arXiv:2603.02186v1 [math.AT] 2 Mar 2026

分层流形上的完美离散莫尔斯函数

何塞·德·赫苏斯·利塞阿加·马丁内斯、赫苏斯·罗德里格斯·维奥拉托和何塞·卡洛斯·戈麦斯·拉拉尼亚

[1*]CIMAT，机构，街道，城市，100190，州，国家。

通讯作者。电子邮箱：jose.liceaga@cimat.mx；其他作者：jesusr@cimat.mx；jcarlos@cimat.mx；

†这些作者对本文的贡献相同。

摘要

本文研究分层流形上最优离散 Morse 函数的计算。特别地，我们提出了一种算法，能够高效地为其中一大类分层流形计算此类函数。此外，我们刻画了这些函数为完美函数所需满足的条件。

关键词：拓扑学、离散 Morse 函数、最优、完美、分层流形

1 引言

离散 Morse 理论由 Forman 于20世纪90年代提出[3], , 为经典光滑莫尔斯理论 [8], 提供了组合对应物，因此有助于研究单形复形或 CW复形等离散对象的拓扑学。其核心特征之一是，通过只关注胞腔中一个称为临界胞腔的特殊子集，我们便能够计算复形的同调。当增加更多单形 [5]时，计算同调群所需的操作数量会急剧增加，因此这一点在应用中尤为重要。因此，获得临界胞腔数量尽可能少的离散 Morse 函数是有益的。此类函数称为最优离散 Morse 函数。

寻找最优离散 Morse 函数的问题已得到广泛研究，尤其是在低维单纯复形中，例如维数为 1 和 2 的情形，如 [6, 7] 所示。然而，正如 Ayala 等人 [7] 指出的，最优离散 Morse 函数的存在性主要是从完美 离散 Morse 函数的角度来探讨的 [7, 10, 13], , 而完美离散 Morse 函数是限制更严格的一类最优函数。

在这项工作中，我们研究分层流形上的最优离散 Morse 函数的存在性。分层流形这一概念由 G´omez-Larra˜naga 等人提出 [9]。特别地，我们引入了一类特殊的分层流形，并在线性时间内为其构造最优离散 Morse 函数。此外，我们通过研究这些函数的 Morse 匹配，精确刻画了它们何时是完美的。

2 预备知识

在下一节中，我们将介绍有关离散 Morse 理论的基本概念和定理。若需更深入的回顾，读者可以参阅 [1, 4]。

给定拓扑空间 X 及其三角剖分 K X，离散莫尔斯函数 （dmf）是一个函数 f： $K \to \mathbb{R}$，满足对于每个维数为i 的胞腔 $\sigma^i \in K$，都有

1. $|\{\tau \in K : \sigma^i < \tau^{i+1}, f(\tau) \leq f(\sigma)\}| \leq 1$, and
2. $|\{\tau \in K : \tau^{i-1} < \sigma^i, f(\sigma) \leq f(\tau)\}| \leq 1$,

其中， $\sigma < \tau$ 表示 σ 是 τ的一个面。如果胞腔 $\sigma^i \in K$ 满足

1. $|\{\tau \in K : \sigma^i < \tau^{i+1}, f(\tau) \leq f(\sigma)\}| = 0$, and
2. $|\{\tau \in K : \tau^{i-1} < \sigma^i, f(\sigma) \leq f(\tau)\}| = 0$,

我们称其为临界胞腔。维数为 i 的临界胞腔数量（即离散莫尔斯函数f 所具有的数量）记为 $m_i(f)$。此外，当胞腔的维数明确时，将省略其上标。

一个离散向量场在单纯复形 K 上是一个子集 $V \subseteq \{(\tau^i, \sigma^{i+1}) \in K \times K \mid \tau^i < \sigma^{i+1}\}$，其中每个胞腔至多出现在一个对中。我们可以将这些向量场几何化地理解为：当$(\tau^i, \sigma^{i+1}) \in V$时，从 τ^i指向 σ^{i+1}。另一种可视化方式是考察它们的 Morse 匹配 [18]：也就是说，在 K上由包含关系诱导的偏序的哈斯图中，突出显示这些对(τ^i, σ^{i+1})。这些表示如图1所示。

显然，任意离散莫尔斯函数 f： $K \to \mathbb{R}$ 都会诱导一个离散向量场 $-\nabla f := \{(\tau^i, \sigma^{i+1}) \mid \tau^i < \sigma^{i+1}$ 以及 $f(\tau^i) \geq f(\sigma^{i+1})\}$。事实证明，在某些条件下，反过来也成立。

给定单纯复形 K上的离散向量场 V， V-路径 是一个胞腔序列

$$\tau_0^i < \sigma_0^{i+1} > \tau_1^i < \sigma_1^{i+1} > \cdots > \tau_{r-1}^i < \sigma_{r-1}^{i+1} > \tau_r^i$$

其中每一对 $(\tau_j^i, \sigma_j^{i+1})$ 都属于 V和 $\tau_j^i \neq \tau_{j+1}^i$。如果 $r \geq 2$和 $\tau_0^i = \tau_1^i$，我们称这条路径为闭合。

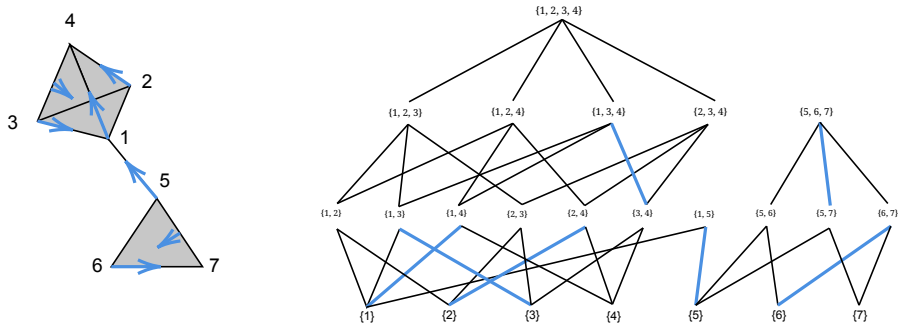


图1 左：离散向量场 V的几何表示。右：同一离散向量场 V的 Morse 匹配。属于 V的对以蓝色标出。

定理 2.1 *Let V be a discrete vector field over K. Then there exists a dmf $f\colon K \to \mathbb{R}$ such that $V = -\nabla f$ if and only if there are no closed V-paths.*

