二个研究动机来自双组分全局电中性系统。在这种情形下，经验空间密度 μ_N^t 接近一个固定密度 μ，该密度代表异号带电粒子组分的静态背景密度（例如重带正电离子）。另一种理解方式是，将其视为具有非均匀背景的单组分等离子体。在这种情况下，($-\nabla V x_i^t$)中(4.1)第二行右侧的项应替换为由该背景产生的吸引力 $+\nabla(\mathrm{g} * \mu x_i^t$。

这些动机各自对应的设定在数学上是等价的。后者对应于 $V = -\mathrm{g} * \mu + \frac{1}{2}\int_{(\mathbb{R}^d)^2} \mathrm{g}(x-y)$ $d\mu^{\otimes 2}$。而前者对应于考虑一种背景密度，使得 $\nabla(\mathrm{g} * \mu + V) = 0$ 位于 μ 的支撑集内。特别地，当（但不只是当） μ 等于平衡测度 μ_V时，便可满足这一条件。

在对外势 V 作出适当假设的条件下，我们的目标是证明：若初始空间密度 μ_N°: $= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i^\circ} \rightharpoonup \mu_V$当 $N \to \infty$ 时成立，且初始速度 $v_i^\circ \approx u^\circ(x_i^\circ)$ 对应于定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的宏观向量场 u°，那么，与（4.1）的一个解相关联的总经验测度 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{(x_i^t, v_i^t)}$ 在 $\varepsilon \to 0$ 和 $N \to \infty$ 时收敛到单动量测度 $\mu_V(x)\delta_{u^t(x)}(v)$，其中 u^t 满足*Lake* 方程

$$\begin{cases} \partial_t u + \gamma u + u \cdot \nabla u = -\nabla p \\ \operatorname{div}(\mu_V u) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

特别是，当 g 为库仑势时，我们给出了 Barr´等人 [BCGM15]关于 Vlasov-Poisson 单动数据准中性极限证明的微观对应结果。

注意，若 μ_V为常数且 $\gamma = 0$，那么（4.3）不过就是不可压缩欧拉方程。压力 p 是用于施加不可压缩约束 $\operatorname{div}(\mu_V u) = 0$的拉格朗日乘子。将（4.3）中第一个方程的两边乘以 μ_V 并取散度，即可通过求解散度型椭圆方程由速度 u得到压力p

$$-\operatorname{div}(\mu_V \nabla p) = \operatorname{div}^2\left(\mu_V u^{\otimes 2}\right) = \operatorname{div}(\mu_V u \cdot \nabla u). \tag{4.4}$$

方程（4.3）有时也称为无弹性方程，它出现在大气流 [OP62, Mas07]和超导 [CR97, DS18, Due18] 的建模中，并已在数学上得到研究 [LOT96a, LOT96b, BCGM15, Due18]。该方程也作为带有钉扎和外力的 Ginzburg-Landau涡旋的平均场极限出现 [DS18] 已证明该方程。此外，Lake 方程已被证明 [M´en23]是一个浅水涡旋模型的平均场极限，该模型具有变化地形 [Ric00]。

4.2. **平均场与准中性联合极限**。为了了解方程（4.3）如何作为（4.1）的经验测度的形式极限动力学出现，我们作如下论证。

假设参数 $\varepsilon > 0$ 固定。与第3.1节中推导方程（3.3）类似，在此背景下，平均场极限指当 $N \to \infty$ 时，总经验测度 $f^t_{N,\,\varepsilon} := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{z_i^t}$（其中 $z_i^t := (x_i^t,\ v_i^t)$）收敛到带摩擦的Vlasov方程的一个解 f_ε^t

$$\begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + v\cdot\nabla_x f_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2}\nabla(V+\mathsf{g}*\mu_\varepsilon)\cdot\nabla_v f_\varepsilon - \mathrm{div}_v(\gamma v f) = 0 \\ \mu_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} df_\varepsilon(\cdot, v) \\ f_\varepsilon|_{t=0} = f_\varepsilon^\circ. \end{cases} \tag{4.5}$$

当 g 为库仑势且 $\gamma = 0$时，方程（4.5）称为 Vlasov-Poisson 方程。更一般地，对于（1.6）中的 g，该方程称为 Vlasov-Riesz 方程。从（4.1）直接推导出 Vlasov-Poisson/Vlasov-Riesz 方程是一个困难的问题。对于正则势 g 的情形（例如全局有界的 C^1，1） [NW74、BH77、Dob79、Due21] ，或者甚至仅考虑具有有界力 ∇g [JW16]的势，相关问题已有充分研究；但一般的库仑情形仍难以处理，除维数为 1 [的情形外，Tro86、Hau14]。据我们所知，关于奇异势的最佳结果仅限于力 ∇g 在原点处平方可积的情形 [HJ07、HJ15、BDJ24]（这仅差一步便涵盖二维库仑情形），或是带短程消失截断的库仑势[BP16、Laz16、LP17、Gra21、FP25a、FP25b]。[7] 最近，Duerinckx 和 Serfaty [Ser20，附录]证明了 Vlasov-Poisson 方程的平均场极限；更一般地，也证明了超库仑Vlasov-Riesz方程的平均场极限[8]，其初始数据为单动量/冷初始数据，此时 Vlasov-Poisson 方程约化为无压Euler-Poisson方程。暂且不论如何严格证明平均场极限这一问题，我们希望形式上从 Vlasov 方程（4.5）推导出 Lake 方程（4.3），并考察 $\varepsilon \to 0$ 时的极限。

所考虑的情形是空间密度 μ_ε^t 收敛到平衡测度 μ_V（这是一个假设），当 $\varepsilon \to 0$ 时。将势分解为

$$V + \mathsf{g}*\mu_\varepsilon = (V + \mathsf{g}*\mu_V) + \mathsf{g}*(\mu_\varepsilon - \mu_V), \tag{4.6}$$

根据平衡测度的刻画，$V + \mathsf{g}*\mu_V$在 μ_V 的支集上为常数，这意味着

$$\nabla(V + \mathsf{g}*\mu_\varepsilon) = \nabla\mathsf{g}*(\mu_\varepsilon - \mu_V), \qquad x \in \mathrm{supp}\,\mu_V. \tag{4.7}$$

假设重整化电势差 $\frac{1}{\varepsilon^2}\mathsf{g}*(\mu_\varepsilon - \mu_V)$ 存在弱极限 p，当$\varepsilon \to 0$时，我们看到弱极限 $f := \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon$ 满足方程

$$\begin{cases} \partial_t f + v\cdot\nabla_x f - \nabla p\cdot\nabla_v f - \mathrm{div}_v(\gamma v f) = 0 \\ \mu_V = \int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} df(\cdot, v) \\ f|_{t=0} = f^\circ, \end{cases} \tag{4.8}$$

其中 f°是 f_ε°的弱极限。

现在定义与（流 $J(x) := \int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} v\, df(x,\ v)$相关联的量（4.8）。对（4.8）中的第一个方程两边关于 v积分，再利用空间密度在任意时刻都等于 μ_V这一事实，可知 div J^t 在时间上为常数。经过一些计算（计算过程见 [RS25a，第 1 节1]），可得

$$\partial_t J + \mathrm{div}\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} v^{\otimes 2} df(\cdot, v) = -\gamma J - \mu_V\nabla p. \tag{4.9}$$

[7]如果在（4.1）中的速度方程加入噪声，对应于 *Vlasov-Fokker-Planck* 平均场极限，那么已有研究证明二维库仑情形 [BJS25]。另见 [DJ25] 关于一些 Riesz 情形的研究。[8]将本文引入的总调制能量与交换子估计定理2.1(2.5)结合起来，也可以将这一结果推广到次库仑 Vlasov-Riesz 方程。

