arXiv:2603.02308v1 [cond-mat.stat-mech] 2 Mar 2026

# 二维随机键伊辛模型的低温相变与量子无限无序

Akshat Pandey,[1, 2, 3,*] Aditya Mahadevan,[1, 4,*] A. Alan Middleton,[5] 和 Daniel S. Fisher[6]

[1] *Department of Physics, Stanford University, Stanford, CA 94305, USA* [2] *All Souls College, Oxford, OX1 4AL, United Kingdom* [3] *Rudolf Peierls Centre for Theoretical Physics, University of Oxford, Oxford, OX1 3PU, United Kingdom* [4] *National Institute for Theory and Mathematics in Biology, Chicago, IL 60611, USA* [5] *Department of Physics, Syracuse University, Syracuse, New York 13244, USA* [6] *Department of Applied Physics, Stanford University, Stanford, CA 94305, USA*（日期：2026年3月4日）

低温下，经典二维随机键伊辛模型会发生由挫折驱动的铁磁体—顺磁体相变，该相变由一个零温固定点控制，此固定点分隔铁磁相与自旋玻璃相。我们表明，可以通过一种重整化群变换来理解这一临界点：该变换通过一系列哈密顿量构造伊辛模型的基态，从一个无阻挫模型开始，逐步加入阻挫，直至达到目标哈密顿量。通过将二维伊辛模型的热力学映射到一个相关厄米矩阵的谱性质——该矩阵是一个非相互作用量子问题的哈密顿量——这一重整化群过程对应于对量子哈密顿量进行迭代对角化。伊辛模型图像中向零温的流动，表现为量子哈密顿量谱中向无限无序的流动；哈密顿量的对数能隙按系统尺寸的幂次标度：$\log \varepsilon_{min}^{-1} \sim L^{\psi}$。隧穿指数 $\psi$ 等于表征零温固定点的自旋刚度指数 $\theta_c$。

**引言.**—平面图（特别是正方晶格）上的经典伊辛模型，其哈密顿量为 $\mathcal{H} = -\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij}\sigma_i\sigma_j$，键为 $\langle ij \rangle$，自旋为 $\sigma_i \in \{-1, 1\}$，可以通过映射到各种“空间” [1–4]来研究。尤其值得关注的是——目前仍仅得到部分理解的——从各种形式的联合分布中抽取随机耦合的模型。

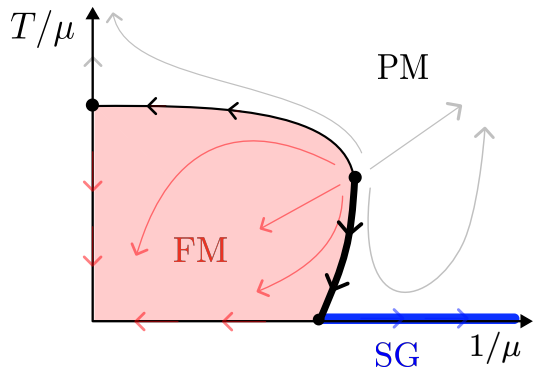


图 1. 二维随机键伊辛模型的定性相图，通过温度 $T$ 以及耦合分布均值 $\mu$ 的倒数进行调节，显示铁磁体（铁磁相 FM）、顺磁体（PM）和 $T = 0$ 自旋玻璃（SG）相。箭头表示重整化群流，颜色对应于目标相。黑色箭头表示临界流。粗黑线表示多临界点以下的低温$T$ 铁磁相-自旋玻璃相转变，尤其是控制该转变的 $T = 0$ 不动点，这正是本文的关注重点。

如果无序只存在于一个方向，而另一个方向上为 $J_{ij}$ 常数 [5], ，那么将无序方向映射为虚时间这一广为人知的方法，可将二维伊辛传递矩阵与随机量子横场伊辛链联系起来 [2]。在该模型的临界点处，量子表示下渐近精确的重整化群（RG）会给出低能有效耦合的分布，并且该分布在对数尺度上无限展宽——临界重整化群固定点位于“无限无序”状态 [6]。因此，与传统的能隙随系统尺寸 $L$变化的标度关系 $\varepsilon_{min} \sim L^{-z}$ $\varepsilon_{min}$不同，会出现“隧穿”动力学标度 $\log \varepsilon_{min}^{-1} \sim L^{\psi}$——这是 $z = \infty$的一种特定形式——其中 $\psi$ 重整化群本征值衡量流向无限无序的速率。

然而，对于经典二维伊辛模型，考虑独立同分布耦合 $\{J_{ij}\}$要自然得多：该模型可以映射为具有随机跃迁 [7–17]的二维量子单粒子局域化问题。在这里，我们重点讨论用马约拉纳费米子作用量表示伊辛配分函数的方式，其中包含一个描述图 2 [3, 18, 19] 所示的装饰二维“Kasteleyn”晶格上随机跃迁的纯虚厄米矩阵$\mathbf{H}$ 的整个谱 的信息。这里，耦合取决于经典伊辛模型的逆温度 $\beta = T^{-1}$。该$\mathbf{H}$ 的谱为 $\{\pm\varepsilon_a(\{J_{ij}\}, \beta)\}$，而伊辛配分函数为 [18, 19]

$$Z(\{J_{ij}\}, \beta) = 2^{L^2} \left( \prod_{\langle ij \rangle} \cosh(\beta J_{ij}) \right) \prod_a \varepsilon_a(\{J_{ij}\}, \beta). \quad (1)$$

为了研究无序诱导的相变，

* 这些作者对本项工作的贡献相同。

在全文中，我们使用一族简单的随机耦合分布：由其均值参数化的单位方差高斯分布：[1] $P(J) \propto e^{-(J-\mu)^2/2}$。具有该独立同分布耦合分布的二维随机键伊辛模型的相图如图 1所示。在低 $T$ 和大 $\mu$ 时，系统为铁磁体（FM）；而在小 $\mu$ 和 $T=0$ 时，系统变为自旋玻璃（SG）。FM 和 SG 都具有爱德华兹-安德森有序，$\lim_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\to\infty}\mathbb{E}[\langle\sigma_{\boldsymbol{x}}\sigma_{\boldsymbol{y}}\rangle^2]>0$。（这里 $\langle\cdots\rangle$ 表示热平均，而 $\mathbb{E}[\cdots]$ 表示无序平均。）FM 具有非零磁化强度，$\lim_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\to\infty}\mathbb{E}[\langle\sigma_{\boldsymbol{x}}\sigma_{\boldsymbol{y}}\rangle]>0$；而在 SG 中——这里仅在 $T=0$ 时——该关联函数呈指数衰减。在顺磁体中，所有关联函数均呈指数衰减。

每个相也由“刚度”表征，其定义为 $F_{dw}$ 周期性边界条件与反周期性边界条件之间的自由能差。指数 $\theta$的定义是：当 $L\to\infty$时，$F_{dw}/L^{\theta}$ 的分布趋于非平凡极限；$\theta$ 是控制该相的 $T=0$ 不动点处 $T$ 的负重整化群本征值。二维铁磁体具有 $\theta_{\mathrm{FM}}=1$，即畴壁自由能与长度成正比。二维自旋玻璃具有 $\theta_{\mathrm{SG}}<0$ [20, 21]：因此，无论 $T>0$为何，自旋玻璃都会转变为顺磁体。

增加 $T$ 或 $1/\mu$ 都会导致铁磁相发生连续相变。弱无序不会改变纯铁磁相变的普适类；边缘无关重整化群流的微妙物理已通过自由费米子场论，以无序的矩 [22–26]进行研究。在低$T$ 温度下，相变的普适类会发生变化，多临界点以下铁磁相—自旋玻璃相转变的临界行为由一个不同的 $T=0$ 不动点[21, 27]控制。在这条低温临界线上，如图1中的粗黑线所示，$F_{dw}\sim L^{\theta_c}$，其中 $\theta_c\approx 0.15$ [21, 28]。

流向 $T=0$ 临界线上的行为意味着它与热稳定的自旋玻璃相存在相似之处（以及有限温度下的$T$ 铁磁相-自旋玻璃相转变）：沿整个低温$T$ 临界线，我们预期存在两个纯吉布斯态。[2] 虽然铁磁关联按幂律衰减——$\mathbb{E}[\langle\sigma_{\boldsymbol{x}}\sigma_{\boldsymbol{y}}\rangle]\sim|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{-\eta}$——但仍存在爱德华兹-安德森有序，使得 $\lim_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\to\infty}\mathbb{E}[\langle\sigma_{\boldsymbol{x}}\sigma_{\boldsymbol{y}}\rangle^2]>0$。据我们所知，此前尚无人提及这一有趣特征——二维低温$T$ 临界行为类似于高维自旋玻璃相。流向 $T=0$ 使得人们可以通过求解基态对这一转变进行数值研究，而这一过程可以非常高效地完成 [36–39]（经验上，所需时间为 $\sim L^{2.2}$，其中 $L\lesssim 10^3$ [39]），详见附录 A。

[1] 常见的“$\pm J$”分布 $P(J)=(1-p)\delta(J-1)+p\delta(J+1)$具有相似的相图，其中 $p$ 发挥着 $1/\mu$的作用，但其基态熵很大，而这在接近 SG [16]的低 $T$ 下十分重要。由于 $\theta_c>0$，该模型在临界性处的长程物理与我们的模型相同。二维中涉及两个以上状态的情形几乎已被严格结果 [29–32], 和大规模数值计算 [33–35]排除。[2]

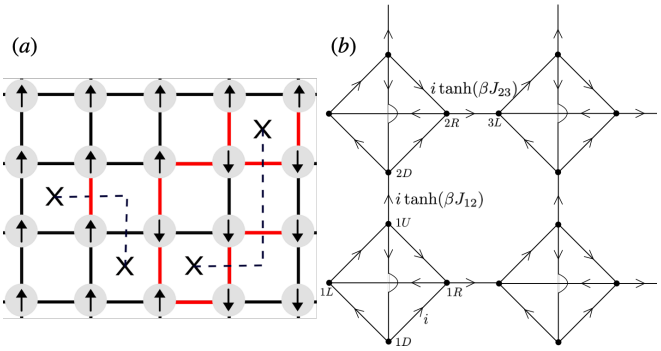


图 2. 经典表示与量子表示。(a) 一个自旋构型，以及对偶晶格上与之对应的一组未满足弦（虚线）。这些弦穿过不满足键，并终止于受挫晶格元（叉号）处。反铁磁键以红色表示。(b) 四个单胞，对应晶格上的四个伊辛自旋；反对称纯虚数$\mathbf{H}$ 定义在该晶格上。四站点的“城市” $1\{R,U,D,L\}$ 环绕自旋 1，依此类推。图中展示了$\mathbf{H}$ 的元素，其方向决定符号：例如，$H_{1D,1R}=-H_{1R,1D}=i$（所有城市内部元素均沿箭头方向为 $i$），以及$H_{1U,2D}=-H_{2D,1U}=i\tanh(\beta J_{12})$。

费米子表示中的低温$T$ 转变的性质长期以来一直是个悬而未决的问题。我们证明，使得人们能够在两种表示中理解这一转变的关键特征是：伊辛表示中流向 $T=0$ 的过程，对应于费米子表示中流向无限无序的过程。谱中$\mathbf{H}$ 在临界点处的能隙体现了这种向无限无序的流动，该能隙对系统尺寸呈拉伸指数依赖：$\log(\min_a|\varepsilon_a|)^{-1}\sim L^{\psi}$，其中 $\psi=\theta_c$。我们利用强无序重整化群建立了这一对应关系；当 $T\to 0$ 时，该方法是精确的，而对于流向 $T=0$ 的过程则渐近精确。在量子表示中，该重整化群通过一系列有效矩阵元的层级结构，迭代地对$\mathbf{H}$进行对角化；当 $T$ 较小时（无论是裸参数还是重整化参数），这些矩阵元的对数会呈参数级的宽分布。在经典一侧，这一重整化群等价于构造一系列伊辛哈密顿量及其基态，逐步加入阻挫，直至得到目标哈密顿量 $\mathcal{H}$。对于随机经典系统，此类具体、渐近受挫且针对特定实现的重整化群方法（除一维 [40]外）尚未实现；[3] 以往的重整化群方法处理的都是对耦合分布的近似或截断 [20, 45–51]。