满足某个离散莫尔斯函数 f 的 $V = -\nabla f$ 条件的离散向量场 V称为梯度向量场。注意，任意给定的离散莫尔斯函数 f 的临界胞腔，是指不属于 $-\nabla f$中任何一对的那些胞腔。

若离散莫尔斯函数 $f\colon K \to \mathbb{R}$ 的临界胞腔数少于任何其他离散莫尔斯函数，则称其为最优。也就是说，对于任意离散莫尔斯函数 $g\colon K \to \mathbb{R}$，若 $\sum_i m_i(f) \leq \sum_i m_i(g)$，则称其为最优。寻找最优离散 Morse 函数是一项复杂的任务，以下结果在此过程中得到了广泛应用。

定理 2.2 *Let $f\colon K \to \mathbb{R}$ be a dmf where K is a simplicial complex of dimension n, let $\mathbb{K}$ be a field or $\mathbb{Z}$ and $\beta_i(K;\mathbb{K})$ the i-th Betti number of K, with $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Then,*

1. $m_i(f) \geq \beta_i(K;\mathbb{K})$.
2. $m_i(f) - m_{i-1}(f) + \cdots \pm m_0(f) \geq \beta_i(K;\mathbb{K}) - \beta_{i-1}(K;\mathbb{K}) + \cdots \pm \beta_0(K;\mathbb{K})$.
3. $\chi(K) = m_0(f) - m_1(f) + \cdots + (-1)^n m_n(f)$.

若离散莫尔斯函数称为 $\mathbb{K}$-完美，当且仅当 $m_i(f) = \beta_i(K;\ \mathbb{K})$ 对所有 i均成立。由定理 2.2的第 1 部分可知，若离散莫尔斯函数对某个 $\mathbb{K}$是完美的，则它也是最优的。然而，反之未必成立。文献 [7]的图2中给出了一个反例。

正如我们在引言中提到的，关于最优离散莫尔斯函数的存在性，文献中已有广泛研究；对于维数为 1 和 2 的单纯复形，也已经有成熟的结果。

对于一维复形，我们有一个非常一般的定理，现给出其证明，因为它将与我们的工作相关。

定理 2.3 *Let G be a connected graph and $\mathbb{K}$ a field or $\mathbb{Z}$. Then G admits a $\mathbb{K}$-perfect^{dmf}.*

Proof 设 n 和 m 分别为 G的顶点数和边数，其中 $m \geq n-1$。众所周知， $\beta_1(G;\mathbb{K})$ $= m-n+1$，这等于从 G中移除一棵生成树后剩余的边数。此外， $\beta_0(G;\mathbb{K}) = 1$，因为 G 是连通的。基于此，我们进行如下操作：

1. 令 T 为 G的一棵生成树。2. 任取 T 的一个顶点 v 作为其根。3. 考虑由所有有序对 (w,e) 组成的集合 V，其中 e 是 T 的一条边，而 w 是 e 中距离 v 最远的顶点。

注意， V 是一个离散向量场，因为两条不同的边不可能共享同一个顶点 w ，使其成为距离 v最远的顶点。如果情况如此，就会存在从 v 到 w的多条简单路径，这意味着 T 中有一个环，矛盾。

此外，根据构造， T的所有边都属于 V中的某个对，并且不存在闭合的 V-路径。因此，与 V 关联的离散莫尔斯函数有 1 个临界顶点（根 v）和 $m-n+1$ 条临界边，使其成为 $\mathbb{K}$-完美的。□

对于二维单纯复形，情况会更加复杂。定理 2.3可以推广到一个二维单纯复形可塌缩为一个图的情形，从而得到以下结果 [7]。

定理

2 4 *Any 2-dimensional simplicial complex that collapses to a graph admits a* $\mathbb{Z}$- 。 *perfect dmf.*

根据泛系数定理，对于任意域 $\mathbb{F}$ ，我们有 $H_i(K;\mathbb{F}) \cong H_i(K;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F} \oplus \mathrm{Tor}_1(H_{i-1}(K;\mathbb{Z}),\mathbb{F})$，由此可得 $\beta_i(K;\mathbb{F}) \geq \beta_i(K;\mathbb{Z})$。这意味着，对于任意域， $\mathbb{Z}$-完美离散莫尔斯函数也是 $\mathbb{F}$-完美离散莫尔斯函数。因此，我们得到了一个更一般的结果。

定理

2 5 *Any 2-dimensional simplicial complex that collapses to a graph admits a* $\mathbb{K}$- 。 , *perfect dmf where* $\mathbb{K}$ *is a field or* $\mathbb{Z}$.

Lewiner 等人 [6] 证明了任意 2-流形都存在最优离散 Morse 函数，并给出了它们的显式构造。此外，Ayala 等人 [7] 证明了以下定理。

定理 2.6 *Any compact and connected 2-manifold admits a* $\mathbb{Z}_2$*-perfect dmf.*

最后值得一提的是，Ayala 等人还在 [7] 指出了以下结果，该结果适用于通过度为 p 的映射将 2-胞腔粘接到$\mathbb{S}^1$ 上所得到的伪射影空间。这些空间后来被证明是我们的分层流形的例子。

定理

2 7 *Any pseudo-projective space admits a* $\mathbb{Z}_p$*-perfect dmf for some prime number* 。 p.

3 分层流形

如 [9], 所定义，2-分层流形是一个紧致、连通的豪斯多夫空间 X ，并带有一个滤过 $\varnothing \subset X_1 \subset X_2 = X$ ，使得 X_1 是一个闭的（不一定连通的）1-流形，每个点 $x \in X_1$ 都有一个与 $\mathbb{R} \times CL$同胚的邻域，其中 CL 是某个有限集 L 的开锥，该有限集的基数严格大于 2；并且每个 $x \in X_2 \setminus X_1$ 都有一个与 $\mathbb{R}^2$同胚的邻域。

换句话说，我们可以将 2-分层流形 X 视为一对 $(\mathcal{M}, \mathcal{C})$，其中 $\mathcal{C} := \{c_i\}_{i \in I}$是由圆组成的集合，而 $\mathcal{M} = \{\mathbb{M}_j\}_{j \in J}$ 是由带边界的紧致曲面组成的集合，并且每个边界分支都通过一个具有若干层的覆盖映射 $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 附接到唯一的一个圆上；对于每个圆，与之关联的所有映射的度的绝对值之和都严格大于 2。在本文中，我们将仅考虑有限分层流形；也就是说，满足 $|\mathcal{M}| < \infty$ 和 $|\mathcal{C}| < \infty$的分层流形。从现在起，提到有限分层流形时，我们将省略有限这一修饰词。