该方程不能仅用（J， p）闭合，因为左侧第二项需要知道 f的二阶速度矩，而它又取决于三阶矩，依此类推（这是 Vlasov 方程的著名矩闭合问题；例如参见 [Uhl18]）。但是，采用单动量或“冷电子”[9] 假设 f（x， v） $= \mu_V$（x）δ（$v - u$（x））， 便可推出$J = \mu_V u$。由于 μ_V与时间无关，将此恒等映射代入（4.9）可得

$$\begin{cases} \mu_V \partial_t u + \operatorname{div}(\mu_V u^{\otimes 2}) = -\mu_V(\gamma u + \nabla p), \\ \operatorname{div}(\mu_V u) = 0. \end{cases} \tag{4.10}$$

假设 μ_V 在其支撑集上为正，我们可以看到，(4.10) 等价于 (4.3)。

在 Vlasov-Poisson 的等离子体物理背景下，极限 $\varepsilon \to 0$ 称为准中性极限，而方程 (4.8) 在 $\mu_V \equiv 1$的情形下称为动理学不可压缩欧拉（KIE）方程 [Bre89]。(4.8) 的非齐次情形似乎尚未在文献中出现。上述推理中，我们并未假设 g 具有特定形式（例如库仑形式）。这表明，对于这类奇异极限，KIE 具有某种普适性，这似乎是一个新发现。在这一等离子体物理背景下，分布函数 f 描述了电子相对于带正电离子的静态背景的演化。经过重新缩放并转为无量纲变量后，参数 ε 对应于系统的德拜（屏蔽）长度，即等离子体中发生电荷分离的尺度。当德拜长度远小于观测尺度时，等离子体被称为准中性，因为在观察者看来它呈电中性。准中性极限的严格论证是一个困难的问题，已有研究见 [BG94、Gre95、Gre96、Gre99、Bre00、Mas01、HKH15、HKR16、HKI17b、HKI17a、GPI18、GPI20b]。关于进一步讨论，我们请读者参阅综述 [GPI20a]及其中的参考文献。

前述形式计算表明，在极限 $N + \varepsilon^{-1} \to \infty$下——物理上可将其解释为平均场与准中性联合极限——牛顿系统(4.1)的经验测度$f_{N,\varepsilon}^t$ 收敛到KIE(4.8)的一个解 f^t ；对单动量解，该方程退化为Lake方程(4.3)。因此，我们预期，若粒子速度 $v_i^t \approx u^t(x_i)$，则当 $N + \varepsilon^{-1} \to \infty$时，经验测度$f_{N,\varepsilon}^t$ 收敛到测度$\delta_{u^t}(x)(v)\mu_V(x)$，其中$u^t$ 是(4.10)的一个解。对极限 $N + \varepsilon^{-1} \to \infty$ 的一种更一般的解释是，它是系统(4.1)的超临界平均场极限。这一术语由Han-Kwan和Iacobelli [HKI21] 提出，指的是(4.1)中单个粒子所受的力在形式上随 $N \to \infty$发散，而在通常的 $1/N$ 平均场标度下该力为 O(1)。

4.3. 尺度假设与先前工作。f_N^t、ε 收敛到 $\delta_{u^t}(x)(v)\mu_V(x)$ 此前已由 Han-Kwan 与 Iacobelli [HKI21] 在空间周期库仑情形（即 $x \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$）下证明，此时 $V = 0$ 且 $\mu_V \equiv 1$，并假设当 $\varepsilon + N^{-1} \to 0$ 时 $\varepsilon N^{\quad 1}$ d(d+1) $\to \infty$，其中 u^t 是不可压缩欧拉方程的解。在这项工作中，他们认识到（基于前述工作[Ser20 附录] 中关于平均场极限的结果），只要在调制势能的定义中向背景空间密度添加一个适当的 $O(\varepsilon^2)$ 校正项，调制能量方法也可用于这一超临界极限。我们将在下文第 4.5 节中进一步阐述这一想法。他们的证明可视为对 Brenier 的 [Bre00]调制能量方法的推广：该方法用于证明具有单动数据的 Vlasov-Poisson 的准中性极限，并通过重整化允许 Vlasov-Poisson 的解为 Dirac 质量之和。与所有调制能量方法一样，关键工具是交换子估计 (1.4)，而更精细的加性误差使得能够处理 ε、 N 的一大类标度关系。

在相同设定下，作者随后进一步改进了这一收敛性 [Ros23] 至

$$\lim_{\varepsilon + N^{-1} \to 0} \varepsilon^{-2} N^{-\frac{2}{\mathrm{d}}} = 0 \tag{4.11}$$

[9]物理学文献中的这一术语源于该分布的温度为零这一事实。

其方法是针对库仑情形使用了一个尖锐的交换子估计 [LS18, Ser23, Ros23]。此外，还有研究给出了关于欧拉方程 u的解的依赖关系的更精细估计。 [Ros23] 猜想，标度假设（4.11）通常应是最优的，其含义是：当 $\varepsilon^{-2} \ll N^{-2}$d时，不可压缩欧拉方程不应是经验测度的极限演化。

这些先前的研究仅限于环面上的库仑情形。这是一种理想化设定，因为它假设空间密度均匀。此外，这些研究尚未严格证明 Lake 方程关于相互作用和约束的普适性，即该方程仅取决于平衡测度。最后，这些先前的研究也未解决 ε 与 N之间标度关系的最优性问题。

4.4. **主要结果的非正式表述。** 在 [RS25a] 中，我们与 Serfaty 合作，针对（超）库仑里斯相互作用解决了上述问题。为介绍该研究的主要结果，我们引入总调制能量

$$\mathsf{H}_N(Z_N^t, u^t) := \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^N |v_i^t - u^t(x_i^t)|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\mathsf{F}_N(X_N^t, \mu_V + \varepsilon^2\mathfrak{U}^t) + \frac{1}{\varepsilon^2 N}\sum_{i=1}^N \zeta(x_i^t). \tag{4.12}$$

这里， Z_N^t 是 N粒子系统（4.1）的一个解。向量场 u^t 不是 Lake 方程（4.3）的解，而是从 $\operatorname{supp}\mu_V$ 延拓到整个 $\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$上的场，同时保持正则性，并且 $\operatorname{div}(\mu_V u) = 0$ （见 [RS25a，第 4]节）。方程（4.3）的物理柯西问题定义在区域 $\operatorname{supp}\mu_V$ 上，并满足无通量边界条件；但微观动力学 Z_N^t 并不局限于 $\operatorname{supp}\mu_V$。这种延拓使我们能够比较这两种设定。

(4.12) 的第一项是调制动能。第二项是调制势能，此前已在 (1.2) 中出现。这里， $\mathfrak{U}^t$ 是一个 N 无关的校正项，其精确定义可参见 [RS25a，公式 (5.2)] （另见其中的注 5.1）。第三项为

$$\zeta := \mathsf{g} * \mu + V - c \tag{4.13}$$

罗宾常数 c，它非负且在 $\operatorname{supp}\mu_V$上为零。量 (4.12) 同时依赖于 ε， N；但由于我们将 $\varepsilon = \varepsilon(N)$ 视为 ε，为简化记号，我们省略对的依赖。

由于给出精确且严格的版本需要陈述一些相当繁琐的正则性假设，我们仅在下文定理4.1 中介绍主要结果的非正式版本。感兴趣的读者可在 [RS25a，定理 5 中找到精确表述。2]所引文献附录 A 还将我们的结果推广到了正则相互作用的情形。

