规范玻色子采样中干涉项的解析消去与单模边缘分布的闭式表达

Jiang Liu*Independent Researcher, Scarsdale, NY 10533, USA(日期：2026年2月28日)

尽管已知规范玻色子采样（CBS）的 k模式边缘分布可在多项式时间内计算，但驱动这一计算效率的物理机制在数学上仍不透明。本文从直接、自底向上的物理推导出发，给出 CBS 中精确单模式边缘分布的推导，其计算时间为 $\mathcal{O}(R^2)$，其中 R 是光子总数。我们明确地将这一物理推导与秩一矩阵永久式的数学理论联系起来，证明多光子干涉自然归结为一个乘以阶乘玻色聚束因子的对称多项式。重要的是，我们证明递归组合公式避免了特征函数方法带来的算法开销，完全无需多项式插值或傅里叶变换。最后，我们运用该公式识别聚束的宏观特征，提出一种严谨且高度可扩展的指标，可利用标准阈值探测器区分真正的量子干涉与经典可区分粒子模型。

arXiv:2603.02272v1 [quant-ph] 1 Mar 2026

I. 引言

实现对标准玻色子采样（CBS） [1] 的实验验证，仍是追求量子优势的一项重大挑战。虽然高斯玻色子采样（GBS） [2]可通过多项式时间内计算低阶边缘分布 [3]，进行验证，但要针对经典伪造模型（例如发射可区分粒子）验证大规模 CBS 设备，仍是一个关键瓶颈，因为理想联合分布具有 #P-困难的性质。

已知，在 CBS 实验中， k 个模式的边缘分布可在 $\mathcal{O}(R^{\mathcal{O}(k)})$ 时间内确定性地计算出来 [4]。然而，这一算法界依赖于对抽象特征函数和人工矩阵永久式的求值。尽管这从形式上确立了 1 模式边缘分布可在多项式时间内计算，但自上而下的数学框架掩盖了其背后的物理机制。具体而言，当对未观测模式进行偏迹时，高度复杂且依赖相位的多光子干涉项在物理上如何消失，仍有待解答。

此外，从实践角度来看，要从特征生成函数中提取实际概率分布，需要在多个插值点计算永久式，并应用快速傅里叶逆变换（或求解线性方程组）。这带来了不必要的数值开销和潜在的浮点不稳定性，阻碍了大型系统的即时实验实现。

在本研究中，我们通过自下而上的直接物理推导，揭开了这一计算简化现象的奥秘，并得到了 CBS 中精确的单模式边缘分布。通过应用概率求和规则，并利用跃迁矩阵各行的正交归一性，我们严格证明所有复干涉交叉项都会在解析上相消。因此，边缘概率完全取决于观测模式矩阵元的模方。

我们的推导得出一个高效的闭式组合公式，通过简单的 $\mathcal{O}(R^2)$ 动态规划递推直接给出精确概率，从而完全避开完整联合分布的指数级瓶颈以及生成函数的插值开销。为展示我们结果在数学上的普适性，我们明确展开了 Gurvits 特征函数算法，并运用秩一永久式的线性代数 [4], ，证明我们的物理推导与量子概率生成函数的多项式展开完全一致。

这一精确且可扩展的公式为任意大的光子数提供了直接的实验验证工具。通过将不可区分玻色子的精确单模边缘分布与可区分经典粒子进行比较，我们分离出导致宏观玻色子聚束的基本阶乘权重，并提供了一种可用标准阈值探测器测量的实用验证指标。

II. 边缘分布

考虑一个 CBS，其中有 R 个单光子源和 M 个输出模式，由一个振幅转移矩阵 V 相连，其行向量正交归一：

$$\sum_{i=1}^{M} v_{i',i} v_{j',i}^{*} = \delta_{i',j'}. \tag{1}$$

令 $0 \le n_i \le R$ 表示模式 i 中的光子数。令 $N_R = (n_1, n_2, \cdots, n_M)$ 表示一个特定的输出构型，并令 $N_{R;n_k}$ 表示构型 N_R ，其中模式 k 的光子计数 n_k 保持固定。边缘

* jiangliu.message@gmail.com

概率，即在模式 k 中观测到恰好 n_k 个光子的概率，表示为：

$$P(n_k) = \sum_{N_{R;n_k}} P(N_{R;n_k}), \tag{2}$$

其中

$$P(N_{R;n_k}) = \frac{|\mathrm{Perm}(\mathcal{A}(N_{R;n_k}))|^2}{\prod_{i=1}^{M} n_i!}, \tag{3}$$