阻挫匹配与重整化群—— 经典图景与量子图景之间的桥梁，最好在另一个空间中理解：受挫元胞的匹配。下面对此进行描述。正方晶格伊辛模型的配分函数在翻转以下自旋周围四条键的符号时保持不变：

[3] 关于与 $T=0$不动点相关的热动力学中激活标度的无限无序视角，参见文献 [41–43]；这与 Rokhsar-Kivelson 哈密顿量 [44]的谱的无限无序标度有关。

这四条键汇聚于一个自旋：这些小型规范变换 会改变负键的位置 [52, 53] 但不会改变受挫元胞——即四条键乘积为负的正方形 $J_{ij}J_{jk}J_{kl}J_{li} < 0$——它们与键的大小 $\{|J_{ij}|\}$、以及边界条件一起，构成了无序实现的规范不变描述。给定 $\{J_{ij}\}$，任意自旋构型$\{\sigma_i\}$ 都对应于一组不满足键： $\langle ij\rangle$ 其中$J_{ij}\sigma_i\sigma_j < 0$。受挫（或不受挫）元胞必须分别包含奇数（或偶数）条不满足键。因此，不满足键会在对偶晶格上形成弦，并终止于受挫元胞（此外还会形成一些环，这些环可通过翻转所有被其包围的自旋来降低能量，从而被移除）。

寻找伊辛基态等同于最小化不满足键的总权重（除附录A中讨论的边界条件外），从而最小化将对偶晶格上的受挫元胞配对起来（“匹配”）的弦的总权重 [36, 52], ，其中一条弦的权重是其所穿过的 $|J_{ij}|$ 之和。对于每一对元胞 $p$， $q \in \mathcal{P}$ （其中 $\mathcal{P}$ 是所有受挫元胞构成的集合），我们将 $\zeta_{pq}$ 定义为：在所有连接 $p$ 与 $q$的路径中，取该路径在对偶晶格上穿过的 $|J_{ij}|$ 之和的最小值。基态对应于 $\mathcal{M}$ 中元胞的完美（即完全）匹配 $\mathcal{P}$，使得总和 $\sum_{\{p,q\}\in\mathcal{M}}\zeta_{pq}$最小。图 2a 展示了一个基态示例，其中相应的不满足弦以虚线表示。

我们的重整化群与 Motrunich、Damle 和 Huse 的一种重整化群密切相关 [54]，，它通过一系列哈密顿量 $\{\mathcal{H}_n\}$ 构造 $\mathcal{H}$ 的基态，其中 $n \in\{0, 1, \ldots, N_f/2\}$，而 $\mathcal{H}_n$ 包含 $2n$ 个受挫元胞， $\mathcal{H}_{N_f/2} \equiv \mathcal{H}$ 则包含全部 $N_f$个受挫元胞。每个 $\mathcal{H}_n$ 的耦合 $\{|J_{ij}|\}$ 大小相同，但阻挫会随着 $n$逐渐建立；过程从 $\mathcal{H}_0$ 开始，它是耦合为 $|J_{ij}|$的铁磁体。

称 $\mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{P}$ 为 $\mathcal{H}_n$ 中的受挫晶格元，并将$2E(\mathcal{P})$ 定义为含受挫晶格元 $\mathcal{P}$ 的伊辛基态能量减去无受挫基态能量， $-\sum_{\langle ij\rangle}|J_{ij}|$。在重整化群的每一步中，我们加入两个新的受挫晶格元 $p_n$， $q_n \in \mathcal{P}$ 使得 $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n-1} \cup \{p_n, q_n\}$。选择新的面元，使旧模型到新模型的基态能量增量最小，即 $\{p_n, q_n\}$ =argmin $_{\{p,q\}\subseteq\mathcal{P}\setminus\mathcal{P}_{n-1}}[E(\mathcal{P}_{n-1}\cup\{p,q\}) - E(\mathcal{P}_{n-1})]$。将这些最优增量定义为 $r_n = E(\mathcal{P}_n) - E(\mathcal{P}_{n-1})$，使得模型 $E_{0,\ N}$ 的基态能量 $\mathcal{H}_N$对于任意 $N$均由 $E_0$ 给出，$_N + \sum_{\langle ij\rangle}|J_{ij}| = 2\sum_{n=1}^{N} r_n = 2\sum_{\{p,q\}\in\mathcal{M}_N}\zeta_{pq}$，其中后一项求和遍历 $p$， $q$在 $\mathcal{H}_N$ 的基态中匹配的项。我们在附录 C中证明，增量随重整化群时间增加：$r_n < r_{n+1}$。

当步骤 $n$ 执行时，基态中 $J_{ij}\sigma_i\sigma_j$ 的符号（在未满足弦两侧为负）会沿着某条连接 $p_n$ 与 $q_n$的路径翻转。图 3 展示了一个重整化群步骤的示例。首先，重整化群通常会添入

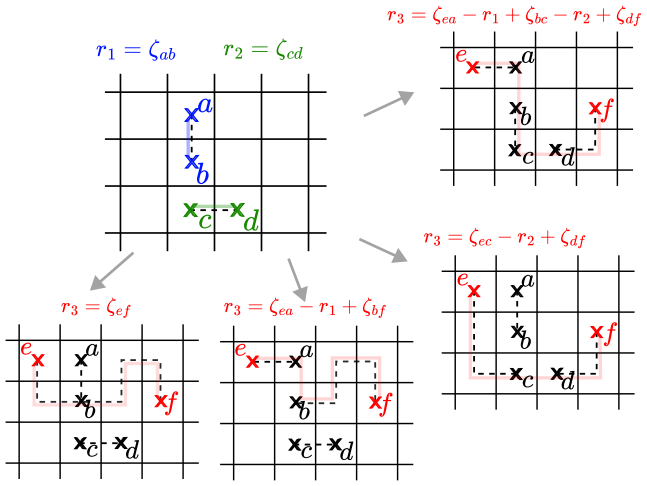


图 3. 通过逐步加入阻挫构建基态。受挫元胞以字母标记。虚线穿过连接受挫元胞的不满足键串。$\zeta_{pq}$ 是基态中直接匹配元胞 $p$ 和 $q$ 的代价，计算方法为沿元胞之间代价最低路径上的$J$的绝对值之和。在此例中，前两个重整化群步骤 $r_1$ 和 $r_2$分别通过沿左上方所示的蓝色和绿色路径连接元胞 $\{a, b\}$ 和 $\{c, d\}$ 形成。当加入受挫元胞 $e$ 和 $f$ 时，图中展示了多种路径选择（红色），沿这些路径进行的匹配会翻转候选基态；黑色虚线穿过由此产生的新不满足键构型。在图示的候选路径中，具有 $r_3$ 的 *smallest*值的红色路径，将在此阶段的重整化群基态中被选中。

一对彼此接近的受挫元胞（因为连接它们的路径权重最小）。随着重整化群的推进，剩下待匹配的元胞间距越来越大，而新的元胞对则通过沿更长路径翻转小尺度匹配而加入。一个自然的猜想是，在无限系统中，相距 $> \mathcal{O}(L)$ 的区域内，尺度为 $L$ 的重整化群步骤近似独立。因此，它们的标度性质应与尺寸为 $L$ 的系统中（接近）最后几个重整化群步骤的标度性质相似；我们目前将重点讨论后者的性质。

我们的重整化群过程与通过连续翻转自旋组合以降低能量、从而求得固定 $\mathcal{H}$ 的基态截然不同。相反，随着重整化群的推进，我们会改变哈密顿量 ，逐步在更大的尺度上引入阻挫，并在每一步中沿着一条尽可能少地增加阻挫所致能量代价的路径，求得精确基态。虽然最终我们会构造出完整哈密顿量 $\mathcal{H}$ 的基态，但在重整化群的早期步骤中，这些匹配并不对应于 $\mathcal{H}$ 的自旋构型：重整化群是在一个不同的空间中运作，只有当整个过程完成时，该空间才与物理自旋空间重合。

以数值方式执行这一思想实验重整化群的所有步骤是不可行的——按朴素方法所需时间甚至远大于

$\mathcal{O}(L^8)$。不过，重整化群最后一步所产生的能量增量可以高效计算（见附录 C）。这$r_{max} \equiv r_{N_f/2}$ 为经典畴壁和量子谱都提供了重要信息。容易证明（见附录C），$r_{max}$ 是通过对 $\mathcal{H}$中的两个面元解除受挫而使匹配能量降低的最大幅度：$r_{max} = \max_{p,\ q\in\mathcal{P}}[E(\mathcal{P}) - E(\mathcal{P}\setminus\{p,q\})]$,；而最优移除为 $\{p_{N_f/2}, q_{N_f/2}\}$，即重整化群中最后加入的受挫元胞对。我们将这对面元称为匹配的优化缺陷。

**量子哈密顿量的谱**——现在我们转向二维纯虚量子哈密顿量$\mathbf{H}$，图2b，其谱通过式（1）给出伊辛模型的配分函数 [3, 7, 8, 18, 19]。我们证明，相同的序列$\{r_n\}$ 也可由量子问题在 $T \to 0$ 极限下的迭代对角化过程得到；因此，最后一步给出谱中的最小能隙。

在 $T = 0$时，$\mathbf{H}$ 中所有跃迁项均为 $\pm i$ （因为 $\lim_{\beta\to\infty}\tanh\beta J_{ij} = \operatorname{sgn} J_{ij}$）。可以证明，此时 $\mathbf{H}$ 有 $N_f$ 个零能量特征向量 [7, 8], ，并且可以选取一组基，使得每个受挫伊辛元胞中都局域有一个零能模。所有$4L^2 - N_f$ 其他本征模的能量均为 $\mathcal{O}(1)$，如 $T \to 0$ 所示。当 $T$ 从零开始增大时，零模分裂成一个“杂质带”，其能级为 $\{\pm\varepsilon_n\}$。（指标 $n$ 从 1 到 $N_f/2$，这与式（1）中的 $\varepsilon_a$ 不同；在式（1）中，$a \in \{1, \ldots, 2L^2\}$ 标记 $\mathbf{H}$ 的整个谱。）为了使自由能的 $T \to 0$ 极限合理，我们必须有 $\pm\varepsilon_n \sim \pm e^{-2\beta R_n}$；这定义了序列$\{R_n\}$，其排列满足 $R_n < R_{n+1}$。低能量子态的性质，以及由此通过式（1）得到的 $T \to 0$ 伊辛热力学，仅取决于 $\{R_n\}$，因此可以忽略所有乘在指数项前的因子。因此，伊辛模型的基态能量为$E_0 = -\sum_{\langle ij\rangle}|J_{ij}| + 2\sum_{n=1}^{N_f/2} R_n$。