现在，我们将为 2-分层流形介绍一种 CW结构。根据曲面分类定理 [2], ，我们知道每个无边界的紧致连通 2-流形都同胚于以下某一种：

1. 一个球面。2. g 个环面的连通和。3. g 个射影平面的连通和。

在第一种情形中，该2-流形同胚于一个CW复形，其中有一个0-胞腔、没有1-胞腔，以及一个2-胞腔。在第二种情形中，该曲面具有如下形式的多边形表示 [2]

$$\langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g | a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle,$$

这对应于一个具有一个0-胞腔、 $2g$ 1-胞腔和一个2-胞腔的CW复形。类似地，在第三种情形中，该曲面具有如下多边形表示 [2]:

$$\langle a_1, \ldots, a_g | a_1^2 \ldots a_g^2 \rangle,$$

它有一个0-胞腔、 g 1-胞腔和一个2-胞腔。因此，任何曲面都可以表示为一个由一个0-胞腔、一个2-胞腔以及若干依赖于该曲面的1-胞腔组成的CW复形。

现在，考虑带有 k_i 个边界的曲面 $\mathbb{M}_i$ 。这样的曲面可以通过取一个无边界曲面并去掉 k 个互不相交的2-圆盘得到。由此得到的CW复形与相应曲面具有相同数目的胞腔，并额外增加 k_i个1-胞腔，记作$d_{i,j}$，它们把原来的0-胞腔 v_i 连接到新引入的0-胞腔$v_{i,j}$；而这些新引入的0-胞腔上又附着着1-胞腔$e_{i,j}$ ，用以表示各边界分支。

最后，当我们将边界分支与圆对应起来时，实际上得到了 $e_{i,j} = c^{w_i}{}_{,f}{}^{j}{}_{i}{}_{(,j)}$，其中 $w_{i,j}$ 是附着映射的度，而 $f(i, j)$ 是

我们将圆附着到 $\mathbb{M}_i$ 的第 j 个边界分支上。此外，我们也可以将其中一些 $v_{i,j}$ 对应起来。因此，我们将用 $w_{f(i,j)}$ 替换$v_{i,j}$ 。

根据前面的讨论，我们可以得出结论：二维分层流形同胚于一个 CW复形，该复形可以看作是图 2 所示形式的子复形的并（每个曲面对应一个子复形） $\mathcal{M}$），其中 c_j与 $\mathcal{C}$中的相同。为简便起见，我们省略$w_{f(i,j)}$ 顶点的标记。

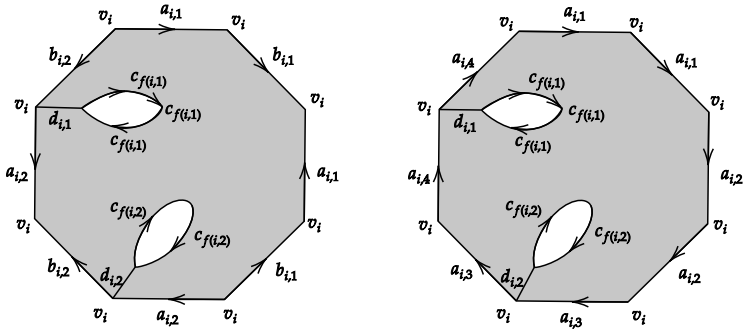


图 2 经过识别后的空间的 CW结构 $\mathcal{M}$ 。

图 3展示了给定分层流形 $X_1 = X(\mathcal{M}, \mathcal{C})$ 的 CW结构示例，其中 $|\mathcal{C}| = 2$，而 $\mathcal{M}$ 由两个 $\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2$ 的副本组成，每个副本有两个边界分支；此外还有一个 $\mathbb{RP}^2$ 的副本，其有一个边界分支。

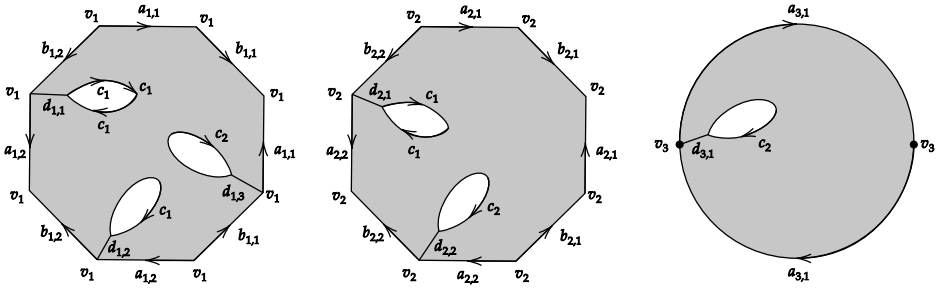


图 3 具有 $\mathcal{M} = \{\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2、\ \mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2、\ \mathbb{R}P^2\}$ 的分层流形 X_1 的 CW结构。

在为每个可定向曲面 $\mathbb{M}_i \in \mathcal{M}$ 和每条曲线$c_i \in \mathcal{C}$固定定向后，我们可以按以下方式为分层流形$X(\mathcal{M}, \mathcal{C})$关联一个唯一的带权双色多重图 $G(X)$：对每个 $\mathbb{M}_i \in \mathcal{M}$，取一个白色顶点；对每个$c_j \in \mathcal{C}$，取一个黑色顶点。此外，对于每个将 $\mathbb{M}_i$ 附着到 c_j 的映射，我们在两个相应顶点之间添加一条边 e，并赋予其权重 $w(e)$，该权重等于附着映射的度；若 $\mathbb{M}_i$ 可定向，此数可以为正或负，否则为正。我们将从对应于 $\mathbb{M}_i$ 的顶点通向对应于 c_j 的顶点的边集记为 $E(i, j)$。最后，我们可以用相应曲面的亏格标记每个白色顶点，不可定向曲面则使用负数。此约定沿用 Neumann [16]。

请注意， $G(X)$的边上的权重符号取决于赋予每个 $\mathbb{M}_i \in \mathcal{M}$ 和每条曲线 $c_i \in \mathcal{C}$ 的定向。除此之外，其余一切均由 X决定。

在图4 中，我们展示了这样一个图的例子。

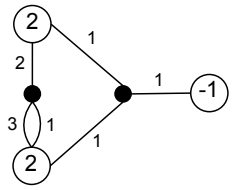


图 4 与分层流形 X_1 相关联的图，见3。

定理 3.1 *Let $X(\mathcal{M},\mathcal{C})$ be a 2-stratifold. If all the weights of the white vertices of $G(X)$ are non-negative (that is, we only have oriented manifolds) and there exists a prime p such that $p|\sum_{e\in E(i,j)} w(e)$ for all pairs (i,j) then $\beta_2(X;\mathbb{Z}_p) = n$ where $n = |\mathcal{M}|$. In any other case $\beta_2(X;\mathbb{K}) < n$ where $\mathbb{K}$ is any field or $\mathbb{Z}$.*

