基于辛普森法的$k \geq 2$个正态分布重叠系数估计方法

Omar M. Eidous and **Majd M. Alsheyyab**
omarm@yu.edu.jo majd.alsheyyab.97@gmail.com

统计系 - 亚尔穆克大学，伊尔比德 - 约旦
2026

摘要

重叠系数是衡量概率分布相似性的基本测度。尽管两个分布的情形已得到广泛研究，但将这一测度推广到多个总体时，在分析和计算方面都面临挑战。本文提出了一种适用于$k \geq 2$正态分布重叠系数的一般估计框架。该方法结合辛普森数值积分法与正态分布参数的代入式最大似然估计量。结果表明，在标准正则条件下，所得估计量相合。我们针对多种重叠情形和样本量开展了蒙特卡罗模拟研究。结果显示，所提出的基于辛普森的估计量在所有重叠程度下均具有良好的竞争力，尤其在低重叠情形下优势显著。该方法具有灵活性且计算效率高，可用于任意数量的正态总体。

关键词：重叠系数；多个正态分布；辛普森法则；代入式估计量；蒙特卡罗模拟；一致性。

数学主题分类：62F12，65D30

1. 引言

测量概率分布之间的相似性，在统计推断、分类、可靠性理论和生物医学研究中发挥着重要作用。一种广泛使用的测度是重叠系数（OVL），它量化了概率密度函数之间的共同面积。

对于两个密度函数 f_1 和 f_2，Weitzman重叠系数定义如下（Montoya等人，2019）

$$\Delta_2 = \int min\{f_1(x), f_2(x)\}dx \quad (1)$$

该系数是量化概率分布相似度的常用工具，用于测度两个密度函数曲线下的共同面积。它的应用价值不仅限于理论统计学，也延伸到应用领域，尤其是在系统复杂或存在不确定性的情况下。例如，在药理学中，OVL有助于根据分子结构、作用机制或潜在副作用比较药物（Mizuno等人，2005；Wolff等人，2021）。这些见解对个性化医学具有重要价值，可帮助临床医生优化治疗方案，并尽量减少多药患者发生药物不良相互作用的风险。

在收入和社会经济研究中，OVL有助于稳健比较不同国家、地区或人口群体的分布。它可以揭示与年龄、性别或族裔相关的隐性不平等，为理解和解决经济差距提供全面的框架（Jenkins和Van Kerm，2012；Schmid和Schmidt，2006）。除这些领域外，OVL估计还应用于法学（Ekstrom和Lau，2008）、图像分析（Ridout和Linkie，2009）以及拟合优度检验（Alodat等人，2022；Nunez- Antonio等人，2018）等多个领域。

在过去三十年中，用于估计 Δ_2 的参数方法得到了广泛研究。Inman和Bradley（1989）的早期研究聚焦于等方差的正态分布，而Reiser和Faraggi（1999）则在相同假设下构建了置信区间。Mulekar和Mishra（1994，2000）考察了等均值正态分布的情形，并比较了不同的基于重抽样的方法，包括刀切法、自助法和变换方法。Wang和Tian（2017）提出了广义推断和参数自助法，用于在正态性假设下构建置信区间。

为减少对严格参数假设的依赖，多项研究提出了替代性的估计方法。Eidous和Al-Shourman（2023）以及Eidous和Daradkeh（2024）开发了无需假设均值或方差相等的Δ_2 估计方法。研究者也将这些方法拓展至其他分布族：Al-Saidy等人（2005）和Eidous和Abu Al-hayja’a（2023）研究了形状参数相等和不相等的威布尔分布；Chaubey等人（2008）研究了逆高斯分布；Dhaker等人（2021）聚焦于逆洛马克斯分布；Inacio和Guillen（2022）则提出了一种采用狄利克雷过程混合的贝叶斯非参数方法。

最后，当底层分布未知或难以指定时，基于核的非参数方法为估计OVL提供了一种灵活的替代方案（Clemons，2001；Schmid和Schmidt，2006；Eidous和Al-Talafha，2022；Eidous和Ananbeh，2024，2025年）。

将重叠系数推广到两个以上的总体，在许多现实应用中自然出现，此时必须在多个组之间评估相似性。对于 $k \geq 2$个连续分布，其密度函数为 $f_1, f_2, \ldots, f_k$，广义魏茨曼重叠系数定义为（Eidous and Alsheyyab，2025年）

$$\Delta_k = \int min\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\}dx, \tag{2}$$

它用于测度所有 k分布之间共享概率的总量。虽然其定义在概念上很简单，但随着 k 的增加，即使在正态分布等参数模型下，解析计算也会变得愈发困难。为应对这一挑战，本文针对所有总体均服从正态分布的情形，提出了一种用于估计 Δ_k 的基于辛普森法的估计方法。该方法将数值积分与正态分布参数的代入估计量相结合，为评估多个群组之间的重叠提供了一种计算效率高且具有良好推广性的框架。

2. k 个正态分布的重叠系数

考虑 k 个相互独立的正态总体：

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \qquad i = 1, 2, \ldots, k \tag{3}$$