且 $\mathcal{A}(N_{R;n_k})$ 是一个 $R \times R$ 振幅矩阵，其列由 V 根据构型 $N_{R;n_k}$所规定。

利用式 (1) 和概率的一条基本求和规则，可以大幅简化式 (2) 和式 (3)；对于 $R > n_k$，该规则为：

$$\sum_{N_{R;n_k}} P(N_{R;n_k}) = \sum_{N_{R-1;n_k}} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{M} \frac{n_i + 1}{R - n_k} P(N_{R-1;n_k} + 1_i), \tag{4}$$

其中，$N_{R;n_k}+1_i$ 表示一种构型，它在 $N_{R;n_k}$的模式 i 中额外增加一个光子。式 (4) 的推导详见附录 A。

式 (4) 的重要意义在于，对 $N_{R;n_k}$ 求和的概率可以分解为对 $N_{R-1;n_k}$ 求和的嵌套求和，并依次向 $N_{R-1;n_k}$ 的每个模式添加一个光子。对 i 的内层求和使得可以直接应用式 (1) 中的正交归一条件。

将式 (4) 代入式 (2) 和式 (3)，对新增的 1_i 列的各行应用拉普拉斯永久式展开 [5, 6]，利用行正交归一性，并注意到：

$$P(N_{R;n_k} + 1_i) = \frac{|\mathrm{Perm}(\mathcal{A}(N_{R;n_k} + 1_i))|^2}{(n_i + 1)\prod_{i=1}^{M} n_i!}, \tag{5}$$

可以发现，$\delta_{i',\ j'}$ 和 $v_{i',\ k}v^*_{j',\ k}$ 项分别将$\sum_i \mathcal{A}($ $N_{R-1;n_k}+1_i)$化简为 $\mathcal{A}(N_{R-1;n_k})$和 $\mathcal{A}(N_{R-1;n_k+1})$。通过这一过程，配置求和中的一个自由度被干净地消去。

重复这一精确过程，直至配置求和中的所有自由度都被消去后，$\mathcal{A}$ 的剩余矩阵及子矩阵将只包含由跃迁矩阵第k列元素构成的相同列。由于这些剩余矩阵均为秩一，其永久式可直接化为矩阵元的乘积，再乘以矩阵维数的阶乘。

定义到模式k 的转移概率集合如下：

$$C_R := \{|v_{1,k}|^2, |v_{2,k}|^2, \ldots, |v_{R,k}|^2\}. \tag{6}$$

对于任意 $1 \le m \le R$，我们将所有大小为 m 的子集乘积组成的集合记为：

$$C_R^{(m)} := \Big\{ \prod_{j=1}^{m} |v_{i_j,k}|^2 : 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le R \Big\}, \tag{7}$$

其中 $C_R^{(0)} = 1$。令 $S_{R;m}$ 表示对 $C_R^{(m)}$ 中所有元素求和：

$$S_{R;m} \equiv \sum_{c \in C_R^{(m)}} c. \tag{8}$$

CBS 的边缘分布由以下优美的闭式公式描述：

$$P(n_k) = \sum_{m=n_k}^{R} (-1)^{m-n_k} m! \binom{m}{n_k} S_{R;m}. \tag{9}$$

该公式的物理意义在于，$P(n_k)$仅取决于第 k列中非零元素的模方；所有其他模式实际上都彼此解耦。此外，$S_{R;m}$（它表示初等对称多项式）的组合性质自然体现了玻色-爱因斯坦统计 [7–9], 所要求的置换对称性，而这种对称性严格通过模式 k中可观测到的光子子集实现。

在计算上，集合 $C_R^{(m)}$ 是递归定义的：

$$C_R^{(m)} = C_{R-1}^{(m)} \cup \{c|v_{R,k}|^2 : c \in C_{R-1}^{(m-1)}\}. \tag{10}$$

这一递推使得我们能够高效地计算$S_{R;m}$，进而计算 P（n_k）。通过初始化 $S_{0;0} = 1$（其他情况下则初始化为 $S_{i;j} = 0$），我们可以动态求解 $S_{i;j}$，适用于 $1 \le i \le R$ 和 $1 \le j \le i$：

$$S_{i;j} = |v_{i,k}|^2 S_{i-1,j-1} + S_{i-1,j}. \tag{11}$$

通过公式（11）填充该数组所需的操作次数恰为 R（$R-1$）。因此，对于给定的跃迁矩阵 V，CBS 的精确边缘分布可通过 $\mathcal{O}$（R^2）的查询复杂度计算得出。

