Pe动力学黑洞的微扰半经典熵

Avinandan Mondal* 和 Kartik Prabhu†拉曼研究所，
Sadashivanagar，班加罗尔*560080*，印度。

我们将微扰量子引力视为渐近平坦时空上、定义于分叉 Killing 视界处的线性化度规扰动量子场论。我们将微扰引力约束纳入限制在该时空未来视界右半部分的可观测量代数中。我们把与视界 Killing 矢量场相关联的边界荷用作辅助的“观察者”自由度。用额外荷“着装”后的可观测量在 Killing 对称性下保持不变，并生成一个 II型$_\infty$ 冯·诺伊曼因子。我们计算由度规微扰和“观察者波函数”构造的经典量子相干态的约化密度矩阵的冯·诺依曼熵。该冯·诺依曼熵满足热力学第一定律的一种类似形式。我们还证明，此熵与（二阶）受扰动力学黑洞的 Hollands-Wald-Zhang 熵相关，这种关联是通过穿过视界和未来零无穷远的微扰通量建立的。

arXiv:2603.02320v1 [hep-th] 2 Mar 2026

* avinandan@alumni.iitm.ac.in
† kartikprabhu@rri.res.in

目录

1. 引言 22. 分叉 Killing 视界、度规微扰与规范条件 83. 未来视界上的经典相空间与度规微扰的量子化 111. 视界上的量子化 142. Tomita-Takesaki 模理论 173. 着装可观测量与交叉积代数 184. 线性化量子引力中经典量子相干态的熵 21致谢 26A. 视界上经典量子相干态的冯·诺依曼熵计算 27参考文献 29

1. 引言

引力、热力学与量子信息之间的相互作用，长期以来一直是研究重点，旨在从黑洞力学和全息对应的背景中深入了解引力的量子本质。在黑洞热力学领域，一些基础性认识源于以下发现：黑洞应具有熵 [1], ，遵循热力学定律 [2]并发出热辐射 [3]。随后，人们证明，黑洞力学第一定律是引力一般微分同胚不变性的推论，而熵则是引力诺特荷的积分 [4, 5]。对黑洞时空中量子场论热力学的研究可追溯至霍金关于热辐射的开创性工作 [3], ；但近年来，这一领域受到广泛关注，尤其聚焦于量子信息论量（如冯·诺依曼熵和相对熵）。相关研究运用了 Tomita-Takesaki 模理论的强大方法，以及与之相关的数学物理重要成果，例如局域量子场论代数的类型、交叉积因子[6–8] ，以及分叉 Killing 视界时空中的模流与量子场论之间的联系 [9–11]。近年来，这些领域涌现了大量研究：在全息对偶背景下，III 型代数中 II 型因子的涌现[12, 13]；相对于德西特空间中观察者的引力着装代数 [14]；

在具有分叉 Killing 视界的时空中，对子区域代数施加引力约束而涌现的 II 型因子 [15] 举几个例子。

动力学黑洞熵的问题也已在文献中得到广泛研究[5, 16–18]。在广义相对论中，黑洞视界某个截面$\mathcal{C}$ 上的 Iyer-Wald 熵 [5] 就是贝肯斯坦-霍金熵 $A[\mathcal{C}]/4$，其中 $A[\mathcal{C}]$ 是该截面的面积。Wall [16]提出了动力学黑洞熵的诺特荷处方，文献 [18] 证明，在广义相对论中，该处方与贝肯斯坦-霍金熵相符。Hollands 和 Ishibashi [17]将外部度规微扰视为量子场，得到了黑洞真空态相对于微扰相干态的相对熵表达式，并指出这一量的适当变化与经由类光无穷远泄出的 Bondi 新闻张量（辐射通量）的积分有关。最近，Hollands、Wald 和 Zhang（HWZ） [18]提出了一种动力学黑洞熵，它通过一个动力学修正项修正了 Iyer-Wald 处方。这些研究提出了一个有趣的问题：如何在线性化量子引力的框架下计算黑洞扰动态的熵。这样的计算将给出动力学黑洞熵的微扰量子引力结果。预期所得熵不同于基于诺特荷的熵处方 [5, 16, 18]，因为后者是视界截面上适当 2-形式的积分，因此是与动力学视界截面相关联的熵。然而，我们的熵表达式将是整个右侧未来视界上的全局微扰态的熵。本文将运用 Tomita-Takesaki 模理论的数学工具计算该熵，并论证所得熵可通过一个通量项与 HWZ熵联系起来；从热力学意义上说，它满足第一定律。

我们考虑一个度规为 g_{ab} 的渐近平坦时空，其中存在一个分叉 Killing 视界 $\mathrm{H} = \mathrm{H}^+ \cup \mathrm{H}^-$（见图 1），该视界由 Killing 场 ξ^a 生成，且其表面引力 κ 为常数。我们将视界的逆温度记为 $\beta = 2\pi/\kappa$。为本文之目的，我们假设子流形 $\mathrm{H}^+ \cup i_R^+ \cup \mathscr{I}_R^+$作为柯西曲面，即 P 楔区和 R 楔区的并集（见图 1），是整体双曲的。此外，我们假设，对于紧支撑在 P ∪R 中的自由（线性）场，数据可以独立地指定在 H^+和 $i_R^+ \cup \mathscr{I}_R^+$上。随后，在本文的大部分内容中，我们假设数据仅指定在 H^+ 上，而在 $i_R^+ \cup \mathscr{I}_R^+$上的数据为零。我们将在注 4.1 中较晚处放宽这一最后的假设，届时也会考虑 $\mathscr{I}_R^+$ 上的数据。

接下来，我们考虑 δg_{ab} 支撑于时空的右楔区 $\mathcal{R}$ 内的线性化度规扰动（见图 1）。不失一般性，我们对这些微扰施加某些规范条件（见第 2节），使得微扰在视界上的自由数据$\mathcal{H}^+$ 由扰动剪切给出 $\delta\sigma_{AB} = \frac{1}{2}\partial_V \delta g_{AB}$，且一阶膨胀为零

$\delta\vartheta = 0$。视界上微扰的相空间自然带有一种辛结构（见式 3.5），该结构由广义相对论的辛流诱导。视界Killing矢量场 ξ^a 在此相空间上生成的流对应一个哈密顿量 F_ξ，它可用扰动剪切表示为：

$$F_\xi = \frac{\kappa}{4\pi}\int_{\mathcal{H}^+} dV d\Omega_2 V \delta\sigma_{AB}\delta\sigma^{AB} \tag{1.1}$$

该哈密顿量 F_ξ 测量视界上的引力扰动通量。可以证明，该通量是一个恰当2-形式的积分，而该形式取决于度规的二阶微扰 [18, 19]

$$F_\xi = \int_{\mathcal{H}^+} d[\delta^2 Q_\xi - \xi\cdot\delta\theta(g,\delta g)] \tag{1.2}$$

其中 Q_ξ 是与由 ξ^a 生成的微分同胚相关联的诺特荷，而 θ 是广义相对论中的辛流。

如果 $\mathcal{C}$ 是 Killing 视界的任意截面，Hollands、Wald 和 Zhang（HWZ） [18] 已证明 $\int \delta^2 Q_\xi - \xi\cdot\ \delta\theta(g,\delta g)\ = \delta^2 S_{\mathrm{HWZ}}[\mathcal{C}]$ 与c

$$S_{\mathrm{HWZ}}[\mathcal{C}] := \frac{1}{4}A[\mathcal{C}] - \frac{1}{4}\int_{\mathcal{C}} d\Omega_2\ V\vartheta \tag{1.3}$$

这里，$A[\mathcal{C}]$ 是截面 $\mathcal{C}$的面积，V 是沿 $\mathcal{H}^+$ 的仿射参数，而 ϑ 是膨胀。在 [18]中，$S_{\mathrm{HWZ}}[\mathcal{C}]$ 被视为动力学黑洞的熵，它对通常的面积项给出了动力学修正。由式 1.2可知，将其在视界的任意两个截面之间积分后，两个截面处的 HWZ 熵之差等于这两个截面之间穿过视界的能量通量，即 HWZ 熵满足“物理过程”第一定律 [18]。根据这条“物理过程”第一定律，HWZ 提出，$\delta^2 S_{\mathrm{HWZ}}$ 可以视为微扰理论主导阶下（即真空扰动的二阶下）动力学黑洞的熵。

本文的主要目标是证明，HWZ熵（二阶）与$\mathcal{H}^+$上线性化引力的受扰量子态的一种适当熵相关。接下来我们将概述本文的构造和结果。

在视界上，我们对扰动剪切进行量子化，从而得到一个涂抹算符

$$\boldsymbol{\delta\sigma}(s) = \int_{\mathcal{H}^+} dV d\Omega_2\ \boldsymbol{\delta\sigma}_{AB} s^{AB} \tag{1.4}$$

其中 s^{AB} 是视界上的一个测试张量场。此量子化过程见第 3.1节，我们将这些扰动剪切算符生成的代数记为 $\mathcal{A}_{\mathcal{H}^+}$。接着，我们考虑一个中心高斯哈达玛态，其二点函数由式 3.14给出，并将其视为真空态 ω_0。此态 ω_0 限制在分岔面 $\mathcal{B}$ 的任一侧时，都是一个KMS态[1]，其逆温度为 $\beta = 2\pi/\kappa$。通量（经典情况下由式 1.1给出）也可以定义为该代数中的一个算符：

$$\boldsymbol{F}_\xi = \frac{\kappa}{4\pi}\int_{\mathcal{H}^+} dV d\Omega_2 V :\boldsymbol{\delta\sigma}_{AB}\boldsymbol{\delta\sigma}^{AB}: \tag{1.5}$$

其中“正规序”是相对于式3.14中真空期望值里出现的二点函数而言的。该算符满足对易关系：

$$[\boldsymbol{\delta\sigma}(s), \boldsymbol{F}_\xi] = -i\boldsymbol{\delta\sigma}(\pounds_\xi s) \tag{1.6}$$

并因此在涂抹剪切算符的代数上生成 Killing 流 s.

我们将由（$\mathcal{A}_{\mathcal{H}^+}$，$\omega_0$）得到的GNS希尔伯特空间记为 $\mathscr{H}$。现在，在 $\mathscr{H}$上的有界线性算子集合中，取支撑于右侧未来视界$\mathcal{H}_R^+$上的Weyl算符的强（或弱）算符拓扑闭包，其中后者定义为$\boldsymbol{\mathcal{W}}(s)$：$=\exp(i\boldsymbol{\delta\sigma}(s))$，且涂抹张量 s^{AB} 现支撑于$\mathcal{H}_R^+$。所得的冯·诺伊曼因子代数记为 $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+, \omega_0)$，根据Araki [6]，它是一个III型因子。关于从物理学家视角对冯·诺伊曼代数及其类型分类的清晰阐述，我们参阅 [20]。

由于代数 $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+, \omega_0)$是III型的，密度矩阵与冯·诺依曼熵在此设定下并非良定义。[2] 然而，在 [14] 中已证明，若我们将一个观察者（沿类时轨迹运动）引入时空，并利用微扰引力约束将“观察者自由度”适当地耦合到量子场，则组合后的交叉积代数为II型。这一构造也可以用量子参考系来描述 [21]。该构造在 [15] 中被推广到渐近平坦黑洞时空中的量子化克莱因-戈尔登标量场，其中引力里渐近微扰的“边界荷”扮演“观察者”的角色。

我们将 [15] 的分析推广到线性化引力。在这种情况下，线性化引力约束为 $F_\xi = X - C$（见式1.2），其中 X 和 C 是HWZ熵的渐近值

$$X := \frac{1}{\beta}\delta^2 S_{\mathrm{HWZ}}[i_R^+], \quad C := \frac{1}{\beta}\delta^2 S_{\mathrm{HWZ}}[i_L^-] \tag{1.7}$$

“观察者”将是引力荷 X。

[1] 但请注意，态 ω_0 在限制到任意截面的未来（或过去）时并非KMS，因为除分岔面外，Killing 流并不能使任意截面未来（或过去）中的代数保持不变。[2] 但请注意，两个态之间的相对熵是完全良定义的，因为它可以纯粹利用态矢量和相对模算子来定义。

荷 X 在方程1.7 中被提升为算符 $\boldsymbol{X}$，它在辅助的“观察者”希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R})$上作为乘法算符作用，并与“观察者哈密顿量”的负值相关联。[3] 现在，在量子场论与观察者的扩展希尔伯特空间 $\mathscr{H}_{\text{ext}} := \mathscr{H} \otimes L^2(\mathbb{R})$上，我们考虑在量子场论与观察者总哈密顿量作用下保持不变的可观测量子代数。注意到通量算符 $\boldsymbol{F}_\xi$ 就是量子场论哈密顿量，因此总哈密顿量为约束 $\boldsymbol{C}$的负值