其概率密度函数为

$$f_i(x) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}\, exp\left(-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{4}$$

这些 k 个分布的一般重叠系数为：

$$\Delta_k = \int_{-\infty}^{\infty} min\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\}dx. \tag{5}$$

定义函数

$$g(x) = min\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\}. \tag{6}$$

该函数在由密度函数两两交点确定的区间上分段为常数d b。随着 k 增大，此类区域的数量迅速增加，使解析求值变得不切实际。因此，数值积分方法自然成为估计 Δ_k 的可扩展方法。

3. Δ_k 的基于辛普森法的估计量

3.1 数值近似

Let

$$\Delta_k = \int_a^b g(u)du, \tag{7}$$

其中，a 和 b 选在尾部足够远的位置，使得 $[a, b]$ 之外的贡献可以忽略。将区间 $[a, b]$ 划分为 r 个相等的子区间，r 为偶数，步长为 h $= b -$ $g \quad r$ 2014 ()/。应用辛普森法则可得（Chapra and Canale,）：

$$\Delta_k^{(simp)} = \frac{h}{3}\left[g(x_0) + 4\sum_{j\ odd} g(x_j) + 2\sum_{j\ even} g(x_j) + g(x_r)\right], \tag{8}$$

其中，$x_0 = a$和 $x_r = b$。辛普森法则本身与 k无关，但被积函数 $g(x)$显式依赖于 k。

3.2 使用极大似然估计的代入估计

在实际应用中，真实参数 μ_i 和 未知。假设我们从第 i 个总体中抽取了一个样本量为 n_i 的随机样本，记为

$$X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$$

其中，X_{ij} 表示第 i 个总体中的第 j 个观测值。第 i 个总体的样本均值为

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

采用上述记号，μ_i 和 的极大似然估计量（MLEs）为

$$\hat{\mu}_i = \bar{X}_i, \qquad \hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij} - \bar{X}_i\right)^2, \ i = 1, 2, \dots, k. \tag{9}$$

将密度函数中的未知参数替换为其极大似然估计量，可得到代入估计密度，

$$\hat{f}_i(x) = \frac{1}{\hat{\sigma}_i\sqrt{2\pi}}\ exp\left(-\frac{(x-\hat{\mu}_i)^2}{2\hat{\sigma}_i^2}\right). \tag{10}$$

估计的最小值函数为，

$$\hat{g}(x) = min\left\{\hat{f}_1(x), \hat{f}_2(x), \dots, \hat{f}_k(x)\right\}dx$$

以及使用代入极大似然估计量得到的 Δ_k 的基于辛普森的估计量为，

$$\hat{\Delta}_k^{(simp)} = \frac{h}{3}\left[\hat{g}(x_0) + 4\sum_{j\ odd} \hat{g}(x_j) + 2\sum_{j\ even} \hat{g}(x_j) + \hat{g}(x_r)\right]. \tag{11}$$

4. 渐近性质

定理1：设 $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i} \sim N(\mu_i, \ )$，$i = 1, \dots, k$ 为独立样本。设 $g(x) = \min_{1\le i\le k} f_i(x)$（如6中所定义）和$\Delta_k = \int \ g(\int_{-\infty}^{\infty} \ x\ dx)$，其中$f_i$ 为参数$(\mu_i, \ )$的正态密度。若$\hat{\Delta}_k^{(simp)}$ 是(11)中定义的基于辛普森法则的代入估计量，通过用(10)中的估计密度$\hat{f}_i$ 替换f_i 得到，并且若$min_i n_i \to \infty$,则

$$\hat{\Delta}_k^{(simp)} \xrightarrow{p} \Delta_k$$

证明：根据式（9）的定义，μ_i 和 的极大似然估计量分别为 $\hat{\mu}_i$ 和 $\hat{\sigma}_i$。在正态模型的标准正则条件下，这些估计量是相合的；也就是说，对于每个i =1, ..., k，$\hat{\mu}_i \xrightarrow{p} \mu_i$ 和 $\hat{\sigma}_i^2 \xrightarrow{p}$ （Casella 和 Berger，2002年；Lehmann和C ella，1998年）。因此，完整参数向量依概率收敛到其真实值即，

$$\hat{\theta} = (\hat{\mu}_1, \hat{\sigma}_1^2, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_2^2 \ldots, \hat{\mu}_k, \hat{\sigma}_k^2) \xrightarrow{p} (\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2, \ldots, \mu_k, \sigma_k^2) = \theta.$$

对于每个固定的x，正态密度 f_i 关于其参数是连续的。根据连续映射定理（Billingsley，1995年；Van der Vaart，1998年），可得，对于每个固定的x，$\hat{f}_i(x) \xrightarrow{p} f_i(\cdot)$。

由于正态族关于其参数光滑且为有限维，因此这种收敛可加强为在任意紧集 $K \subset R$ 上一致收敛：

$$\sup_{x \in K} \left| \hat{f}_i(x) - f_i(x) \right| \xrightarrow{p} 0$$

回顾第（3）节，

$$g(x) = \min_{1 \le i \le k} f_i(x), \qquad \hat{g}(x) = \min_{1 \le i \le k} \hat{f}_i(x)$$