我们将公式（9）与小数量 R 光子在第五节详细介绍的 Hadamard 型干涉仪模型 [10, 11], 中的暴力永久式计算（即计算公式（2）和（3））进行比较，从而验证了公式（9）。两种方法得出的结果完全一致。

III. 可区分光子采样的边缘分布

CBS 与可区分光子采样的边缘分布之间存在一种极其简单直观的关系。

对于可区分光子，观测到模式 k中恰好有 n_k 计数的边缘概率（记为$P_d(n_k)$）很容易定义。将不包含在子集 $c \in C^{(n_k)}{}_R$ 中的行索引定义为 i_j（对于 $1 \le j \le R - n_k$），众所周知：

$$P_d(n_k) = \sum_{c \in C_R^{(n_k)}} c \prod_{j=1}^{R-n_k} \left(1 - |v_{i_j,k}|^2\right). \tag{12}$$

将该表达式展开为矩阵元的子集乘积后，公式（12）变为：

$$P_d(n_k) = \sum_{m=n_k}^{R} (-1)^{m-n_k} \binom{m}{n_k} S_{R;m}. \tag{13}$$

将公式（13）与公式（9）进行比较，我们看到可区分分布与量子玻色子分布的唯一差别在于级数展开中缺少 $m!$乘数。

$m!$增强因子的缺失表明，可区分粒子的跃迁矩阵 $\mathcal{P}$ 直接作用于概率而非概率幅 [12] （即$\mathcal{P}_{i',i} = |v_{i',i}|^2$），并且：

$$P_d(n_k) = \sum_{N_{R;n_k}} \frac{\mathrm{Perm}(\mathcal{P}_S(N_{R;n_k}))}{\prod_{i=1}^{M} n_i!}, \tag{14}$$

其中 $\mathcal{P}_S(N_{R;n_k})$是按 $N_{R;n_k}$的规定由 $\mathcal{P}$构建的 $R \times R$ 子矩阵。利用公式（4）中的概率求和规则以及概率守恒 $\sum_{i=1}^{M} |v_{i',i}|^2 = 1$，我们重新得到公式（13），并最终得到公式（12）。与量子情形一样，计算 $P_d(n_k)$的查询复杂度同样以 $\mathcal{O}(R^2)$为界。

IV. 与特征函数及秩一永久式的联系

公式（9）推导出的闭式公式清晰地呈现了概率如何在局部累积，具有明确的物理图像。展示这一精确的组合结构如何自然地从计算复杂性理论所用的形式化数学算法中涌现出来，极具启发性。

Gurvits证明了，在 k 个模式上，光子数分布的期望值可在 $\mathcal{O}(R^{\mathcal{O}(k)})$时间内求得 [1, 4]。然而，要从Gurvits的期望值中提取实际概率，需要构造生成函数，并采用多项式插值或快速傅里叶变换（FFT）等数值方法。

对于单个模式（$k = 1$），我们可以定义一个形式上的虚变量 $x = |c_1|^2$ ，以构造观测模式中光子数n_k 的概率生成函数（PGF）：

$$\mathrm{PGF}(x) = \mathbb{E}[x^{n_k}] = \sum_{m=0}^{R} P(n_k = m) x^m. \tag{15}$$

根据特征函数算法，该期望值恰好等于 $\mathrm{Perm}(I + V)$，其中 V是 $U^\dagger \Lambda U$的左上角 $R \times R$子矩阵，而 Λ是一个对角矩阵，其首个元素为（$x - 1$），其余元素均为零。

因为 Λ 仅包含一个非零元素，矩阵乘法直接简化为$V_{i,j} = u_{1,i}(x - 1)u_{1,j}$。因此， V严格是一个秩一矩阵。 V 的对角元对应于经典跃迁概率$p_i = |u_{1,i}|^2$，从而$V_{i,i} = (x - 1)p_i$。

为计算 $\mathrm{Perm}(I+V)$，我们利用关于单位矩阵加秩一更新矩阵的永久式的标准线性代数恒等式，将其展开为所有大小为 m 的子集 S 对应的主子矩阵 V_S 的永久式之和：

$$\mathrm{Perm}(I + V) = \sum_{m=0}^{R} \sum_{|S|=m} \mathrm{Perm}(V_S). \tag{16}$$