定理 *4.1*（非正式表述）。假设平衡测度 μ_V 足够正则，且 $\Sigma := \operatorname{supp}\mu_V$ 是一个足够光滑的区域。假设 u 是方程 *(4.3)* 在 $[0,T]$ 上的一个足够正则的解。那么存在连续函数 C_1、C_2、C_3： $[0,T] \to \mathbb{R}_+$，它们取决于 *d*、*s* γ 以及 u 的范数，使得对于 *(4.1)* 的任意解 $Z_N^t = (X_N^t, V_N^t)$，都有

$$\mathsf{H}_N(Z_N^t, u^t) + \frac{\log N}{2\mathsf{d}N\varepsilon^2}\mathbf{1}_{\mathsf{s}=0} \le e^{C_1^t}\Big(\mathsf{H}_N(Z_N^0, u^0) + \frac{\log N}{2\mathsf{d}N\varepsilon^2}\mathbf{1}_{\mathsf{s}=0} + \frac{C_2^t N^{\frac{\mathsf{s}}{\mathsf{d}}-1}}{\varepsilon^2} + C_3^t\varepsilon^2\Big). \tag{4.14}$$

特别地，如果

$$\lim_{\varepsilon+\frac{1}{N}\to 0}\Big(\mathsf{H}_N(Z_N^0, u^0) + \frac{\log N}{2\mathsf{d}N\varepsilon^2}\mathbf{1}_{\mathsf{s}=0}\Big) = \lim_{\varepsilon+\frac{1}{N}\to 0}\frac{N^{\frac{\mathsf{s}}{\mathsf{d}}-1}}{\varepsilon^2} = 0, \tag{4.15}$$

那么我们有弱-* 收敛

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{z_i^t} \xrightarrow[\varepsilon+\frac{1}{N}\to 0]{} \delta_{u^t(x)}(v)\mu_V(x), \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{4.16}$$

标度假设 $N^{\mathsf{s}/\mathsf{d}-1}/\varepsilon^2 \to 0$ 在（4.15）中一般而言是最优的，即存在一列（4.1）的解 Z_N^t，使得$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{z_i^t} \rightharpoonup \delta_{u^t(x)}(v)\mu_V(x)$当$\varepsilon + \frac{1}{N} \to 0$时，

但总调制能量$\mathsf{H}_N(Z_N^t, u^t)$并不趋于零。这本质上源于第3 节中关于平均场极限在调制能量距离下的精确收敛速率所阐述的同一推理。也就是说，若X_N° 是微观能量的临界点

$$\mathcal{H}_N(X_N) \coloneqq \frac{1}{2N} \sum_{1\le i\neq j\le N} \mathsf{g}(x_i - x_j) + \sum_{i=1}^N V(x_i), \tag{4.17}$$

那么 $Z_N^t \coloneqq (x_i^t, v_i^t)_{i=1}^N$ with $(x_i^t, v_i^t) \coloneqq (x_i^\circ, 0)$ 是方程 (4.1) 的唯一（平稳）解，其中 $\gamma = 0$；此外，该解与 ε 无关。特别地，若 X_N° 是 $\mathcal{H}_N$ 的极小化子，那么根据 [SS15b、SS15a、RS16、PS17] 的结果（综述可参见 [Ser24，第 11-12] 章），有 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i^\circ} \xrightarrow[N\to\infty]{} \mu_V$，并且

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \underbrace{\zeta(x_i^\circ)}_{=0} + \mathsf{F}_N(X_N^\circ, \mu_V) + \frac{\log N}{2\mathsf{d}N}\mathbf{1}_{\mathsf{s}=0} = \mathsf{C}_{\mathsf{d},\mathsf{s}}^V N^{\frac{\mathsf{s}}{\mathsf{d}}-1} + o(N^{\frac{\mathsf{s}}{\mathsf{d}}-1}) \quad \text{as } N\to\infty, \tag{4.18}$$

其中 $\mathsf{C}_{\mathsf{d},\mathsf{s}}^V$ 是一个可计算的常数，仅依赖于 d，s V，它编码了微观尺度上的热力学信息。对每个 i， $\zeta(x_i^\circ) = 0$ 都成立，这是因为极小化点构型位于 $\operatorname{supp}\mu_V$ 中，而 ζ 在该处为零。因此，

$$\mathsf{H}_N(Z_N^t, 0) + \frac{\log N}{2\mathsf{d}N\varepsilon^2}\mathbf{1}_{\mathsf{s}=0} = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\mathsf{F}_N(X_N^\circ, \mu_V) + \frac{\log N}{2\mathsf{d}N}\mathbf{1}_{\mathsf{s}=0}\right) = \mathsf{C}_{\mathsf{d},\mathsf{s}}^V \frac{N^{\frac{\mathsf{s}}{\mathsf{d}}-1}}{\varepsilon^2} + o(\frac{N^{\frac{\mathsf{s}}{\mathsf{d}}-1}}{\varepsilon^2}), \tag{4.19}$$

并且，当 $\varepsilon \le N^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}}{2}}{}_{\mathsf{d}}$ 时，我们不能期待超临界平均场区间内的总调制能量趋于零。

鉴于前述观察，我们不禁要问，当 且假设 d 时，描述系统（4.1）的有效方程是什么。直观地看，人们可能会认为，当$\varepsilon \ll N^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}}{2}}{}_{\mathsf{d}}$ 时，这相当于先令 $\varepsilon \to 0$，再令 $N\to\infty$。然而，一般来说，这个极限并无意义。事实上，将（4.1）中的第二个方程两边乘以 ε^2，并在固定 N 的情况下令 $\varepsilon \to 0$，形式上可见，极限位置 X_N^t 应当是微观能量 $\mathcal{H}_N$ 的临界点。如果每个极限速度 v_i^t 都非零，我们便无法期待X_N^t 在所有 t 时始终是临界点。另一方面，即使初始位置是能量（4.17）的临界点，也没有机制能迫使速度趋于零。在第 4.6 节中，我们证明，对于可精确求解的一维库仑情形，当且仅当 $\varepsilon^{-2}N^{\mathsf{s}_{\mathsf{d}}-1} = (\varepsilon N)^{-2}$ 不趋于零时，这个极限会失效；这表明，即使在最简单的情形下，经验测度也未必存在弱极限。

注4.2. 给定 u°，可以构造初始数据的统计上典型的例子 Z_N°，使得（4.15）成立。参见 [RS25a，注 1。2]了解详情。

4.5. **证明方法**。 我们对定理 4.1的证明方法作若干评注。完整细节见 [RS25a第 5]节。

量（4.12）是 Duerinckx 和 Serfaty [Ser20, 附录] 最初引入的总调制能量的一种变体，用于处理单动量机制下的 Vlasov-Riesz 平均场极限。在调制势能中加入含时校正项 $\mathfrak{U}^t$ 的做法受 [HKI21]启发。 ε^2 在 $\mu_V + \varepsilon^2\mathfrak{U}^t$ 中的标度反映了宏观平衡空间密度 μ_V周围的 $O(\varepsilon^2)$ 涨落。（4.12）中的最后一项是 [RS25a]提出的新贡献，反映出微观系统（4.1）受到外势 V的约束，而不是置于紧致区域中，例如 $\mathbb{T}^{\mathsf{d}}$ 如 [HKI21, Ros23]中那样。尽管 ζ 项看起来只有 $O(1)$ 阶，但如果粒子始终位于 μ_V的支集内，实际上该项为零，即准中性假设得以传播。类比于 [HKI21]与 [Bre 00], 之间的关系，总调制能量（4.12）可以看作对[BCGM15], 中的总调制能量进行重整化，从而适用于 Vlasov解 $f_\varepsilon^t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{z_i^t}$。