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{F}_\xi \tag{1.8}$$

此时它已成为扩展希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ext 中的一个算符。与约束算符算符 $\boldsymbol{C}$ 对易的可观测量代数，是 $\mathfrak{A}(\mathrm{H}_R^+, \omega_0)$ 与其模自同构群的交叉积。态 $|\omega_0 \in \mathscr{H}$（其中 $|\omega_0$ 是 ω_0 的 GNS态）在代数 $\mathfrak{A}(\mathrm{H}_R^+, \omega_0)$ 中的模哈密顿量与通量算符一致（见式 3.25）。这个交叉积代数记为 $\mathfrak{A}^{\text{ext}}(\mathrm{H}_R^+, \omega_0)$，根据 Takesaki [7]，它是一个 II 型因子——正如我们稍后将要论证的，在我们的情形中它是一个 II 型$_\infty$ 因子。因此，交叉积代数具有定义良好的密度矩阵和重整化迹，可用于计算冯·诺依曼熵。

考虑视界 H^+ 上由数据$\delta g_{AB} = h_{AB}$表示的经典度规微扰。这个微扰可由 ω_h 在代数 $\mathfrak{A}(\mathrm{H}_R^+,\omega_0)$ 上的代数相干态表示（见式 4.2）。在 GNS希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 中，态ω_h 的向量表示并不唯一，因为它仅在右侧未来视界上的代数中以代数方式定义（而非在整个未来视界上定义）。然而，它在 $\mathscr{H}$ 中 $(\mathfrak{A}(\mathrm{H}_R^+, \omega_0)\ |\omega_0)$ 的自然锥 $\mathrm{P}^\#$ 中有唯一表示（见式 4.4 和 4.5 ）。我们将自然锥中的这个唯一表示 $|\omega_h$ 作为 $\mathscr{H}$ 中受扰量子态的表示。

接下来，我们考虑 $L^2(\mathbb{R})$ 空间中的“观察者波函数” $f(X)$，并在扩展希尔伯特空间 $\mathscr{H}^{\text{ext}}$ 中构造经典-量子态 $|\hat{\omega}_h$（定义见式 4.7）。由于交叉积因子现在是 II 型，因此可以明确定义重整化迹，并且可以在代数 $\mathfrak{A}^{\text{ext}}(\mathrm{H}_R^+, \omega_0)$ 中构造与 $|\hat{\omega}_h$ 对应的密度矩阵。令 $\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}$ 为限制在 H_R^+ 上的约化态的密度矩阵。对于 “ 缓慢变化 ” 的观察者波函数 f，该密度矩阵的冯·诺依曼熵可计算为：

$$S(\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}) = -S(\omega_h|\omega_0) + \beta\langle \boldsymbol{X} \rangle_{\hat{\omega}_h} + S(f) + \log\beta \tag{1.9}$$

其中 $S(f) = -\int dX |f(X)|^2$对数 $|f(X)|^2$并且 $S(\omega_h|\omega_0)$是 II 型中的相对熵$_{\mathbb{R}}$代数（方程 3.28）。现在， [17, 22] 已证明相对熵 $S(\omega_h|\omega_0)$ 为

[3] 请注意，由于 $\boldsymbol{X}$ 依赖于二阶度规微扰，因此无法将其直接表示为量子场论希尔伯特空间上的算符。

由.....给出

$$S(\omega_h|\omega_0) = \beta F_\xi[\mathcal{H}_R^+] = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{H}_R^+} dV d\Omega_2 V(\delta\sigma_h)^2 \tag{1.10}$$

其中， $\delta\sigma_h = \frac{1}{2}\partial_V h$ 是$\mathcal{H}^+$ 上的扰动剪切，对应于 h_{AB}，因此 $F_\xi[\mathcal{H}_R^+]$ 是经由$\mathcal{H}_R^+$落入黑洞的经典辐射通量。

结合方程1.9 和1.10 ，冯·诺依曼熵可写为

$$S(\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}) = \langle \boldsymbol{\delta^2 S}_{\mathrm{HWZ}}[\mathcal{C}]\rangle_{\hat{\omega}_h} - \beta F_\xi[\mathcal{H}^+_{<\mathcal{C}}] + S(f) + \log\beta \tag{1.11}$$

其中， $\boldsymbol{\delta^2 S}_{\mathrm{HWZ}}[\mathcal{C}]$ 是截面$\mathcal{C}$ 处（二阶）HWZ熵所对应的二次型（方程1.3）。此外，$\mathcal{H}^+_{<\mathcal{C}}$ 是视界$\mathcal{H}_R^+$ 中分岔面$\mathcal{B}$ 与截面$\mathcal{C}$ 之间的部分，且

$$F_\xi[\mathcal{H}^+_{<\mathcal{C}}] = \frac{\kappa}{4\pi}\int_{\mathcal{H}^+_{<\mathcal{C}}} dV d\Omega_2 V(\delta\sigma_h)^2 \tag{1.12}$$

是经由$\mathcal{H}^+_{<\mathcal{C}}$的通量。因此，扰动态的密度矩阵$\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}$ 的冯·诺依曼熵，与视界任意截面$\mathcal{C}$ 处的HWZ熵直接相关；这种关系通过截至截面$\mathcal{C}$ 落入黑洞的引力辐射通量，以及一些与态无关的因子（S（f）和log β）建立起来。

在注记4.1 中，我们证明：当计入微扰穿过类光无穷远的辐射通量时，我们也有

$$S_{\mathrm{vN}}(\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}) = \beta\,\langle \boldsymbol{\delta^2 H}_R^{\mathrm{ADM}}\rangle_\Psi - \beta F_\xi[\mathcal{H}_R^+] + \beta F_\xi[\mathscr{I}_R^+] + S(f) + \log\beta \tag{1.13}$$

Ψ 表示视界上的交叉积态与类光无穷远处的辐射态的张量积， $F_\xi[\mathscr{I}_R^+]$ 度量穿过 $\mathscr{I}_R^+$的辐射通量，而 $\boldsymbol{\delta^2 H}_R^{\mathrm{ADM}}$ 是与空间无穷远处的 ξ^a 相关联的ADM哈密顿量，它被定义为一个二次型。

我们的分析也可以推广到在微扰引力中纳入物质场。对于无质量场，物质场的态会通过视界和类光无穷远贡献额外的通量项。对于有质量场，不存在穿过类光无穷远的通量，但对 X （式1.7）会有额外贡献，因为有质量场可以在 i_R^+处贡献一个荷。我们还忽略了视界和类光无穷远上的任何低频效应，即“软辐射”或记忆效应。我们预期，按照 [22]，我们的分析可以推广以纳入这些情形。

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们回顾分叉 Killing 视界的几何结构以及其上的真空度规扰动。在第 3 节中，我们构造

Killing 视界上的线性化引力相空间与经典涂抹可观测量，并详细介绍视界上的量子化。我们还回顾适用于本文设定的 Tomita-Takesaki 理论的一些工具，并构造着装可观测量和交叉积代数。在第 4 节中，我们计算视界上一个“经典-量子”相干态的冯·诺依曼熵，并确立其与 Hollads-Wald-Zhang 熵（二阶变分）之间的关系。在附录 A 中，我们汇总冯·诺依曼熵的详细计算过程。这些计算直接明了，但相当繁琐。

我们遵循 [23], 的约定，并采用自然单位制，其中 $G = k_B = c = \hbar = 1$。我们将研究四维时空，不过我们的全部分析无需任何修改即可推广到其他更高维度。我们用小写拉丁字母 $a, b, c, \ldots$ 表示时空中张量的抽象指标，例如， g_{ab} 表示时空度规，δg_{ab} 表示线性化度规扰动。我们还用大写拉丁字母 $A, B, C, \ldots$ 表示与视界零生成元正交的张量，即视界的二维球面截面上的张量，例如 σ_{AB} 表示视界截面的剪切。量子可观测量将用其经典对应量符号的粗体形式表示，例如 $\boldsymbol{\delta\sigma}_{AB}$表示与经典扰动剪切 $\delta\sigma_{AB}$相对应的量子可观测量。

2. 分叉基灵视界、度规微扰与规范条件

本节详细介绍背景时空中视界的几何结构，并说明在线性化引力扰动上采用的规范条件。

背景度规 g_{ab} 具有一个 Killing 矢量场 ξ^a。Killing 视界 H 定义为 M 上满足 $g_{ab}\xi^a\xi^b = 0$ 的余维一子流形，而分岔面 B 则是满足 $\xi^a = 0$ 的余维二子流形。此类时空具有分叉 Killing 视界结构，包含两个 Killing 视界：未来视界（H^+）和过去视界（H^-），二者交于 B。此外，B 将每个视界分为左右两部分：未来视界的左右部分分别记为 H^+_L 和 H^+_R，过去视界的左右部分分别记为 H^-_L 和 H^-_R。三维曲面 $\mathrm{H}^+ \cup i^+_R \cup \mathscr{I}^+$ 是在时空区域 P $\cup$R 中定义体场数据的曲面，前提是该区域整体双曲。图 1 展示了一个具有分叉 Killing 视界的典型渐近平坦时空。现在，我们总结该时空的几何结构和线性场所满足的假设：

（1）流形 $(\mathcal{P} \cup \mathcal{R}\ g)$ 是整体双曲的。（2）对于在 $\mathcal{P} \cup \mathcal{R}$ 中紧支撑的自由（线性）场，可以在 $\mathcal{H}^+$ 和 $i^+_R \cup \mathscr{I}^+_R$ 上分别指定数据。此外，在本文的大部分内容中，我们将假设数据仅在 $\mathcal{H}^+$ 上指定，而在 $i^+_R \cup \mathscr{I}^+_R$ 上的数据为零。我们将在很后面的注释 4.1 中放宽这一条件，届时也将在 $\mathscr{I}^+_R$ 上取数据。

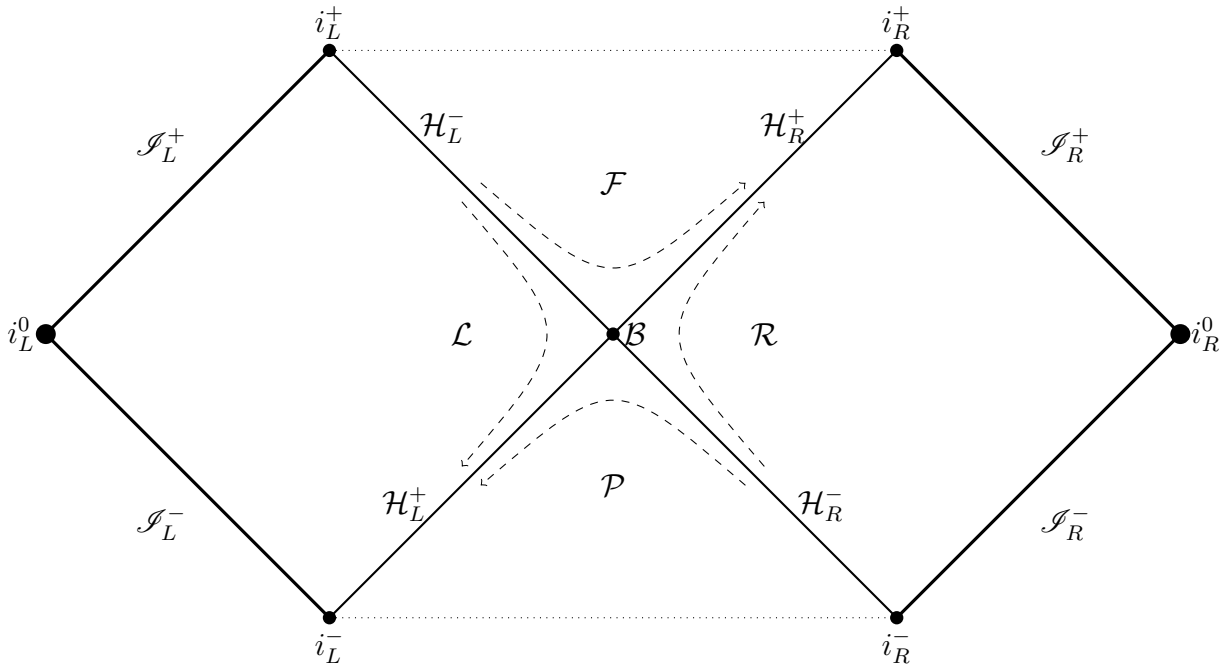

图 1. 描绘分叉 Killing 视界的渐近平坦时空图。图中弯曲的虚线箭头表示 Killing 场在分岔面附近的局部流。Killing 视界为 $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \cup \mathcal{H}^-$，并将时空划分为四个区域：左楔区（$\mathcal{L}$）、右楔区（$\mathcal{R}$）、过去楔区（$\mathcal{P}$）和未来楔区（$\mathcal{F}$），如图所示。此外，Killing 视界分为左侧（$\mathcal{H}_L^+, \mathcal{H}_L^-$）和右侧（$\mathcal{H}_R^+, \mathcal{H}_R^-$）两部分。 i^+ 和 i^- 分别为未来和过去类时无穷远， $\mathscr{I}^+$ 和 $\mathscr{I}^-$ 分别为未来和过去零无穷远；最后， i^0 为类空无穷远。它们都带有下标 L 和 R，以分别区分左楔区和右楔区。连接过去和未来类时无穷远的点线在施瓦西时空中可能表示奇点，也可能并非时空的终点，例如在克尔黑洞中。注意，我们要求$\mathcal{P} \cup \mathcal{R}$ 是整体双曲的。