当 $T$，$J$ 较小时，$\mathbf{H}$ 中依赖于它们的元素会相对于其 $T = 0$ 值产生微扰，量级为$|\operatorname{sgn} J_{ij} - \tanh(\beta J_{ij})| \sim e^{-2\beta|J_{ij}|}$。有效哈密顿量通过非受挫元胞中的虚跃迁连接成对的受挫晶格元，因而包含许多这样的矩阵元：$\mathbf{H}(T) - \mathbf{H}(0)$。占主导地位的项 直接连接 $p$ 和 $q$，可用 $\zeta_{pq}$ 表示；如前所述，$\zeta_{pq}$ 是最小权重路径在 $p$ 和 $q$ 之间经过的$|J_{ij}|$ 之和。因此，在大 $\beta$ 极限下，$\mathbf{H}$ 的杂质带谱由具有元素 $\Upsilon_{pq} = -\Upsilon_{qp} = ie^{-2\beta\zeta_{pq}}$ 的 $N_f \times N_f$反对称矩阵 $\boldsymbol{\Upsilon}$ 的谱给出。（符号的取值以复杂的方式取决于元胞的位置，但在大 $\beta$ 时无关紧要。）

考虑一系列有效哈密顿量 $\{\boldsymbol{\Upsilon}_n\}$，对应于伊辛哈密顿量 $\{\mathcal{H}_n\}$，使得$\boldsymbol{\Upsilon}_n$ 是 $2n\times 2n$ 矩阵，其中包含所有配对 $p$，$q \in \mathcal{P}_n$的元素 $\sim \pm ie^{-2\beta\zeta_{pq}}$。经典重整化群与量子过程之间的联系在于序列$\{r_n\}$ 与 $\{R_n\}$ 是相同的，其中第一个序列来自将阻挫逐步加入伊辛哈密顿量，而第二个序列则来自量子能量的对数。对于 $\beta \to \infty$，杂质带波函数的正负能量对局域在元格 $p_n$，$q_n$上。我们证明经典序列与量子序列 $\{r_n\}$ 与 $\{R_n\}$ 的等价性，归纳证明见附录D；粗略论证如下。

从 $\boldsymbol{\Upsilon}_{n-1}$ 到 $\boldsymbol{\Upsilon}_n$ 时，我们添加两行和两列，其中包含连接面元的矩阵元 $p_n$ 和 $q_n$ （即匹配重整化群在这一步添加的相同元胞）与 $\mathcal{P}_{n-1}$中的元胞之间的矩阵元。定义在 $2\times 2$ 空间上的有效 $p_n$哈密顿量 $q_n$，由所有经过 $\boldsymbol{\Upsilon}_{n-1}$的虚跃迁贡献构成；在微扰理论中，跃迁过程中矩阵元交替作为分子和 $e^{-2\beta\zeta}$ 矩阵元作为分母$e^{-2\beta r}$。每一项都对应一种可能的匹配变化（图 3中的红线）。因此，$\zeta$的交错和以及先前 $r$的交错和，对应伊辛基态能量可能的增量。当 $\beta \to \infty$时，最大的此类交错乘积占主导地位，它是 $e^{-2\beta r_n}$：这对应于伊辛表示中的最小能量增量。[4]

现在我们讨论临界线及两个相中的标度行为，首先关注重整化群最后一步所包含的信息。量子谱中的最小能级劈裂 $\varepsilon_{min} \equiv \varepsilon_{N_f/2}$与优化缺陷能 $r_{max} \equiv r_{N_f/2}$ 之间的关系很简单：$r_{max} = \lim_{\beta\to\infty}(\frac{1}{2\beta}\log\varepsilon_{min}^{-1})$。我们使用附录 C 中的快速算法，研究量子问题中 $r_{max}$的分布以及 $\log\varepsilon_{min}$ 的分布如何随 $L$变化：结果见图 4。

（需要强调的是，我们在不对$\mathbf{H}$ 进行任何对角化的情况下，推导出了它的谱性质。对角化计算代价高昂——尤其是在低 $T$ 下，指数小的特征值要求很高的精度——而且更重要的是，从概念上说，它不适用于临界点：我们转而直接研究 $T \to 0$ 极限，因为物理特性体现在对数量子能量中。）

临界点。— 在临界点 $\mu = \mu_c$，$r_{max}$ 分布的均值和宽度都比$\log L$增长得更快。由于大 $\beta$时 $\varepsilon_{min} \sim e^{-2\beta r_{max}}$，因此在 $T \to 0$ 极限下，临界$\mathbf{H}$ 的谱中存在无限随机性奇异性。[5] 现在我们论证标度关系为 $r_{max} \sim L^{\psi}$，其中 $\psi = \theta_c$是铁磁-自旋玻璃临界点处的刚度指数。

在无限晶格基态中，考虑受限的最小能量翻转，例如要求其包含一个给定大小的-$L$ 盒子，同时在盒子外仍处于大小为-$2L$ 的盒子内。这是尺度为 的液滴 的一种定义。人们通常假设尺度为-$L$ 和 $2L$的液滴近似统计独立，并且与两个区域相关的尺度为-$L$的液滴只有在彼此至少相隔

[4]当 $\{J_{ij}\}$ 都等于 $\pm 1$时，Blackman 和 Poulter [7–9]讨论过一种类似的简并微扰理论，其中 $\{r_n\}$ 为对应于微扰理论各阶的整数。[5] 文献 [9] 中曾提及临界性处 $\{R_n\}$ 分布的展宽。

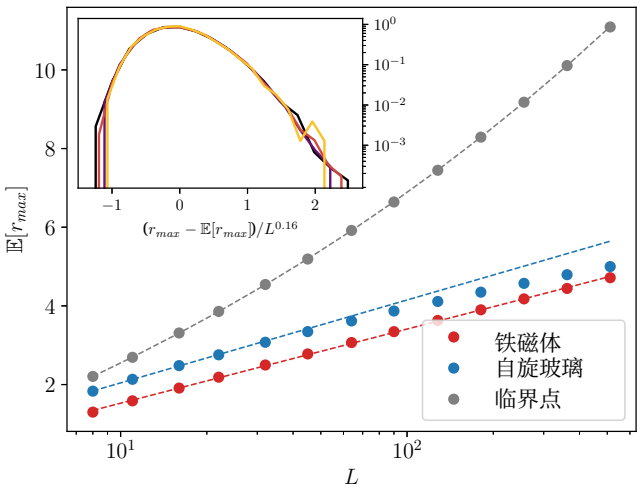


图 4. 优化缺陷能 $r_{max}$随 $L$的标度。在自旋玻璃相（$\mu = 0$）中，$r_{max}$的增长速度慢于 log $L$。在铁磁体相（$\mu = 1.5$）中，$r_{max}$随 log $L$增长。（蓝色和红色虚线分别为 $\sim \log L$。）在临界点（$\mu = 1.0307$），$r_{max}$按 $L^{0.16}$ 增长，并带有一个常数标度修正（黑色虚线是对灰色数据点序列的拟合）。误差条小于标记尺寸。插图展示了临界状态下，对于若干个取值介于 64 和 512 之间的 $L$，$r_{max}$减去其均值后的标度化分布。平均值取自至少 $3 \times 10^4$ 个无序实现。

数量级为-$L$ 时才相互独立。在临界点，我们预期液滴能量的分布按 $L^{\theta_c}$ 标度变化。关键在于，若将大小为-$L$ 的液滴划分为数量为一的部分边界，那么每个部分边界都会贡献一个按 $L^{\theta_c}$ 标度变化的能量，但其前因子为负的概率是数量级为一的。在尺度$L$ 上，优化缺陷于是沿着类似液滴表面的路径，从一个受挫晶格元通往另一个；若条件允许，也会沿非受挫路径前进，从而在每个尺度上最大限度地消除阻挫。由此得到跨尺度的相干求和：$\mathbb{E}[r_{max}] \sim \sum_{n=0}^{\log_2 L} c_n (2^n)^{\theta_c}$。（这种跨尺度求和的量在临界现象中很常见，例如通常临界点处的自由能。）该求和由数量级为-$L^{\theta_c}$ 的项主导，但较小尺度会对标度关系贡献一个数量级为一的修正（推测是主导修正）。

对 $\mathbb{E}[r_{max}] = A(L^{\theta_c} + BL^{\phi})$ 的拟合（$\theta_c = 0.15$）得到 $B < 0$ 和 $\phi \approx 0.01$（误差至少与均值一样大），这与标度的常数主导修正一致。另一种形式为 $\mathbb{E}[r_{max}] = a(L^{\psi} - b)$ 的拟合（同样包含三个参数）得到 $a = 6.6 \pm 0.1$ $b = 1.065 \pm 0.005$ 、以及，$\psi = 0.16 \pm 0.01$ 与误差条范围内的结果一致。上述尺度求和中 $\mathrm{sgn}(c_n)$ 对 $n$ 的依赖并不平凡（假设所有幅度 $\mathcal{O}(1)$）：我们预期为 $c_{\log_2 L} > 0$，因为优化必定由尺度 $L$ 主导；但也可能是 $c_0 < 0$，因为在尺度 1 处，优化缺陷可能更容易产生挫折而非解除挫折，这是由于“裸”耦合分布具有 $\mathbb{E}[J] > 0$；$c_0$ 的符号当然是非普适的

并且可以通过耦合分布进行调节。请注意，人们还预期存在 $o(1)$ 修正，例如来自（$L$ +cst.）$^{\theta_c} \approx L^{\theta_c} + \mathcal{O}(L^{\theta_c - 1})$ 的修正；对于较小的 $\theta_c$，这种修正要小得多，并且还可能存在非平凡的标度修正。

临界点的无限无序特性反映在 $r_{max}$的分布中。图4 的插图展示了（$r_{max} - \mathbb{E}[r_{max}]$）$/L^{\psi=0.16}$的分布，该分布在 $L$ 范围内呈现标度塌缩（这消除了均值中的常数修正；方差的常数部分预计较小，这大致是因为跨多个尺度的优化会将结果推向分布的尾部）。

*RG* 在临界性处的渐近有效性。—我们的直接分析针对谱（以及经典基态）在大-$\beta$ 极限下的情况。在此极限下，$\varepsilon_{min}$ 的分布在对数尺度上相对于 $\beta$ 而言极为宽广，且对所有$L$ 皆如此，因为 $\varepsilon_{min} \sim e^{-2\beta r_{max}}$。相应地，只要先取 $T \to 0$ 极限，再取 $L \to \infty$极限，构造基态的 RG 就始终是可控的。然而，在临界性处，$r_{max}$ 的分布会随 $L$无限展宽。这意味着 RG 在渐近意义上正确：沿着整条低-$T$ 临界线，在大尺度下都会出现无限无序行为。原则上，可以通过积分掉所有其他模，精确构造由可能的零模张成的基上的一个矩阵 $\Upsilon$（因为我们有自由费米子）。当 $\beta < \infty$时，$\Upsilon$ 的元素分布并不宽广到具有参数级别的程度。不过，$\Upsilon$ 的迭代对角化重整化群仍可运行，尽管它不再与伊辛吉布斯态相关联。如果在某个 $\mu \in (0, \infty)$处，$\Upsilon$中尺度 $L$ 下各元素对数的分布随$L$而展宽——根据 $T = 0$不动点的稳定性，我们预期确实如此——那么即便 RG 在短尺度上会产生误差，它最终仍会变得可控。因此，临界性处的大 RG 尺度起到了大 $\beta$的作用。

铁磁体。—在铁磁相深处，负键十分罕见，因此通常会形成紧密束缚的受挫元胞对／簇。重整化群最初会将这些元胞配对，因此在重整化群接近结束时，唯一未配对的元胞，是由长串负键产生的、彼此相距很远的元胞对；这类元胞对出现的概率随负键串的长度呈指数衰减。因此 $\mathbb{E}[r_{max}] \sim \log L$。相应地，量子能量随长度尺度呈幂律下降，$\varepsilon_{min} \sim L^{-z}$，这是指数连续变化的“格里菲斯相”的特征 $z$。文献 [14, 54]讨论了这一相。（参见附录E，其中评论了一维问题；该问题在很大程度上具有相同的物理特性。）