与所有调制能量方法一样，证明基于建立总调制能量（¨的 Gronwall 关系（4.12）。该量的时间导数包含若干需要分别处理的项。

调制动能的主要贡献可直接利用柯西－施瓦茨不等式估计。对空间密度的修正 $\varepsilon^2\mathfrak{U}^t$ 旨在抵消对调制动能求导时压力在（4.3）中的贡献。调制势能的主要贡献是一个关于 $v = \tilde{u}^t$的一阶交换子（1.4），其中 $v = \tilde{u}^t$是 Lake 方程的解 u^t 在全空间上的延拓，而 $\mu = \mu_V + \varepsilon^2\mathfrak{U}^t$。为处理这一项，我们关键地依赖尖锐估计定理2.1（2.4），它使得标度假设（4.15）得以成立。

与 [HKI21相比，一个新项Ros23], 来自 $\zeta(x_i^t)$ 的贡献，是

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u^t(x_i^t)\cdot\nabla\zeta(x_i^t) = \int_{\mathbb{R}^d} u\cdot\nabla\zeta d\mu_N^t, \tag{4.20}$$

这一项没有交换子结构，但我们设法将其界定为$C\|u^t\|_{W^{1,\infty}}\sum_{i=1}^N\zeta(x_i^t)$，这足以完成 Gr¨onwall 循环。该估计的证明利用了 u^t 在 $\Sigma = \operatorname{supp}\mu_V$ 边界上满足的无通量条件（这是取准中性极限的结果），以及关于分数阶拉普拉斯算子障碍问题解的自由边界正则性的一些非平凡结果（见 [RS25a，附录 B]），这些结果本身也可能具有独立的研究价值。在库仑情形下，[BCGM15] 也遇到了一个类似于（4.20）的项，其中μ_N^t 被 Vlasov-Poisson 的空间密度 μ^t 取代；不过，他们利用拉普拉斯算子的局部性，通过特定论证处理了这一项。

此外，还有若干余项具有 $\int_{\mathbb{R}^d}\phi\, d(\mu_N - \mu_V - \varepsilon^2\mathfrak{U})$ 的形式，其中 ϕ 是 $u, \mathfrak{U}$ 的函数。得益于调制势能的强制性，这些项可以由调制势能控制，外加一些 $O(\varepsilon^{-2}N^{\mathsf{s}\mathsf{d}^{-1}})$ 量级的误差，因此可以接受。

将各项的估计结合起来，并应用 Gr¨onwall-Bellman 引理，可得不等式（4.14）。总调制能量趋于零，由此可得经验测度的弱收敛（例如，参见 [Ros23，第 4 节。2]）。至此，定理 4.1 的证明完成。

4.6. **一维库仑气体中的 $\varepsilon^2 \lesssim N^{\mathsf{s}\mathsf{d}^{-1}}$ 情形。** 考虑带二次约束的一维库仑情形（即 $\mathsf{s} = -1$, $\mathsf{g}(x) = -|x|$, $V(x) = |x|^2$）。在初始经验空间密度收敛到平衡测度的假设下，若 $\varepsilon + N^{-1} \to 0$在 $\varepsilon^{-2}N^{\mathsf{s}\mathsf{d}^{-1}} = \varepsilon^{-2}N^{-2}$ 不趋于零，则经验流一般不存在弱极限。因此，在（超）库仑里斯情形的超临界平均场极限中，若不满足定理 4.15 中的标度假设（4.1），就不能期待收敛到 Lake 方程。这个例子利用了带二次约束的一维库仑气体的精确可解性；这一事实广为人知。命题的证明见 [RS25a，第 6] 节。

命题 4.3。 存在一列初始位置 X_N°，满足$\mathsf{F}_N(X_N^\circ, \mu_V) \to 0$，并且$\mu_N^\circ \rightharpoonup \mu_V$ 当 $N \to \infty$ 时，但若对每个 $1 \le i \le N$ 都有 $v_i^\circ = 0$，则相应的经验流$J_N^t := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N v_i^t\delta_{x_i^t}$

- 在 $[0,\infty)$ 上一致收敛到零（零是 *Lake* 方程 (4.10) 从零初始数据出发的唯一解），当 $\varepsilon + N^{-1} \to 0$ 时，$\varepsilon N \to \infty$若 $\varepsilon N \to \infty$,
- 在任何 $t \in (0, \infty)$ 下，当 $\varepsilon + N^{-1} \to 0$ 且 $\varepsilon N \not\to \infty$ 时均无弱极限。

4.7. **次库仑情形。** [RS25a]只考虑了（超）库仑区域，原因有二。首先，在撰写本文时，次库仑情形下仅有 [NRS22] 的非尖锐交换子估计可用，因此只有在（超）库仑情形下，我们才能证明所得结果是尖锐的。显然，得益于定理2.1(2.5)，如今情况已不再如此。其次，更重要的是

，对于分数阶拉普拉斯算子的更高次幂所对应的障碍问题，似乎尚无充分的正则性理论（参见 [DHAP23] ，其中介绍了这方面的一些进展）。如果假设平衡测度在 $\mathbb{R}^d$上具有全支集，或者将问题限制在环面上（在约束足够小的条件下，很容易证明此时具有全支集），那么所有涉及 ζ 的项都会消失。此时，按照 4.15中的标度假设，并沿用 [RS25a]中的相同证明，即可处理次库仑情形。

4.8. **非单动能机制。** RS25a [RS25a]的调制能量方法目前仅适用于单动能机制，动理学平均场极限也是如此。鉴于其他方法能够在不采用单动能拟设的情况下处理二阶系统的平均场极限，一个自然的问题是：能否在4.8式中$\varepsilon + N^{-1} \to 0$，在 ε与 N之间满足某种标度关系的条件下，借助这些方法而非调制能量方法推导出完整的KIE方程?

这个问题的答案并不显而易见。据我们所知，唯一推导出完整KIE方程（均匀密度情形）的结果来自Griffin-Pickering和Iacobelli[GPI18、GPI20b], ，其方法本质上是将两个结果结合起来：正则化Vlasov-Poisson方程的平均场极限 $N \to \infty$ 以及Vlasov-Poisson方程的准中性极限。这种方法对 ε 与 N之间的关系施加了非常严格的条件。

至少在正则相互作用的情形下（其处理见 [RS25a，附录 A]），初步计算表明，本文的调制能量方法可以推广到单动量情形之外，并适用于密度可能为非常数的情形，其途径是多流/多流体分解，其精神类似于 [Gre96]。这一方向是正在进行的工作的主题。

References

[AHS23] Fabian Altekr¨uger、Johannes Hertrich 与 Gabriele Steidl。带里斯核差异的神经瓦瑟斯坦梯度流。载于 Andreas Krause、Emma Brunskill、Kyunghyun Cho、Barbara Engelhardt、Sivan Sabato 与 Jonathan Scarlett 编，*Proceedings of the 40th International Conference on Machine Learning* 202 *Proceedings of Machine Learning Research* 664 690 ，卷，页–。PMLR，2023年7月。[BBNY19] Roland Bauerschmidt、Paul Bourgade、Miika Nikula 与 Horng-Tzer Yau。二维库仑等离子体：准自由近似与中心极限定理。 *Adv. Theor. Math. Phys.*，23 1002，2019 4 841( )：–。[BCD11] Hajer Bahouri、Jean-Yves Chemin 与 Rapha¨el Danchin。 *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations* 343 *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* ，卷。Springer，海德堡。2011

[BCGM15] Julien Barr´e、David Chiron、Thierry Goudon 与 Nader Masmoudi。从 Vlasov-Poisson 与 Vlasov-Poisson-Fokker-Planck 系统到不可压欧拉方程：有限电荷情形。 *J. Éc.* , ：–。[BDJ24] Didier *polytech. Math.* 2 247 296, 2015