在 $\mathcal{H}$ 上，Killing 矢量场不是仿射参数化的，其偏离仿射参数化的程度由视界的表面引力 κ 衡量：

$$\xi^b \nabla_b \xi^a = \kappa \xi^a \quad (\text{on } \mathcal{H}) \tag{2.1}$$

它在广义相对论中于$\mathcal{H}$ 上为常数。

我们分析所关注的曲面是视界 $\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}_R^+ \cup \mathcal{H}_L^+$。将$\mathcal{H}^+$ 上的仿射参数化切矢量场记为 l^a，其中 V为仿射参数。沿 ξ^a 的 Killing 参数在$\mathcal{H}_R^+$ 上为 v，在$\mathcal{H}_L^+$上为 v'。它们与仿射参数的关系为

$$\begin{aligned} V &= e^{\kappa v} \quad (\text{on } \mathcal{H}_R^+) \quad (-\infty < v < \infty) \\ V &= -e^{\kappa v'} \quad (\text{on } \mathcal{H}_L^+) \quad (-\infty < v' < \infty) \end{aligned} \tag{2.2}$$

并且，仿射零切向量与 Killing 场的关系为

$$\xi^a = \kappa V l^a \quad (\text{on } \mathcal{H}^+) \tag{2.3}$$

考虑时空流形 $g_{ab}(\lambda)$ 上的渐近平坦度规$\mathcal{M}$的光滑单参数族。上述背景度规记为 $g_{ab} = g_{ab}(\lambda = 0)$。不失一般性，我们可以选取$\mathcal{H}^+$，使其对所有 $\lambda > 0$均为零超曲面，见 [19]。

令 $l^a(\lambda)$ 为$\mathcal{H}^+$ 的仿射法向量，并令 $q_{ab}(\lambda)$ 为时空度规 $g_{ab}(\lambda)$ 在零超曲面$\mathcal{H}^+$上的拉回。由于$\mathcal{H}^+$ 是零超曲面， $q_{ab}(\lambda)$ 满足 $q_{ab}(\lambda)l^b(\lambda) = 0$，并在$\mathcal{H}^+$上定义了一个退化度规族。因此，它也可以等价地视为$\mathcal{H}^+$各截面上的黎曼度规 $q_{AB}(\lambda)$。第二基本形式 K_{ab} 定义为 $\mathcal{H}^+$

$$K_{ab}(\lambda) = \nabla_a(\lambda) l_b(\lambda) \tag{2.4}$$

其中， $\nabla_a(\lambda)$ 是与 $g_{ab}(\lambda)$ 相容的协变导数。此外， $K_{ab}(\lambda)$ 在$\mathcal{H}^+$上的拉回与 $l^a(\lambda)$ 正交，可记为 $K_{AB}(\lambda)$。由于$\mathcal{H}$ 是零超曲面，弗罗贝尼乌斯定理意味着 $K_{AB}(\lambda)$ 是对称的。将 $K_{AB}(\lambda)$ 分解为迹部分和对称无迹部分，分别得到膨胀 (ϑ) 和剪切 (σ_{AB})，即

$$K_{AB}(\lambda) = \frac{1}{2}\vartheta(\lambda) q_{AB}(\lambda) + \sigma_{AB}(\lambda) \tag{2.5}$$

膨胀与剪切之间的关系由零测地线丛的真空瑞恰杜里方程给出:

$$\partial_V \vartheta(\lambda) = -\frac{1}{2}\vartheta(\lambda)^2 - \sigma_{AB}(\lambda)\sigma^{AB}(\lambda) \tag{2.6}$$

其中， V是$\mathcal{H}^+$上的仿射参数。注意，对于 $\lambda = 0$，$\mathcal{H}^+$ 是一个 Killing 视界，因此 $\vartheta = \vartheta(\lambda = 0) = 0$ 和 $\sigma_{AB} = \sigma_{AB}(\lambda = 0) = 0$。更多详情请参阅 [23] 的第 9.2 节。

背景上的一阶和二阶度规微扰定义为

$$\delta g_{ab} := \left.\frac{dg_{ab}(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}, \quad \delta^2 g_{ab} := \left.\frac{d^2 g_{ab}(\lambda)}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=0} \tag{2.7}$$

我们用类似的方式将由度规导出的其他几何量的微扰记为 δ 和 δ^2。

到目前为止，对于所有 $\lambda > 0$，$\mathcal{H}^+$ 都是一个零超曲面；不过，我们也可以确保它在 λ的一阶近似下是时空的未来视界。为此，请注意微分同胚不变性

一般性的 广义相对论意味着微扰还具有额外的规范自由度 m

$$\delta g_{ab} \mapsto \delta g_{ab} + 2\nabla_{(a}\chi_{b)} \tag{2.8}$$

对于流形上任意的向量场 χ^a $\mathcal{M}$，在这种线性化微分同胚下，视界也会发生微扰。不过，可以证明 [19] 利用这种线性化微分同胚，可以使受扰时空的事件视界与$\mathcal{H}^+$重合。这意味着我们总能选择

$$\delta\vartheta = 0 \quad (\text{on } \mathcal{H}^+) \tag{2.9}$$

我们还可以进一步施加条件（见 [18]）

$$\xi^a \delta g_{ab} = 0 \quad (\text{on } \mathcal{H}) \tag{2.10}$$

$$\nabla_c(\xi^a \xi^b \delta g_{ab}) = 0 \quad (\text{on } \mathcal{H}) \tag{2.11}$$

这两个条件均可在不失一般性的前提下施加，因为它们对于以 Killing 参数 v为基础的高斯零坐标中的所有微扰都成立，见 [18]。此外，式 2.10 保证 ξ^a 在微扰下仍是 $\mathcal{H}$ 的零法向量，而式 2.11 保证 $\delta\kappa = 0$ 在 $\mathcal{H}$上成立。

式 2.10 意味着度规微扰 δg_{ab} 在视界上的拉回与 ξ^a 正交，因此 l^a。于是，在视界上，我们将度规微扰 δg_{ab} 的数据记为 δg_{AB}。剪切的微扰为

$$\delta\sigma_{AB} = \frac{1}{2}\partial_V \delta g_{AB} \tag{2.12}$$

式 2.6 的二阶变分将膨胀的二阶变分与剪切的一阶变分联系起来，如下

$$\partial_V \delta^2\vartheta = -2\delta\sigma_{AB}\delta\sigma^{AB} \tag{2.13}$$

3. 未来视界处度规微扰的经典相空间与量子化

广义相对论的拉格朗日四形式赋予解空间以辛结构 [5, 24]。辛结构 由辛流三形式 $\omega(g; \delta_1 g, \delta_2 g)$ 表示，它关于两个微扰是反对称双线性的；当 g_{ab} 满足运动方程，且 $\delta_{1,2}g_{ab}$ 均满足线性化运动方程时，该形式守恒。因此，在任意柯西曲面上对辛流积分，所得结果均与所选柯西曲面无关，并在协变

解的相空间上定义了一个辛形式:

$$W_\Sigma(g;\delta_1 g,\delta_2 g) := \int_\Sigma d^3x\ \omega(g;\delta_1 g,\delta_2 g) \tag{3.1}$$

其中， d^3x 表示柯西曲面 Σ上的诱导体积元。

为了对线性化微扰进行量子化，我们还需要经典可观测量（即相空间上的函数）所满足的泊松括号。然而，广义相对论中的辛形式仅是弱非退化的，因此无法在相空间上的任意函数上定义泊松括号。量子化中值得关注的一类经典可观测量可以定义泊松括号，即局部涂抹的线性化场:

$$\delta g(f) := \int_{\mathcal{M}} d^4x\ \delta g_{ab} f^{ab} \tag{3.2}$$

其中， f^{ab} 是一个具有紧支撑的对称测试张量，且无散，$\nabla_a f^{ab} = 0$。将测试张量限制为无散张量，可以消除在线性化微分同胚下的规范歧义，见式2.8。

用这类测试张量涂抹后，经典超前格林函数（A）和滞后格林函数（R）均有良好定义。于是，涂抹后的局域可观测量 δg（f）可以写成一个辛涂抹可观测量 [15, 25]

$$\delta g(f) = W_\Sigma(\delta g, Ef) \tag{3.3}$$

其中， $E = R - A$ 是因果传播子，而$(Ef)_{ab}$是线性化爱因斯坦方程的一个解。这些可观测量的泊松括号由式3.3给出:

$$\{\delta g(f_1), \delta g(f_2)\} = -W_\Sigma(Ef_1, Ef_2) \tag{3.4}$$

为了便于讨论，我们将局部涂抹可观测量 $\delta g(f)$改写为视界上的诱导数据$\mathcal{H}^+$（由于假设条目 $i_R^+ \cup \mathscr{I}_R^+$，(2)上没有数据）。首先，可在视界上计算辛形式式3.1 ，得到 [15, 25]

$$W_{\mathcal{H}^+}(g;\delta_1 g,\delta_2 g) = -\frac{1}{8\pi}\int_{\mathcal{H}^+} dV d\Omega_2(\delta_1\sigma^{AB}\delta_2 g_{AB} - \delta_1 g^{AB}\delta_2\sigma_{AB}) \tag{3.5}$$

其中， δg_{AB} 是微扰$\mathcal{H}^+$ 上的数据 δg_{ab} ， 如第2节前文所述，

其次，为了写出局部涂抹的场方程，3.3 在视界上令 s_{AB} 为位于.....上的数据

$\mathcal{H}^+$ 表示微扰 $(Ef)_{ab}$。那么，利用方程 3.3 和方程 3.5，可得：

$$\delta\sigma(s) = \int_{\mathcal{H}^+} dV d\Omega_2 \; \delta\sigma_{AB} s^{AB} = -4\pi\delta g(f)\,. \tag{3.6}$$

因此，在视界上，局域涂抹的度规微扰由涂抹的扰动剪切张量表示。这些视界可观测量之间的泊松括号由辛形式决定（通过将式3.5 用于式3.4 ，然后将体涂抹场与三维涂抹场等同，并使用式3.6），所得结果为：

$$\begin{aligned}\{\delta\sigma(s_1), \delta\sigma(s_2)\} &= 16\pi^2\{\delta g(f_1), \delta g(f_2)\} = -16\pi^2 W_{\mathcal{H}^+}(s_1, s_2) \\ &= \pi \int_{\mathcal{H}^+} dV d\Omega_2 (s_1^{AB}\partial_V s_{2,AB} - \partial_V s_1^{AB} s_{2,AB})\end{aligned} \tag{3.7}$$

沿 ξ^a 的Killing流在$\mathcal{H}^+$ 上的哈密顿生成元由通量[4]给出

$$F_\xi := W_{\mathcal{H}^+}(\delta g, \pounds_\xi \delta g) = \frac{\kappa}{4\pi}\int_{\mathcal{H}^+} dV d\Omega_2 V \delta\sigma_{AB}\delta\sigma^{AB} \tag{3.8}$$

该通量生成Killing流，其含义是涂抹可观测量与该通量之间的泊松括号由下式给出：

$$\{F_\xi, \delta\sigma(s)\} = -W_{\mathcal{H}^+}(\pounds_\xi\delta g, s) = \frac{1}{4\pi}\delta\sigma(\pounds_\xi s) \tag{3.9}$$

其中第一个等式源于将通量定义为Killing流的哈密顿生成元，第二个等式使用了式3.5。

此外，对于Killing场 ξ^a ，可以证明辛流三形式满足[19]:

$$\omega(g; \delta g, \pounds_\xi \delta g) = d[\delta^2 Q_\xi - \xi \cdot \delta\theta(g, \delta g)] \tag{3.10}$$

其中 Q_ξ 是诺特荷2-形式，且 $\theta(g, \delta g)$ 是广义相对论的辛势（见 [5, 24]）。将式3.10 在$\mathcal{H}^+$ 上积分，并与式3.8 比较，得到

$$F_\xi = \int_{\mathcal{H}^+} d[\delta^2 Q_\xi - \xi \cdot \delta\theta(g, \delta g)] \tag{3.11}$$

Hollands、Wald 和 Zhang（HWZ） [18] 证明， θ 拉回到 Killing 视界后是一个全变分 $\theta_{\mathcal{H}} = \delta B_{\mathcal{H}}$。基于这一点，他们提出，

[4] 请注意 F_ξ 在方程3.8 是 Hollands 和 Wald 所定义的引力微扰“修正后”正则能量的通量 [19]。

动力学黑洞在任意截面 $\mathcal{C}$ 上的熵由[5]给出

$$S_{\mathrm{HWZ}}[\mathcal{C}] := \beta \int_{\mathcal{C}} (Q_\xi - \xi \cdot B_{\mathcal{H}}) = \frac{1}{4} A[\mathcal{C}] - \frac{1}{4} \int_{\mathcal{C}} d\Omega_2 \; V\vartheta \tag{3.12}$$

其中 $A[\mathcal{C}]$ 是截面 $\mathcal{C}$ 的面积，且 $\beta = \frac{2\pi}{\kappa}$ 其中 κ 是 Killing 视界的表面引力。注意，包含膨胀 ϑ 的最后一项在 Killing 视界上消失，因此式 3.12给出了经典黑洞熵。因此，在我们的情形中，对于背景时空，式 3.12 就是黑洞的贝肯斯坦-霍金熵。然而，膨胀的二阶变分 $\delta^2\vartheta$ 通常不为零，因此熵在二阶具有主导阶动力学项。此熵的动机来自一个“物理”过程第一定律：两个视界截面之间 HWZ 熵的变化等于落入这两个截面之间的能量。由于第一定律仅在主导阶成立（对于线性化引力而言，即微扰的二阶），HWZ 熵仅用于主导阶 [18]。