铁磁相的流向 $T = 0$ 可用重整化群流线来理解：在尺度 $L \gg 1$ 下，$\zeta$的分布分裂为两类：(1) 稀有的剩余受挫元胞与其剩余最近邻之间的典型距离按 log $L$ 缩放，并决定 $r_{max}$；而(2) 分隔这类元胞对的典型距离按 $L$缩放，使畴壁自由能与 $L$成正比。前一类中 $\Upsilon$ 的元素渐近地大于后一类，因此在铁磁相格里菲斯相 [6]中，重整化群仍受控。

自旋玻璃/顺磁体。—— 在自旋玻璃相深处，受挫元胞对几乎不聚集，因此具有随长度线性增长的能量增益的稀有缺陷，其稀有程度甚至超过指数级。事实上，我们观察到 $r_{max} = o(\log L)$。随 $L$ 的微弱增长，或许源于缺陷端点在多项式数量的位置上进行小尺度优化；由于 $\theta_{\rm SG} < 0$，来自大尺度的贡献会随着 $L \to \infty$ 消失。

近临界顺磁体的低-$T$ 流动（$\mu = \mu_c - \delta$）很有意思：在与临界点 $\xi \sim \delta^{-\nu}$ 相关联的关联长度尺度上，裸温度 $T$ 已重整化至 $T\delta^{\nu\theta_c}$。随后，在偏离自旋玻璃固定点的流动支配下，它开始增长，并在长度尺度 $(T\delta^{\nu\theta_c})^{-1/|\theta_{\rm SG}|}$ 上达到数量级为一的值。预计我们的重整化群在这一尺度以内仍受控；而到达该尺度时，它预示自身将不再适用，因为分布不再具有参数级宽度。

猜想。——人们不禁猜想，诸如有限-$T$ 自旋玻璃这类由经典零温重整化群不动点控制的随机系统，与无限无序——无序不动点之间，是否存在普遍联系——当然，这种联系存在于某个恰当的“空间”中。我们能否将重整化群中明确构造的、不同尺度上的优化缺陷作为基，建立一种与液滴理论互补的唯象理论 [46, 55]？重整化群流线对耦合/温度微小变化的敏感性，是否与自旋玻璃中的无序/温度混沌有关？能否为其他 $T = 0$ 不动点，尤其是三维自旋玻璃，构建此类具体且渐近可控的重整化群？如果可以，多态情景能否针对这些无限无序固定点的特征提出精确猜想？

致谢。— 我们感谢斯坦福 Sherlock 计算集群提供计算资源。我们感谢 Kedar Damle 的讨论与通信，也感谢 Nicholas O’Dea 对手稿提出细致的意见。本研究部分得到了美国国家科学基金会资助：Grant DMR-2000987（AP）和 PHY-2210386（DSF）；此外，美国国家科学基金会（DMS-2235451）和 Simons 基金会（MPS-NITMB-00005320）向 NSF-Simons 国家生物学理论与数学研究所（AM）提供的资助也支持了本研究。

[1] L. Onsager，《物理评论》65，117（1944）。[2] T. D. Schultz、D. C. Mattis 和 E. H. Lieb，《现代物理评论》36，856（1964）。[3] B. M. McCoy 和 T. T. Wu，*The two-dimensional Ising model* 1973（哈佛大学出版社，）。[4] R. J. Baxter，*Exactly solved models in statistical mechanics*（Elsevier，2016）。[5] B. M. McCoy 和 T. T. Wu，《物理评论》176，631（1968）。[6] D. S. Fisher，《物理评论B》51，6411（1995）。[7] J. A. Blackman，《物理评论B》26，4987（1982）。[8] J. A. Blackman 和 J. Poulter，《物理评论B》44，4374（1991）。[9] J. Poulter 和 J. A. Blackman，《物理学杂志C：固体物理》19，569（1986）。[10] S. Cho 和 M. P. A. Fisher，《物理评论B》55，1025（1997）。[11] F. Merz 和 J. T. Chalker，《物理评论B》65，054425（2002）。[12] N. Read 和 A. W. Ludwig，《物理评论B》63，024404（2000）。[13] I. A. Gruzberg、N. Read 和 A. W. Ludwig，《物理评论B》63，104422（2001）。[14] A. Mildenberger、F. Evers、R. Narayanan、A. D. Mirlin 和 K. Damle，《物理评论B》73，121301（2006）。[15] A. Mildenberger、F. Evers、A. D. Mirlin 和 J. T. Chalker，《物理评论B》75，245321（2007）。[16] C. K. Thomas、D. A. Huse 和 A. A. Middleton，《物理评论快报》107，047203（2011）。[17] C. K. Thomas 和 H. G. Katzgraber，《物理评论E》84，040101 2011（）。[18] C. A. Hurst 和 H. S. Green，《化学物理学杂志》33，1059（1960）。[19] P. W. Kasteleyn，《数学物理学杂志》4，287（1963）。[20] A. J. Bray 和 M. A. Moore，载于 *Lecture Notes in Physics*，*Berlin Springer Verlag*，第275卷，由 J. L. van Hemmen 和 I. Morgenstern 编（1987），第121页。[21] W. L. McMillan，《物理评论B》29，4026（1984）。[22] V. S. Dotsenko 和 V. S. Dotsenko，《物理学进展》32，129（1983）。[23] R. Shankar，《物理评论快报》58，2466（1987）。[24] B. N. Shalaev，《物理学报告》237，129（1994）。[25] A. W. W. Ludwig，《核物理B》330，639（1990）。[26] O. Narayan 和 D. S. Fisher，《物理评论B》42，7869（1990）。[27] P. Le Doussal 和 A. B. Harris，《物理评论快报》61，625（1988）。[28] O. Melchert 和 A. K. Hartmann，《物理评论B》79，184402（2009）。[29] C. M. Newman 和 D. L. Stein，《物理评论快报》84，3966（2000）。[30] C. Newman 和 D. Stein，《数学物理通讯》224，205（2001）。[31] L.-P. Arguin、M. Damron、C. M. Newman 和 D. L. Stein，《数学物理通讯》300，641（2010）。[32] C. M. Newman 和 D. L. Stein，arXiv预印本，arXiv:2510.27507（2025）。[33] A. A. Middleton，《物理评论快报》83，1672（1999）。[34] M. Palassini 和 A. P. Young，《物理评论B》60，R9919（1999）。[35] A. K. Hartmann 和 A. P. Young，《物理评论E》108，024142（2023）。[36] L. Bieche、J. P. Uhry、R. Maynard 和 R. Rammal，《物理学杂志A：数学与一般》13，2553（1980）。[37] F. Barahona，《物理学杂志A：数学与一般》15，3241（1982）。[38] C. K. Thomas 和 A. A. Middleton，《物理评论B》76，220406（2007）。

[39] H. Khoshbakht 和 M. Weigel, 《物理评论B》97, 064410（2018）。[40] F. Igl´oi 和 C. Monthus, 《物理学报告》412，277（2005）。[41] C. Monthus 和 T. Garel, 《物理学杂志A：数学与一般》41，255002（2008）。[42] C. Monthus 和 T. Garel, 《统计力学杂志：理论与实验》2008, 07002（2008）。[43] C. Monthus 和 T. Garel, 《物理学杂志A：数学与一般》41，375005（2008）。[44] C. L. Henley, 《物理学杂志：凝聚态》16，S891（2004）。[45] W. L. McMillan, 《物理学杂志C：固体物理》17，3179（1984）。[46] D. S. Fisher 和 D. A. Huse, 《物理评论B》38，386（1988）。[47] D. S. Fisher, 《物理评论快报》56，1964（1986）。[48] K. Joerg Wiese 和 P. Le Doussal，arXiv预印本, cond-mat/0611346（2006）。[49] K. J. Wiese, 《物理学进展报告》85，086502（2022）。[50] G. Tarjus 和 M. Tissier, 《欧洲物理学杂志B》93, 50 (2020). [51] J. Bricmont 和 A. Kupiainen, 《数学物理通讯》116, 539 (1988). [52] G. Toulouse, 《通讯物理》2, 115 (1977). [53] E. Fradkin, B. A. Huberman 和 S. H. Shenker, 《物理评论B》18, 4789 (1978). [54] O. Motrunich, K. Damle 和 D. A. Huse, 《物理评论B》65, 064206 (2002). [55] D. S. Fisher 和 D. A. Huse, 《物理评论B》38, 373 (1988). [56] J. Edmonds, 《加拿大数学杂志》17, 449 467 1965– ( ). [57] V. Kolmogorov, Mathematical Programming Computation 1, 43 (2009). [58] C. Amoruso 和 A. K. Hartmann, 《物理评论B》70, 134425 2004( ). [59] M. Picco, A. Honecker 和 P. Pujol, 《统计力学杂志：理论与实验》2006, 09006 (2006). [60] D. A. Huse, C. L. Henley 和 D. S. Fisher, 《物理评论快报》55, 2924 (1985). [61] F. J. Dyson, 《物理评论》92, 1331 (1953).

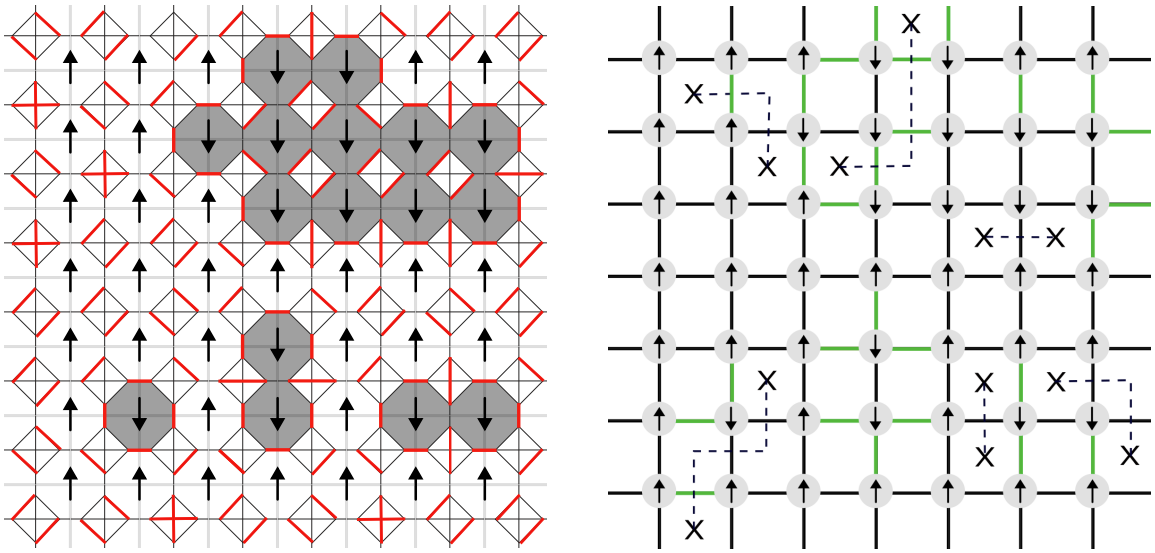

图 5. 左：对偶卡斯特林晶格及其上的红色完美匹配，该匹配映射到图示的自旋构型。每个四位点团（Kasteleyn 城市）对应一个面元。灰色区域内的自旋相对于均匀态发生了翻转；这些区域被畴壁包围。畴壁是对偶晶格上的闭合多边形，同时也定义了承载二聚体的城际键。右：原始 Ising 格（实线）。绿色键为反铁磁键，其位置定义了受挫元胞（叉号）的规范不变位置。同一状态也可用不满足键串（虚线）表示；在基态中，这些键串构成受挫元胞的最小权重完美匹配。