Bresch、Mitia Duerinckx 与 Pierre-Emannuel Jabin。具有奇异相互作用的平均场极限的对偶方法。 *arXiv preprint arXiv:2402.04695*，2024。[BG80] H. Br ´ ¨ 4 4 677 681, ezis 与 T. Gallouet。非 1980 0362 546 1873 5215 10 1016 0362 546 80 90068 1 线性薛定谔演化方程。 *Nonlinear Anal.*, ( ): –。ISBN: - X, - 类型: doi: 。/ - X( ) - 。[BG94] Yann Brenier 与 Emmanuel Grenier。Vlasov-Poisson 系统˙在准中性 ´ ´ 318 2 121 124, 机制˙下的奇异˙极限：与 1994 时间无关的情形。 *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, ( ): –。[BG13] G. Borot 与 A. Guionnet。 β *Comm.* 矩阵模型在单切割机制中 *Math. Phys.* 317 2 447 483, 2013 的渐近展开。, ( ): –。[BG24] Ga¨etan Borot 与 Alice Guionnet。 β矩阵模型在多切割机制中的渐近展开。*Forum Math. Sigma*，12：论文编号 e13，93，2024。[BH77] Walter Braun 与 Klaus Hepp。相互作用经典粒子的 $1/N$ 极限中的弗拉索夫动力学及其涨落。 *Comm. Math. Phys.*，56(2)：101–113，1977。[BHS19] Sergiy V. Borodachov、Douglas P. Hardin 与 Edward B. Saff。 *Discrete energy on rectifiable sets*。Springer 数学专著。Springer，纽约，2019。[BJS25] Didier Bresch、Pierre-Emmanuel Jabin 与 Juan Soler。Vlasov-Fokker-Planck 方程平均场极限的一种新方法。 *Anal. PDE*，18(4)：1037–1064，2025。

[BJW19a] Didier Bresch、Pierre-Emmanuel Jabin 与 Zhenfu Wang。调制自由能与平均场极限。 *Séminaire Laurent Schwartza"EDP et applications*，第1–22页，2019。[BJW19b] Didier Bresch、Pierre-Emmanuel Jabin 与 Zhenfu Wang。关于一大类奇异核的平均场极限与定量估计：在 Patlak–Keller–Segel 模型中的应用。 *Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris* 357 9 708 720, 2019 ，( )：–。[BJW23] Didier Bresch、Pierre-Emmanuel Jabin 与 Zhenfu Wang。具有奇异吸引核的平均场极限与定量估计。 *Duke Mathematical Journal*，172(13)：2591–2641，2023。[BLS18] Florent Bekerman、Thomas Lebl´e 与 Sylvia Serfaty。具有一般势的 β-系综涨落的中心极限定理。 *Electron. J. Probab.*，23：论文编号 115，31，2018。[B ¨O19] Robert J. Berman 与 Magnus ¨Onnheim。一类具有奇异平均场相互作用的一阶模型的混沌传播。 *SIAM Journal on Mathematical Analysis*，51(1)：159–196，2019年1月。出版者：工业与应用数学学会。[BP16] Niklas Boers 与 Peter Pickl。关于动力系统的平均场极限。 *J. Stat. Phys.*，164 16，2016 1 1( )：–。[Bre89] Yann Brenier。不可压缩理想流体欧拉方程的一种 Vlasov–Poisson 型表述。研究报告 RR-1070，1989。[Bre00] Y. Brenier。Vlasov–Poisson 系统向不可压欧拉方程的收敛。 *Comm.* ，(-)：–。[BW *Partial Differential Equations* 25 3 4 737 754, 2000
80] Haim Brezis 与 Stephen Wainger。关于 Sobolev 嵌入与卷积不等式极限情形的注记。 *Communications in Partial Differential Equations*，5(7)：773–789，1980年1月。出版者：Taylor & Francis 电子预印本：https://doi.org/10.1080/03605308008820154。[Cal80] A.-P. Calder´ on。交换子、 *Proceedings of* the *International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)* 85 96
Lipschitz 曲线上的奇异积分及其应用。载于，页–。芬兰科学院，赫尔辛基，1980。[CCH14] Jos´e Antonio Carrillo、Young-Pil Choi 与 Maxime Hauray。群集模型的推导：平均场极限与 Wasserstein 距离。载于 *Collective dynamics from bacteria to crowds* 553 *CISM* ，卷，页–。 *Courses and Lect.* 1 46 2014
Springer，维也纳。[CD22] Louis-Pierre Chaintron 与 Antoine Diez。混沌传播：模型、方法与应用综述。I. 模型与方法。 *Kinet. Relat. Models*，15(6)：895–1015，2022。[CdCRS23] Antonin Chodron de Courcel、Matthew Rosenzweig 与 Sylvia Serfaty。奇异周期 Riesz 流的时间一致尖锐平均场收敛。 *Annales de l'Institut Henri Poincaré C*，42(2)：391–472，2023年12月。[CdCRS25] Antonin Chodron de Courcel、Matthew Rosenzweig 与 Sylvia Serfaty。吸引性对数气体：稳定性、唯一性与混沌传播。 *Communications of the American Mathematical Society* 5 695 773, , ：–。[CFGW24] 2025
Shuzhe Cai、Xuanrui Feng、Yun Gong 与 Zhenfu Wang。全空间上二维对数气体的混沌传播。 *arXiv preprint arXiv:2411.14777*，2024。[CFP12] Jos´e A. Carrillo、Lucas C. F. Ferreira 与 Juliana C. Precioso。具有非局部速度的一维流体力学模型的质量输运方法。 *Advances in Mathematics* 231 1 306 327, , ( )：–。[CJ87] 2012
Michael Christ 与 Jean-Lin Journ´e。多重线性奇异积分算子的多项式增长估计。 *Acta Mathematica*，159(1-2)：51–80，1987。[CM78] R. Coifman 与 Y. Meyer。奇异积分 *Université* 的交换子与多重线 *de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier* 28 3 177 202, 1978
性算子。，( )：xi，–。[CM22] Gabriele Cora 与 Roberta Musina。 s-多调和延拓问题与高阶分数阶拉普拉斯算子。 *Journal of Functional Analysis*，283(5)：109555，2022年9月。[CN25] Alekos Cecchin 与 Paul Nikolaev。平均场相互作用扩散涨落的收敛速率及其在二维黏性涡旋模型与库仑势中的应用。 *arXiv preprint arXiv:2509.01266*，2025。[CR97] S. Jonathan Chapman 与 Giles Richardson。II 型超导体中由非均匀性引起的涡旋钉扎。 *Physica D: Nonlinear Phenomena*，108(4)：397–407，1997。[CS07] Luis Caffarelli 与 Luis Silvestre。与分数阶拉普拉斯算子相关的延拓问题。 *Comm.* ，(-)：–。[DGR] *Partial Differential Equations* 32 7 9 1245 1260, 2007
Matias Delgadino、Rishabh Gvalani 与 Matthew Rosenzweig。熵交换子估计。未发表札记。[DHAP23] Donatella Danielli、Alaa Haj Ali 与 Arshak Petrosyan。高阶分数阶拉普拉斯算子的障碍问题。 *Calc. Var. Partial Differential Equations*，62(8)：论文编号 218，22，2023。[DJ25] Mitia Duerinckx 与 Pierre-Emmanuel Jabin。具有奇异相互作用的布朗粒子的关联估计。 *arXiv preprint arXiv:2510.01507*，2025。

[Dob79] R. L. Dobrušin. Vlasov方程。 *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 13(2):48–58, 96, 1979. [DRAW02] Thierry Dauxois, Stefano Ruffo, Ennio Arimondo, and Martin Wilkens. 长程相互作用系统的动力学与热力学：导论。载于 *Dynamics and thermodynamics of systems with long-range interactions (Les Houches, 2002)* 602 *Lecture Notes in Phys.* 1 19 ，第 卷，页码 – 。