关键在于，由于 V_S 是一个秩一矩阵，其永久式恰好等于 $m!$ 乘以其对角元素的乘积。这个阶乘因子正是玻色子聚束的确切数学根源。代入对角元素可得：

$$\mathrm{Perm}(V_S) = m! \prod_{i \in S} (x - 1)p_i = m!(x - 1)^m \prod_{i \in S} p_i. \tag{17}$$

对所有子集 S 求和后，我们可以提出公因子，从而得到初等对称多项式 $e_m(p_1, \ldots\ldots, p_R)$，它与公式（8）中定义的子集乘积 $S_{R;m}$ 相同。因此，量子概率生成函数具有如下精确解析形式：

$$\mathrm{PGF}_{\mathrm{boson}}(x) = \sum_{m=0}^{R} m!(x - 1)^m S_{R;m}. \tag{18}$$

从公式（18）中提取 x^{n_k} 的系数，在数学上便可还原出公式（9）中从物理角度推导出的精确交错和。

这一综合论证证明，我们在物理迹运算中观察到的复数交叉项的解析消去，源于跃迁矩阵的正交归一性；这正是将系统限制在秩一永久式子空间中的确切物理机制。此外，将公式（18）与可区分粒子的经典概率生成函数 $\mathrm{PGF}_{\mathrm{dist}}(x) = \sum_{m=0}^{R} (x - 1)^m S_{R;m}$ 进行比较，可以明确看出， $m!$ 的缩放因子是量子玻色子与经典粒子在单模观测中唯一的数学区别。

最重要的是，从算法角度来看，我们的物理推导表明，无需依赖概率生成函数插值。通过利用式 (11) 递归计算$S_{R;m}$ ，即可在 $\mathcal{O}$ 次（R^2）算术运算中直接填充精确边缘分布，相比基于傅里叶的提取方法，大幅简化了计算。

V. 通过哈达玛玻色子采样进行验证

本节为公式（9）提供技术验证。我们采用哈达玛玻色子采样（HBS）

模型，其中干涉仪的动力学由哈达玛型量子随机游走 [10, 11]所支配。

HBS 模型由具有带状结构的跃迁矩阵 $R\times M$ V 表征，其各行相互正交。按照考克斯-罗斯-鲁宾斯坦方法 [13],，我们通过平衡分束器在每个时间步 t 表示量子随机游走的演化：

$$\begin{pmatrix} U_{o,t} \\ D_{o,t} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{i,t} \\ D_{i,t} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

其中，下标 i和 o分别表示“输入”和“输出”。

分束器层数 T决定了干涉深度。对于 $T = 3$和初始条件$U_{i,\ 1} = 1$，$D_{i,\ 1} = 0$，单光子振幅向量为 $v_3 = 2^{-3/2}$(1，−1，0，2，1，1)，其中零值源于马赫-曾德尔相消干涉 [14, 15]。对于R 个光子，跃迁矩阵 V_T 的 R 行通过将 v_T 逐行向右移动两列构造，例如：

$$V_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & & \\ & & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{20}$$

该模型的示意图如图1所示。

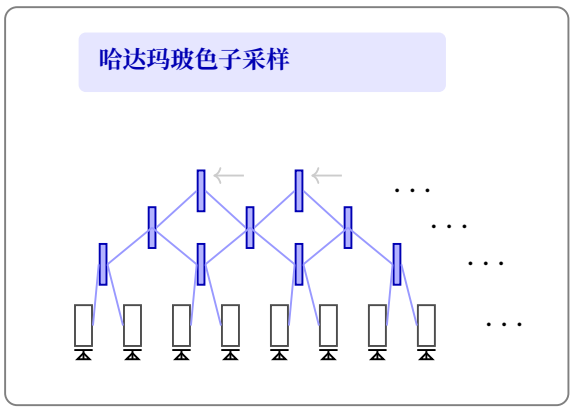

图1. 干涉深度为 $T = 3$ 的哈达玛玻色子采样示意图。来自光源的光子进入由分束器构成的干涉仪网络，这些分束器按树状构型排列，实现哈达玛变换；随后，光子由光子探测器测量。