## 附录 A：Kasteleyn 匹配

在本附录中，我们将说明伊辛基态问题与可高效求解的组合优化问题——最小权完美匹配（MWPM）——之间的映射；我们在数值计算中使用了这一映射 [38]。受挫元胞的匹配（我们将其称为 Toulouse 匹配，并将在下文给出更具体的定义）曾在正文中作非正式讨论；然而，我们首先要讨论的 MWPM 映射与之不同。

首先，为了便于在本文及后续附录中讨论，我们先精确定义一些术语。我们将研究具有顶点 $\mathcal{V}$ 和边 $\mathcal{E}$ 的有限无向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$。边的权重由函数$w : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$给出。图 $\mathcal{G}$ 上的完美匹配 是边的一个子集 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$，使得对于每个 $v \in \mathcal{V}$，恰有一个与之相邻的 $e \in \mathcal{M}$ $v$。而部分匹配是边的一个子集 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$，使得对于每个 $v \in \mathcal{V}$，至多有一个与之相邻的$e \in \mathcal{M}$ 。因此，部分匹配和完美匹配分别是 $\mathcal{G}$ 的不完美二聚体覆盖和完美二聚体覆盖。我们常会宽泛地说匹配 $\mathcal{M}$中的顶点：这指的是与匹配 $\mathcal{M}$中的某条边相邻的顶点 $v \in \mathcal{V}$。对于完美匹配或部分匹配，我们将匹配 $\mathcal{W}(\mathcal{M})$ 的权重定义为 $= \sum_{e\in\mathcal{M}} w(e)$。 $\mathcal{G}$ 的 MWPM 权重为 $E(\mathcal{G}) = \min_{\mathcal{M}} \mathcal{W}(\mathcal{M})$，其中 MWPM 为 $\mathcal{M}_0 \in \operatorname{argmin}_{\mathcal{M}} \mathcal{W}(\mathcal{M})$（MWPM 可能不唯一）。

最小权完美匹配是一类研究充分的优化问题，针对一般图已有高效的多项式时间算法 [56, 57]。与方格晶格伊辛模型对应的最小权完美匹配问题所处的晶格 $\mathcal{G}$ 与量子跃迁问题$\mathbf{H}$ 所处的晶格具有完全相同的结构（图2），不过现在每个四站点城市都对应一个伊辛面元，即对偶晶格上的一个站点。城内权重全为零，而穿过伊辛键 $ij$ 的城际边权重为 $J_{ij}$——正或负。我们将这个图 $\mathcal{G}_K$称为对偶卡斯特林晶格 [19]；见图5。

晶格的相似性并非巧合：伊辛配分函数既可以写成闭合多边形的求和 $L$ 在原方格晶格上，$\sum_L \prod_{ij\in L} \tanh(\beta J_{ij})$ ，或在对偶晶格上， $\sum_{\tilde{L}} \prod_{ij\in\tilde{L}} e^{-2\beta J_{ij}}$。虽然式（1）中由$\mathbf{H}$ 的谱得到的表达式等价于前一种展开 [3, 18, 19], 后者则是 Kramers-Wannier 对偶（人们同样可以将 $\mathbf{H}$ 的非平凡元取为 $\pm ie^{-2\beta J_{ij}}$），并有助于确定使能量最小化的自旋构型 [38] 因为在低温下主导该展开的闭合多边形构型，正是相对于全向上态被翻转的自旋簇的轮廓

在基态中。

每个完美匹配 $\mathcal{M}$ 的 $\mathcal{G}_K$ 都对应于一对仅相差全局翻转的伊辛自旋构型 $\pm\sigma_i^{\mathcal{M}}$，使得 $\sigma^{\mathcal{M}}$ 的畴壁中的每条键（即每条 $ij$ 满足 $\sigma_i^{\mathcal{M}}\sigma_j^{\mathcal{M}} = -1$的键）都与 $\mathcal{M}$中的一条边相交。该构造如图5所示，其中红色的边已被匹配。对偶伊辛晶格上的闭合多边形是自旋构型中翻转簇的轮廓。这些闭合多边形可以“补全”为Kasteleyn晶格上的一个完美匹配；除去那些没有外部二聚体与之相连的城市上的重排后，该完美匹配是唯一的——每个这样的城市都会为最小权完美匹配的简并贡献一个3的因子。 $\mathcal{M}$ 的总权重等于等价构型相对于全向上构型的伊辛能量， $\mathcal{W}(\mathcal{M}) = -\sum_{\langle ij\rangle} J_{ij}(\sigma_i^{\mathcal{M}}\sigma_j^{\mathcal{M}} - 1)$。因此，寻找伊辛基态等价于在适当加权的对偶Kasteleyn晶格上寻找一个最小权完美匹配$\mathcal{G}_K$。

现在我们必须考虑边界条件。对于平面伊辛图——包括采用开放边界条件的图，也包括圆柱，因为圆柱可以在平面上“卷绕”——如上所述，当 Kasteleyn 晶格在开放边界处终止，且最后一排自旋外侧有一排城市时，最小权完美匹配便可确定基态。另一方面，环面上的最小权完美匹配确定的是“扩展基态”，其定义为：在两个方向上周期性/反周期性边界条件的 4 ($= 2^2$) 种选择中，能量最低的构型 [38]。只有在这四种可能的边界条件中能量最优的选择下，扩展基态才是有效的自旋构型。也就是说，通常必须插入适当的非可缩畴壁（通过翻转适当方向上一条键路径的符号），才能使环面上的最小权完美匹配对应于有效的自旋构型。给定环面上的一个最小权完美匹配，可以通过分别统计两个方向上分隔自旋向上和自旋向下区域的畴壁数量，确定哪种边界条件对应于该扩展基态：若某个方向上的畴壁数量为奇数，则表示该方向上的反周期性边界条件在能量上更有利。

为求完整起见，我们来定义在受挫元胞 [36, 37, 52], 构成的图上求解最小权完美匹配的问题；正文中我们曾多次用到这一问题。我们将这个图称为图图卢兹 $\mathcal{G}_T$，它是受挫元胞构成的完全图： $\mathcal{V} = \mathcal{P} = \{$元胞 $p = {}^{i}_{l}\square^{j}_{k} \mid J_{ij}J_{jk}J_{kl}J_{li} < 0\}$和 $\mathcal{E} = \{\{p, q\} \mid p, q \in \mathcal{V},\ p \neq q\}$。非正式地定义对偶晶格上元胞 $p$ 与 $q$之间的路径 $P_{pq}$ 后，图图卢兹上的权重由 $\zeta_{pq} = \min_{P_{pq}} \left(\sum_{\langle ij\rangle\text{交叉 }P_{pq}} |J_{ij}|\right)$给出。在 $\mathcal{G}_T$ 上求解最小权完美匹配可得到伊辛基态；对偶晶格上的未满足弦沿着产生权重 $\zeta_{pq}$的路径 $P_{pq}$ 连接一对匹配的元胞 $pq$ 。于是，伊辛基态能量为 $2E(\mathcal{G}_T) - \sum_{\langle ij\rangle} |J_{ij}|$。

最小权完美匹配图卢兹图问题中的简并更为严重：即使伊辛基态对是唯一的，只要两条未满足弦彼此交叉，就会出现简并，因为此类交叉可以被消解，从而在 $\mathcal{G}_T$上产生若干不同的匹配。边界条件也略为微妙：虽然周期边界同样给出如上所定义的延展基态，但要处理开放边界，就必须扩充图 $\mathcal{G}_T$，允许元胞与边界匹配，这对应于边界上的不满足键 [36]。我们将不讨论与图卢兹匹配相关的这些问题：我们的数值计算将始终使用对偶卡斯特林晶格，因为它快得多。然而，对于涉及图卢兹匹配的重整化群描述，可以设想要么是具有开放边界、但所有受挫元胞都远离边界的大系统，要么是携带无限铁磁 $J$的“磁化”边界，从而使边界键永不处于不满足状态。

## 附录 B：畴壁数值计算

利用附录A中定义的、映射到对偶卡斯特林晶格上最小权完美匹配的方法，我们利用高效的基态求解方法，精确确定 $T = 0$ 铁磁–自旋玻璃临界点的位置，并测量这一相变中与畴壁激发相关的指数。我们的结果与文献 [28, 58, 59], 的结果一致；这些文献使用托卢斯类型的最小权完美匹配，研究了部分相同的可观测量，所用的是较旧版本的最小权完美匹配算法。

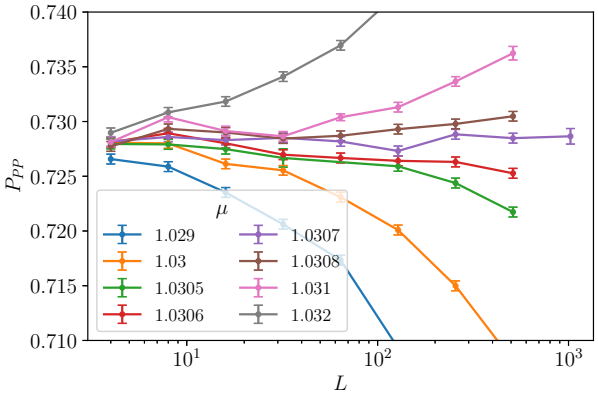


图 6. 扩展基态选择完全周期性边界条件的概率 $P_{PP}$ 随系统尺寸 $L$ 的变化。每个数据点取自 $2 \times 10^5$ 至 $10^6$ 次无序实现的平均值。

### 1. 定位临界点

有多种方法可以确定模型的 $T = 0$ 临界点随 $\mu$ 变化的位置。这里，我们采用 $P_{PP}$，其定义为：在环面上的扩展基态中，两个方向均选择周期性边界条件的概率。文献 [17] 曾使用类似的量来定义有限温临界线。由附录 A 中的定义可知，$P_{PP}$ 表示所有不可收缩回路上的相对畴壁均具有正能量的概率，即 $P_{PP} = \mathbb{P}[E_{0,PP} < E_{0,AP}, E_{0,PA}, E_{0,AA}]$。在铁磁相中，当 $L \to \infty$ 时，畴壁张力的分布 $(E_{0,\ AP} - E_{0,\ PP})/L$ 会集中为一个狄拉克 δ 函数，因此 $P_{PP} \to 1$。另一方面，在自旋玻璃相中，当 $L$ 较大时，$E_{0,\ AP} - E_{0,\ PP}$ 的分布关于零对称（并随 $L^{-|\theta_{\mathrm{SG}}|}$ 按 $\theta_{\mathrm{SG}} < 0$ 标度变化），因此 $P_{PP}$ 趋近于 $1/4$。在临界点，平均畴壁能量随系统尺寸按 $L^{\theta_c}$ 发散，而 $(E_{0,\ AP} - E_{0,\ PP})/L^{\theta_c}$ 的分布预计趋近于一种普适形式。该分布在负值处有非零支撑，但并不对称，因为在所有尺度上，系统都“知道” $\mathbb{E}[J] > 0$。因此，在临界性下，当 $L \to \infty$ 时，$P_{PP}$ 在一个 $L \times L$ 系统中趋于介于 $1/4$ 与 1 之间的普适数值。在图 6 中，通过考察不同 $\mu$ 下的曲线 $P_{PP}(L)$，我们可以将临界点识别为分界线，位置为

$$\mu_c = 1.0307 \pm 0.0001, \tag{B1}$$

与文献 [28, 59], 的结果一致，

$$P_{PP}(\infty) = 0.7285 \pm 0.0010. \tag{B2}$$

### 2. 圆柱上的畴壁

在临界点处，“刚度”有多种可能的度量方式，因此也有许多方法可以诊断低能激发的性质；这些方法预计都具有相同的系统尺寸标度——至少在二维中（如今几乎已得到证明）仅有两个无限系统基态的情况下如此 [32]。这里我们考察由边界条件相对翻转所引入的畴壁的能量学和几何性质。环面适用于计算 $P_{PP}$，但要寻找具有指定边界条件的基态则需要平面性，因此我们现在使用 $L \times L$ 圆柱，即一个方向采用周期性边界条件、另一个方向采用自由边界条件。