Springer，柏林，2002。[DS18] Mitia Duerinckx and Sylvia Serfaty. 存在钉扎和外力时Ginzburg-Landau涡旋的平均场动力学。 *Ann. PDE*, 4(2):第19篇论文，172页，2018。[Due16] Mitia Duerinckx. 某些Riesz相互作用梯度流的平均场极限。 *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 48 3 2269 2300, 2016 10 1137 15 1042620 , ( ): – 。电子版：

https://doi.org/ 。 / M 。[Due18] Mitia Duerinckx. 超导中平均场演化的适定性。

Ann. Inst. H. , ( ): – 。附录由 Julian *Poincaré Anal. Non Linéaire* 35 5 1267 1319, 2018
Fischer 共同撰写。[Due21] Mitia Duerinckx. 通过Glauber演算研究经典平均场动力学中的混沌程度。

Comm. , ( ): – 。[Eng89] Hans *Math. Phys.* 382 1 613 653, 2021
Engler. Brezis-Wainger不等式的另一种证明。 *Communications in Partial Differential Equations* 14 4 541 544, 1989 , ( ): – 4月 。出版商：

Taylor & Francis 电子版：https://doi.org/10.1080/03605302.1989.12088448。[FKS82] Eugene B. Fabes, Carlos E. Kenig, and Raul P. Serapioni. 退化椭圆方程解的局部正则性。 *Comm. Partial Differential Equations*, 7(1):77–116, 1982。[FP25a] Manuela Feistl-Held and Peter Pickl. 关于Vlasov-Poisson系统的平均场极限，2025年4月。[FP25b] Manuela Feistl-Held and Peter Pickl. 关于二维Vlasov-Poisson系统的平均场极限，2025年9月。[FS09] Philippe Flajolet and Robert Sedgewick. *Analytic combinatorics*。剑桥大学出版社，剑桥，2009。[FW24] Xuanrui Feng and Zhenfu Wang. 全空间中具有一般环量的二维黏性涡旋模型的定量混沌传播。 *arXiv preprint arXiv:2411.14266*, 2024。[GBM24] Arnaud Guillin, Pierre Le Bris, and Pierre Monmarch´e. 二维涡旋模型及其他奇异随机系统中的一致时间混沌传播。 *Journal of the European Mathematical Society*, 2024。[GBR+06] Arthur Gretton, Karsten Borgwardt, Malte Rasch, Bernhard Sch¨olkopf, and Alex Smola. 一种用于双样本问题的核方法。载于B. Sch¨ *Advances in Neural Information Processing Systems* 19 2006
olkopf、J. Platt和T. Hoffman编，[，第 卷。麻省理工学院出版社，。+07] GBR¨Arthur Gretton, Karsten M Borgwardt, Malte *Proceedings of the national conference on artificial intelligence* 22, 1637 Rasch, Bernhard Sch

olkopf, and Alexander J Smola. 一种比较分布的核方法。载于[，第 页。门洛帕克，加利福尼亚州；马萨诸塞州剑桥；伦敦；AAAI出版社；麻省理工学院出版社；1999，2007。期号：2。+12] GBR¨Arthur Gretton, Karsten M. Borgwardt, Malte J. Rasch, Bernhard Sch *Journal of Machine Learning Research (JMLR)*olkopf, and Alexander Smola. 一种核双样本检验。[，13:723–773, 2012。16] Gol

large scale phenomena: coarse graining mean field limits and ergodicity 3 *Macroscopic and* Fran *Lect. Notes Appl. Math. Mech.* 1 144 2016
cois Golse. 平均场极限下大粒子系统的动力学。载于，，[第 卷，页码 – 。Springer，。22] Gol.Fran *arXiv preprint arXiv:2201.02005*cois Golse. 统计动力学中的平均场极限。[, 2022。22] GP.Fran *Communications on Pure and Applied Mathematics*cois Golse and Thierry Paul. N体量子动力学的平均场极限与经典极限：库仑相互作用。[, 75(6):1332–1376, 2022。18] GPI *SIAM J. Math. Anal.*Megan Griffin-Pickering and Mikaela Iacobelli. 一种针对Vlasov-Poisson方程准中性极限的平均场方法。[, 50(5):5502–5536, 2018。] GPI20a *arXiv preprint arXiv:2009.14169*Megan Griffin-Pickering and Mikaela Iacobelli. Vlasov型方程准中性极限的最新进展。[, 2020。] GPI20b *J. Math. Pures Appl. (9)* 135 199 255, 2020
Megan Griffin-Pickering and Mikaela Iacobelli. 热化电子等离子体的奇异极限。[, : – 。14] Gra *Modern Fourier Analysis* Loukas Grafakos. [。《数学研究生教材》第250卷。Springer，第3版，2014。21] Gra *arXiv preprint arXiv:2105.06509* 2021 Phillip Graß. 具有奇异势的Vlasov方程的微观推导。[, 。95] Gre

Comm. Partial Differential Equations 20 7 8 1189 1215, 1995 Emmanuel Grenier. 准中性区制下Vlasov-Poisson系统的缺陷测度。[, (-): – 。96] Gre *Comm. Partial Differential Equations*Emmanuel Grenier. 准中性等离子体中的振荡。, 21(3- 4):363–394, 1996。

[Gre99] Emmanuel Grenier. 维数为
1 *Journées "Équations aux Dérivées Partielles"* 时的准中性极限。
(Saint-Jean-de-Monts, 1999) 8 1999
载于，页码 Exp. No. II，。南特大学，南特，。[Han79] Kurt Hansson. 位势论中的Sobolev型嵌入定理。 *Math. Scand.*,
45 102, 1979 1 77 0025 5521, 1903 1807 10 7146 11827 ( ): – 。ISBN：- - 类型：doi: . /math.scand.a- 。[Hau09]
Maxime Hauray. 欧拉型方程涡旋逼近的Wasserstein距离。 *Mathematical*
Models and Methods in Applied Sciences 19 8 1357 1384, 2009 , ( ): – 。[Hau14]

Maxime Hauray. 一维Vlasov-Poisson方程的平均场极限。载于 *Séminaire Laurent Schwartz—Équations aux dérivées partielles et applications. Année 2012–2013*，S´emin. ´Equ. D´eriv. Partielles,
页码 Exp. No. XXI，16。 ´Ecole Polytech.，Palaiseau，2014。[HBGS23] Johannes Hertrich, Robert Beinert, Manuel Gr¨af, and Gabriele Steidl. 直线上采用距离核的差异度的Wasserstein梯度流。载于Luca Calatroni、Marco Donatelli、Serena Morigi、Marco Prato和Matteo Santacesaria编， *Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*，页码
431–443，Cham，2023。Springer International Publishing。[HC23] Elias Hess-Childs. 奇异Riesz型扩散流的大偏差原理。 *arXiv preprint*
arXiv:2312.02904 2023 , 。[HCR25] Elias