Proof 考虑图 2 左侧所示的 CW分解2，假设存在一个素数 $\mathbb{Z}_p^n$ $F_i \in C_2(X;\mathbb{Z}_p)$ k_i = 如所需，并取链复形 $(C_*(X;\mathbb{Z}_p),\partial_*)$。注意到 $C_2(X;\mathbb{Z}_p)$。因此，对于所有生成元 $(;)$，若将其记为 $\mathbb{M}_i$的边界分支数，则有

$$\partial_2(F_i) = \sum_{j=1}^{k_i}(d_{i,j} + w_{i,j}c_{f(i,j)} - d_{i,j}) + \sum_{k=1}^{g}(a_k + b_k - a_k - b_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{k_i} w_{i,j}c_{f(i,j)} = \sum_{j'=1}^{|\mathcal{C}|}\left(\sum_{e\in E(i,j')} w(e)\right)c_{j'} = 0,$$

其中最后一个等式源于我们是在 $\mathbb{Z}_p$ 上进行研究这一事实。因此，$\mathrm{rank}(\partial_2) = 0$ 且 $\dim(\ker(\partial_2)) = n - 0 = n$。由于 $\mathrm{rank}(\partial_3) = 0$，我们得出 $\beta_2(X,\mathbb{Z}_p) = n$。

现在，如果不存在这样的 p，那么对于任意 $\mathbb{K}$，至少存在一个 F_i，使得 $\partial_2(F_i) \neq 0$，这意味着 $\dim(\ker(\partial_2)) < n$，由此可得 $\beta_2(X,\mathbb{Z}_p) < n$。□

类似地，对于非定向曲面的情形，我们有如下结果。注意，我们需要要求素数为 2，因为在这种情况下， $\partial_2(F_i)$ 的第二个求和不会抵消，而且我们不知道 $w_{i,\ j}c_{f(i,j)}$ 的符号。

定理 3.2 *Let $X(\mathcal{M},\mathcal{C})$ be a 2-stratifold where at least one of the weights of the white vertices of $G(X)$ is negative, and $2|\sum_{e\in E(i,\ j)} w(e)$ for all pairs (i,j) then $\beta_2(X;\mathbb{Z}_2) = n$, where $n = |\mathcal{M}|$. In any other case $\beta_2(X;\mathbb{K}) < n$ where $\mathbb{K}$ is any field or $\mathbb{Z}$.* $(;)$,

4 有限分层流形的单纯分解

本节将介绍任意有限分层流形的单纯分解，也就是说，我们将给出一种构形，据此可以重建有限分层流形的所有可能三角剖分。这将作为第5节主要结果的起点。

实现上述目的的构形是多个多边形 P_1，P_2，……，P_k，其边经过识别。一个具有识别边的多边形 P，是从欧几里得空间中的三角剖分多边形P出发，按照 ∂P中边之间的某种等价关系取商后得到的单纯复形。

定理 **4 1** *Let K be any triangulation for the finite stratifold X $\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$ such that $|\mathcal{M}| = n$.(,),,, and $|\mathcal{C}| = r$. Then K is simplicially homeomorphic to a collection of triangulated polygons P_1 P_2 … P_n with identified sides.*

*Proof*根据定义，$X = X(\mathcal{M},\mathcal{C})$ 是将紧致曲面 $\mathbb{M}_1,\ldots,\mathbb{M}_n$ 的不交并取商所得的空间，其中每个边界分支 $e_{i,\ j} \subset \partial\mathbb{M}_i$ 都通过角度为 $2\pi/w_{i,\ j}$ 的旋转与一个圆 $c_{f(i,j)} \in \mathcal{C}$ 识别。

Let

$$\rho\colon \bigsqcup_i \mathbb{M}_i \to X$$

记该商映射。由于识别仅沿边界分支进行，我们有

$$X \setminus \bigcup_{i,j} c_{f(i,j)} \ \cong\ \bigsqcup_i \big(\mathbb{M}_i \setminus \partial\mathbb{M}_i\big).$$

根据构造，X是一个二维CW复形，因此 X的任意三角剖分 K的维数都是二。对于每个2-单形 $F \in K$，其内部 F°是 X的开子集，所以每个点 $p \in F^\circ$ 都有一个同胚于 $\mathbb{R}^2$的邻域。

另一方面，如 [9], 所示，圆 $c \in \mathcal{C}$上的每个点都有一个同胚于 $\mathbb{R} \times CN$的邻域，其中 CN表示有限集 N上的开锥，且 $|N| > 2$。这些点不是局部平面的，因此不能位于任何2-单形的内部。由此可知，每个圆 $c \in \mathcal{C}$都包含在 K的1-骨架中。

由于 K 的1-骨架是有限的一维单纯复形，并且每个 $c \in \mathcal{C}$ 都是同胚于 S^1的闭子集，因此每个$c_{f(i,j)}$ 都是由 K构成的一维复形。

现在固定 i，并令 $\rho_i\colon \mathbb{M}_i \to X$ 为 ρ的限制。映射 ρ_i 从 $\mathbb{M}_i \setminus \partial\mathbb{M}_i$ 到某个连通分支诱导一个同胚

$$M_i \subset X \setminus \bigcup_j c_{f(i,j)},$$

并且在每个边界分支 $e_{i,\ j} \subset \partial\mathbb{M}_i$ 上限制为到 $c_{f(i,j)}$的有限覆盖映射。并将 M_i 中的三角剖分提升到 $\mathbb{M}_i - \partial\mathbb{M}_i$。

因此，三角剖分 K 可提升为每个曲面 $\mathbb{M}_i$的三角剖分。这意味着，每个三角剖分 K 都可由对经过三角剖分的曲面沿边界识别取商得到。由于每个带边界紧致曲面的三角剖分都源自一个带有识别边的多边形的三角剖分，因此，每个 $\mathbb{M}_i$ 都由某个多边形 P_i进行三角剖分。因此，K 与不交并单纯同胚

$$P_1 \sqcup \cdots \sqcup P_n$$

并对边进行适当的识别。 □

请注意，我们证明了一个更微妙的结论。也就是说，$\mathcal{S}$ 的每个三角剖分都来自某个 $\mathbb{M}_i$的三角剖分。遗憾的是，并非 Σ的所有三角剖分都会诱导出 $\mathcal{S}$的三角剖分，因为要求 $c_i \subset \partial\Sigma$ 由具有 $k \geq 3$的 $k * n_i$条边进行三角剖分。证明中我们常常忽略这一点，但偶尔也会遇到，尤其是在绘制示例时。