利用式 3.12 代入式 3.11 ，我们可以将通量 F_ξ 写成边界处各项之差，边界位于 i_R^+ 和 i_L^-。为此，我们在 V =为常数的截面 $\mathcal{C}$] 上计算 S_{HWZ}[(根据式 3.12)，然后取 $\mathcal{C}$ ，$V =$ 为常数，再令 $V \to \pm\infty$。于是得到

$$F_\xi = \frac{1}{\beta}\delta^2 S_{\mathrm{HWZ}}[i_R^+] - \frac{1}{\beta}\delta^2 S_{\mathrm{HWZ}}[i_L^-] \tag{3.13}$$

这里我们假设，度规微扰在渐近的早期和晚期衰减得足够快，使得 $V \to \pm\infty$ 时 HWZ 熵的极限是有限的。我们还注意到 $\delta^2 S_{\mathrm{HWZ}}[\mathcal{C}]$ 通常取决于二阶度规微扰，因此不是线性化微扰相空间上的可观测量。然而，二阶 HWZ 熵之差是线性化微扰的通量（如式 3.13所示），它是一个可观测量。

现在，我们已经定义了协变相空间上的经典可观测量，并给出了生成 Killing 流的哈密顿量，接下来将对这一理论在视界上进行量子化。

1. 视界上的量子化

我们将考虑这一黑洞背景上的线性化引力量子理论。在固定的背景时空上，局部涂抹场可观测量（方程 3.2 和 3.3）可以像标量场那样，采用代数形式量子场论的方法进行量子化

[5] 式 3.12 中的 HWZ 熵等价于有限零曲面上的一个边界荷，该边界荷在[26, 27] 中得到，但当时并未将其认定为熵。关于将交叉积构造和冯·诺依曼熵扩展至包含其他边界荷的问题，已有研究对此进行了探讨 [25]。

；参见 [28, 29]。根据假设第 (2) 项，通过方程 3.6，体区域涂抹可观测量等同于适当的视界涂抹可观测量。因此，我们将直接对方程 3.6中由剪切可观测量 $\delta\sigma(s)$ 给出的视界数据进行量子化。

因此，对于量子场代数，我们取含幺 $*$-代数 $\mathcal{A}_{\mathcal{H}^+}$，它由 $\mathbf{1}$,$\boldsymbol{\delta\sigma}(s)$ 和 $\boldsymbol{\delta\sigma}(s)^*$ 生成，并满足以下关系；这些关系对 $\mathcal{H}^+$ 上的所有测试张量 s_1^{AB}, s_2^{AB} 均成立：

(1) $\boldsymbol{\delta\sigma}(\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2) = \alpha_1 \boldsymbol{\delta\sigma}(s_1) + \alpha_2 \boldsymbol{\delta\sigma}(s_2)$ for all $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$;
(2) $\boldsymbol{\delta\sigma}(s)^* = \boldsymbol{\delta\sigma}(s)$;
(3) $[\boldsymbol{\delta\sigma}(s_1), \boldsymbol{\delta\sigma}(s_2)] = -64i\pi^3 W_{\mathcal{H}^+}(s_1, s_2)\mathbf{1}$

其中辛乘积如方程3.7所示。

真空态 是 $\mathcal{A}_{\mathcal{H}^+}$ 上的高斯哈达玛德态 ω_0，其单点函数为零，两点函数由 [6] 给出

$$\omega_0(\boldsymbol{\delta\sigma}_{AB}(x_1)\boldsymbol{\delta\sigma}_{CD}(x_2)) = \frac{1}{\pi}\frac{(q_{A(C}q_{D)B} - \frac{1}{2}q_{AB}q_{CD})\delta_{\mathbb{S}^2}(x_1^A - x_2^A)}{(V_1 - V_2 - i0^+)^2} \tag{3.14}$$

其中 $x \equiv (V, x^A)$ 位于 $\mathcal{H}^+$ 上。还可以证明，将该态限制为作用于右侧未来视界代数 $\mathcal{A}^{\mathcal{H}_R^+}$ 时，态 ω_0 关于 Killing 流是 KMS 态，其逆温度为 $\beta = \frac{2\pi}{\kappa}$ [15, 25]。

—

请注意，态 ω_0 可能无法扩展为$\mathcal{R}$ 中全局（即体空间中的）KMS态。虽然在施瓦西时空中，哈特尔-霍金态是全局 KMS 态 [29, 30], ，但文献 [31] 证明了 Kerr 时空中不存在此类态。Kerr 时空中的昂鲁态 [32]并非全局 KMS态，但其在视界上的限制是哈达玛德态和 KMS态，其两点函数由方程 3.14 给出。在我们的分析中，只要求态 ω_0 在视界上是KMS态。

给定代数$\mathcal{A}_{\mathcal{H}^+}$上的代数态 ω_0，GNS 构造（见[33]第 III.2.2 节）给出一个希尔伯特空间 $\mathscr{H}$、代数$\mathcal{A}_{\mathcal{H}^+}$ 在 $\mathscr{H}$上作为线性算子的一个表示，以及一个循环分离向量 $|\omega_0\rangle$，它属于 $\mathscr{H}$，使得若 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}_{\mathcal{H}^+}$，则 $\omega_0(\boldsymbol{a}) = \langle\omega_0|\boldsymbol{a}|\omega_0\rangle$。

通量可观测量 F_ξ （见方程3.8 和3.9）可以作为一个算符$\mathcal{A}_{\mathcal{H}^+}$ 纳入代数 $\boldsymbol{F}_\xi$，并满足与泊松括号方程相关的对易关系3.9

$$[\boldsymbol{\delta\sigma}(s), \boldsymbol{F}_\xi] = -i\boldsymbol{\delta\sigma}(\pounds_\xi s) \tag{3.15}$$

沿着 ξ^a 的 Killing 流通过 α_t 对$\mathcal{A}_{\mathcal{H}^+}$ 生成一个自同构单参数族，

[6] 这与 [15]中提到的标量情形类似。

通过幺正作用

$$\alpha_t[\boldsymbol{\delta\sigma}(s)] = \boldsymbol{\delta\sigma}(s_t) = e^{i\boldsymbol{F}_\xi t}\boldsymbol{\delta\sigma}(s)e^{-i\boldsymbol{F}_\xi t} \tag{3.16}$$

其中 $s_t^{AB}(v,\ x^A) = s^{AB}(v-t,\ x^A)$，其中 v 为 Killing 时间，x^A 为视界截面上的坐标（这些截面与 $\mathbb{S}^2$微分同胚）。通量算符可表示为

$$\boldsymbol{F}_\xi = \frac{\kappa}{4\pi}\int_{\mathcal{H}^+} dV d\Omega_2 V :\boldsymbol{\delta\sigma}_{AB}\boldsymbol{\delta\sigma}^{AB}: \tag{3.17}$$

其中：$:\boldsymbol{\delta\sigma}_{AB}\boldsymbol{\delta\sigma}^{AB}:$ 是相对于真空扣除所定义的"正规序"乘积[7]，真空扣除由式 3.14给出。

最后，我们在 $\mathscr{H}$ 上构造一个由有界算子组成的冯·诺伊曼代数，这些算子限制在视界的右楔形分量 $\mathcal{H}_R^+$ 上（见图 1）。设 $\boldsymbol{\delta\sigma}(s)$ 为涂抹后的扰动剪切算符，其中测试张量 s_{AB} 的支撑位于 $\mathcal{H}_R^+$上。相应的 *Weyl*算符 定义为

$$\boldsymbol{\mathcal{W}}(s) := \exp(i\boldsymbol{\delta\sigma}(s)) \tag{3.18}$$

其中 $\boldsymbol{\mathcal{W}}(s)^* = \boldsymbol{\mathcal{W}}(-s)$。$\mathcal{A}^{\mathcal{H}_R^+}$ 中的对易关系给出

$$\boldsymbol{\mathcal{W}}(s_1)\boldsymbol{\mathcal{W}}(s_2) = \boldsymbol{\mathcal{W}}(s_1+s_2)\exp(8i\pi^2 W_{\mathcal{H}^+}(s_1,s_2)) \tag{3.19}$$

由此类 Weyl算符生成的 C^*-代数的弱闭包是一个冯·诺伊曼代数 $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+,\ \omega_0)$（见 [36, 37]）。该代数的交换子为 [8]:

$$\mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0)' = \mathfrak{A}(\mathcal{H}_L^+,\omega_0) \tag{3.20}$$

因此 $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0)\cap\mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0)' = \mathbb{C}\mathbf{1}$。因此，$\mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0)$ 是一个冯·诺伊曼因子。此外，由于 $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0)$ 是限制在 $\mathcal{H}_R^+$ 上的子代数，可以证明它是一个 III 型因子 [6]。

由于它是一个 III型因子，$\mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0)$ 因此不存在任何可重整化迹，也就不存在任何密度矩阵。因此，视界$\mathcal{H}_R^+$ 上的约化态（由密度矩阵表示）及其熵都定义不良。正如引言中所述，我们将利用交叉积构造来获得一个新的代数，它是一个 II 型因子，因此态[12, 14, 15, 39]的熵有良好定义。此外，我们将看到，考虑微扰引力约束（即方程 3.13的量子版本）时，交叉积会自然出现，这与 [15]中的做法类似。

---

[7] 请注意，尽管通量算符 $\boldsymbol{F}_\xi$ 由正规序乘积的积分定义，但它并非 Wick 代数的元素（例如参见 [29]），因为它并未与紧支撑测试函数进行涂抹。$\mathcal{H}^+$ 上的局域涂抹 Wick 乘积不能定义为算符，只能定义为二次型；也就是说，它们在 Hadamard 态中的期望值是良定义的，但存在无限涨落；关于类光无穷远处的类似论证，另见 [34, 35] 。[8] 这由 Haag 对偶性得出：支撑在某个子区域上的代数的交换子，等于支撑在其因果补区域上的代数；参见 [38]

2. Tomita-Takesaki 模理论

为构造 II 型交叉积代数，我们先回顾一些适用于我们情形的 Tomita-Takesaki 理论工具。

根据 Reeh-Schlieder 定理，真空态 $|\omega_0\rangle$ 相对于代数 $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0)$ 是循环且分离的。因此，我们可以将 Tomita-Takesaki 模理论的工具应用于这一对 $(\mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0)\ |\omega_0\rangle)$。*Tomita* 算子 $\boldsymbol{S}_{\omega_0}$ 定义为

$$\boldsymbol{S}_{\omega_0}\boldsymbol{a}\,|\omega_0\rangle := \boldsymbol{a}^*\,|\omega_0\rangle \quad \forall \boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0) \tag{3.21}$$

Tomita 算子是反线性的，并具有如下极分解：

$$\boldsymbol{S}_{\omega_0}=\boldsymbol{J}_{\omega_0}\boldsymbol{\Delta}_{\omega_0}^{1/2} \tag{3.22}$$

其中，模共轭 $\boldsymbol{J}_{\omega_0}$是反线性的，满足 $\boldsymbol{J}_{\omega_0}^*=\boldsymbol{J}_{\omega_0}$；模算子$\boldsymbol{\Delta}_{\omega_0}$ 是正定算符。相应的模哈密顿量 为

$$\boldsymbol{H_{\omega_0}}=-\log\boldsymbol{\Delta_{\omega_0}} \tag{3.23}$$

它生成模流

$$\boldsymbol{a}\mapsto\boldsymbol{\Delta}_{\omega_0}^{-it}\boldsymbol{a}\boldsymbol{\Delta}_{\omega_0}^{it} \quad \forall\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0) \tag{3.24}$$

根据 Tomita 的一条基本定理（由 Takesaki 在 [8] 中证明），模流构成代数的一参数自同构群，而真空态 $|\omega_0\rangle$ 相对于这一模流满足逆温度为 1 的 KMS 条件。

现在，我们在代数上定义了两个（自同构）流 $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0)$：由穿过视界的通量算符 $\boldsymbol{F}_\xi$ 生成的 Killing 流（式 3.17），以及由模哈密顿量 $\boldsymbol{H}_{\omega_0}$ 生成的模流（式 3.24）。态 $|\omega_0\rangle$ 相对于 Killing 流（逆温度为 $\beta=\frac{2\pi}{\kappa}$）和模流（逆温度为 1）均为 KMS态。根据 *Bisognano-Wichmann* 定理 [9–11]，可以将代数上的两个流视为相同，从而其生成元之间满足以下关系：

$$\boldsymbol{H}_{\omega_0}=\beta\boldsymbol{F}_\xi \tag{3.25}$$

令 $|\omega\rangle\in\mathscr{H}$为另一个循环分离态。现在可以将相对 *Tomita* 算子 $\boldsymbol{S}_{\omega|\omega_0}$定义为：

$$\boldsymbol{S}_{\omega|\omega_0}\boldsymbol{a}\,|\omega_0\rangle=\boldsymbol{a}^*\,|\omega\rangle \quad \forall\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0) \tag{3.26}$$