Hess-Childs and Keefer Rowan. 相互作用扩散中L2意义下的高阶混沌传播。*Probab. Math. Phys.*, 6(2):581–646, 2025。[HCRS] Elias Hess-Childs, Matthew Rosenzweig, and Sylvia Serfaty. Riesz最大均值差异的最优量化。编写中。[HCRS25] Elias Hess-Childs, Matthew Rosenzweig, and Sylvia Serfaty. 所有Riesz调制能量的尖锐交换子估计，2025年11月。arXiv:2511.13461 [math].[HHA+23] Paul Hagemann, Johannes Hertrich, Fabian Altekr¨uger, Robert Beinert, Jannis Chemseddine, and Gabriele Steidl. 基于负距离核的最大均值差异梯度流的后验采样。 *arXiv preprint arXiv:2310.03054*, 2023。[HJ07] Maxime Hauray and Pierre-Emmanuel Jabin. 奇异势下Vlasov方程的 N粒子逼近。
Arch. Ration. Mech. Anal., 183(3):489–524, 2007。[HJ15] Maxime Hauray and Pierre-Emmanuel Jabin. 奇异力下Vlasov方程的粒子逼近：混沌传播。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 48(4):891–940, 2015。[HKH15] Daniel Han-Kwan and Maxime Hauray. 一维Vlasov-Poisson方程准中性极限中的稳定性问题。 *Comm. Math. Phys.*, 334(2):1101–1152, 2015。[HKI17a] Daniel Han-Kwan and Mikaela Iacobelli. 高维中通过Wasserstein稳定性估计研究Vlasov-Poisson的准中性极限。 *J. Differential Equations*, 263(1):1–25, 2017。[HKI17b] Daniel Han-Kwan and Mikaela Iacobelli. Wasserstein度量下Vlasov-Poisson方程的准中性极限。 *Commun. Math. Sci.*, 15(2):481–509, 2017。[HKI21] Daniel Han-Kwan and Mikaela Iacobelli. 从牛顿第二定律到理想流体的欧拉方程。
Proceedings of the American Mathematical Society, 149(7):3045–3061, 2021。[HKR16] Daniel Han-Kwan and Fr´ed´eric Rousset. 具有Penrose稳定数据的Vlasov-Poisson准中性极限。*Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 49(6):1445–1495, 2016。[HLSS18] Douglas P. Hardin, Thomas Lebl´e, Edward B. Saff, and Sylvia Serfaty. 超奇异Riesz气体的大偏差原理。
Constructive Approximation. An International Journal for Approximations , ( ): – 。[HM14]
and Expansions 48 1 61 100, 2018
Maxime Hauray and St ´ *Journal of Functional* ephane
Analysis 266 10 6055 6157, 2014
Mischler. 关于Kac混沌及相关问题。,( ): – 。[HRS] Jiaoyang Huang, Matthew Rosenzweig, and Sylvia Serfaty. 含噪奇异Riesz流平均场极限附近的涨落。编写中。[HSSS17] Douglas P. Hardin, Edward B. Saff, Brian Z. Simanek, and Yujian Su. 平坦环面上Riesz势的高阶能量渐近。 *International Mathematics Research Notices. IMRN*, (12):3529–3556, 2017。[HSST21] Douglas Hardin, Edward B. Saff, Ruiwen Shu, and Eitan Tadmor. 具有成对超奇异排斥的曲线上粒子动力学。
Discrete and Continuous Dynamical Systems, 41(12):5509–5536, 2021。[HWAH23] Johannes Hertrich, Christian Wald, Fabian Altekr¨uger, and Paul Hagemann. 使用Riesz核的生成式切片最大均值差异流。
arXiv preprint arXiv:2305.11463, 2023。[Jab14] Pierre-Emmanuel Jabin. Vlasov方程平均场极限综述。
Kinet. Relat. Models, 7 4 661 711, 2014 ( ): – 。[JW16] Pierre-Emmanuel Jabin and Zhenfu Wang. 有界力Vlasov系统的平均场极限与混沌传播。 *J. Funct. Anal.*, 271(12):3588–3627, 2016。[JW17] Pierre-Emmanuel Jabin and Zhenfu Wang. 随机粒子系统的平均场极限。载于
Act. , , Model.
Part. Vol. 1. Advances theory Model. Appl. 379 402
Simul. Sci. Eng. Technol.，页码 – 。Birkh¨auser/Springer，Cham，2017。

[JW18] Pierre-Emmanuel Jabin 和 Zhenfu Wang. 具有 W-1,anfty 核的随机系统中混沌传播的定量估计. *Inventiones Mathematicae*, 214(1):523–591, 2018. [Kla10] Sergiu Klainerman. 《偏微分方程：统一的主题》. 收录于 N. Alon、J. Bourgain、A. Connes、M. Gromov 和 V. Milman 编, *Visions in Mathematics: GAFA 2000 Special Volume, Part I*, 第 279–315 页. Birkh¨auser, 巴塞尔, 2010. [KNSS22] Soheil Kolouri、Kimia Nadjahi、Shahin Shahrampour 和 Umut Simsekli. 广义切片概率度量. 收录于 *ICASSP 2022 - 2022 IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal*, 第 – 页. [KP88] *Processing (ICASSP)* 4513 4517, 2022
Tosio Kato 和 Gustavo Ponce. 交换子估计与欧拉方程和纳维–斯托克斯方程. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41(7):891–907, 1988. [Lac23] Daniel Lacker. 平均场扩散的层级、熵与定量混沌传播. *Probab. Math. Phys.*, 4(2):377–432, 2023. [Laz16] Dustin Lazarovici. Vlasov-Poisson 动力学作为扩展电荷的平均场极限.
Comm. , ( ): – . [Li19]
Math. Phys. 347 1 271 289, 2016
Dong Li. 关于 Kato-Ponce 与分数阶莱布尼茨法则. *Rev. Mat. Iberoam.*, 35(1):23–100, 2019. [LLF23] Daniel Lacker 和 Luc Le Flem. 锐利的一致时间混沌传播.
Probability Theory and
Related Fields 2023 , . [LLN20] Tau
Shean Lim、Yulong Lu 和 James H. Nolen. 双分子化学反应扩散模型中的定量混沌传播. *SIAM J. Math. Anal.*, 52(2):2098–2133, 2020. [LOT96a] C. David Levermore、Marcel Oliver 和 Edriss S. Titi. 具有变化底床的盆地中浅水模型的全局适定性. *Indiana Univ. Math. J.*, 45(2):479–510, 1996. [LOT96b] C. David Levermore、Marcel Oliver 和 Edriss S. Titi. 湖泊方程的全局适定性. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 98(2):492–509, 1996. 《海洋动力学中的非线性现象》. [LP 17] Dustin Lazarovici 和 Peter Pickl. Vlasov-Poisson 系统的一个平均场极限.
Arch. Ration. Mech. , ( ): – . [LS18]
Anal. 225 3 1201 1231, 2017
Thomas Lebl ´ *Geometric and Func-* e 和
tional Analysis 28 2 443 508, 2018
Sylvia Serfaty. 二维库仑气体的涨落. , ( ): – . [M´24] Matthieu M ´
SIAM enard. 具有陀螺
Journal on Mathematical Analysis 56 1 1068 1113, 2024
效应的单速喷雾模型的平均场极限推导. , ( ): – . [Mas01] Nader Masmoudi. 从 Vlasov-Poisson 系统到不可压缩欧拉系统.
Comm. Partial Dif- , (-): – . [Mas07]
ferential Equations 26 9 10 1913 1928, 2001
Nader Masmoudi. 非弹性近似的严格推导. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 88 3 230( ): –240, 2007. [MD24] Thibault Modeste 和 Cl´ement Dombry. 关于 {$\bbb r^d$} 上平移不变 MMD 的刻画及其与 Wasserstein 距离的联系.
Journal of Machine Learning Research (JMLR), 25:论文编号 [237], 39, 2024. [M´en23] Matthieu M ´
arXiv preprint enard. 湖泊方程
arXiv:2309.10453 2023
下点涡的平均场极限. , . [MKTL08] JT Mendon
Phys. ca、R Kaiser、
Rev. A 78 013408, 2008
H Tercas 和 J Loureiro. 超冷原子气体中的集体振荡. , : Jul . [Mos70] J. Moser. N. Trudinger 不等式的一个锐利形式.
Indiana University Mathematics Journal, 20 1077 1092, 1970 : – . [M¨ul97] Alfred M ¨
Advances in Applied uller. 积分概率度
Probability 29 2 429 443, 1997
量及其生成函数类. , ( ): – . [NRS22] Quoc-Hung Nguyen、Matthew Rosenzweig 和 Sylvia Serfaty. Riesz 型奇异流的平均场极限. *Ars Inveniendi Analytica*, 第 4 号论文, 45 页, 2022. [NW74] H. Neunzert 和 J. Wick. 用有限点集逼近积分微分方程的解. 收录于 *ichungen (Tagung, Math. Forschungsinst., Oberwolfach, 1973)* 275 290 ,
Numerische Behandlung nichtlinearer Integrodifferential- und Differentialgle-
第 – 页. 数学讲义, 第 395 卷. 1974.[OD98] T. M. O'Neil 和 Daniel H. E. Dubin. 单一电荷符号的囚禁等离子体的热平衡与热力学. *Physics of Plasmas*, 5(6):2163–2193, 1998. [OP62] Yoshimitsu Ogura 和 Norman A. Phillips. 大气中深对流与浅对流的尺度分析. *Journal of Atmospheric Sciences*, 19(2):173 – 179, 1962. [PCJ25] Immanuel Ben Porat、Jos´e A Carrillo 和 Pierre-Emmanuel Jabin. 时变权重下的奇异流. *arXiv preprint arXiv:2503.02276*, 2025. [Por23] Immanuel Ben Porat. 从带磁场的冯·诺依曼方程推导理想流体的欧拉方程. *Journal of Statistical Physics*, 190(7):论文编号 121, 44 页, 2023.