哈达玛玻色子采样模型的一个决定性特征，是边缘分布中观察到的2-周期性。这一性质的产生，是因为对于不靠近边界的模式，指标相差为二时，V 各列中的非零元素集合是相同的。对于满足 $2T - 2 < i < j < 2R + 1$的体指标，这种平移不变性确保：

$$P(n_i) = P(n_{i+2}). \tag{21}$$

表 I 给出了 T =3的完整边缘分布。对于较小的系统规模（$R, T \in [3, 8]$），我们的解析结果与暴力计算完全一致，而在这些规模下暴力计算仍然切实可行。

虽然表 I 展示了完整分布，但极端尾部的理论行为也值得注意。在所有 R 个光子聚束到单个观测模式（$n_k = R$）的极限情况下，公式（9）中的求和化简为单独一项，从而得到精确的解析关系 $P(R) = R!P_d(R)$。这种巨大的差异代表了宏观玻色子聚束在理论上的极致表现。然而，尽管这种增强幅度惊人，底层的经典概率 $P_d(R)$ 仍按 $\sim (1/M)^R$ 缩放。因此，在这一高光子数区域，绝对概率 $P(R)$ 和 $P_d(R)$ 仍微乎其微。要以具有统计显著性的方式分辨这些罕见的多光子事件，需要极长的测量时间以及高效的光子数分辨（PNR）探测器，因此在近期的实验验证中，分布尾部基本不具备实际可行性。

至关重要的是，宏观量子性特征实际上可以通过标准阈值探测器得到严格验证；这类探测器只区分“无点击”（真空态）和“有点击”（一个或多个光子）事件。表 II 展示了全带宽模式中$3 \le T \le 150$ 的零点击和一次点击边缘分布。如图所示，即使系统扩展到大量光子，精确的量子真空概率 $P(0)$与经典可区分对应项 $P_d(0)$之间仍存在持续且显著的差异。由于不可区分玻色子强烈倾向于聚集在同一模式中，因此会使完全空置的输出模式比例相应增大，从而普遍导致 $P(0) > P_d(0)$。

此外，单光子概率还为这种聚集行为提供了另一种互补特征。相较于经典情形，发现一个孤立单光子的概率不仅受到抑制（$P(1) < P_d(1)$），量子分布还常常呈现显著的内部反转，即$P(1) < P(0)$。这一现象是多光子量子干涉真实存在的可靠且易于测量的标志。

在边界处设有反射镜的模型中，跃迁矩阵 V 会在边缘处发生改变。然而，由于边缘分布是局部性质，仅取决于观测模式的矩阵元，因此，对于远离干涉仪边界的构型，受约束与不受约束的 HBS 结果相同。

VI. 结论

我们得到了一个精确、可验证且具有多项式效率的闭式公式，用于计算CBS模型中的单模式边缘分布。通过应用概率求和规则和跃迁

表 I. $T = 3$和 $R \geq T$的 HBS 边缘分布，其中 $M = 2(R + T - 1)$。体模式（$2i - 1,\ 2i$）对于 $3 \leq i \leq R$呈现二周期性。可区分光子 $P_d(n_j)$ 的概率列于括号中。

计数 n_k	$k \in \{1,2,3\}$	$k = 4$	$k = 2i-1$	$k = 2i$	$k = M-3$	$k = M-2$	$k \in \{M-1, M\}$
0	7/8 (7/8)	8/16 (7/16)	50/64 (49/64)	62/128 (49/128)	7/8 (7/8)	8/16 (7/16)	7/8 (7/8)
1	1/8 (1/8)	6/16 (8/16)	12/64 (14/64)	42/128 (63/128)	1/8 (1/8)	6/16 (8/16)	1/8 (1/8)
2	0 (0)	2/16 (1/16)	2/64 (1/64)	18/128 (15/128)	0 (0)	2/16 (1/16)	0 (0)
3	0 (0)	0 (0)	0 (0)	6/128 (1/128)	0 (0)	0 (0)	0 (0)

表 II. HBS 中 $n_k = 0$、1 时，模式 k 处的边缘分布 $P(n_k)$。 T 表示干涉仪中的分束器层数。对于每个 T，光子数 $R \geq T$ 均可任意取值。体模式（$2i - 1$、$2i$）在 $3 \leq i \leq R$ 时呈现二周期性。另提供可区分光子的概率 $P_d(n_j)$ 以供比较。一般而言，我们有 $P(0) > P_d(0)$ 和 $P_d(1) > P(1)$。