相对 Tomita 算子也可以通过相对进行类似的极分解 *ive*

模共轭 $\boldsymbol{J}_{\omega|\omega_0}$、相对模算子 $\boldsymbol{\Delta}_{\omega|\omega_0}$ 和相对模哈密顿量 作为

$$\boldsymbol{S}_{\omega|\omega_0} = \boldsymbol{J}_{\omega|\omega_0}\boldsymbol{\Delta}^{1/2}_{\omega|\omega_0}\,, \quad \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega_0}} = -\log \boldsymbol{\Delta}_{\omega|\omega_0} \tag{3.27}$$

最后，Araki 的相对熵定义如下：

$$S(\omega|\omega_0) := -\langle\omega|\boldsymbol{H}_{\omega|\omega_0}|\omega\rangle \tag{3.28}$$

我们在此强调，对于任意冯·诺伊曼因子上的任意两个（循环且分离的）态，都可以定义相对熵。相较之下，由于缺乏重整化迹和可重整化的密度矩阵，III型因子上的态的冯·诺依曼熵是未定义的。

3. 着装可观测量与交叉积代数

借助模理论的工具，我们现在回顾交叉积代数及相应迹的构造（参见 [14, 15]）。这将引导我们讨论右侧未来视界上与观察者耦合的量子场论所对应的约化密度矩阵的熵（我们稍后会对此作出说明）。

在完整的量子引力理论中，可观测量应当是微分同胚不变的。然而，由于我们仅考虑在具有 Killing 对称性的背景上进行的微扰引力，因此应当考虑在 Killing 流下不变的可观测量。不过，一般而言，局域可观测量在任何微分同胚下都不保持不变，这从式3.16中即可看出。有人提出，可以构造定义恰当的“引力着装”或“关系型”可观测量，使其保持不变 [40–49]。

在 [14] 中，这类可观测量是通过引入一个与时空中的量子场论耦合的额外“观察者自由度”来定义的。联合的“关系可观测量”因此在背景时空的 Killing 对称性下保持不变。这一形式主义已推广至渐近平坦黑洞时空；在这种情况下，不再引入观察者，而是将可观测量“着装”到所考虑时空边界处的引力荷上 [15, 25]。将此类观察者或荷加入算子代数，自然会导出交叉积构造，由此得到一个扩展代数，它是一个 II 型因子，并且能够良好地定义态的熵。现在，我们为微扰量子引力定义这类可观测量。

回顾一下，$\mathfrak{A}(\mathcal{H}^+_R, \omega_0)$ 的代数元素在 Killing 流下并非不变。特别地，由方程 3.16 和 3.18 可知，Weyl 算符 $\boldsymbol{\mathcal{W}}(s)$ 的变换形式为

$$\alpha_t[\boldsymbol{\mathcal{W}}(s)] = \boldsymbol{\mathcal{W}}(s_t) = e^{i\boldsymbol{F}_\xi t}\boldsymbol{\mathcal{W}}(s)e^{-i\boldsymbol{F}_\xi t} \tag{3.29}$$

为了构造在 Killing 流下不变的可观测量，我们需要用引力荷对 Weyl算符 $\mathcal{W}(s)$ 进行适当的“着装”。对于线性化引力，这些荷由 HWZ熵二阶变分的极限值给出（见方程 3.13）。然而，由于这些荷涉及二阶变分，因此它们并未先验地包含在我们的可观测量代数中。因此，我们将算子代数扩展为包含一个额外的一维自由度，如下所示。考虑

$$X := \frac{1}{\beta}\delta^2 S_{\mathrm{HWZ}}[i_R^+] \tag{3.30}$$

这个量 X 将作为“观察者哈密顿量”的类比，正如下文所述。我们将 X 表示为希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R})$上的乘法算符 $\boldsymbol{X}$ ，该空间由平方可积函数 $f(X)$构成。因此，我们的扩展希尔伯特空间将为

$$\mathscr{H}^{\mathrm{ext}} := \mathscr{H} \otimes L^2(\mathbb{R}) \tag{3.31}$$

现在我们利用式 3.13，进而将 $C:=\frac{1}{\beta}\delta^2 S_{\mathrm{HWZ}}[i_L^-]$ 表示为作用于 $\mathscr{H}_{\mathrm{ext}}$ 上的算符：

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{F}_\xi \tag{3.32}$$

由于 $\boldsymbol{C}$ 位于右楔区的因果补中$\mathcal{R}$ ，它与 $\mathcal{R}$中的所有“物理”可观测量对易。因此，式3.32 在 $\mathcal{R}$中的物理可观测量上充当“引力约束”。与 $\boldsymbol{C}$ 对易的可观测量将是我们的“着装可观测量”。

为了明确构造这些可观测量，我们在 $L^2(\mathbb{R})$ 上引入“正则共轭”算符$\boldsymbol{p}$ ，使其满足[9]

$$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{p}] = i\mathbf{1} \tag{3.33}$$

接着，我们扩展 Killing 流，由 $-\boldsymbol{X}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中生成 Killing 流；也就是说，如果 $\boldsymbol{b}$是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的线性算符，那么

$$\alpha_t[\boldsymbol{b}] = e^{-i\boldsymbol{X}t}\boldsymbol{b}e^{i\boldsymbol{X}t} \tag{3.34}$$

因此 $\alpha_t[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{X}$ 和 $\alpha_t[\boldsymbol{p}] = \boldsymbol{p} + t\mathbf{1}$。由此， $\boldsymbol{p}$ 充当与“观察者哈密顿量” $-\boldsymbol{X}$共轭的“时间算符”。因此， $-\boldsymbol{C}$ 充当量子场论与“观察者”联合系统的总哈密顿量。

与约束 $\boldsymbol{C}$ 对易的算符可按如下方式得到。考虑

[9] 在我们的情形中，算符 $\boldsymbol{X}$ 的谱并非整个实数轴，因此 $\boldsymbol{p}$ 不能是定义在观察者希尔伯特空间上的自伴算符。可以使用正算子值测度 （POVM）对此进行严格处理，参见例如 [21]。这一微妙之处不会影响我们的主要结果。

Weyl 算符 算符（式3.18）由通量算符和“观测者时间”“着装”如下[10]

$$\boldsymbol{\mathcal{W}}(s,\boldsymbol{p}) := e^{-i\boldsymbol{F}_\xi \boldsymbol{p}}\boldsymbol{\mathcal{W}}(s)e^{i\boldsymbol{F}_\xi \boldsymbol{p}} \tag{3.35}$$

根据着装韦尔算符的定义（式 3.35），并利用式 3.33 和式 3.15，我们有：

$$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{\mathcal{W}}(s,\boldsymbol{p})] = i\boldsymbol{\mathcal{W}}(\pounds_\xi s,\boldsymbol{p})\,, \quad [\boldsymbol{p},\boldsymbol{\mathcal{W}}(s,\boldsymbol{p})] = 0 \tag{3.36}$$

此外，式 3.29 和 3.34 表明，在 Killing 流下，着装韦尔算符保持不变，即

$$\alpha_t[\boldsymbol{\mathcal{W}}(s,\boldsymbol{p})] = \boldsymbol{\mathcal{W}}(s,\boldsymbol{p}) \tag{3.37}$$

因此它们与约束（式 3.32）对易。类似地，我们可以对 $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0)$ 中的所有算符进行“着装”，从而得到 $\mathscr{H}\otimes L^2(\mathbb{R})$ 上所有在 Killing 流下保持不变的有界算符所构成的子代数。这定义了着装代数 $\mathfrak{A}^{\text{dress}}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0)$ 如下：

$$\mathfrak{A}^{\text{dress}}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0) = \left\{e^{-i\boldsymbol{F}_\xi \boldsymbol{p}}\boldsymbol{a}e^{i\boldsymbol{F}_\xi \boldsymbol{p}} \mid \boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0)\right\} \tag{3.38}$$

由于这些着装可观测量仅通过与一个酉算符共轭变换得到，因此这个着装代数与原始场代数同构

$$\mathfrak{A}^{\text{dress}}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0) \cong \mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0) \tag{3.39}$$

因此，$\mathfrak{A}^{\text{dress}}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0)$ 仍然是一个 III型因子。现在将扩展代数$\mathfrak{A}^{\text{ext}}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0)$ 定义为由着装韦尔算符以及算符 $\boldsymbol{X}$ 在“观察者”希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R})$ 上生成的代数的双交换子：

$$\mathfrak{A}^{\text{ext}}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0) = \{e^{-i\boldsymbol{F}_\xi \boldsymbol{p}}\boldsymbol{a}e^{i\boldsymbol{F}_\xi \boldsymbol{p}},\boldsymbol{X}\ \mid \boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0)\}'' \tag{3.40}$$

利用式 3.25 可知，使用通量算符进行着装等价于使用模哈密顿量进行着装，$\boldsymbol{H}_{\omega_0}/\beta$ 这一构造也称为交叉积代数，即 $\mathfrak{A}^{\text{dress}}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0)$ 连同其模自同构群，并且它恰好是 $\mathscr{H}^{\text{ext}}$ 中与荷 $\boldsymbol{C}$ [14, 15, 21, 39]对易的有界算符子代数。根据竹崎定理 [8]，$\mathfrak{A}^{\text{ext}}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0)$ 是一个II型冯·诺伊曼因子。

由于扩展代数是一个 II 型因子，因此可以在扩展代数上定义重整化迹[11] 和密度矩阵。对于 II 型$_1$ 因子，恒等算符属于迹类，且迹通过 $\mathbf{Tr}(\mathbf{1}) = 1$归一化。然而，正如我们很快将要说明的，在我们的情形中，扩展代数将是 II 型$_\infty$，恒等算符不属于迹类，因此迹存在尺度上的不确定性。

---

[10] 注意，$e^{-i\boldsymbol{F}_\xi \boldsymbol{p}}$ 是 $\mathscr{H}_{\text{ext}}$ 上的良定义算符，因为我们可以在 $\boldsymbol{p}$ 上将其“对角化” $L^2(\mathbb{R})$；另见脚注 9。[11]重整化迹是一种迹权，它对代数中的所有有限投影都取有限值；参见 [20, 50]。

在 $\mathfrak{A}^{\mathrm{ext}}(\mathcal{H}_R^+, \omega_0)$ 上，我们使用如下重整化迹（参见 [14, 15]）

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{a}) = \beta \int_{\mathbb{R}} dX e^{\beta X} \langle \omega_0, X | \boldsymbol{a} | \omega_0, X \rangle \tag{3.41}$$

其中 $\boldsymbol{a} \in \mathfrak{A}^{\mathrm{ext}}(\mathcal{H}_R^+, \omega_0)$，$|\omega_0,\ X\rangle := |\omega_0\rangle \otimes |X\rangle$ 以及 $\boldsymbol{X}\,|X\rangle = X\,|X\rangle$。对于在德西特时空中沿世界线运动的观察者这一情形，如文献 [14, 21], 所述，扩展代数是一个 II型$_1$ 因子，且若 $\boldsymbol{X}$ 的谱为 $(-\infty,\ 0)$，则迹方程 3.41 是归一化的。在我们的情形中，我们将按以下方式求得 $\boldsymbol{X}$ 的谱:

我们假设度规微扰衰减得足够快，使得穿过 i_R^+ 的辛通量消失。[12] 因此，在 X 处的边界荷 i_R^+ 沿 $\mathcal{H}_R^+$ 取极限得到的结果，等于沿 $\mathscr{I}_R^+$取极限得到的结果。根据条目 (2)，在 $\mathscr{I}_R^+$ 上没有辐射通量意味着 X 等于空间无穷远处与对称性 ξ^a 相关联的 ADM 哈密顿量的二阶变分[13]

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\delta^2 H}_R^{\mathrm{ADM}} \tag{3.42}$$

一般而言，ADM 哈密顿量的二阶变分未必有上界。因此在我们的情形中，有 $\mathrm{Tr}(\mathbf{1}) = \infty$，因此扩展代数 $\mathfrak{A}^{\mathrm{ext}}(\mathcal{H}_R^+,\omega_0)$ 是 II 型$_\infty$。对于渐近平坦时空中的施瓦西黑洞，这是一个众所周知的事实 [14]。我们将使用迹方程 3.41，而迹中的缩放歧义将表现为冯·诺依曼熵中与态无关的加性歧义（见下文的方程 4.10）。

备注 3.1（不存在最大熵态）。由于代数 $\mathfrak{A}^{\mathrm{ext}}(\mathcal{H}_R^+, \omega_0)$ 是 II 型$_\infty$，不存在任何使冯·诺依曼熵达到最大值的态。事实上，可以证明，对于 II 型$_\infty$ 因子，存在迹任意大的密度矩阵——II 型$_\infty$ 因子中的有限投影，其迹取值遍及整个范围 $[0, \infty)$，参见 [50]第 8.5 节。■

4. 线性化量子引力的经典-量子相干态的熵

有了模理论和交叉积构造这些工具，我们现在将求出视界上微扰引力中各态的熵。

[12]对于施瓦西时空中的无质量场，已有研究证明穿过 i_R^+ 的辛通量会消失 [51]。对于引力扰动，这类衰减结果应可由黑洞的线性化稳定性推出，但我们尚未对此进行详细研究。[13]一般而言，ξ^a 在空间无穷远处是时间平移和空间旋转的线性组合。因此，相应的 ADM 哈密顿量同时包含 ADM 质量/能量和 ADM 角动量。