由于有限个变量中的最小值是连续函数（Rudin，1976年），每个 $\hat{f}_i$ 在紧集上的一致收敛意味着

$$\sup_{x \in K} |\hat{g}(x) - g(x)| \xrightarrow{p} 0 .$$

因此， $\hat{g}(x)$ 在每个紧集上都一致收敛于 $g(x)$。也就是说， $\hat{g}(x) \to g(x)$ 在紧集上一致收敛。

由于每个 $f_i(x)$ 都是正态密度，其在尾部呈指数衰减，因此 $g(x)$ 也如此。因此，对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $M > 0$，使得（Feller，1971年）

$$\int_{|x|>M} g(x)dx < \varepsilon.$$

这使我们可以将注意力限制在足够大的紧区间 $[a,b] = [-M, M]$ 上，因为尾部对积分 $\Delta_k = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$ 的贡献可以任意小。在紧区间 $[a,b]$ 上，$\hat{g}(x)$ 一致收敛于 $g(\cdot)$，因此，

$$\int_a^b \hat{g}(x)dx \xrightarrow{p} \int_a^b g(x)dx .$$

最后，估计量 $\hat{\Delta}_k^{(simp)}$ 定义为在紧区间 $[a,b]$上对 $\hat{g}(x)$的积分应用辛普森法则进行近似：

$$\hat{\Delta}_k^{(simp)} = \int_a^b \hat{g}(x)dx = S_h(\hat{g})$$

其中， $= b - ()$表示使用宽度为h ( )/的 r 个子区间进行辛普森法则近似。辛普森法则满足以下误差界

$$\left| \int_a^b g(x)dx - S_h(g) \right| = O(h^4),$$

对于任意分段光滑且四阶导数有界的函数 $g(x)$，该误差界均成立（Atkinson，1989年；Davis 和 Rabinowitz，2007年）。在我们的情形中，$g(x) = \min_{1 \le i \le k} f_i(x)$是有限个光滑正态密度 $f_i(x)$中的最小值。因此，$g(x)$是分段光滑的，仅在有限多个“连接点”处发生最小值从一个 f_i 切换到另一个。

重要的是，网格间距 h 是固定的，不依赖于样本量 n_i。因此，辛普森法则产生的确定性近似误差不会影响 $\hat{g}(x)$ 的随机收敛。结合 $\hat{g}(x)$ 一致收敛至 $g_k(x)$，我们得出

$$\widehat{\Delta}_k^{(simp)} \xrightarrow{p} \Delta_k ,$$

当 $\min_i\{n_i\} \to \infty$。 因此，基于辛普森的估计量是相合的。

备注 1. 一致性结果对任何固定的 $k \geq 2$ 均成立。

备注 2. 除光滑性和参数连续性外，证明不依赖于正态分布的具体性质。因此，该结果可推广至其他光滑的参数族（Van der Vaart，1998年；Casella 和 Berger，2002年）。

5. 基于辛普森的估计量的计算实现

为了应用辛普森法则，积分必须具有有限的积分限。然而，密度函数f_i（ ）， i 1,2, … , k定义在 为此，我们应用一个光滑变换，将无限区间（$-\infty$, ∞）映射到有限区间 [0,1]。具体而言，令

$$u = G(x) = 1 - (1 + e^x)^{-\alpha}, \qquad x \in R, \ \alpha > 0.$$

为广义逻辑斯蒂累积分布函数。其反函数为

$$x = G^{-1}(u) = ln\big((1-u)^{-1/\alpha} - 1\big)$$

其导数为

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\alpha(1-u)(1-(1-u)^{1/\alpha})}$$

那么，目标积分

$$\Delta_k = \int_{-\infty}^{\infty} \min_{1\leq i\leq k} f_i(x)\, dx,$$

可以改写为在单位区间上的积分：

$$\Delta_k = \int_0^1 h(x)dx$$

其中

$$h(u) = \min_{1\leq i\leq k} f_i\big(G^{-1}(u)\big)\frac{dx}{du} = \min_{1\leq i\leq k} f_i\big(G^{-1}(u)\big)\frac{1}{\alpha(1-u)(1-(1-u)^{1/\alpha})}$$

现在，我们将 [0,1] 划分为 r 个等宽子区间，宽度为h $= 1/r$ ，其端点为

$$a_i = \frac{i}{r}, \qquad i = 0,1, \dots, r$$

where r 是一个正偶整数。随后，辛普森法则将该积分近似为

$$\Delta_k = \int_0^1 h(x)dx \approx \frac{1}{3r}\sum_{i=1}^{r/2}[h(a_{2i-2}) + 4h(a_{2i-1}) + h(a_{2i})].$$

将 $f_i(x)$ 替换为其估计量 $\hat{f}_i(x)$ ，即可得到估计量

$$\widehat{\Delta}_k^{(simp)} = \frac{1}{3r}\sum_{i=1}^{r/2}\big[\hat{h}(a_{2i-2}) + 4\hat{h}(a_{2i-1}) + \hat{h}(a_{2i})\big],$$