5 计算分层流形的最优函数和完美函数

本节将讨论如何通过算法高效计算最优离散莫尔斯函数。具体而言，我们将定义一类特殊的分层流形，并能够在多项式时间内求得其最优函数，并判定这些函数是否完美。

Lewiner 等人证明了 [6] ，对于任意给定的二维单纯复形，寻找最优离散莫尔斯函数的问题可归约为[17]中提出的可塌缩性问题。因此，这是一个 MAX-SNP 困难问题。对于二维分层流形这一二维单纯复形的真子集，寻找最优离散莫尔斯函数的问题同样是 MAX-SNP 困难问题。这是因为他们在 [17] 中的证明所用的单纯复形实际上都是二维分层流形。

虽然我们无法为一般二维分层流形的情形提供一种能在多项式时间内求得最优离散莫尔斯函数的算法，但实际上，我们可以对其中一种特殊类型做出很多论述，我们称之为扭曲分层流形。扭曲分层流形是一个分层流形 $X(\mathcal{M}, \mathcal{C})$，其条件是 $G(X)$ 的所有边的权重彼此不同，且均不等于 ± 1。

给定一个扭曲分层流形 $X(\mathcal{M}, \mathcal{C})$，我们可以将其归入以下四类之一：

1. 当 $G(X)$ 的所有白色顶点的权重均为非负，且存在一个素数 p，使得对所有满足 $i \leq |\mathcal{M}|$ 和$j \leq |\mathcal{C}|$ 的对 (i, j)，都有 $p| \sum_{e \in E(i,j)} w(e)$。2. 当 $G(X)$ 的所有白色顶点的权重均为非负，但不存在素数 p，使得对所有满足 $i \leq |\mathcal{M}|$和 $j \leq |\mathcal{C}|$ 的对 (i, j)，都有 $p| \sum_{e \in E(i,j)} w(e)$。3. 当 $G(X)$ 中至少有一个白色顶点的权重为负，且对所有满足 $i \leq |\mathcal{M}|$ 和 $j \leq |\mathcal{C}|$ 的对 (i, j)，都有$2| \sum_{e \in E(i,j)} w(e)$。4. 当 $G(X)$ 中至少有一个白色顶点的权重为负，且对某个满足 $i \leq |\mathcal{M}|$ 和 $j \leq |\mathcal{C}|$ 的对 (i, j)，有 $2 \nmid \sum_{e \in E(i,j)} w(e)$。

正如我们将在本节中看到的，对于扭曲分层流形的三角剖分，我们总能在多项式时间内构造最优离散 Morse 函数。此外，我们还能够判定它们是否存在完美离散 Morse 函数。在介绍将要使用的算法之前，我们需要先引入一些术语。

设 K 是 $X(\mathcal{M}, \mathcal{S})$ 的一个三角剖分。我们将 K 的所有 0-胞腔称为顶点。如果一个顶点位于 $\rho(\partial\mathbb{M}_i)$ 上，其中 $\mathbb{M}_i \in \mathcal{M}$ 和 ρ 是定理 4.1 中的投影，我们称它为一个边界顶点。如果它不位于其上，我们称它为一个内部顶点。

另一方面，我们将 1-胞腔称为边，并作如下分类：如果它位于$\rho(\partial\Sigma)$ 上，我们称它为一条边界边；如果它连接两个边界上的顶点，但不位于多边形边界上，我们称它为一条交叉边；如果它连接一个内部顶点和一个边界顶点，我们称它为一条桥边；如果它连接两个内部顶点，我们称它为一条内部边。最后，我们将所有 2-胞腔称为面。

回顾定理 4.1对我们空间的单纯分解所作的描述可知，这些分解只是由若干三角剖分多边形组成的集合，其中一些边彼此粘合。此外，我们可以将这些多边形细分为不含交叉边的更小多边形，如图 6 (a) 所示。

基于此，我们提出以下算法，以线性时间为任意分层流形 $X(\mathcal{M},\mathcal{C})$ 的三角剖分 K 求得一个离散莫尔斯函数。该算法对 [6]，中提出的算法稍作修改，采用作者针对非正则边给出的启发式方法，并以不同的顺序执行各个步骤。

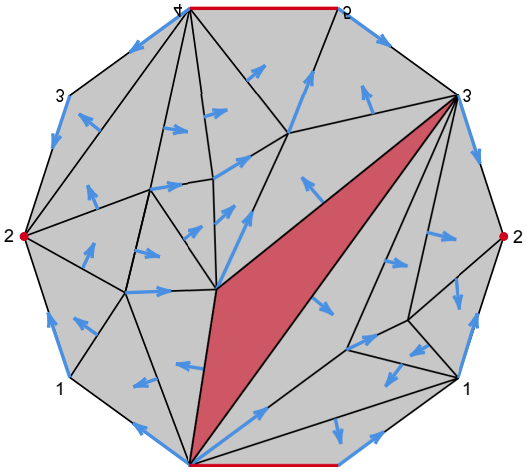


图 5 将该算法应用于空间 $S(\mathbb{S}^2,(1,1))$ 的三角剖分所得结果。

1. 对应于曲面 $\mathbb{M}_i \in \mathcal{M}$的每个子复形 K_i of K，执行以下操作：

   1.1. 对于由交叉边界定的每个多边形 $P_{i,1}$，$P_{i,2}$，...，P_{i,r_i} of K_i，执行以下步骤：

      1.1.1. 考虑由多边形的所有内部顶点和边，以及一个边界顶点和一条将其与该图连接起来的桥边构成的图。1.1.2. 计算上一步所得图的一棵生成树。1.1.3. 按照定理2.3证明中的构造，定义一个与该生成树上的离散莫尔斯函数相关联的离散向量场$V_{i,j}$，使其唯一的临界0-胞腔为该边界顶点。

1.1.4. 构造一个新图，其中空间的每个2-胞腔对应一个顶点，当且仅当与这两个顶点对应的2-胞腔共享一条未在步骤1.1.2中使用的非边界边时，连接这两个顶点。定理5.3将证明，这些图都是树。