考虑右楔区 $\mathcal{R}$ 中的一个经典度规微扰 h_{ab}，并设 h_{AB} 为 $\mathcal{H}_R^+$ 上对应的数据。在量子场论中，这个度规微扰可以表示为如下定义的相干态。对于 $\mathcal{H}_R^+$ 上的任意微扰 h_{AB}，定义酉算符

$$\boldsymbol{U} := \exp(-i\boldsymbol{\delta\sigma}(h)/16\pi^2) \tag{4.1}$$

对应于度规微扰 h_{AB} 的右侧未来视界上的（代数）相干态为

$$\omega_h(\boldsymbol{a}) := \omega_0(\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{a}\boldsymbol{U}) \quad \forall \boldsymbol{a} \in \mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+, \omega_0) \tag{4.2}$$

根据上述定义可知，该相干态的单点函数为$\omega_h(\boldsymbol{\delta\sigma}(s)) = \int dV d\Omega_2\ \delta\sigma_{AB}s^{AB}$，其中 $\delta\sigma_{AB} = \frac{1}{2}\partial_V h_{AB}$ 是微扰的剪切，因此，该相干态确实是黑洞的扰动态。方程 4.2 仅定义了可观测量上的代数态 ω_h，这些可观测量支撑在 H_R^+ 上。因此，它在 GNS希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 中没有唯一的表示；该空间由支撑在整个视界上的代数 $\mathrm{A}_{\mathcal{H}^+}$ 构造而成。然而，ω_h 在自然锥 $\mathrm{P}^\#$ 中有唯一的表示 $|\omega_h\rangle$，该自然锥属于 $(\mathfrak{A}(\mathrm{H}_R^+, \omega_0)\ |\omega_0\rangle)$，如下文所述。

模共轭 $\boldsymbol{J}_{\omega_0}$（参见第 3.2 节）定义了一个从代数 $\mathfrak{A}$（$\mathcal{H}_R^+$，ω_0）到其交换子 $\mathfrak{A}$（$\mathcal{H}_R^+$，ω_0）$' = \mathfrak{A}$（$\mathcal{H}_L^+$，ω_0）：

$$j_{\omega_0} : \mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+, \omega_0) \to \mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+, \omega_0)' : \boldsymbol{a} \mapsto j_{\omega_0}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{J}_{\omega_0}\boldsymbol{a}\boldsymbol{J}_{\omega_0} \tag{4.3}$$

$\mathscr{H}$中$(\mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+, \omega_0)\ |\omega_0\rangle)$的自然锥定义为闭包：

$$\mathcal{P}^\# := \overline{\{\boldsymbol{a}j_{\omega_0}(\boldsymbol{a})|\,|\omega_0\rangle\ \mid \boldsymbol{a} \in \mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+, \omega_0)\}} \tag{4.4}$$

其中闭包是相对于希尔伯特空间 $\mathscr{H}$上的范数拓扑取的。关于自然锥中态矢量的性质，我们参阅 [52] 的第2.5.4节。一个重要性质是，任一正规态，即关于 $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+, \omega_0)$上的弱 $*$拓扑连续的态，在自然锥中具有唯一表示。

代数态 ω_h 式 4.2是正规态，因而具有唯一表示$|\omega_h\rangle$ 在自然锥 $\mathcal{P}^\#$ 中由下式给出

$$|\omega_h\rangle = \boldsymbol{U}j_{\omega_0}(\boldsymbol{U})\,|\omega_0\rangle \tag{4.5}$$

其中 j_{ω_0} 是由式 4.3定义的映射。可以验证，$|\omega_h\rangle$ 确实是ω_h 在代数 $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+, \omega_0)$上的一个表示，因为我们可以计算任意 $\boldsymbol{a} \in \mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+, \omega_0)$ 的期望值

as

$$\begin{aligned}\langle\omega_h|\boldsymbol{a}|\omega_h\rangle &= \langle\omega_0|j_{\omega_0}(\boldsymbol{U}^*)\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{a}\boldsymbol{U}j_{\omega_0}(\boldsymbol{U})|\omega_0\rangle \\ &= \langle\omega_0|j_{\omega_0}(\boldsymbol{U}^*)j_{\omega_0}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{a}\boldsymbol{U}|\omega_0\rangle \\ &= \langle\omega_0|\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{a}\boldsymbol{U}|\omega_0\rangle \\ &= \omega_h(\boldsymbol{a})\end{aligned} \tag{4.6}$$

其中在第一行中，我们使用了 $\boldsymbol{J}_{\omega_0}^* = \boldsymbol{J}_{\omega_0}$这一事实，因此 $j_{\omega_0}(\boldsymbol{U})^* = j_{\omega_0}(\boldsymbol{U}^*)$。推导到第二行时，我们使用了 $j_{\omega_0}(\boldsymbol{U})$ 属于交换子代数这一事实，因此将 $j_{\omega_0}(\boldsymbol{U}) \in \mathfrak{A}(\mathcal{H}_L^+, \omega_0)$ 与算符 $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}^*, \boldsymbol{a} \in \mathfrak{A}(\mathcal{H}_R^+, \omega_0)$ 交换。然后在第三个等号处，我们使用了 $\boldsymbol{J}_{\omega_0}^2 = \mathbf{1}$这一事实，因此 $j_{\omega_0}(\boldsymbol{U}^*)j_{\omega_0}(\boldsymbol{U}) = \mathbf{1}$。

对应于相干态 $|\omega_h\rangle$，我们在扩展希尔伯特空间 $\mathscr{H} \otimes L^2(\mathbb{R})$ 中定义一个“经典-量子态” $|\hat{\omega}_h\rangle$：

$$|\hat{\omega}_h\rangle := \int_{\mathbb{R}} dX f(X)\, |\omega_h\rangle \otimes |X\rangle \tag{4.7}$$

其中 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 可解释为“观察者／边界荷的波函数”。

由于扩展代数 $\mathfrak{A}^{\text{ext}}(\mathcal{H}_R^+, \omega_0)$ 是一个 II 型因子，因此存在一个与态 $|\hat{\omega}_h\rangle$ 对应的（重整化）密度矩阵 $\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h} \in \mathfrak{A}^{\text{ext}}(\mathcal{H}_R^+, \omega_0)$，使得

$$\text{Tr}(\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}\boldsymbol{a}) = \langle\hat{\omega}_h|\boldsymbol{a}|\hat{\omega}_h\rangle \quad \forall \boldsymbol{a} \in \mathfrak{A}^{\text{ext}}(\mathcal{H}_R^+, \omega_0)\,, \quad \text{Tr}(\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}) = 1 \tag{4.8}$$

其中，迹泛函 Tr 定义在 $\mathfrak{A}^{\text{ext}}(\mathcal{H}_R^+, \omega_0)$ 上，见方程 3.41。这个密度矩阵$\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}$ 类似于完整半经典相干态在整个未来视界上的约化密度矩阵，适用范围则是右侧未来视界。注意，这个约化密度矩阵并非仅仅是 $\mathcal{H}_R^+$ 上的约化量子场论态（这是未定义的），而是右侧视界上量子场论与观察者的联合约化态。

现在，进一步利用迹泛函方程 3.41 ，我们可以计算密度矩阵的冯·诺依曼熵 $\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}$ 如下

$$S_{\text{vN}}(\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}) = -\text{Tr}(\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h} \log \boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}) \tag{4.9}$$

计算过程十分繁琐，详见附录A。这里我们将直接使用 $S_{\text{vN}}(\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h})$的最终结果。在“观察者波函数” f “缓慢变化”的近似下（粗略地说，观察者波函数的傅里叶变换在零动量处高度集中

，见附录A），我们有：

$$S_{\mathrm{vN}}(\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}) = -S(\omega_h|\omega_0) + \beta \langle \boldsymbol{X} \rangle_{\hat{\omega}_h} + S(f) + \log \beta \tag{4.10}$$

其中 $S(f) = -\int dX |f(X)|^2 \log |f(X)|^2$。这一结果与 [15] 相符，因为在黑洞时空中的标量自由场背景下，曾推导出类似的$\mathbb{R}$关系。

文献 [17, 22] 已计算相干态与真空态之间的相对熵。首先注意到，[17] 计算的是 $S(\omega_0|\omega_h)$，而不是 $S(\omega_h|\omega_0)$。然而，对于自然锥中的 $|\omega_h\rangle$，可以证明二者相等。其次，[17] 使用的是由支撑在某个截面未来且满足 $V = V_0$ 的 Weyl算符生成的冯·诺伊曼代数中的模算子，而 [22] 使用的是某个截面的过去。因此，他们的相对熵表达式包含该截面的仿射时间 V_0。相应的模流则对应一种保持 V_0 不变的“伸缩变换”。在我们的情形中，相关代数是支撑在 $\mathcal{H}_R^+$ 和 $V_0 = 0$上的代数。因此，我们情形下的相对熵为

$$S(\omega_h|\omega_0) = \beta F_\xi[\mathcal{H}_R^+] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{H}_R^+} dV d\Omega_2 V (\delta\sigma_h)^2 \tag{4.11}$$

其中 $\delta\sigma_h = \frac{1}{2}\partial_V h$ 是位于$\mathcal{H}^+$、对应于 h_{AB} 的扰动剪切，因而 $F_\xi[\mathcal{H}_R^+]$ 是线性化扰动通过 $\mathcal{H}_R^+$落入黑洞的经典辐射通量。

此外，由于我们已假定没有（扰动）辐射通量通过类光无穷远，因此有$\langle \boldsymbol{X} \rangle_{\hat{\omega}_h} = \langle \boldsymbol{\delta^2 H}_R^{\mathrm{ADM}} \rangle_{\hat{\omega}_h}$，即空间无穷远处ADM哈密顿量的二阶变分（与Killing 场 ξ^a相关联），也可视为一个二次型。于是，式4.10 可写为

$$S_{\mathrm{vN}}(\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}) = \langle \boldsymbol{\delta^2 H}_R^{\mathrm{ADM}} \rangle_{\hat{\omega}_h} - \beta F_\xi[\mathcal{H}_R^+] + S(f) + \log \beta \tag{4.12}$$

除以 β，左边是熵的变化，右边表示相对于 ξ^a 由引力扰动引起的“能量”变化（相差与态无关的常数）。因此，式4.12 可解释为量子化引力扰动的热力学第一定律。

接下来，我们将式4.10 与动力学黑洞的 Hollands-Wald-Zhang 熵联系起来[18]。考虑视界的某个截面$\mathcal{C}$。然后，我们可以将式3.11 从$\mathcal{C}$ 积分到 i_R^+，并使用式3.12 得到：

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{\beta} \boldsymbol{\delta^2 S}_{\mathrm{HWZ}}[\mathcal{C}] + \boldsymbol{F}_\xi[\mathcal{H}_{\geq \mathcal{C}}^+] \tag{4.13}$$

其中 $\boldsymbol{F}_\xi[\mathcal{H}_{\geq \mathcal{C}}^+]$ 度量穿过$\mathcal{H}_{\geq \mathcal{C}}$的通量，即视界$\mathcal{H}_R^+$ 中位于

截面$\mathcal{C}$ 与 i_R^+之间的部分。一般而言，截断通量 $\boldsymbol{F}_\xi[\mathcal{H}^+_{\geq\mathcal{C}}]$ 是一个二次型，而不是算符（见脚注7），定义在 $\mathscr{H}$上，因此，（量子）熵 $\boldsymbol{\delta^2 S}_{\mathrm{HWZ}}[\mathcal{C}]$ 也是定义在 $\mathscr{H}^{\mathrm{ext}}$上的二次型。现在，将式4.13 代入式4.10 可得：

$$S(\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}) = -S(\omega_h|\omega_0) + \langle \boldsymbol{\delta^2 S}_{\mathrm{HWZ}}[\mathcal{C}]\rangle_{\hat{\omega}_h} + \beta \langle \boldsymbol{F}_\xi[\mathcal{H}^+_{\geq\mathcal{C}}]\rangle_{\hat{\omega}_h} + S(f) + \log\beta \tag{4.14}$$

可以证明，对于相干态 ω_h ，期望值 $\langle \boldsymbol{F}_\xi[\mathcal{H}^+_{\geq\mathcal{C}}]\rangle_{\hat{\omega}_h}$ 等于微扰 h_{AB} 穿过区域$\mathcal{H}^+_{\geq\mathcal{C}}$的经典通量。利用这一点以及方程 4.11和4.14 ，我们得到：

$$S(\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}) = \langle \boldsymbol{\delta^2 S}_{\mathrm{HWZ}}[\mathcal{C}]\rangle_{\hat{\omega}_h} - \beta F_\xi[\mathcal{H}^+_{<\mathcal{C}}] + S(f) + \log\beta \tag{4.15}$$

其中

$$F_\xi[\mathcal{H}^+_{<\mathcal{C}}] = \frac{\kappa}{4\pi}\int_{\mathcal{H}^+_{<\mathcal{C}}} dV d\Omega_2 V(\delta\sigma_h)^2 \tag{4.16}$$