其中

$$\hat{h}(u) = \min_{1\leq i\leq k} \hat{f}_i\big(G^{-1}(u)\big)\frac{dx}{du}$$

由于雅可比项在 $u = 0$ 和 $u = 1$ 处发散，因此辛普森网格在 (0,1) 上实施，并排除端点。实际中，我们使用的网格点为

$$a_i = \frac{i}{r}, \qquad i = 1,2,\dots,r-1,$$

从而确保数值稳定性，同时不影响准确性。此外，选择 $\alpha = 1$似乎相当合理，因为广义概率密度函数在该值处是对称的。在下一节给出的模拟研究中，我们考虑 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 2$，二者均能得到令人满意的结果。然而，初步模拟表明，选择与1相差极大的 α 值在某些情况下可能导致较差的表现。因此，作为第三种选择，我们建议按照下一节所述从数据中估计α。

请注意，当$k = 2$时，所提出的估计量退化为Eidous和Al-Shourman（2022）的估计量，这表明他们的方法是当前方法的一个特例。针对 $k = 3$ 的模拟结果表明，设定 $r = min\{n_1, n_2, n_3\}$即可提供足够的准确性，而将 r 增大到超过该值通常不会使估计量获得显著改进。

6. 模拟

为评估所提出的基于辛普森的估计量$\hat{\Delta}_3^{(simp)}$相对于Eidous 和 Alsheyyab（2025）的估计量（记为$\hat{\Delta}_3^*$）的表现，我们开展了一项全面的蒙特卡罗模拟研究。该研究采用了与 Eidous 和 Alsheyyab（2025）相同的模拟设计。该研究旨在评估这些估计量在各种分布情景和样本量下的偏差与效率。

6.1 模拟设计

我们考虑了四种情景（S1–S4），分别代表三个独立正态总体的不同分布。每种情景均由三组的均值和标准差，以及相应的精确目标参数 Δ_3 所确定。各情景的参数汇总于表 1。

表 1. 四种模拟情景的参数 $(\mu_i, \sigma_i), i = 1,2,3$ 及精确的 Δ3 值

情景	(μ_1, σ_1)	(μ_2, σ_2)	(μ_3, σ_3)	精确Δ_3
S_1	(0, 0.95)	(0, 1)	(0, 1.1)	0.929
S_2	(-0.1,1)	(0,1)	(0.1,1)	0.689
S_3	(-0.5,1)	(0,0.5)	(0.75,1)	0.469
S_4	(-1,1.5)	(0,0.8)	(2,0.4)	0.074

对于每种情形，我们考察了两组样本量：一组是小到中等规模的均衡情形 $(n_1, n_2, n_3) = (50,50,50)$，另一组是中等到大规模的不均衡情形$(50,100,150)$。每次模拟均重复 $R = 1000$ 次，以确保性能指标的估计值稳定。在每次重复中，均从指定的正态分布中生成相互独立的随机样本。对于每个样本，我们计算了针对$\alpha = 1$和$\alpha = 2$的基于辛普森的估计量、数据驱动的α以及对比估计量$\hat{\Delta}_3^*$。针对每种估计量，计算了以下指标：

- 平均估计值（平均值）：估计量在各次重复中的均值，计算公式为

$$AV(\hat{\Delta}) = \frac{\sum_{i=1}^{R} \hat{\Delta}_i}{R}$$

其中，$R = 1000$ 是模拟重复次数。

- 相对偏差（RB）：平均估计值与真实 Δ_3 之间的差值除以Δ_3的真实值，定义为

$$RB(\hat{\Delta}) = \left(AV(\hat{\Delta}) - \Delta_3\right)/\Delta_3$$

- 相对均方根误差（RRMSE）：估计量与Δ_3的真实值之间差值平方的均值的平方根，再除以真实值，表示为

$$RRMSE(\hat{\Delta}) = \frac{\sqrt{\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\left(\hat{\Delta}_i - \Delta_3\right)^2}}{\Delta_3}.$$

- 效率（EFF）：竞争估计量$\hat{\Delta}_3^*$的均方误差（MSE）与基于辛普森的估计量$\hat{\Delta}_3^{(simp)}$的均方误差之比

$$EFF = \frac{MSE\left(\hat{\Delta}_3^*\right)}{MSE\left(\hat{\Delta}_3^{(simp)}\right)}, \text{ where } MSE(\hat{\Delta}) = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\left(\hat{\Delta}_i - \Delta_3\right)^2.$$

所有模拟均使用 *Mathematica 13* 完成。为确保结果可复现，通过 SeedRandom[1234], 使用固定的随机种子，使每次运行都能精确复现结果。这确保了能够从指定的正态分布中稳定生成随机样本，并在模拟研究中稳定评估所有估计量。