[PS17] Mircea Petrache 和 Sylvia Serfaty. Riesz 相互作用的高阶渐近与重整化能量.
Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu. JIMJ. Journal de l'Institut de Mathématiques , ( ): – . [PS *de Jussieu* 16 3 501 569, 2017
25] Luke Peilen 和 Sylvia Serfaty. 超库仑 Riesz 气体的局部定律与涨落，2025年12月. arXiv:2511.18623 [math-ph]. [Ric00] G. Richardson. 变化底部地形和零弗劳德数条件下的浅水涡旋运动. *J. Fluid Mech.*, 411:351–374, 2000. [Ros] Matthew Rosenzweig. Riesz 气体的累积量. 未发表笔记. [Ros20] Matthew Rosenzweig. 具有乘性噪声的随机点涡系统的平均场极限. *arXiv preprint arXiv:2011.12180*, 2020. 即将发表于《纯粹与应用数学通讯》. [Ros21] Matthew Rosenzweig. 从量子多体系统到理想流体.
arXiv preprint arXiv:2110.04195 2021 , . [Ros22a]
Matthew Rosenzweig. 尺度临界 Lˆınfty 空间中高维库仑流的平均场近似. *Nonlinearity*, 35(6):2722–2766, 2022年5月. [Ros22b] Matthew Rosenzweig. 涡量属于 Lˆanfty 的点涡到不可压缩欧拉方程的平均场收敛 .
Archive for Rational Mechanics and Analysis, 243(3):1361–1431, 2022. [Ros23] Matthew Rosenzweig. 从牛顿第二定律严格推导不可压缩欧拉方程. *Letters in Mathematical Physics*, 113(1):论文编号 13，32 页，2023. [RSa] Matthew Rosenzweig 和 Sylvia Serfaty. 交换子估计、Stein 方法与 Riesz 气体涨落的输运方法. 编写中. [RSb] Matthew Rosenzweig 和 Sylvia Serfaty. 库仑与 Riesz 调制能量的各阶锐利交换子估计.
Communications on Pure and Applied Mathematics, n/a(n/a). 电子预印本:
https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/cpa.70010. [RS16] Nicolas Rougerie 和 Sylvia Serfaty. 高维库仑气体与重整化能量泛函. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 69(3):519–605, 2016. [RS23] Matthew Rosenzweig 和 Sylvia Serfaty. 奇异 Riesz 型扩散流的全时间平均场收敛. *The Annals of Applied Probability*, 33(2):754–798, 2023. [RS24] Matthew Rosenzweig 和 Sylvia Serfaty. 通过自相似变换，在无约束条件下研究相对熵与调制自由能. *arXiv preprint arXiv:2402.13977*, 2024. [RS25a] Matthew Rosenzweig 和 Sylvia Serfaty. 湖泊方程作为超临界平均场极限. *Journalde l'École polytechnique. Mathématiques*, 12:1019–1068, 2025. [RS25b] Matthew Rosenzweig 和 Sylvia Serfaty. 调制对数 Sobolev 不等式与混沌生成.
Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques. Série 6, 34(1):107–134, 2025. [RSW] Matthew Rosenzweig、Dejan Slepˇcev 和 Lihan Wang. 最大均值差异在能量核下的 Wasserstein 梯度流. [Rub24] Boris Rubin. *Fractional integrals, potentials, and Radon transforms*. Chapman and Hall/CRC, 2024. [Ser20] Sylvia Serfaty. 库仑型流的平均场极限. *Duke Mathematical Journal*, 169(15):2887–2935, 2020年10月. 出版方：杜克大学出版社. [Ser23] Sylvia Serfaty. 任意温度下库仑气体的高斯涨落与自由能展开.
Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques, 59(2):1074–1142, 2023. [Ser24] Sylvia Serfaty. 库仑气体与 Riesz 气体讲义. *arXiv preprint arXiv:2407.21194*, 2024. [SS15a] Etienne Sandier 和 Sylvia Serfaty. 一维对数气体与重整化能量：趋零温度下的结晶化. *Probability Theory and Related Fields*, 162(3-4):795–846, 2015. [SS15b] Etienne Sandier 和 Sylvia Serfaty.
2 *The Annals of* 维库仑气体
Probability 43 4 2026 2083, 2015
与重整化能量. , ( ): – . [SSS19] Andreas Seeger、Charles K. Smart 和 Brian Street. Christ-Journ´e 型多线性奇异积分型. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 257(1231):v+134, 2019. ISBN: 978-1-4704-3437-3; 978-1-4704-4945-2.[Ste70] Elias M Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*，第 2 卷. 普林斯顿大学出版社，1970. [Szn91] Alain-Sol Sznitman. 混沌传播专题. 收录于 *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989* 1464 *Lecture Notes in Math.* 165 251 1991 ,
École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989 1464 *Lecture Notes in Math.* 165 251 1991 卷，第 – 页.
Springer，柏林，. [Tro86] M. Trocheris. 一维 Vlasov 方程的推导 . *Transport Theory Statist. Phys.*, 15 5 597 628, 1986 ( ): – . [Tru67] Neil S. Trudinger. 关于嵌入 Orlicz 空间及其若干应用. *J. Math. Mech.*, 17 483, 1967 473: – . [Uhl18] Cora Uhlemann. 寻找闭合关系：用有限生成累积量逼近 Vlasov-Poisson 系统. 2018(10):030, 2018年10月.

[Wan26] Songbo Wang. 平均场粒子的尖锐局部混沌传播，适用于 $W^{-1\,\infty}$ *J. Funct.* , 核。 , ():论文编 *Anal.* 290 3 111240, 2026 号 。[WBIP85] D. J. Wineland、J. J. Bollinger、Wayne M. Itano 和 J. D. Prestage。受困原子粒子的角动量。 *J. Opt. Soc. Am. B*, 2(11):1721–1730，1985年11月。[Yan13] Ray Yang。分数阶拉普拉斯算子的高阶扩展，2013年2月。

Matthew Rosenzweig, Carnegie Mellon University, Department of Mathematical Sciences, Pitts-burgh, PA*Email address*: mrosenz2@andrew.cmu.edu