我们通过计算原始构型与另一种构型的基态能量之差（记为 $E_{dw}$）来求得畴壁能量。后一种构型与原始构型的区别在于：沿对偶晶格上一条从圆柱一端自由边界延伸至另一端的路径翻转了键符号。这两个基态相差一对相对畴壁：其中一个是键翻转路径，对能量的贡献为零；另一个则可以自由选择位置，以使能量最小。

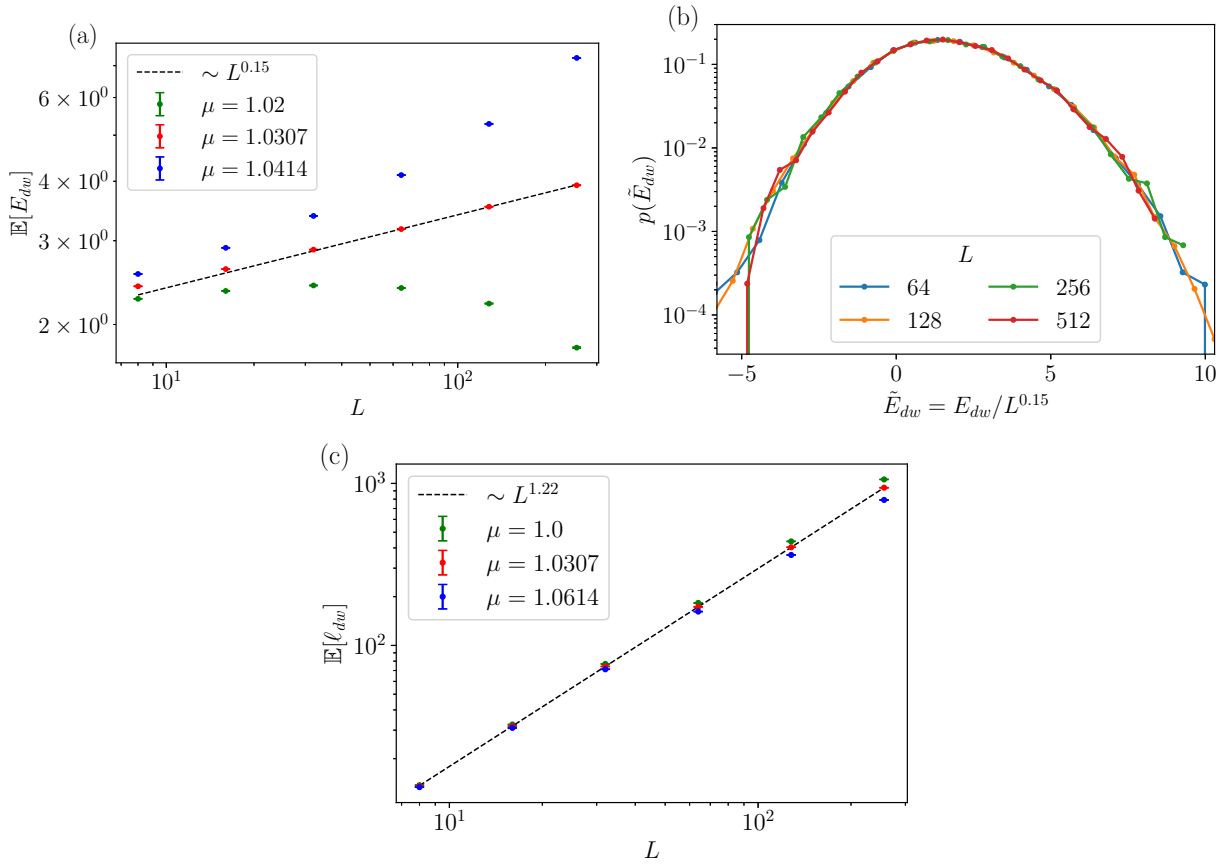


图7. (a) 均值畴壁能量作为 $L$ 的函数，分别位于临界性两侧以及临界点 $\mu_c \approx 1.0307$。虚线——对 $L \geq 64$ 处数据的拟合——正比于 $L^{\theta_c}$，其中 $\theta_c$ 由式(B3)给出。所示误差条为标准误差。(b) 临界点 $\mu = \mu_c$ 处的畴壁能量分布，按 $L^{\theta_c}$ 标度。临界点处的这一标度分布预期是一个与无序分布无关的普适函数。(c) 均值畴壁长度作为 $L$ 的函数，对应于 $\mu$ 在临界点两侧以及临界点处的情形。虚线正比于 $L^{d_{f_c}}$，其中 $d_{f_c}$ 由式(B4)给出。(a)和(c)的数值计算使用了 $10^6$ 个无序实现，(b)使用了 $3 \times 10^4$ 个无序实现。

结果如图所示。7。

畴壁能量的均值 $\mathbb{E}[E_{dw}]$ 在铁磁相中随 $L$ 线性增长，并在自旋玻璃中衰减至零。在临界点 $\mu = \mu_c$， $\mathbb{E}[E_{dw}]$ 按 $L^{\theta_c}$ 增长。我们从数值计算中发现

$$\theta_c = 0.15 \pm 0.01, \tag{B3}$$

与文献 [28]一致。正如预期，临界点处畴壁能量的整个分布随 $L^{\theta_c}$ 标度，从而揭示出一个不对称且均值为正的普适标度函数。在 $\mu = \mu_c$ 处，约有五分之一的无序实现具有 $E_{dw} < 0$。

请注意，与正文中讨论的优化缺陷能量不同，圆柱上的畴壁能量似乎没有标度的量级为一的修正。这是因为在临界性下，圆柱上的畴壁只有在最大尺度上才会“知道”自己是否应该存在——这反映在其能量以相当大的概率为负值。靠近两端的局部区域中，相互作用的统计特性与采用周期性边界条件时几乎相同。因此，边界附近的短畴壁段并不反常，也不会对其能量产生 $\mathcal{O}(1)$ 贡献。相比之下，优化缺陷是通过移除两个受挫元胞产生的，而元胞的位置并非彼此独立。因此，在端点附近，耦合的统计特性并不典型，诱导出的畴壁中靠近端点部分的贡献

系统性地不为零。

我们还绘制了畴壁长度的均值 $\ell_{dw}$ 随 $L$ 在 $\mu = \mu_c$处的变化。临界点处的畴壁具有游走指数“$\zeta = 1$”，其关键特征是在所有尺度上都有悬垂，且具有非平凡的分形维数，$\mathbb{E}[\ell_{dw}] \sim L^{d_{fc}}$。我们发现，与参考文献 [28],的结果一致，分形维数为

$$d_{fc} = 1.225 \pm 0.002. \tag{B4}$$

铁磁相中畴壁的分形维数为 1——横向涨落按 $L^{\zeta}$ 标度，其中 $\zeta = 2/3 < 1$ [60]——而在自旋玻璃中，分形维数同样非平凡，为 $d_{f,\,\mathrm{SG}} \approx 1.27$，略高于 $d_{fc}$ [39]，且差异超过了显而易见的误差条范围。

我们还研究了临界性处优化缺陷长度随 $L$ 的标度关系（未展示），发现其与 $L^{d_{fc}}$ 一致，这进一步支持了如下观点：优化缺陷所经过的路径可以视为部分畴壁或液滴边界。

## 附录 C：关于匹配的更多内容

引入一些更多的记号将会很有用。

~给定 $\mathcal{M}$ 图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V},\ \mathcal{E})$的一个部分匹配，$\mathcal{M}$ 的增广路径（AP）是这样一条路径（$v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{n-1},\ v_n$）：它~始于并终于未匹配顶点（$v_1$ 和 $v_n$ 在 $\mathcal{M}$中未被匹配，而其他所有 $v_i$ 均已匹配），并且在~ ~ ~匹配边和未匹配边之间交替：$\{v_1, v_2\} \notin \mathcal{M},\ \{v_2, v_3\} \in \mathcal{M},\ \ldots\ldots,$ $\{v_{n-1}, v_n\} \notin \mathcal{M}$。沿一条增广路径对边权重取交错和，所得结果就是部分匹配代价的增加量；这一增加量对应于翻转路径中每条边的二聚体占据状态，从而将两个端点加入部分匹配。请注意，连接两个未匹配顶点的单条边也属于增广路径——其交错和就是该边的边权重。在任意图上寻找增广路径是构造完美匹配的一种方法，也用于最小权完美匹配的 Blossom 算法 [56, 57]。

因此请注意，伊辛问题中的重整化群等价于在完整的图卢兹图 $\mathcal{G}_{T,n}$ 上依次进行部分匹配，其顶点集分别为 $\mathcal{P}_n$，并使每一步导致的最小权完美匹配权重增量最小；这些增量就是 $r_n$。

$\mathcal{G}_T$ 的最小权完美匹配中的简并（由零权交替环导致）并不对应于伊辛简并。虽然它会影响整个重整化群过程中 $\mathcal{G}_T$ 上部分匹配的选择，但不会导致 $r_n$ 出现简并，也不会使添加元胞的顺序产生歧义。因此，以下讨论中，我们可以将 $\mathcal{G}_T$ 上某种特定的部分匹配顺序视为重整化群轨迹。

### 1. $r_n$ 的单调性

我们在文 中声称，对于重整化群的所有步骤 $n$，$r_n < r_{n+1}$，现在我们将（非正式地）证明这一点 .

反设我们构造了一个增量为 $r_n$ 的反铁磁团簇，这使得另一个交错和为 $r_{n+1} < r_n$ 的反铁磁团簇可以形成。这两个反铁磁团簇必定重叠，否则对应于 $r_{n+1}$ 的反铁磁团簇就会先于对应于 $r_n$ 的反铁磁团簇形成。设重叠区域对 $r_n$ 的贡献为 $\rho$，它位于两个反铁磁团簇的中间某处。那么 $r_n = d_1 + \rho + d_2$，其中 $d_1$ 和 $d_2$ 是第一个反铁磁团簇的另外两段~ ~ ~ ~。类似地，$r_{n+1} = d_1 - \rho + d_2$，其中 $d_1, d_2, d_1, d_2$ 彼此不重叠。注意 $\rho$ 的符号差异，因为形成第二个反铁磁团簇时，共享段上的交错和将取反。于是，为了使 $r_n$ 先形成，

$$d_1 + \rho + d_2 < \tilde{d}_1 + d_1, \quad \text{and} \quad d_1 + \rho + d_2 < \tilde{d}_2 + d_2, \tag{C1}$$

因为两条路径都对应 ~ ~ ~ng 至 $d_1 + d_1$ 和 $d_2 + d_2$ 也都是有效的增广。因此

$d_1 > \rho + d_2$ 和

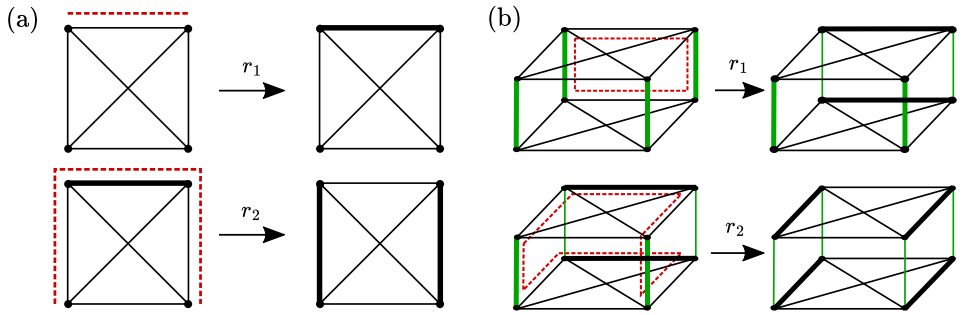


图 8。（a）图 $\mathcal{G}_T$上由四个受挫元胞构成的重整化群过程。红色虚线表示重整化群过程中形成的增广路径。粗边表示每一步的匹配。（b）同一受挫元胞构型对应的复制图卢兹图 $\mathcal{G}_T^2$。绿色边的权重为 $W$，并逐渐增大。红色虚线表示被翻转的环，它们对应于 $\mathcal{G}_T$的每个副本中的增广路径。粗边表示属于部分匹配的边；在过程结束时，部分匹配变为完整匹配。