是穿过$\mathcal{H}^+_{<\mathcal{C}}$的经典通量；$\mathcal{H}^+_R$ 是视界$\mathcal{H}^+_R$ 中位于分岔面$\mathcal{B}$ 与截面$\mathcal{C}$之间的部分。因此，在微扰理论的首阶（对于线性化引力而言，这是二阶），冯·诺依曼熵可以与动力学黑洞在$\mathcal{H}^+_R$的任意截面$\mathcal{C}$ 处的 HWZ 熵联系起来；此外，还有一个通量项，用于度量截至截面$\mathcal{C}$落入黑洞的引力通量。

备注 4.1（穿过类光无穷远的引力通量）。在本文的主要分析中，为简单起见，我们假设度规微扰不会通过类光无穷远辐射。不过，我们可以放宽这一假设，并将 $\mathscr{I}^+_R$ 处的辐射纳入考虑。在渐近平坦时空中，类光无穷远处线性化的辐射自由度是微扰后的 News 张量，可按照 [34, 53, 54]对其进行量子化。由这些 News 算符生成的代数存在一个在 Bondi–Metzner–Sachs（BMS）群下不变的真空态。[14] 相应的 GNS表示给出了渐近辐射算子代数的希尔伯特空间表示；可以证明，该希尔伯特空间上的有界算符冯·诺伊曼代数是 I 型因子∞。关于线性化引力情形的细节，请参阅 [25], ；下面我们仅概述对本文分析所作的改动。

任意渐近平坦度规微扰的辐射数据，都可以用一个相干态表示 $|\psi\rangle$ ，与式4.2类似。与主要分析中一样，我们将 $\boldsymbol{X}$ 用作“观察者”哈密顿量，并在视界上构造交叉积和扩展希尔伯特空间。然后取张量积 $|\Psi\rangle :=|\hat{}\omega_h\rangle\otimes|\psi\rangle$ ，以表示视界（包括“观察者波函数”）和类光无穷远上的完整态。由于我们将类光无穷远处的态$|\psi\rangle$ 与视界上的交叉积态 $|\hat{}\omega_h\rangle$ 张量相乘，式4.10 保持不变，且只有视界态对右侧作出贡献。

[14]请注意，无论是限制在未来 类光无穷远上的哈特尔-霍金态，还是昂鲁态，都不会给出 BMS 不变真空态。

背景时空的视界 Killing 矢量场 ξ^a 可以证明是渐近BMS对称代数中某个庞加莱子代数的一个元素；一般而言， ξ^a 将是BMS李代数中时间平移和转动的线性组合 [55]。该向量场在渐近场上的流由一个通量算符生成，我们将其记为 $\boldsymbol{F}_\xi[\mathscr{I}_R^+]$；通量的显式表达式可通过对例如文献 [56, 57]中的公式进行线性化得到。将 $\boldsymbol{X}$ 与 ADM 哈密顿量联系起来时，需要考虑穿过类光无穷远的这一通量：

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\delta^2 H}_R^{\mathrm{ADM}} + \boldsymbol{F}_\xi[\mathscr{I}_R^+] \tag{4.17}$$

由于该微扰由类光无穷远上的相干态表示，因此通量的期望值由该微扰的经典通量表达式给出，公式 4.12 相应地修改为

$$S_{\mathrm{vN}}(\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}) = \beta \langle \boldsymbol{\delta^2 H}_R^{\mathrm{ADM}} \rangle_\Psi - \beta F_\xi[\mathcal{H}_R^+] + \beta F_\xi[\mathscr{I}_R^+] + S(f) + \log \beta \tag{4.18}$$

■

备注 4.2（物质场）。 若考虑半经典物质，本文的整个分析不变。此时，态将把物质扰动与线性化引力态作张量积纳入其中。对于无质量物质场，视界和类光无穷远处的通量项都将增加来自物质场的贡献。对于有质量场，类光无穷远处不会有贡献，但 X处的“边界荷” i_R^+ 将因有质量场的贡献而发生改变（例如参见[34]）。■

备注 4.3（记忆与软辐射）。 在主要分析中，我们忽略了视界和类光无穷远处任何“软辐射”或记忆效应的影响。然而，现在已有充分证据表明，这种低频辐射在类光无穷远 [34, 54, 57, 58]和视界 [22, 59–62]处的量子理论中都发挥着关键作用。近期，Tomita-Takesaki 理论的形式体系已被推广，以纳入此类“软辐射”[22]。借助这一形式体系，我们预计可以扩展分析，以涵盖视界和类光无穷远处具有非平凡记忆的此类线性化微扰。■

致谢

AM 受拉曼研究所访问学生项目（VSP）的资助。

附录 A：视界上经典-量子相干态的冯·诺依曼熵计算

本附录详细介绍了如何使用重整化迹（式 4.10）计算冯·诺依曼熵的表达式（式 3.41）。

利用 $|\omega_h\rangle \in \mathcal{P}^{\#}$ 这一事实，我们在式 4.8中使用式 3.41的迹表达式，得到[15, 39]:

$$\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h} = \frac{1}{\beta} e^{-i\frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0}}{\beta}\boldsymbol{p}} f\left(\boldsymbol{X} + \frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0}}{\beta}\right) e^{-\frac{\beta \boldsymbol{X}}{2}} \boldsymbol{\Delta}_{\omega_h|\omega_0} e^{-\frac{\beta \boldsymbol{X}}{2}} f^*\left(\boldsymbol{X} + \frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0}}{\beta}\right) e^{i\frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0}}{\beta}\boldsymbol{p}} \tag{A.1}$$

式 A.1 的推导在计算上相当复杂，其中涉及计算交叉积因子 $\mathfrak{A}^{\text{ext}}(\mathrm{H}_R^+, \omega_0)$ 中态 $|\omega_h$ 的模算子，记为 $\boldsymbol{\Delta}_{\hat{\omega}_h}$。接着可以看到，$\boldsymbol{\Delta}_{\hat{\omega}_h}$ 可分解为代数 $\mathfrak{A}^{\text{ext}}(\mathrm{H}_R^+, \omega_0)$ 中的一个元素，以及其交换子代数 $\mathfrak{A}^{\text{ext}}(\mathrm{H}_R^+, \omega_0)'$ 在 $\mathscr{H}\text{ext}$ 中的一个元素，即 $\boldsymbol{\Delta}_{\hat{\omega}_h} = \boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}(\boldsymbol{\rho}'_{\hat{\omega}_h})^{-1}$ 其中 $\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h} \in \mathfrak{A}^{\text{ext}}(\mathrm{H}_R^+, \omega_0)$ 被视为对应于 $\mathfrak{A}^{\text{ext}}(\mathrm{H}_R^+, \omega_0)$ 中态 $|\omega_h$ 的密度矩阵。我们不再展示这一构造的细节，相关内容可见 [39] 的附录 E。

现在注意到 $f(\boldsymbol{X} + \frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0}}{\beta})$ 和 $\boldsymbol{\Delta}_{\omega_h|\omega_0}$ 不对易：

$$\left[f(\boldsymbol{X} + \frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0}}{\beta}), \boldsymbol{\Delta}_{\omega_h|\omega_0}\right] = f'(\mathbf{X})\left[\frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0}}{\beta}, \boldsymbol{\Delta}_{\omega_h|\omega_0}\right] + \frac{1}{2} f''(\mathbf{X})\left[\frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0}^2}{\beta^2}, \boldsymbol{\Delta}_{\omega_h|\omega_0}\right] + \dots \tag{A.2}$$

因此，式中 $\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}$ 的对数A.1 不会在右侧各项上加性分配。不过，这里我们作出一个简化假设，认为函数 f 缓慢变化，即 f 的导数可以忽略不计（更确切地说，导数远小于式 A.2中的相应对易子）。在此缓变近似下，我们有：

$$\left[f\left(\boldsymbol{X} + \frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0}}{\beta}\right), \boldsymbol{\Delta}_{\omega_h|\omega_0}\right] \approx 0 \tag{A.3}$$

因此，现在我们可以轻松地对式 A.1 取对数，因为对数可以在所有彼此对易的算符上加性分配，于是有：

$$-\log \boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h} = e^{-i\frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0}}{\beta}\boldsymbol{p}}\left[\log\beta + \boldsymbol{H}_{\omega_h|\omega_0} + \beta\boldsymbol{X} - \log\left|f\left(\boldsymbol{X} + \frac{\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\omega_0}}}{\boldsymbol{\beta}}\right)\right|^2\right] e^{i\frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0}}{\beta}\boldsymbol{p}} \tag{A.4}$$

现在，$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{p}] = i\mathbf{1}$ 推出了 $e^{-i\frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0}}{\beta}\boldsymbol{p}} \boldsymbol{X} e^{i\frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0}}{\beta}\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{X} - \frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0}}{\beta}$，因此：

$$e^{-i\frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0}}{\beta}\boldsymbol{p}}\left|f\left(\boldsymbol{X} + \frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0}}{\beta}\right)\right|^2 e^{i\frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0}}{\beta}\boldsymbol{p}} = |f(\boldsymbol{X})|^2 \tag{A.5}$$

此外，$e^{-i\frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0}}{\beta}\boldsymbol{p}}(\beta\boldsymbol{X})e^{i\frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0}}{\beta}\boldsymbol{p}} = \beta\boldsymbol{X} - \boldsymbol{H}_{\omega_0}$。现在，利用*Connes*余循环的两种等价定义（参见 [39]的附录C），我们有 $\boldsymbol{H}_{\omega_h|\omega_0} - \boldsymbol{H}_{\omega_0} = \boldsymbol{H}_{\omega_h} - \boldsymbol{H}_{\omega_0|\omega_h}$，其中$\boldsymbol{H}_{\omega_h}$ 是与态 $|\omega_h\rangle$对应的模哈密顿量。因此，式A.4可简化为

$$-\log \boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h} = e^{-i\frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0}}{\beta}\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{H}_{\omega_h} - \boldsymbol{H}_{\omega_0|\omega_h})e^{i\frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0}}{\beta}\boldsymbol{p}} + \beta\boldsymbol{X} - \log|f(\boldsymbol{X})|^2 + \log\beta \tag{A.6}$$

现在注意到，单独地 $\boldsymbol{H}_{\omega_h}$,$\boldsymbol{H}_{\omega_0|\omega_h} \notin \mathfrak{A}(\mathrm{H}_R^+,\omega_0)$。然而 $(\boldsymbol{H}_{\omega_h} - \boldsymbol{H}_{\omega_0|\omega_h}) \in \mathfrak{A}(\mathrm{H}_R^+,\omega_0)$，并且由以下事实可知：该算符正比于 Connes 流在恒等元处的导数，该流关联了 $|\omega_0$ 和 $|\omega_h$ 的模流。更多详情请参见 [39] 的附录C。此外，对于 $\mathrm{P}^\#$中的态 $|\omega_h$，有 $j_{\omega_0}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{\Delta}_{\omega_0}j_{\omega_0}(\boldsymbol{U}^*) = \boldsymbol{\Delta}_{\omega_0|\omega_h}$ [17]。因此，$\boldsymbol{H}_{\omega_0|\omega_h} = j_{\omega_0}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{H}_{\omega_0}j_{\omega_0}(\boldsymbol{U}^*)$。现在，由于 $j_{\omega_0}(\boldsymbol{U}) \in \mathfrak{A}(\mathrm{H}_R^+,\omega_0)'$，显然，由 $\boldsymbol{H}_{\omega_0}$ 和 $\boldsymbol{H}_{\omega_0|\omega_h}$ 生成的流在 $\mathfrak{A}(\mathrm{H}_R^+,\omega_0)$ 上一致。因此，式 A.6 可写为：

$$-\log \boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h} = e^{-i\frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0|\omega_h}}{\beta}\boldsymbol{p}}\boldsymbol{H}_{\omega_h}e^{i\frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0|\omega_h}}{\beta}\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{H}_{\omega_0|\omega_h} + \beta\boldsymbol{X} - \log|f(\boldsymbol{X})|^2 + \log\beta \tag{A.7}$$

现在回顾一下，经典-量子态 $\lceil\omega_h\rangle$ 的冯·诺依曼熵为：

$$S_{\mathrm{vN}}(\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}) = -\operatorname{Tr}(\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}\log\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}) = -\langle\hat{\omega}_h|\log\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}|\hat{\omega}_h\rangle \tag{A.8}$$

由于函数 f 在 X中变化缓慢，其傅里叶变换在动量 $p = 0$ 附近形成尖锐峰值，因此 $\boldsymbol{p}|f\rangle \approx 0$。利用这一点以及 $\boldsymbol{H}_{\omega_h}|\omega_h\rangle = 0$（因为每个态相对于其模哈密顿量的能量为零），在缓慢变化的 f近似下，我们有：

$$\langle\hat{\omega}_h|e^{-i\frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0|\omega_h}}{\beta}\boldsymbol{p}}\boldsymbol{H}_{\omega_h}e^{i\frac{\boldsymbol{H}_{\omega_0|\omega_h}}{\beta}\boldsymbol{p}}|\hat{\omega}_h\rangle \approx 0 \tag{A.9}$$