	$k = 2i-1$				$k = 2i$			
T	$P(0)$	$P(1)$	$P_d(0)$	$P_d(1)$	$P(0)$	$P(1)$	$P_d(0)$	$P_d(1)$
3	0.78	0.19	0.77	0.22	0.48	0.33	0.38	0.49
4	0.79	0.17	0.77	0.21	0.45	0.39	0.36	0.54
5	0.68	0.23	0.63	0.31	0.50	0.44	0.47	0.50
6	0.68	0.23	0.63	0.31	0.57	0.32	0.51	0.42
7	0.76	0.20	0.74	0.24	0.55	0.27	0.45	0.40
8	0.77	0.19	0.75	0.23	0.55	0.27	0.44	0.41
9	0.70	0.22	0.65	0.29	0.57	0.30	0.50	0.42
10	0.70	0.22	0.65	0.29	0.56	0.32	0.50	0.42
20	0.76	0.19	0.73	0.23	0.57	0.26	0.48	0.38
30	0.72	0.21	0.67	0.27	0.60	0.25	0.52	0.36
50	0.72	0.20	0.68	0.26	0.61	0.25	0.53	0.35
100	0.75	0.19	0.72	0.24	0.59	0.25	0.51	0.35
150	0.73	0.20	0.69	0.26	0.61	0.24	0.53	0.34

矩阵的行正交性，我们从物理上证明了未观测到的多粒子干涉交叉项如何在解析过程中彼此抵消，从而揭示了低阶CBS边缘分布计算效率高的奥秘。

我们的结果有一个显著特点：组合结构清晰。我们证明，边缘分布完全由到达观测模式的经典跃迁概率的子集乘积（即初等对称多项式）决定。此外，通过将物理推导与生成函数和秩一永久式联系起来，我们明确揭示了 $m!$ 阶乘权重正是区分可区分粒子与不可区分粒子的精确数学机制。

从计算角度来看，我们直接的 $\mathcal{O}(R^2)$ 递归公式相比抽象的生成函数算法具有显著的实用优势，完全避免了多项式插值或傅里叶变换带来的算法开销和数值不稳定性。

我们的公式具有严格的 $\mathcal{O}(R^2)$ 效率，使得对任意大的光子数进行 CBS实验的实用且精确的验证成为可能。通过将实验测得的点击/未点击统计与精确的理论分布进行比较，实验人员能够严格验证宏观尺度上的玻色子聚束，而无需进行难以处理的全分布模拟，也无需使用复杂的光子数分辨阵列。尽管本文聚焦于单光子输入区间，但该框架可自然扩展至多光子源；其广义公式将在后续发表的论文中给出。

致谢

文中表达的任何观点均为我个人观点，并非代表雇主发言或代表雇主立场，也不代表雇主的立场、战略或意见。本研究未获得公共、商业或非营利部门任何资助机构的资助。作者承认，在有关秩一永久式展开的数学文献综述和代数综合方面，曾使用大型语言模型（ Google Gemini）提供协助。

附录 A：玻色子采样概率的求和规则

我们的边缘分布公式的推导依赖于一条基本求和规则。该规则将总概率分解为概率的嵌套求和，使我们能够直接应用跃迁矩阵的行归一性。对于可区分

和不可区分玻色子采样（其中测量量为光子数计数），该规则均成立。

令 $P(N_R)$ 表示一个 M 模式构型的概率：

$$N_R = (n_1, \ldots, n_k, \ldots, n_M) \tag{A1}$$

其中 $\sum_k n_k = R$。令 $N_R + 1_k$ 为一个构型：

$$N_R + 1_k = (n_1, \ldots, n_k + 1, \ldots, n_M), \tag{A2}$$

它与 N_R 的区别在于模式 k 中多了一个光子。概率递归求和法则为：

$$\sum_{N_{R+1}} P(N_{R+1}) = \sum_{k=1}^{M} \sum_{N_R} \frac{n_k + 1}{R+1} P(N_R + 1_k), \tag{A3}$$

其中，n_k 是 N_R 的一个元素。

以 $M = 3$ 为例。N_2 和 N_1 的构型分别为：

$$(2,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,2,0), (0,1,1), (0,0,2), \tag{A4}$$

and

$$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), \tag{A5}$$

分别如此。向 N_1 的每个模式添加一个玻色子，可得以下构型：

$$\begin{aligned} (1,0,0) &\to (2,0,0), (1,1,0), (1,0,1), \\ (0,1,0) &\to (1,1,0), (0,2,0), (0,1,1), \\ (0,0,1) &\to (1,0,1), (0,1,1), (0,0,2). \end{aligned} \tag{A6}$$