$d_2 > \rho + d_1$。为了满足 $r_{n+1} < r_n$，或者等价地满足 $d_1 - \rho + d_2 < d_1 + \rho + d_2$，
我们必须有

$$\rho + d_2 + \rho + d_1 - \rho < d_1 + d_2 + \rho \implies 0 < 0, \tag{C2}$$

这与假设矛盾。对于我们始终采用的连续分布 $P(J)$，$r_n < r_{n+1}$ 以概率 1 成立。

我们在此指出，Blossom 算法为构造伊辛基态而依次添加的反铁磁团簇序列 [56, 57] 似乎不具备权重增量的单调性；事实上，有些反铁磁团簇会降低匹配的权重。我们不知道如何从“物理”的角度解释 Blossom 算法选择反铁磁团簇的方式（对于任何一类图而言）。

### 2. 优化缺陷与反向重整化群

用图卢兹匹配的语言，我们可以将优化缺陷能定义为

$$r_{max} = \max_{p,q} \left( E(\mathcal{G}_T) - E(\mathcal{G}_{T,\setminus\{p,q\}}) \right). \tag{C3}$$

其中 $\mathcal{G}_{T,\setminus\{p,q\}}$ 是一个带有面元 $\mathcal{P} \setminus \{p,q\}$的图卢兹图。现在我们将证明，如此定义的 $r_{max}$ 确实等于重整化群 $r_{N_f/2}$ 的最终增量。

描述一种具体的实现方法来执行这一过程会很有帮助。设 $\mathcal{G}_T$ 是给定无序实现所对应的图卢兹图。我们构造一个“复制图卢兹图” $\mathcal{G}_T^2$，如图8b所示，它由两个相同的 $\mathcal{G}_T$副本组成，每对对应顶点之间以一条权重为 $W$的边相连。

当 $W = 0$时，$\mathcal{G}_T^2$ 上的最小权完美匹配恰好是副本间边的集合，且权重为 0。随着 $W$ 逐渐增大，$\mathcal{G}_T^2$ 上的最小权完美匹配会发生变化：当沿着 $\mathcal{G}_T^2$ 中的一个环翻转匹配在能量上有利时，该环由 $\mathcal{G}$两个副本中的一条增广路径的两个副本，以及两条副本间边构成。事实上，翻转这样的环时的 $W$值，恰好等于在 $\mathcal{G}_T$的单个副本中观察到的增广路径所对应的 $r_n$。当$W$ 足够大时，$\mathcal{G}_T^2$ 中的最小权完美匹配将由 $\mathcal{G}_T$各副本中的最小权完美匹配的两个副本构成，且权重为$W$的边均不参与匹配。从小到大改变 $W$，会依次经过 $\mathcal{G}_T$每个副本中的一系列最小增广路径。鉴于上述所示的 $r$序列具有单调性，$\mathcal{G}_T^2$ 上的最小权完美匹配发生变化时对应的 $W$ 值，构成了 $r$的递增序列。

如果我们从较大的 $W$ 开始，使得 $\mathcal{G}_T$ 的每个副本中的匹配都对应于 $\mathcal{H}$ 的基态，那么 MWPM 在 $\mathcal{G}_T^2$ 上发生变化时所对应的最大 $W$，就是在 $\mathcal{G}_T$ 的匹配中执行最后一次增量时的 $W$。根据构造，由于我们处于 MWPM 在 $\mathcal{G}_T^2$ 上发生变化时的最大 $W$，因此 $\mathcal{G}_T$ 的每个副本中的匹配变化，都相当于插入一对未配对单体，并使 $\mathcal{G}_T$ 的两个副本中的基态能量尽可能大幅降低。因此，RG 中找到的最后一个 $r$，就是 $r_{max}$ 中所定义的优化缺陷

方程（C3）。当 $W$ 从 $\infty$ 减小到 0 时，我们反向运行 RG。这一操作在优化缺陷方面有着自然的解释：每次“去增广”都会在一个（部分）匹配中插入一个优化缺陷。

### 3. 基于 Kasteleyn 匹配的优化缺陷

我们该如何数值计算 $r_{max}$? 任何涉及图卢兹图的过程，尤其是涉及其两个副本的过程，都很慢（运行时间随 $L$的较大次幂增长）。现在我们将说明，实际上可以通过对附录 $r_{max}$ A中的 Kasteleyn 最小权完美匹配进行修饰，高效地计算。

具体而言，我们将证明：(1) 对一个固定的、初始处于基态的自旋构型，在对偶晶格上连接 $p$ 和 $q$ 的一串耦合的符号进行翻转后，其能量可能降低的最大值，等于 (2) 沿着连接 $p$ 和 $q$ 的任意路径翻转耦合符号，并允许基态随之改变所导致的基态能量变化。随后我们将证明，可以修改最小权完美匹配算法来计算 (1)，因此它也能计算按 (2) 定义的优化缺陷能量：基态的最优解阻挫。

为了解释图的构造，我们首先讨论在对偶正方晶格上，沿着一条从 $p$ 到 $q$ 的路径 $\Pi$ 翻转 $J_{ij}$ 的符号，从而消去 $\mathcal{H}$ 中的受挫元胞 $p$ 和 $q$ 后，伊辛基态会发生怎样的变化。将这组新的耦合记为 $J^{\Pi}$。

定义 $\Delta[\sigma, J, \Pi] \equiv -\sum_{ij\in\Pi} J_{ij}\sigma_i\sigma_j$，使得翻转穿过 $\Pi$ 的键后，构型 $\sigma$ 的能量变化为

$$E_J[\sigma] - E_{J^\Pi}[\sigma] = 2\Delta[\sigma, J, \Pi]. \tag{C4}$$

设耦合 $J$ 对应的基态自旋构型对为 $\pm\sigma^g$，并考虑一个状态 $\sigma^{g'}$：它与 $\sigma^g$ 的差异在于，由 $\Pi$ 与另一条从 $p$ 到 $q$ 的路径的对称差所形成的畴壁围住的自旋；我们将这条路径称为 $\Pi'$。那么，$\sigma_i^{g'}\sigma_j^{g'}$ 仅在 $(\Pi\cup\Pi')\setminus(\Pi\cap\Pi')$ 两侧不同，而 $J^\Pi$ 则在 $\Pi$ 两侧不同。因此

$$E_{J^\Pi}[\sigma^{g'}] = -\sum_{ij\notin\Pi\cup\Pi'} J_{ij}\sigma_i^g\sigma_j^g - \sum_{ij\in\Pi\setminus(\Pi\cap\Pi')}(-J_{ij})(-\sigma_i^g\sigma_j^g) - \sum_{ij\in\Pi'\setminus(\Pi\cap\Pi')} J_{ij}(-\sigma_i^g\sigma_j^g) - \sum_{ij\in\Pi\cap\Pi'}(-J_{ij})\sigma_i^g\sigma_j^g \tag{C5}$$

$$= E_J[\sigma^g] + 2\sum_{ij\in\Pi'} J_{ij}\sigma_i^g\sigma_j^g \tag{C6}$$

$$= E_J[\sigma^g] - 2\Delta[\sigma^g, J, \Pi'] \tag{C7}$$

由此可知，若

$$\Pi^* = \mathrm{argmax}_{\Pi'}\Delta[\sigma^g, J, \Pi'], \tag{C8}$$

翻转（$\Pi\cup\Pi^*$）$\setminus$（$\Pi\cap\Pi^*$）中围住的自旋，即可得到 $J^\Pi$的基态。我们还可以从（C7）看出，$\Pi^*$ 是这样一条路径：翻转其上的 $J$ 符号会使 $\sigma^g$的能量降幅最大。因此我们证明了，(1) 翻转连接 $p$ 与 $q$ 的路径时，$\sigma^g$ 的最大能量降幅，以及 (2) 翻转穿过 $\Pi$的键所引起的基态能量变化——对于任意连接 $p$与 $q$的 $\Pi$——都等于 $2\Delta[\sigma^g, J, \Pi^*]$。

这里我们讨论了单对受挫元胞之间的路径，但要计算优化缺陷，我们还应在所有可能的配对选择中进一步优化 $\Pi$ $p$，$q\in\mathcal{P}$ 使其连接这些元胞。

这就引出了匹配构造：从附录 A中的对偶Kasteleyn图出发，考虑一个包含两个额外顶点 $s$ 和 $t$的图，这两个顶点分别以零边权连接到原图中所有属于与受挫面元相关联的Kasteleyn城市的 $4N_f$ 个顶点，并在该图上求解最小权完美匹配。显然，这两个完美匹配分别为 $\mathcal{M}$和 $\mathcal{M}'$，它们之间的差异（除零权键的城内重排外）是一条路径，该路径包含各一条与 $s$ 和 $t$相连的键、分别连接到对应一对面元 $p$ 和 $q$所在城市的连接，以及对偶Kasteleyn晶格上的一条路径；该路径与对偶伊辛晶格有交点 $\Pi$ 。此外，任意 $\Pi$ 都可以通过插入适当的城内边，提升为对偶Kasteleyn晶格上的一条有效路径

。寻找新的最小权完美匹配的问题可归结为寻找沿其进行匹配—非匹配翻转时代价最负的 $\Pi^*$ ——这与翻转 $\Pi^*$ 上的伊辛键符号、同时保持由 $J$诱导的基态自旋构型所产生的负能量代价相同——因此，也等同于求翻转任意位于 $p$ 和 $q$ 之间的 $\Pi$ 上的键所导致的基态能量变化。

总结而言：要针对给定的一组耦合计算 $r_{max}$ ，我们必须求解两个最小权完美匹配问题：一个是在对偶卡斯特林晶格上求解通常的伊辛基态问题，另一个是在一个图上求解，其中所有受挫城市都通过零权边连接到两个辅助顶点；两者的最小权完美匹配能量之差便给出 $r_{max}$。我们所有关于优化缺陷的数值计算都使用了这一算法。

由于刚才讨论的构造还告诉我们，优化缺陷中哪些元胞应当不受阻挫，因此，消除这些元胞的阻挫并找出新的优化缺陷，就能提供重整化群最后第二步的信息，以此类推：我们可以反复迭代，为整个重整化群构造出一系列 $r$ 及其对应的反铁磁团簇。

值得注意的是，我们讨论过的复制图卢兹图也有一个复制的 Kasteleyn 版本；在这个版本中，可以设想通过将副本间权重按适当的量逐步增加，高效地“逐步执行”重整化群的多个步骤。如果这些步长足够小，使得由此产生的反铁磁团簇在空间上彼此分离，那么这将是一次性提取重整化群多个中间步骤所产生的反铁磁团簇信息的高效方法。

由于我们的所有优化缺陷数值计算都采用完全周期性边界条件，因此基态和缺陷的位置也都针对边界条件进行了优化（通过优化缺陷路径绕环面的方式）；参见上文关于延展基态的讨论。

### 4. 优化缺陷与谱

这里我们展示，借鉴 Motrunich、Damle 和 Huse 对二分图匹配的研究中的一个论证 [54], ，对于任何 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$允许完美匹配的图，其优化缺陷能定义为

$$\varrho=\max_{v,w\in\mathcal{V}}\left[E(\mathcal{G})-E(\mathcal{G}_{\setminus\{v,w\}})\right], \tag{C9}$$