6.2 估计量定义

在本小节中，我们概述模拟研究中使用的 Δ_3 两种主要估计量：所提出的基于辛普森的估计量 $\hat{\Delta}_3^{(\mathrm{simp})}$ 和 Eidous 和 Alsheyyab（2025）提出的对比估计量 $\hat{\Delta}_3^*$ 。在模拟中，我们将 $\hat{\Delta}_3^{(\mathrm{simp})}$ 与基于组间最小密度比的 $\hat{\Delta}_3^*$ 进行了比较。对于三个样本中的每一个，样本均值 $\bar{X}_j$ 和方差 S^2 的计算方式如下：

$$\bar{X}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}, \qquad S_j^2 = \frac{1}{n_j - 1}\sum_{i=1}^{n_j}\left(X_{ij} - \bar{X}_j\right)^2$$

此外，对于 $j = 1, 2, 3$，组 j 的估计密度函数定义为

$$\hat{f}_j(t) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\, S_j^2}}\, exp\left(-\frac{\left(t - \bar{X}_j\right)^2}{2\, S_j^2}\right)$$

随后计算组间最小密度估计量，结果为

$$\hat{\Delta}_j^g = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\frac{min\left(\hat{f}_1(X_{ij}), \hat{f}_2(X_{ij}), \hat{f}_3(X_{ij})\right)}{\hat{f}_j(X_{ij})}$$

对比估计量 $\widehat{\Delta}_3^*$ 是通过对三个组的这些值取平均得到的（参见 Eidous and Alsheyyab，2025年），

$$\widehat{\Delta}_3^* = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} \hat{\Delta}_j^g.$$

所提出的辛普森估计量通过采用变换积分方法，在这些密度估计的基础上构建。对于给定的 $\alpha > 0$，网格点 $u_k = k/r, (k = 1, 2, \ldots, r$ （其中 r 为偶数）经过变换后为

$$t_\alpha(u) = ln\left[(1 - u)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1 \right].$$

在每个变换后的点处，计算函数

$$\hat{h}_\alpha(u) = \frac{min\{\hat{f}_1(t_\alpha(u)), \hat{f}_2(t_\alpha(u)), \hat{f}_3(t_\alpha(u))\}}{\alpha(1 - u)(1 - (1 - u)^{1/\alpha})}$$

并使用辛普森法则将积分近似为

$$\widehat{\Delta}_k^{simp}(\alpha) = \frac{1}{3r}\left[4\sum_{i=1}^{r/2} \hat{h}\left(\frac{2i-1}{r}\right) + 2\sum_{i=1}^{r/2-1} \hat{h}\left(\frac{2i}{r}\right) \right]$$

通过令 $\alpha = 1$ 或 $\alpha = 2$，得到所提出的估计量的特例，分别记为

$$\widehat{\Delta}_k^{(simp)} = \widehat{\Delta}_k^{simp}(1), \qquad \widehat{\Delta}_k^{(simp)} = \widehat{\Delta}_k^{simp}(2)$$

此外，还考虑了 α 的数据驱动选择，其计算方式为

$$\widehat{\Delta}_k^{(simp)} = \widehat{\Delta}_k^{simp}(\hat{\alpha})$$

其中

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{3}\left[\frac{n_1}{\sum_{i=1}^{n_1} \log(1 + e^{x_{i1}})} + \frac{n_2}{\sum_{i=1}^{n_2} \log(1 + e^{x_{i2}})} + \frac{n_3}{\sum_{i=1}^{n_3} \log(1 + e^{x_{i3}})} \right]$$

使辛普森估计量能够适应观测分布。这种统一方法使模拟研究能够评估所提出的辛普森估计量在不同 α 选择下的准确性和效率，并在各种分布和样本量情景下将其性能与对比估计量进行比较。

关于 α 选择：尽管我们的模拟研究中的数据是从正态分布生成的，但参数 α 的数据驱动选择采用了逻辑斯蒂型变换进行估计。这种方法的动机在于，逻辑斯蒂函数能够灵活地刻画估计密度的尾部行为和形状，而这对于基于辛普森的估计量至关重要。我们的模拟结果表明，将 α 选择在一和二附近，可以始终获得对 Δ_3准确且稳定的估计，即使底层数据服从正态分布也是如此。重要的是，对 α 的数据驱动估计能够很好地逼近这一最优选择，其结果与使用固定 $\alpha = 1$时的结果相当。相比之下，选择明显偏离一的 α 值会导致所提出的估计量性能下降。这些发现证明，在我们的模拟中使用数据驱动的基于逻辑斯蒂的 α 估计量是合理的，因为它能够很好地适应观测到的样本特征，同时保持辛普森估计量的稳健性和准确性。

6.3 模拟结果

本节评估了所提出的基于辛普森法则的估计量在四种配置下对 Weitzman重叠系数 Δ_3 的有限样本性能，这四种配置分别对应大、中等、小和非常小的重叠。考虑了两种样本量设置：$(50,50,50)$ 和 $(100,150,200)$。表（2）报告的性能指标包括平均估计值（AV）、相对偏差（RB）、相对均方根误差（RRMSE）以及相对于基准估计量 $\hat{\Delta}_3^*$的相对效率（EFF）。由于 $0 \leq \Delta_3 \leq 1$，接近一的值表示三个分布之间存在显著重叠，而接近零的值则反映出重叠有限。