将这些构型的概率按各自权重求和——根据式 (A3)，构型 (2，0，0)、(0，2，0)、(0，0，2) 的权重为 1，其余构型的权重为 $1/2$——便可得到 N_2 中各构型概率之和。

为证明式 (A3)，我们用累积部分和指标来定义配置求和：

$$n'_k = \sum_{j=k}^{M} n_j. \tag{A7}$$

对 N_R 求和是一个迭代累积过程：

$$\sum_{N_R} = \sum_{n'_2=0}^{R} \cdots \sum_{n'_{M-1}=0}^{n'_{M-2}} \sum_{n'_M=0}^{n'_{M-1}}. \tag{A8}$$

考虑 $k = M-1$ 和 $k = M$ 项，对第 M 个模式指标 n'_M 求和：

$$\begin{aligned} S \equiv &\sum_{n'_M=0}^{n'_{M-1}} \frac{n'_{M-1} + 1 - n'_M}{R+1} P(\ldots, n'_{M-1} + 1 - n'_M, n'_M) \\ &+ \sum_{n'_M=0}^{n'_{M-1}} \frac{n'_M + 1}{R+1} P(\ldots, n'_{M-1} - n'_M, n'_M + 1). \end{aligned} \tag{A9}$$

将第二项 $m = n'_M + 1$ 的指标平移后，我们发现这些项会“望远镜式”相消，因此求和边界可从 n'_{M-1} 扩展至 $n'_{M-1}+1$，而 S 则化简为单项：

$$S = \sum_{n'_M=0}^{n'_{M-1}+1} \frac{n'_{M-1} + 1 - n'_M}{R+1} P(\ldots, n'_{M-1} + 1 - n'_M, n'_M). \tag{A10}$$

对 $k = M-1$、.....、2 重复这一过程，即可得到式 (A3)。

固定 n_k，并将 $R - n_k$ 个玻色子分配到 $M-1$ 个模式中，按照完全相同的步骤即可得到式 (4)。

附录 B：边缘分布

根据式 (2) 至 (4)，我们有：

$$P(n_i) = \sum_{N_{R-1;n_i}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{M} \frac{|\mathrm{Perm}(\mathcal{A}(N_{R-1;n_i} + 1_k))|^2}{(R - n_i) \prod_{l=1}^{M} n_l!}. \tag{B1}$$

令 $\mathcal{A}_{i'}(N_{R-1;n_i})$ 为 $\mathcal{A}(N_{R-1;n_i} + 1_k)$ 的一个子矩阵，该矩阵通过删除第 i' 行以及与模式 k 相关联的一列得到。应用拉普拉斯永久式展开 [5, 6]：

$$\mathrm{Perm}(\mathcal{A}(N_{R-1;n_i} + 1_k)) = \sum_{i'=1}^{R} v_{i',k} \mathrm{Perm}(\mathcal{A}_{i'}(N_{R-1;n_i})). \tag{B2}$$

将式 (B2) 代入式 (B1)，并以如下形式应用跃迁矩阵的行正交归一性质：

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{M} v_{i',k} v^*_{j',k} = \delta_{i',j'} - v_{i',i} v^*_{j',i}, \tag{B3}$$

我们得到：

$$\begin{aligned} P(n_i) = &\frac{1}{R - n_i} \sum_{N_{R-1;n_i}} \sum_{c \in C_{R-1}} \left| \mathcal{A}_c(N_{R-1;n_i}) \right|^2 \\ &- \frac{n_i + 1}{R - n_i} \sum_{N_{R-1;n_i+1}} \left| \mathcal{A}(N_{R-1;n_i+1}) \right|^2, \end{aligned} \tag{B4}$$

其中，C_{R-1}（含有 $C_0 = 1$）是 V 的行索引的 $(R-1)$-组合集合，$\mathcal{A}_c(N_{R-1;n_i})$ 是 $\mathcal{A}(N_{R-1;n_i} + 1_k)$ 的一个子矩阵，按式 (B2) 的方式删除一行和一列得到。式 (B4) 的第一项来自式 (B3) 的 $\delta_{i',\ j'}$ 项，第二项则来自 $v_{i',\ i} v^*_{j',\ i}$ 项。