1.2. 通过添加交叉边的对偶，将步骤 1.1.4 中得到的所有树连接起来。这样也会得到一棵树 T，因为我们用 $r-1$ 条边连接了 r 棵树。

1.3. 按如下方式构造集合 V_{T_i}：任取 K_i 的一个 2-胞腔 $F_{i,\,0}$，并考虑与之对应的顶点 $v_{i,\,0} := v(F_{i,\,0})$，它位于 T 中。对于 T 中的每条边 e，将 $(e,\ F(e))$ 加入 V_F，其中 $F(e)$ 是唯一一个对应于 e 中顶点 $v(F(e))$ 的 2-胞腔，该顶点在 T 中距 $v_{i,\,0}$ 最远。注意，对于 $e \neq e'$，有 $F(e) \neq F(e')$，因为 T 中没有自环。

2. 考虑仅由边界顶点和边构成的图，并计入所有识别。按照定理 V_B 的证明，再在该图中构造一个与离散莫尔斯函数对应的离散向量场 2.3。

3. 取

$$V := V_B \cup \left(\bigcup_{i=1}^{|\mathcal{M}|} V_{T_i} \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{|\mathcal{M}|} \bigcup_{j=1}^{r_i} V_{i,j} \right).$$

在子复形 K_i 中应用算法的结果 $\mathbb{M}_i$ 如图5所示。此外，图6 展示了详细过程。

由于可以在线性时间内找到图的生成树，所需时间与图的边数成正比，因此我们的算法运行时间为 $O(|K|)$。

现在我们将证明该算法的正确性。

定理 **5** *Let K be a triangulation of $\mathbb{D}^2$, and T a tree in the 1-skeleton of K with exactly one vertex on the boundary of K. Then $K \setminus T$ is connected.*

Proof 我们将对树 T 中边的数量进行归纳。如果 T 有 0 条边，那么我们只需移除 K边界上的一个顶点，这将得到一个连通空间。

假设该结论对任意具有 n 条边的树都成立。设 T 是一棵具有 $n+1$ 条边的树，且恰有一个顶点 v 位于 K 的边界上。由于 T 是一棵至少含有一条边的树，我们可以取一个叶子 $w \neq v$。根据假设，w 位于 K 的内部。设 e 是与 w 相邻的唯一一条边，并记 $T' := T \setminus \{e\}$。那么，T' 是一棵具有 n 条边的树，且在 K 上方仍恰有一个顶点，即 v。由归纳假设可知，$K \setminus T'$ 是连通的。

现在注意到，e 在 T' 上方恰有一个端点，因为另一个端点是 w，它位于 $K \setminus T'$ 的内部。因此，从 $K \setminus T'$ 中移除它不会使空间不连通，这意味着 $(K \setminus T') \setminus \{e\} = K \setminus T$ 是一个连通空间，如所需。□

推论 5.2 *The graphs constructed in step 1.1.4 are connected.*

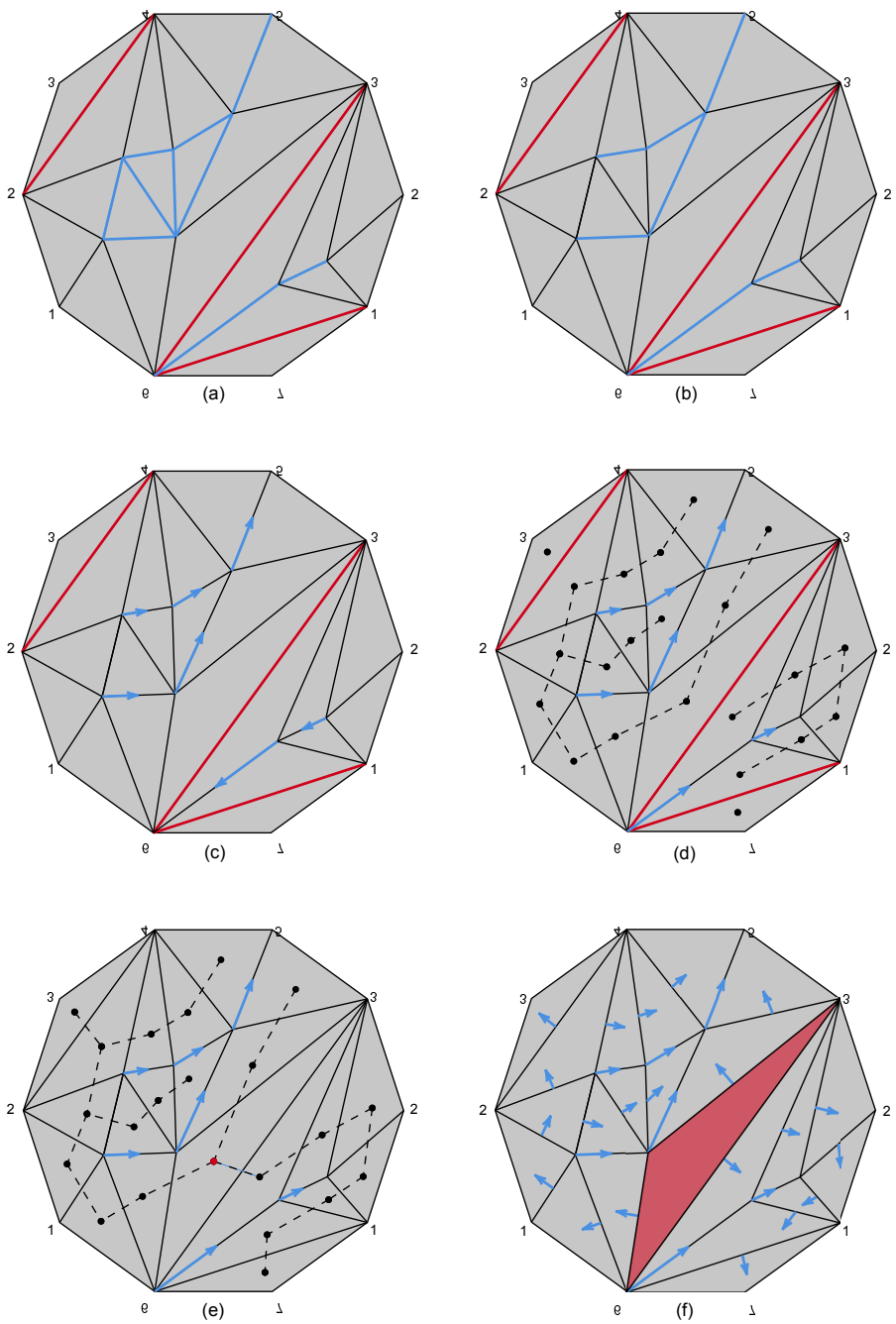


图 6 （a）算法的步骤 1.1.1.1。红色的边是交叉边，蓝色的边是在此步骤中选取的边。（b）步骤 1.1.2（c）步骤 1.1.3（d）步骤 1.1.4（e）步骤 1.2（f）步骤 1.3