当真实重叠度较大（$\Delta_3 = 0.9292$）时，所有估计量的表现都相近。样本量较小时，估计量略微低估真实值，相对偏差约为 –8%，相对均方根误差接近 0.10。基于辛普森法则的估计量效率非常接近 1，表明其表现几乎与基准估计量相同。随着样本量增加，偏差的绝对值减小，相对均方根误差也明显下降，证实精确度有所提高。各估计量之间的差异微乎其微，说明在高重叠情形下，所有方法的可靠性都相当。

对于中等重叠情形（$\Delta_3 = 0.6890$），所有估计量均呈现正偏差。样本量较小时，相对偏差约为 23%，相对均方根误差约为 0.24。即使样本量增加，这种向上的偏差仍然存在，但基于辛普森法则的估计量效率值仍略高于基准估计量，尤其是带有 $\alpha = 2$ 的版本。在这种情形下，样本量增加仅适度降低了变异性，但各估计量仍保持稳定，整体表现也彼此接近。

当真实重叠较小（$\Delta_3 = 0.4688$）时，所有估计量的偏差都降至最低，小样本中的相对偏差约为 –3%，而大样本中的相对偏差更小。随着样本量增大，相对均方根误差显著下降，表明精确度有所提高。在这种情形下，基于辛普森法则的估计量在效率方面始终优于基准估计量，效率提高约 5–6%。这一趋势表明，当重叠程度中等或较低时，辛普森法尤为有利。

当真实重叠非常小（$\Delta_3 = 0.0735$）时，差异最为明显。尽管所有估计量在小样本中都表现出一定的负偏差，但基于辛普森法则的估计量取得了显著更低的相对均方根误差和更高的效率。效率超过 1.30，其中数据驱动的辛普森估计量的效率最高。随着样本量增大，所有估计量的偏差和相对均方根误差均有所下降，但基于辛普森法则的方法仍保持显著的效率优势。这证实了所提出的方法在低重叠情形下尤为有效。

对三个辛普森估计量 $\hat{\Delta}_3^{(simp-1)}$ with $\alpha = 1$, $\hat{\Delta}_3^{(simp-2)}$ with α =2 和 $\hat{\Delta}_{3(simp-ML)}$ 进行直接比较，其中 α 根据数据估计，结果显示，在所有情景和样本量下，它们的数值结果都非常接近。平均值、相对偏差和相对均方根误差的差异很小，并且随着样本量增加而进一步减小。尽管在重叠程度适中的情况下，采用 $\alpha = 2$ 的估计量偶尔会略有更高的效率，但这三个版本

在较大样本中实际上难以区分。重要的是，数据驱动估计量没有表现出不稳定性或变异性增加，这表明自适应地估计 α 并不会损害性能。

总体而言，模拟结果表明，随着样本量增加，所有估计量的表现均有所改善，这一点可由相对均方根误差持续降低得到验证。基于辛普森法则的估计量至少与基准估计量同样有效率，而且往往效率更高，尤其是在真实重叠程度较小时。此外，无论将α固定为 1 或 2，还是根据数据进行估计，辛普森法的表现基本不受其选择影响。这些发现证实了所提出的估计量在各种重叠情形下的稳健性和实用价值。

7. 结论与讨论

本文针对三个相互独立的正态分布，提出了一类用于估计 Weitzman重叠系数 Δ_k的估计量，并重点关注Δ_3。所提出的方法基于辛普森数值积分法，且不对参数空间施加严格限制。本文构建了三个版本的估计量，它们仅在调优参数α的选择上有所不同：两种固定取值（$\alpha = 1$ 和$\alpha = 2$），以及一种数据驱动选择，即根据样本估计α。

模拟研究表明，所有所提出的估计量都具有良好的有限样本性质。具体而言，随着样本量增加，相对均方根误差持续下降，证实了这些估计量的一致性。当真实重叠度 Δ_3 较大时，所有估计量（包括基准估计量）的表现几乎相同，偏差和效率的差异都很小。这表明，在高重叠情形下，估计方法的选择不那么重要。

当真实重叠度中等或较小时，差异则更为明显。在这些情况下，基于辛普森法则的估计量通常比基准估计量具有更高的相对效率，同时偏差相近。当 Δ_3 非常小时，效率提升尤为显著，表明辛普森法特别适用于低重叠情形。这是一项重要的实际优势，因为当分布之间的共同支撑集有限时，准确估计会更具挑战性。

本研究的一项关键发现是，基于辛普森的估计量的表现基本不受 α选择的影响。在所有情景下，所提出的三个版本在平均值、相对偏差、相对均方根误差和效率方面都非常相似。尽管小样本中会出现细微差异，但随着样本量增加，这些差异会逐渐减小。重要的是，数据驱动估计量（根据数据确定 α ）并未表现出不稳定性或变异性增大的情况。这表明，可以采用 α 的自适应选择，同时不牺牲可靠性。