Now:

$$\langle\hat{\omega}_h|(-\boldsymbol{H}_{\omega_0|\omega_h})|\hat{\omega}_h\rangle = \langle\omega_h|\log\boldsymbol{\Delta}_{\omega_0|\omega_h}|\omega_h\rangle = \langle\omega_h|-\log\boldsymbol{\Delta}_{\omega_h|\omega_0}|\omega_h\rangle = -S(\omega_h|\omega_0) \tag{A.10}$$

其中第一个等式是平凡的，而在第二个等式中我们利用了如下事实：$|\omega_h\rangle$ 属于 $\mathcal{P}^\#$，因此 $\boldsymbol{J}_{\omega_h}\boldsymbol{\Delta}_{\omega_h|\omega_0}\boldsymbol{J}_{\omega_h} = \boldsymbol{\Delta}_{\omega_0|\omega_h}^{-1}$（这是因为对于 $|\omega_h\rangle \in \mathcal{P}^\#$，相对模共轭 $\boldsymbol{J}_{\omega_h|\omega_0} = \boldsymbol{J}_{\omega_h}$以及如下事实：$\boldsymbol{J}_{\omega_h|\omega_0}\boldsymbol{\Delta}_{\omega_h|\omega_0}\boldsymbol{J}_{\omega_h|\omega_0} = \boldsymbol{\Delta}_{\omega_0|\omega_h}^{-1}$。参见第 V.2 节，载于 [33]，详见该处）。最后一个等式由相对熵的定义得出（式3.28）。因此冯·诺依曼熵（式A.8）的计算结果为

$$S_{\mathrm{vN}}(\boldsymbol{\rho}_{\hat{\omega}_h}) = -S(\omega_h|\omega_0) + \beta\langle\boldsymbol{X}\rangle_{\hat{\omega}_h} + S(f) + \log\beta \tag{A.11}$$

其中 $S(f) = -\int dX|f(X)|^2$对数 $|f(X)|^2$，如式 4.10所示。$\mathbb{R}$

[1] *J.D. Bekenstein*，《黑洞与熵》，*Phys. Rev. D 7 (1973) 2333*。[2] *J.M. Bardeen*、*B. Carter* 和 *S.W. Hawking*，《黑洞力学四定律》，《数学物理通讯》*31 (1973) 161*。[3] *S.W. Hawking*，《黑洞与热力学》，*Phys. Rev. D 13 (1976) 191*。[4] *R.M. Wald*，《黑洞熵即诺特荷》，*Phys. Rev. D 48 (1993) R3427*[gr-qc/9307038]。[5] *V. Iyer* 和 *R.M. Wald*，《诺特荷的一些性质及动力学黑洞熵的一项提议》，*Phys. Rev. D 50 (1994)* 846 [gr-qc/9403028]。[6] *H. Araki*，《自由场关联的冯·诺伊曼代数的类型》，*Prog. Theor. Phys. 32 (1964) 956*。[7] *M. Takesaki*，《交叉积的对偶性与*III*型冯·诺伊曼代数的结构》，《数学学报》*131 (1973) 249*。[8] *M. Takesaki*，《模*Hilbert*代数的*Tomita*理论及其应用》，《数学讲义》第*128*卷，*Springer*，柏林、海德堡 *(1970)*，*10.1007/BFb0065832*。[9] *J.J. Bisognano* 和 *E.H. Wichmann*，《关于厄米标量场的对偶条件》，*J. Math. Phys. 16 (1975) 985*。[10] *G.L. Sewell*，《流形上的量子场：*PCT*与引力诱导热态》，*Ann. Phys. 141 (1982) 201*。[11] *S.J. Summers* 和 *R. Verch*，《模包含、霍金温度与弯曲时空中的量子场论》，*Lett. Math. Phys. 37 (1996) 145*。[12] *E. Witten*，《引力与交叉积》，《高能物理学杂志》*2022 (2022)* 8 [2112.12828]。[13] *V. Chandrasekaran*、*G. Penington* 和 *E. Witten*，《大*N*代数与广义熵》，《高能物理学杂志》*04 (2023)* 009 [2209.10454]。[14] *V. Chandrasekaran*、*R. Longo*、*G. Penington* 和 *E. Witten*，《德西特空间的可观测量代数》，《高能物理学杂志》*2023 (2023)* 82 [2206.10780]。[15] *J. Kudler-Flam*、*S. Leutheusser* 和 *G. Satishchandran*，《广义黑洞熵就是冯·诺依曼熵》，*Phys. Rev. D 111 (2025)* 025013 [2309.15897]。[16] *A.C. Wall*，《高曲率引力的第二定律》，《现代物理学国际期刊*D*辑》*24 (2015)*1544014 [1504.08040]。[17] *S. Hollands* 和 *A. Ishibashi*，《新闻与信息》，*Class. Quant. Grav, 36 (2019) 195001*[1904.00007]。[18] *S. Hollands*、*R. M. Wald* 和 *V.G. Zhang*，《动力学黑洞的熵》，*Phys. Rev. D 110 (2024)* 024070 [2402.00818]。[19] *S. Hollands* 和 *R.M. Wald*，《黑洞与黑膜的稳定性》，《数学物理通讯》

321 (2013) 629 [1201.0463].[20] *J. Sorce*，《冯·诺伊曼代数类型分类札记》，《数学物理评论》*36 (2024)* 2430002 [2302.01958].[21] *C.J. Fewster*、*D.W. Janssen*、*L.D. Loveridge*、*K. Rejzner* 和 *J. Waldron*，《量子场论中的量子参考系、测量方案与局域代数的类型》，《数学物理通讯》*406 (2024)* 19 [2403.11973].[22] *D.L. Danielson* 和 *G. Satishchandran*，《视界与软量子信息》，*2512.20754*.[23] *R.M. Wald*，《广义相对论》，芝加哥大学出版社 *(2006)*.[24] *J. Lee* 和 *R.M. Wald*，《局域对称性与约束》，*J. Math. Phys. 31 (1990) 725*.[25] *M.S. Klinger*、*J. Kudler-Flam* 和 *G. Satishchandran*，《广义熵即冯·诺伊曼熵 *II*：完整对称群与边缘模》，*2601.07910*.[26] *V. Chandrasekaran*、*É.É. Flanagan* 和 *K. Prabhu*，《广义相对论中零边界上的对称性与荷》，《高能物理学杂志》*11 (2018)* 125 [1807.11499].[27] *V. Chandrasekaran* 和 *K. Prabhu*，《广义相对论中因果菱形上的对称性、荷与守恒定律》，《高能物理学杂志》*10 (2019)* 229 [1908.00017].[28] *C.J. Fewster* 和 *D.S. Hunt*，《宇宙学真空时空中线性化引力的量子化》，《数学物理评论》*25 (2013)* 1330003 [1203.0261].[29] *S. Hollands* 和 *R.M. Wald*，《弯曲时空中的量子场》，*Phys. Rept. 574 (2015) 1*[1401.2026].[30] *K. Sanders*，《静态分叉 *Killing* 视界两侧哈特尔–霍金–以色列态的构造》，*Lett. Math. Phys. 105 (2015)* 575 [1310.5537].[31] *B.S. Kay* 和 *R.M. Wald*，《关于具有分叉 *Killing* 视界的时空中平稳、非奇异准自由态的唯一性与热性质的定理》，*Phys. Rep. 207 (1991) 49*.[32] *W.G. Unruh*，《黑洞蒸发札记》，*Phys. Rev. D 14 (1976*年*) 870*.[33] *R. Haag*，《局域量子物理：场、粒子、代数》，《物理学文本与专著》，施普林格出版社 *(1993)*.[34] *K. Prabhu*、*G. Satishchandran* 和 *R.M. Wald*，《量子场论与量子引力中的红外有限散射理论》，*Phys. Rev. D 106 (2022)* 066005 [2203.14334].[35] *R. Bousso*、*V. Chandrasekaran*、*I.F. Halpern* 和 *A.C. Wall*，《渐近荷无法在有限时间内测量》，*Phys. Rev. D 97 (2018)* 046014 [1709.08632].[36] *J. von Neumann*，《关于泛函运算的代数与正规算子理论》，*Math. Ann. 102 (1930) 370*.[37] *R.V. Kadison* 和 *J.R. Ringrose*，《算子代数基础，第一卷：初等理论》，《数学研究生教程》第*15*卷，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯 *(1997)*.[38] *A. Garbarz* 和 *G. Palau*，《关于 *Haag* 对偶性的一则札记》，*Nucl. Phys. B 980 (2022) 115797*[2108.01257].

[39] *K. Jensen*、*J. Sorce* 和 *A.J. Speranza*，《量子引力中一般子区域的广义熵》，《高能物理学杂志》*2023 (2023)* 20 [2306.01837].[40] *B.S. DeWitt*，《几何的量子化》，载于《引力：当前研究导论》，*L. Witten* 编（纽约），第*266–381*页，*John Wiley & Sons (1962)*.[41] *B.S. DeWitt*，《引力的量子理论。*1.* 正则理论》，*Phys. Rev. 160 (1967) 1113*.[42] *W. Donnelly* 和 *S.B. Giddings*，《微分同胚不变可观测量及其非局域代数》，*Phys. Rev. D 93 (2016)* 024030 [1507.07921].[43] *W. Donnelly* 和 *L. Freidel*，《规范理论与引力中的局域子系统》，《高能物理学杂志》*09 (2016)*102 [1601.04744].[44] *J.D. Brown* 和 *K.V. Kuchar*，《尘埃作为正则量子引力中的时空标准》，*Phys. Rev. D 51 (1995)* 5600 [gr-qc/9409001].[45] *L. Ciambelli*、*L. Freidel* 和 *R.G. Leigh*，《类光拉乔杜里：正则结构与穿衣时间》，《高能物理学杂志》*01 (2024)* 166 [2309.03932].[46] *C. Goeller*、*P.A. Hoehn* 和 *J. Kirklin*，《引力中的微分同胚不变可观测量与动力学参考系：调和体局域性与广义协变性》，*2206.01193*.[47] *C. Rovelli*，《关系量子力学》，*Int. J. Theor. Phys. 35 (1996) 1637*[quant-ph/9609002].[48] *B. Dittrich*，《正则广义相对论中的部分与完全可观测量》，*Class. Quant. Grav. 23 (2006)* 6155 [gr-qc/0507106].[49] *J. Tambornino*，《引力中的关系可观测量：综述》，*SIGMA 8 (2012) 017*[1109.0740].[50] *R.V. Kadison* 和 *J.R. Ringrose*，《算子代数基础，第二卷：高级理论》，《数学研究生教程》第*16*卷，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯 *(1997)*.[51] *C. Dappiaggi*、*V. Moretti* 和 *N. Pinamonti*，《在 *Schwarzschild* 时空中严格构造昂鲁态及其哈达玛性质》，*Adv. Theor. Math. Phys. 15 (2011) 355*[0907.1034].[52] *O. Bratteli* 和 *D.W. Robinson*，《算子代数与量子统计力学 *1*：*C**代数与*W**代数、对称群、态的分解》，《理论与数学物理》，*Springer*，柏林、海德堡，第*2*版 *(1987)*，*10.1007/978-3-662-02520-8*.[53] *A. Ashtekar*，《引力场的渐近量子化》，*Phys. Rev. Lett. 46 (1981) 573*.[54] *A. Ashtekar*，《渐近量子化：基于*1984*年那不勒斯讲座》，《物理科学专著与教科书》，*Bibliopolis*，那不勒斯，意大利 *(1987)*.[55] *A. Ashtekar* 和 *B.C. Xanthopoulos*，《与类光无穷远处渐近平坦性相容的等距变换：完整描述》，*J. Math. Phys. 19 (1978) 2216*.[56] *A.M. Grant*、*K. Prabhu* 和 *I. Shehzad*，《广义相对论中类光无穷远渐近荷的 *Wald-Zoupas*方案》，*Class. Quant. Grav. 39 (2022) 085002*

[arXiv:2105.05919].[57] *K. Prabhu* 和 *G. Satishchandran*，《红外有限散射理论：散射态与 *BMS*群表示》，《高能物理学杂志》*08 (2024)* 055 [2402.00102].[58] *K. Prabhu* 和 *G. Satishchandran*，《红外有限散射理论：振幅与软定理》，*Phys. Rev. D 110 (2024)* 085022 [2402.18637].[59] *D.L. Danielson*、*G. Satishchandran* 和 *R.M. Wald*，《黑洞使量子叠加态退相干》，《现代物理学国际期刊*D*辑》*31 (2022*年*)* 2241003 [2205.06279].[60] *D.L. Danielson*、*G. Satishchandran* 和 *R.M. Wald*，《*Killing* 视界使量子叠加态退相干》，*Phys. Rev. D 108 (2023*年*)* 025007 [2301.00026].[61] *D.L. Danielson*、*G. Satishchandran* 和 *R.M. Wald*，《黑洞及其他物体导致量子叠加态退相干的局域描述》，*Phys. Rev. D 111 (2025*年*) 025014*[2407.02567].[62] *S.E. Gralla* 和 *H. Wei*，《视界导致的退相干：一般性表述与旋转黑洞》，*Phys. Rev. D 109 (2024*年*)* 065031 [2311.11461]。