定理

5 3 *Let G_j be the graph constructed in step 1.1.4 of the Algorithm for polygon 。, $P_{i\ j}$. Then G_j is a tree.*

Proof 由推论 5.2，我们知道 G_j 是一个连通图，这意味着 $\beta_0(G_j)$ $=$ 1 。现在，设 V_j 和 E_j 分别为 G_j的顶点数和边数。由欧拉示性数公式，我们知道

$$1 - \beta_1(G_j) = V_i - E_i. \tag{1}$$

现在，将我们的多边形 $P_{i,\ j}$ 的 0-胞腔（顶点）、1-胞腔（边）和 2-胞腔（面）的总数分别记为 V、E 和 F。再次由欧拉示性数公式，我们知道 $1 = V - E + F$。由于在等同之前，边界顶点 V_∂的个数等于边界边 E_∂ 的 $1 = V - V_\partial - E - E_\partial + F$ 个数，该等式意味着 ( ) ( ) 。此外，若我们将内部顶点的个数记为，则 。由于 $V - V_\partial = V_I$ $F = V_i$,

$$1 = V_I - (E - E_\partial) + V_i = V_i - (E - E_\partial - V_I).$$

最后，注意到 $E_i = E - E_\partial - V_I$，因为在 G_i 中，每条X 的非边界边（且未被选为树的一部分）都恰好对应一条边，而这棵树有 V_I 条边。这意味着 $V_i - E_i = 1$。将此等式与 1结合，我们得出 $\beta_1(G_i) = 0$。因此， G_i 是一棵树。□

定理 5.4 *The set V obtained by the former algorithm is a discrete vector field. Moreover, its induced dmf has one critical cell of dimension 0 , and n critical cells of dimension 2.*

Proof 首先，我们将证明 V是一个离散向量场。设 v 是我们三角剖分中的一个顶点。若 v 是内部顶点，则在步骤 1.1.3 中，我们将它与唯一一条内部边配成一对，而不与其他类型的边配对。另一方面，若 v 是边界顶点，则我们要么在步骤 2 中将它与唯一一条边界边配成一对，要么让它保持未配对。因此，我们三角剖分中的每个顶点在 V中至多出现于一对中。

现在考虑我们三角剖分中的一条边 e。如果它是边界边，我们要么在步骤 2 中将它与唯一的边界顶点配对，要么将它留为未配对。如果它是交叉边，则在步骤 1.3 中与唯一的面配对。另一方面，如果它是桥边或内部边，则有三种可能：首先，我们可能在步骤 1.1.3 中将它与唯一的顶点配对。其次，我们可能在步骤 1.3 中将它与唯一的面配对。在这种情况下， e 不能与顶点配对，因为我们在构造树 T 时已于步骤 1.1.4 中明确排除了这种情况。最后，我们也可能将它留为未配对。因此，三角剖分中的每条边在 V 的配对中至多出现一次。

最后请注意，三角剖分中的所有面 F 都在步骤 1.3 中与唯一的边配对。因此， V 是一个离散向量场。

我们将继续证明不存在闭合的 V-路径。为此，先考虑如下形式的V-路径

$$v_0 < e_0 > v_1 < e_1 > \cdots < e_{r-1} > v_r,$$

其中 v_i是顶点， e_i是边 .

如果 v_0 是边界顶点，根据构造，这条 V-路径实际上是边界 V_B-路径（边界顶点/边只与边界边/顶点配对），且不可能闭合，因为 V_B 是梯度离散向量场。

另一方面，如果 v_0 是某个 K_i的内部顶点，我们的路径可能完全包含在步骤 1.1.3 中构造的、对应于 v_0 的唯一梯度向量场 $V_{i,\ j}$ 内，也可能不然。第一种情况下，它不可能是闭合路径，因为它是 $V_{i,\ j}$-路径。第二种情况下，若要使这类路径不是 V_i-路径，它必定已经到达 V_i的临界顶点；该顶点是边界顶点，而从那里只能沿边界边和顶点继续路径，因此不可能返回 v_0。所以，这种情况下也不可能有闭合的 V-路径。由此可得，不存在从顶点出发的闭合 V-路径。

现在，考虑如下形式的 V-路径

$$e_0 < F_0 > e_1 < F_1 > \cdots < F_{r-1} > e_r,$$

其中， e_i 是边， F_i 是面。

注意，根据构造，这条路径应包含在某个 V_{T_i} 中。由于 V_{T_i} 是一个离散向量场，且它是在一棵树上构造的，因此它实际上是一个梯度向量场 [1]。因此，我们的路径不可能是闭合路径，这意味着不存在以边开头的闭合 V-路径。

由于我们的三角剖分中胞腔的维数至多为 2，前面的讨论表明不存在闭合的 V-路径。换言之， V 是一个梯度向量场。

最后，我们将计算每个维数的临界胞腔数量。

Number of critical 0-cells. 注意，在步骤 1.1.3 中，我们配对了所有内部顶点。此外，由于步骤 2 中的图是连通的（因为我们的空间原本就是连通的），根据定理 2.3 中给出的算法，在此步骤中，我们配对了除选作根的顶点之外的所有边界顶点。因此，我们恰好有一个 0-胞腔。

Number of critical 2-cells. 在步骤 1.3 中，我们将 K_i 的所有 2-胞腔都配对了，除了选作树根的那个。因此，恰好有 $|\mathcal{M}|$ 个临界 2-胞腔。□

由此，我们可以继续证明该算法总能给出一个最优的离散莫尔斯函数。

定理

5 5 *The dmf f that the algorithm produces is perfect for all traingulations of* 。 *twisted stratifolds of type 1 or 3.*

Proof 我们只证明类型 1 空间的定理，因为类型 3 空间的证明类似。

设 $X(\mathcal{M},\mathcal{C})$ 是一个类型 1 的扭曲分层流形。由于分层流形是连通的， $\beta_0(X;\ \mathbb{Z}_p)$ $=$ $1 = m_0\ f$ 3 1 $\beta_2\ X\ \mathbb{Z}_p\ = |\mathcal{M}| = m_2\ f$ ( )。另一方面，根据定理 。我们知道 (;) ( )。最后，根据欧拉示性数和定理 2.2，可得

$$\beta_1(X;\mathbb{Z}_p) = \chi(X) - \beta_0(X;\mathbb{Z}_p) - \beta_2(X;\mathbb{Z}_p) = \chi(X) - 1 - n = \chi(X) - m_0(f) - m_2(f) = m_1(f).$$