从实践角度来看，这三种辛普森估计量中的任何一种都可以放心使用。它们计算简便，且性能几乎相同。总体而言，所提出的辛普森求积规则估计量为估计三个正态分布之间的 Weitzman重叠系数提供了一种灵活、稳健且高效的方法。未来的研究可将这一框架扩展至更大的 k 值、其他分布族或真实数据应用，以进一步评估其经验表现。

表（2）。所有情景下估计量 $\hat{\Delta}_3^*$，$\hat{\Delta}_k^{simp}(1)$、$\hat{\Delta}_k^{simp}(2)$ 和$\hat{\Delta}_k^{simp}(\hat{\alpha})$ 的平均值、相对偏差、相对均方根误差和效率。

情景（精确 Δ_3）	(n_1, n_2, n_3)	指标	$\hat{\Delta}_3^*$	$\hat{\Delta}_k^{simp}(1)$	$\hat{\Delta}_k^{simp}(2)$	$\hat{\Delta}_k^{simp}(\hat{\alpha})$
$\boldsymbol{S_1}$ $\Delta_3 = 0.929$	(50,50,50)	*AV*	0.85073	0.85029	0.84800	0.85031
		RB	-0.08425	-0.08473	-0.08719	-0.08471
		相对均方根误差	0.10149	0.10156	0.10302	0.10155
		EFF	**1.00000**	**0.99888**	**0.97052**	**0.99888**
	(100,150,200)	*AV*	0.87408	0.87370	0.87093	0.87373
		RB	-0.05912	-0.05953	-0.06251	-0.05949
		相对均方根误差	0.07673	0.07700	0.07838	0.07699
		EFF	**1.00000**	**0.99219**	**0.95849**	**0.99219**
$\boldsymbol{S_2}$ $\Delta_3 = 0.689$	(50,50,50)	*AV*	0.84738	0.84669	0.84441	0.84672
		RB	0.22986	0.22887	0.22555	0.22891
		相对均方根误差	0.24319	0.24214	0.23861	0.24218
		EFF	**1.00000**	**1.00898**	**1.03885**	**1.00862**
	(100,150,200)	*AV*	0.87485	0.87450	0.87165	0.87454
		RB	0.26974	0.26924	0.26510	0.26929
		相对均方根误差	0.27789	0.27735	0.27306	0.27740
		EFF	**1.00000**	**1.00383**	**1.03559**	**1.00356**
$\boldsymbol{S_3}$ $\Delta_3 = 0.469$	(50,50,50)	*AV*	0.45462	0.45375	0.45372	0.45375
		RB	-0.0307	-0.0325	-0.0326	-0.0325
		相对均方根误差	0.12102	0.11762	0.11758	0.11759
		EFF	**1.00000**	**1.05921**	**1.05921**	**1.05921**
	(100,150,200)	*AV*	0.45879	0.45902	0.45899	0.45903
		RB	-0.02176	-0.02128	-0.02135	-0.02126
		相对均方根误差	0.08720	0.08474	0.08471	0.08473
		EFF	**1.00000**	**1.05696**	**1.05696**	**1.05696**
$\boldsymbol{S_4}$ $\Delta_3 = 0.074$	(50,50,50)	*AV*	0.06711	0.06835	0.06863	0.06842
		RB	-0.0931	-0.07637	-0.07251	-0.07544
		相对均方根误差	0.30476	0.26544	0.26616	0.26499
		EFF	**1.00000**	**1.30769**	**1.30769**	**1.34211**
	(100,150,200)	*AV*	0.06940	0.06919	0.07089	0.06936
		RB	-0.06216	-0.0650	-0.0421	-0.0627
		相对均方根误差	0.25685	0.22058	0.22370	0.22117
		EFF	**1.00000**	**1.33333**	**1.33333**	**1.33333**

利益冲突： 作者声明不存在利益冲突 .

人工智能工具的使用： 作者使用 ChatGPT 协助撰写本文。作者对本文内容承担全部责任。

参考文献

Alodat, T., Al Fayez, M., and Eidous, O. (2022). 关于Matusita重叠度量渐近分布的研究。统计学通讯 – 理论与方法，*51*(20), 6963–6977。

Al-Saidy, O., Samawi, H. M., and Al-Saleh, M. F. (2005). 威布尔分布下重叠系数的推断：形状参数相等。*ESAIM*：概率与统计，*9*, 206–219。

Atkinson, K. E. (1989). 数值分析导论（第2版）。约翰·威立父子公司。

Billingsley, P.（1995年）。概率与测度（第3版）。约翰·威立父子公司 .

Casella, G. 和 Berger, R. L.（2002年）。统计推断（第2版）。Duxbury Pres s.