（其中， $\mathcal{G}_{\setminus\{v,w\}}$ 是由 $\mathcal{V}\setminus\{v,w\}$诱导的 $\mathcal{G}$ 子图）与任意形如以下形式的反对称矩阵的最小模本征值相关

$$\Gamma_{vw}=e^{-\beta\zeta_{vw}},\quad \Gamma_{wv}=-\Gamma_{vw}, \tag{C10}$$

在 $\beta\to\infty$ 极限下为 $\min\ |\mathrm{spec}\ \mathbf{\Gamma}|\sim e^{-\beta\varrho}$，其中我们忽略乘在指数项前的系数。更精确地说，如果 $\gamma$是最小模本征值，

$$\varrho=\lim_{\beta\to\infty}\frac{\log(|\gamma|^{-1})}{\beta}. \tag{C11}$$

（这也可以用另一种方式展示 $\varepsilon_{min}$ 与 $r_{max}$ 在伊辛情形下的对应关系，即使用 $\mathbf{\Gamma}=\mathbf{\Upsilon}$。）帕法夫式定义为 [3]

$$\mathrm{Pf}\,\mathbf{\Gamma}=\sum_{\mathcal{M}}(-1)^{\mathcal{M}}\Gamma_{\mathcal{M}(1)\mathcal{M}(2)}\cdots\Gamma_{\mathcal{M}(|V|-1)\mathcal{M}(|V|)}, \tag{C12}$$

其中求和遍历 $\mathcal{G}$ 的所有不同匹配 $\mathcal{M}$ ，并将其视为 $\mathcal{V}$ 的排列，因此 $(-1)^{\mathcal{M}}$ 是该排列的符号。

当 $\beta\to\infty$ 该求和由最小权完美匹配主导（至多相差一个符号）时： $|\mathrm{Pf}\ \mathbf{\Gamma}|\sim e^{-\beta E(\mathcal{G})}$. 请注意，尽管图 $\mathcal{G}$ 一般并不容许帕法夫定向——若容许，我们便可通过帕法夫式在任意温度下计算其上的二聚体配分函数 [3]—— $\mathcal{G}$上二聚体配分函数的零温极限，从而最小权完美匹配的能量，仍然可以用帕法夫式得到。

接下来，我们注意到该矩阵之逆的元素与缺陷有关：

$$|(\mathbf{\Gamma}^{-1})_{vw}| = \left|\frac{\mathrm{Pf}\,\mathbf{\Gamma}_{\setminus vw}}{\mathrm{Pf}\,\mathbf{\Gamma}}\right| \sim e^{\beta(E(\mathcal{G})-E(\mathcal{G}_{\setminus\{v,w\}})} \tag{C13}$$

其中， $\mathbf{\Gamma}_{\setminus vw}$ 是矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 删除第 $v$行、第 $w$行及相应列后得到的矩阵。

的最小模本征值 $\mathbf{\Gamma}$ 由 $\mathbf{\Gamma}^{-1}$的矩阵范数（例如 2-范数） |给出：最小值 $\mathbf{\Gamma}| = \gamma \sim 1/\|\mathbf{\Gamma}^{-1}\|$。 在 $\beta \to \infty$ 极限下，我们还得到 $\|\mathbf{\Gamma}^{-1}\| \sim$ 最大值$_{vw}\,|(\mathbf{\Gamma}^{-1})_{vw}|$。 因此，比较式（C9）和式（C13），即可得到所需的式（C11）。

## 附录 D：关于微扰理论的进一步讨论

这里我们讨论正文中定义的矩阵 $\Upsilon$ 的谱。对于$n \in \{1, \cdots, N_f/2\}$，该谱由 $\{\pm e^{-2\beta R_n}\}$ 给出。我们在伊辛/匹配空间中的重整化群能量增量由 $\{2r_n\}$给出。正如我们所述， $\mathcal{H}$ 的伊辛基态能量可以用这两个序列中的任意一个表示，因此

$$\sum_{n=1}^{N_f/2} R_n = \sum_{n=1}^{N_f/2} r_n. \tag{D1}$$

我们的目标现在是证明这些序列完全相同， $R_n = r_n$ 对所有 $n \in \{1, \ldots, N_f/2\}$均成立。在本节中，我们将省略所有乘在 $\beta$ 的指数上的因子。

仿照构造包含面元 $\{\mathcal{P}_n\}$ 的伊辛哈密顿量序列 $\{\mathcal{H}_n\}$ 的重整化群过程，考虑相应的序列 $\{\mathbf{\Upsilon}_n\}$，使得该序列的第 $N$ 个成员——矩阵 $2N \times 2N$ $\mathbf{\Upsilon}_N$——在 $\mathcal{P}_N$ 中的面元 $p, q$ 与 $\Upsilon_{N,pq} \sim e^{-2\beta\zeta_{pq}}$ 之间具有如下元素。

我们将通过归纳法证明，对所有 $N \in \{1, \cdots, N_f/2\}$，

1. $\mathbf{\Upsilon}_N$ 的谱为 $\{\pm e^{-2\beta r_n}\}$，并且
2. 在 $\beta \to \infty$ 极限下，第 $N$ 对本征态局域在 $p_N$ 和 $q_N$ 上：它们正是这一步重整化群过程中加入的两个面元。

基例 $N = 1$ 显然成立：对于所有 $\{p, q\} \neq \{p_1, q_1\}$，第一个重整化群步骤会将彼此距离最小的面元 $p_1, q_1$ 与 $\mathcal{H}$ 配对，$r_1 = \zeta_{p_1 q_1} < \zeta_{p,q}$。 相应的矩阵元 $e^{-2\beta r_1}$ 随后在参数上远大于
an all oth者为 $\beta \to \infty$, 一个d 我们可以保证 teed a pair of eigenstates localized 在 $p_1$ 一个 d $q_1$ with ei基因va lues $\pm e^{-2\beta r_1}$
。假设对于 $\mathbf{\Upsilon}_1, \cdots, \mathbf{\Upsilon}_{N-1}$，陈述 1 和 2 是正确的，我们就必须处理

$$\mathbf{\Upsilon}_N = \left(\begin{array}{c|cc} \multirow{4}{*}{$\mathbf{\Upsilon}_{N-1}$} & e^{-2\beta\zeta_{p_1 p_N}} & e^{-2\beta\zeta_{p_1 q_N}} \\ & e^{-2\beta\zeta_{q_1 p_N}} & e^{-2\beta\zeta_{q_1 q_N}} \\ & \vdots & \vdots \\ & e^{-2\beta\zeta_{p_n p_N}} & e^{-2\beta\zeta_{p_n q_N}} \\ & e^{-2\beta\zeta_{q_n p_N}} & e^{-2\beta\zeta_{q_n q_N}} \\ & \vdots & \vdots \\ \hline & 0 & e^{-2\beta\zeta_{p_N q_N}} \\ \text{h.c.} & \text{h.c.} & 0 \end{array}\right). \tag{D2}$$

该矩阵按照 $p_1, q_1, \cdots, p_N, q_N$ 的顺序排列基。新增的元素来自新面元 $p_N, q_N$ 之间的距离，以及它们与 $\mathcal{P}_{N-1}$ 中已有元胞之间的距离。

嵌入重整化群中的增广路径优化对这些新的矩阵元施加了约束。考虑重整化群步骤 $n < N$，在此步骤中，面元 $p_n$，$q_n$ 被纳入匹配。此时，一个候选的重整化群步骤本可以是直接将 $p_n$ 与 $p_N$匹配，因为当时 $p_N$ 尚未匹配。所采用的增广路径

在 $p_n$ 和 $q_n$ 之间，其产生的增量必定小于直接匹配所产生的增量。因此 $r_n < \zeta_{p_n p_N}$。类似地， $r_n < \zeta_{p_n q_N}$， $\zeta_{q_n p_N}$， $\zeta_{q_n q_N}$，并且由于 $p_N$， $q_N$直到这一步重整化群步骤才彼此匹配，因此我们有$\zeta_{p_N q_N} > r_{N-1}$（因单调性 $r_n < r_{n+1}$，该值也大于此前所有的 $r_n$）。

我们假定，对于每一个 $n \leq N-1$，当 $\beta \to \infty$时，能量 $\pm e^{-\beta r_n}$ 与局域在 $p_n$、 $q_n$上的波函数相关联。由上一段的论证可知，这些元胞与 $\boldsymbol{\Upsilon}_N$中的 $p_N$、 $q_N$之间的矩阵元在 $\beta \to \infty$时参数上小于 $e^{-2\beta r_n}$，因此此前产生的每一个 $e^{-2\beta r_n}$，亦即 $\boldsymbol{\Upsilon}_{N-1}$的谱，必须继续属于 $\boldsymbol{\Upsilon}_N$的谱。现在注意到，关系式(D1)对于1与 $N_f/2$之间的任意求和上限均成立。已知对所有 $n \leq N-1$均有 $R_n = r_n$，我们可由(D1)推得$R_N = r_N$。此外，由于每一对 $p_n$、 $q_n$与 $p_N$、 $q_N$之间的耦合相对于 $e^{-2\beta r_n}$趋于消失，第 $n$对本征态继续局域在原先那对元胞上，而新的本征态将局域在 $p_N$、 $q_N$上（它们之间的支撑主要位于重整化群在第 $N$步所选取的交替路径上）。

## 附录 E：一维

随机紧束缚链这一简单问题 [61],

$$\mathbf{H}_{1d} = \sum_i e^{-2\beta\zeta_i}(|i\rangle\langle i+1| + h.c.) \tag{E1}$$

使用我们的重整化群，可以轻易地在大-$\beta$ 极限下求解该问题；此时它等价于熟悉的链上强无序重整化群 [6]。

重整化群的每一步都会找到形如 $e^{-2\beta(\zeta_i - \zeta_{i+1} + \cdots - \zeta_{i+2\ell-1} + \zeta_{i+2\ell})}$ 的最大乘积，并构造一个能量为该值、主要局域在位点 $i$ 和 $i+2\ell+1$ 上的波函数。这个过程对应于一种相当复杂的匹配问题求解方法。（偶数位点的周期链仅有两种匹配！）

链 $\mathbf{H}_{1d}$ 可视为一个极特殊的二维伊辛模型中受挫元胞上的有效问题；该模型的受挫元胞及其匹配都被限制在对偶晶格的一行上，例如令所有键具有$J = \infty$，但这一行上的键除外，这些键取自通常的高斯 $P(J)$。然后，将 $\Upsilon$ 截断为最近邻（这已足够，因为匹配更远的邻居在能量上从不有利），便得到上述形式的$\mathbf{H}_{1d}$，其中 $\mu > 0$ 产生的 $\{\zeta_i\}$ 分布会在连续的元胞间距中交替变化，因为受挫元胞往往成对出现在同一位置。

优化缺陷源自以“错误方式”二聚化的指数稀有区域，给出 $\mathbb{E}[r_{max}] \sim z \log L$；随着二聚化消失， $z \to \infty$， $\mu \to 0^+$。当 $\mu = 0$ 时， $\{\zeta_i\}$ 是独立同分布的，而重整化群的最后一个增量 $r_{max} \equiv r_{N_f/2}$，作为一种适当的交错和，很容易看出是 $r_{max} \sim L^{1/2}$——这就是一维中备受研究的 $\psi = 1/2$ 无限无序标度。在我们的二维问题中，当 $\mu$ 较大时（处于铁磁相），与一维问题一样会出现格里菲斯相；但随着 $\mu$ 减小，在正的 $\mu$ 处会发生向另一种相的转变（伴随 $z$ 发散）；在一维问题中，这种转变只会在 $\mu = 0$ 处发生。