Therefore, f is perfect. □

定理 5.6 *Let $X(\mathcal{M},\mathcal{C})$ be a twisted stratifold and K be a triangulation of X. If f : $K \to \mathbb{R}$ is a dmf, then $m_2(f) \geq |\mathcal{M}|$.*

Proof 为导出矛盾，假设存在一个离散莫尔斯函数 f : $K \to \mathbb{R}$ ，使得 $m_2(f) < |\mathcal{M}|$。考虑与 V : $= -\nabla f$相关联的 Morse 匹配。由于 $m_2(f) < |\mathcal{M}|$，必定存在一个 K 的子复形 K_i，它对应于一个曲面 $\mathbb{M}_i \in \mathcal{M}$，且 K_i 没有临界 2-胞腔。因此，给定 $\sigma_0^2 \in K_i$，存在 $\tau_0^1 \in K_i$，使得 $(\tau_0^1, \sigma_0^2) \in V$。

此外，由于 X 是一个扭曲分层流形，所有附着映射的度的绝对值都大于 1，这意味着至少存在一个 $\sigma_1^2 \in K_i$，满足 $\sigma_1^2 \neq \sigma_0^2$，使得 $\tau_0^1 < \sigma_1^2$。

注意，前述过程可以无限重复。由于 K_i 中的 2-胞腔数量有限，我们可以取 $m > 0$ 使得 $\sigma_0^2 = \sigma_m^2$，从而得到闭合的 V-路径

$$\tau_0^1 < \sigma_0^2 > \tau_m^1 < \sigma_m^2 > \tau_{m-1}^1 < \sigma_{m-1}^2 > \cdots < \sigma_1^2 > \tau_0^1,$$

这与定理 21 矛盾。因此，$m_2(f) \geq |\mathcal{M}|$. □

由定理 3.1 和3.2，我们还知道 $\beta_2(X;\ \mathbb{Z}) < n$ 以及 $\beta_2(X;\ \mathbb{F}) < n$对任意域 $\mathbb{F}$均成立。因此，我们得到以下推论。

推论 5.7 *There are no perfect dmf's for spaces of Type 2 or 4.*

定理

5 8 *The dmf f $K \to \mathbb{R}$ obtained by the Algorithm is optimal for spaces of Type* .: *2 and 4.*

Proof 由于 X 是连通的，对所有离散莫尔斯函数 h： $K \to \mathbb{R}$，我们有 $m_0(h) \geq 1 = m_0(f)$。此外，根据定理 5.6， $m_2(h) \geq n = m_2(f)$。因此，

$$\chi(X) = m_2(h) - m_1(h) + m_0(h) \geq n + 1 - m_1(h),$$

其中第一个等式由2.2得出。此外，我们还有

$$\chi(X) = m_2(f) - m_1(f) + m_0(f) = n + 1 - m_1(f).$$

由这两个表达式可得 $m_1(h) \geq m_1(f)$。由于 h 是任意的，我们得出 f 是最优的。□

由定理5.5、5.8 和推论5.7，我们得到以下结果。

定理 5.9 *Let $X(\mathcal{M}, \mathcal{C})$ be a twisted stratifold and K a finite triangulation of X. Then, we can construct an optimal dmf on K in linear time. Moreover this function is perfect if' and only if the stratifold is of type 1 or 3; in cases 2 and 4 no perfect function exists.* ,

6 参考文献

[1] Knudson, K.: 莫尔斯理论：光滑与离散。世界科技出版社，???（2015）

[2] Lee, J.: 《拓扑流形导论》。数学研究生教材。施普林格，???（2010）

[3] Forman, R.: 胞腔复形的莫尔斯理论。数学进展**134**（1），90–145（1998） https://doi.org/10.1006/aima.1997.1650

[4] Forman, R.: 《离散莫尔斯理论用户指南》。S´em. Lothar. Combin. 48(2001)

[5]Dumas, J., Heckenbach, F., Saunders, D., Welker, V.：基于高效史密斯标准形算法计算单纯形同调。代数、几何与软件系统，177–206（2003）[6]Lewiner, T., Lopes, H., Tavares, G.：二维流形上的最优离散 Morse 函数。《计算几何》26(3)，221–233（2003）[7]Ayala, R., Fern´andez-Ternero, D., Vilches, J.：二维复形上的完美离散莫尔斯函数。《模式识别快报》33(11)，1495–1500（2012）https://doi.org/10.1016/j.patrec.2011.08.011。《图像语境中的计算拓扑》[8] Morse, M.：《大范围变分法》。美国数学会，???（1934年）。https://api.semanticscholar.org/CorpusID:117475509[9] G´omez-Larra˜naga, J., Gonz´alez-Acu˜ña, F., Heil, W.：二维分层流形。《向 José María Montesinos Amilibia 致敬的数学论文集》，395–405（2016年）[10] Ayala, R., Fern´andez-Ternero, D., Vilches, J.：三角剖分的三维流形上的完美离散莫尔斯函数。《图像语境中的计算拓扑》7309，11–19（2012）[11] Ayala, R., Fern´andez-Ternero, D., Vilches, J.：等价离散 Morse 函数的刻画。《巴西数学会公报》40(2)，225–235（2009）[12] Molina-Abril, H.：通过链同伦实现离散 Morse 理论中的同调最优性。《模式识别快报》33(11)，1501–1506（2012）[13] Varli, H., Pamuk, M., Mramor-Kosta, N.：连通和上的完美离散 Morse 函数。《同调、同伦与应用》20(1)，219–236（2018）[14] Harker, S., Mischaikow, K., Mrozek, M., Nanda, V.：用于计算复形及其映射的同调的离散 Morse 理论算法。《计算数学基础》14(1)，151–184（2014）[15] Hersh, P.：关于离散 Morse 函数的优化。《应用数学进展》35(3)，294–322（2005）[16] Neumann, W.：用于管道化的微积分及其在复曲面奇点和退化复曲线拓扑学中的应用。《美国数学会汇刊》268，299–344（1981）[17] E˘gecio˘glu, Gonzalez, T.F.：单纯复形上的一个计算上难以处理的问题。《计算几何》6(2)，85–98（1996）[18]Chary, M.：关于离散莫尔斯函数与组合分解。《离散数学》217，101–113（1999）