Chaubey, Y. P.、Sen, D. 和 Mishra, S. N.（2008年）。两个逆高斯总体重叠的推断：均值相等情形。《统计学通讯》–理论与方法，*37*（12），1880–1894。

Chapra, S. C. 和 Canale, R. P.（2014年）。工程师数值方法（第7版）。McGraw-Hill Education。

Clemons, T. E.（2001）。关于：重叠系数的非参数测度的勘误。计算统计与数据分析，*36*，243。

Davis, P. J. 和 Rabinowitz, P.（2007年）。数值积分方法（第2版）。Dover Publications。

Dhaker, H.、Deme, E. 和 El-Adlouni, S.（2021年）。关于两个逆 Lomax 总体中重叠系数的推断。统计理论与应用。https://doi.org/10.2991/jsta.d.210107.002

Eidous, O. 和 Abu Al-hayja'a, M.（2023年）。估计 Weitzman 重叠测度的数值积分近似：威布尔分布。南斯拉夫运筹学杂志，*33*（4），699–712。

Eidous, O., 和 Alsheyyab, M.（2025年）。$k \geq 2$正态分布重叠系数的推广。自然现象数学建模，20，文章编号：9。https://doi.org/10.1051/mmnp/2025008。

Eidous, O. M. 和 Al Shourman, A. J. A.（2022）。用于估计正态分布的 Matusita重叠系数的数值积分近似。数学技术与计算数学杂志，*1*(3)，264–270。

Eidous, O., 和 Al-Shourman, A.（2023年）。正态分布情形下重叠系数的估计。世界数学杂志, *1*(1), 1–13。

Eidous, O., 和 Al-Talafha, S.（2022）。用于估计重叠系数的核方法。统计学通讯 – 模拟与计算, *51*(9), 5139–5156。

Eidous, O., 和 Ananbeh, E.（2025年）。使用数值近似估计Matusita重叠系数的核方法。

Eidous, O., 和 Ananbeh, E.（2024）。使用数值积分方法估计重叠系数的核方法。应用数学与计算, *462*。https://doi.org/10.1016/j.amc.2023.128339

Eidous, O. 和 Daradkeh, S.（2024）。关于两个正态分布的 Weitzman重叠系数 Δ(X,Y) 的推断。国际理论与应用数学杂志，*10*(2)，14–22。

Ekstrom, J. A. 和 Lau, G. T.（2008）。通过文本挖掘探索海洋法，以测度机构与管辖权的重叠。https://doi.org/10.1145/1367832.1367844

Feller, W.（1971年）。概率论及其应用导论（第 II 卷，第 2 版）。约翰·威立父子公司。

Inacio, V. 和 Guillén, J. E. G.（2022）。重叠系数的贝叶斯非参数推断：及其在疾病诊断中的应用。医学统计学，*41*(20)，3879–3898。

Inman, H. F. 和 Bradley, E. L., Jr.（1989年）。重叠系数作为概率分布的一致性度量，以及两个正态密度重叠的点估计。统计学通讯–理论与方法，*18*(10)，3851–3874。

Jenkins, S. P. 和 Van Kerm, P.（2012年）。经济不平等的测度。载于《牛津经济不平等手册》。https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199606061.013.0003

Lehmann, E. L. 和 Casella, G.（1998年）。《点估计理论》（第2版）。施普林格。

Mizuno, S.、Yamaguchi, T.、Fukushima, A.、Matsuyama, Y.和Ohashi, Y.（2005）。用于评估不同族群药代动力学数据相似性的重叠系数。临床试验，*2*（2），174–181。

Montoya, J. A.、Figueroa, G. P.和González-Sánchez, D.（2019）。分布族中Weitzman重叠系数的统计推断。应用数学建模，*71*，558–568。Mulekar, M. S.和Mishra, S. N.（1994）。两个正态密度的重叠系数：均值相等情形。日本统计学会学报，*24*，169–180。Mulekar, M. S.和Mishra, S. N.（2000）。重叠的置信区间估计：均值相等情形。计算统计与数据分析，*34*（2），121–137。

Nunez-Antonio, G., Mendoza, M., Contreras-Cristan, A., Gutierrez-Pena, E., 和 Mendoza, E.（2018）。动物日常活动模式重叠的贝叶斯非参数推断。环境与生态统计，*25*(4), 471–494。

Reiser, B., 和 Faraggi, D.（1999）。重叠系数的置信区间：正态且方差相等情形。英国皇家统计学会杂志：*D*辑（统计学家），*48*(3), 413– 418。

Ridout, M. S., 和 Linkie, M.（2009）。根据相机陷阱数据估计日常活动模式的重叠。农业、生物与环境统计学杂志，*14*(3), 322–337。

Rudin, W.（1976年）。数学分析原理（第3版）。麦格劳-希尔。

Schmid, F., 和 Schmidt, A.（2006）。重叠系数的非参数估计——理论与实证应用。计算统计与数据分析，*50*(6), 1583–1596。

Van der Vaart, A. W.（1998年）。渐近统计。剑桥大学出版社。

Wang, D., 和 Tian, L.（2017）。重叠系数置信区间估计的参数方法。计算统计与数据分析，*106*，12–26。

Wolff, J., Hefner, G., Normann, C., Kaier, K., Binder, H., Hiemke, C., Toto, S., Domschchke, K., Marschollek, M., 和 Klimke, A.（2021年）。医院精神科的多重用药及其药物相互作用和潜在不适当用药风险。药物流行病学与药物安全, *30*(9)，1258–1268。