重复相同的过程，直到所有其他列

第 i 列之后的列均被耗尽：

$$P(n_i) = \sum_{k=0}^{R-n_i} \frac{(-1)^k (R-n_i-k)!}{(R-n_i)!} \frac{(n_i+k)!}{n_i!} \binom{R-n_i}{k} \cdot \sum_{c \in C_{R-k}} \left| \mathcal{A}_c(N_{n_i+k;n_i+k}) \right|^2 = \sum_{k=0}^{R-n_i} (-1)^k \binom{n_i+k}{n_i} \sum_{c \in C_{R-k}} \left| \mathcal{A}_c(N_{n_i+k;n_i+k}) \right|^2. \tag{B5}$$

式 (B5) 的深远意义在于，所有剩余矩阵都具有相同的列，且这些列完全由跃迁矩阵第 i 列的元素构成。这些秩一矩阵的永久式很容易计算：

$$\mathcal{A}_c(N_{n_i+k;n_i+k}) = \sqrt{(n_i+k)!} \prod_{i'=1}^{n_i+k} v_{c_{i'},i}. \tag{B6}$$

结合公式（B5）和公式（B6），即可得到公式（9）所描述边缘分布的闭式公式。

最后，让我们验证 $P(n_i)$ 是否已正确归一化：

$$\sum_{n_i=0}^{R} P(n_i) = 1. \tag{B7}$$

为清晰起见，我们定义：

$$G_m = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ (m!)^2 \left| \prod_{k=1}^{m} v_{c_k,i} \right|^2 & m > 0 \end{cases} \tag{B8}$$

由此可得：

$$\begin{aligned} \sum_{n_i=0}^{R} P(n_i) &= \sum_{n_i=0}^{R} \sum_{m=0}^{R-n_i} (-1)^m \frac{1}{m! n_i!} G_{m+n_i} \\ &= \sum_{m=0}^{R} \sum_{n_i=0}^{m} \frac{(-1)^{m-n_i}}{(m-n_i)! n_i!} G_m \\ &= \sum_{m=0}^{R} \frac{(-1)^m}{m!} G_m \sum_{n_i=0}^{m} (-1)^{n_i} \binom{m}{n_i} \\ &= G_0 \\ &= 1. \end{aligned} \tag{B9}$$

[1] S. Aaronson 和 A. Arkhipov，《线性光学的计算复杂性》，第43届ACM年度计算理论研讨会论文集（STOC），333（2011年）。[2] C. S. Hamilton、R. Kruse、L. Sansoni、S. Barkhofen、C. Silberhorn 和 R. Jex，《高斯玻色子采样》，《物理评论快报》**119**，170501（2017年）。[3] N. Quesada、J. M. Arrazola 和 N. Killoran，《使用阈值探测器模拟高斯玻色子采样》，《物理评论A辑》**102**，032411（2020年）。[4] L. Gurvits，《关于混合判别式及相关问题的复杂性》，计算机科学的数学基础，447（2005年）。[5] H. Minc，*Permanents*，《数学及其应用百科全书》第6卷（剑桥大学出版社，1984年）。[6] L. Troyansky 和 N. Tishby，《永久式不确定性：关于行列式和永久式的量子计算》，arXiv预印本 quant-ph/9606026（1996年）。[7] S. N. Bose，《普朗克定律与光量子假说》，Zeitschrift f¨ur Physik **26**，178（1924年）。[8] A. Einstein，《单原子理想气体的量子理论

气体，普鲁士科学院会议报告 **22**，261（1924年）。[9] A. Einstein，《单原子理想气体的量子理论》，第二篇论文，普鲁士科学院会议报告 **1**，3（1925年）。[10] D. Meyer，从量子元胞自动机到量子格气，《统计物理学杂志》**85**（1996年）。[11] A. Ambainis *et al.*，《一维量子游走》，STOC'01：第三十三届 ACM 计算理论年会论文集，37（2001年）。[12] M. C. Tichy，部分可区分玻色子的抽样及其与多维永久式的关系，《物理评论A辑》，022316（2015年）。[13] J. C. Cox、S. A. Ross 和 M. Rubinstein，期权定价：一种简化方法，《金融经济学杂志》**7**，229（1979年）。[14] L. Mach，关于一种干涉折射仪，《仪器学杂志》f¨ur **12**，89（1892年）。[15] L. Zehnder，一种新型干涉折射仪，《仪器学杂志》f¨ur **1**，275（1891年）。