arXiv:2603.02326v1 [cond-mat.stat-mech] 2 Mar 2026

通过交换子代数构造强零模

Sanjay Moudgalya[1,2,*] 和 Olexei I. Motrunich[3,†]
[1] *School of Natural Sciences, Technische Universität München (TUM), James-Franck-Str. 1, 85748 Garching, Germany*
[2] *Munich Center for Quantum Science and Technology (MCQST), Schellingstr. 4, 80799 München, Germany*
[3] *Department of Physics and Institute for Quantum Information and Matter,California Institute of Technology, Pasadena, California 91125, USA*(日期：2026年3月4日)

强零模（SZM）是（近似）守恒量，会使某些哈密顿量的整个谱出现（近似）双重简并，其中横场伊辛链的马约拉纳零模就是一个典型例子。在这项工作中，我们通过系统搜索发现，许多强零模实例都可以理解为交换子代数框架中的对称性；这一框架揭示了具有著名强零模的哈密顿量中隐藏的新颖代数结构，其中包括横场伊辛链。我们的发现统一了文献中不同强零模实例的理解，阐明了它们与物质基态相之间的联系，并揭示了简单模型中的新颖对称性，例如在某些参数取值下，自旋 1/2 XY 模型中有时会伴随强零模出现的精确准局域 $U(1)$ 对称性。此外，尽管目前已有解析处理的强零模大多只在非相互作用或可积模型中得到证明，但本工作揭示的代数结构可用于构造破坏可积性、同时精确保留这些强零模的相互作用。预计这类非可积模型能够展现更清晰的强零模动力学特征，不受可积模型中其他守恒量的干扰。我们还讨论了许多实例，包括某些特殊参数取值下与这类对称性相关的新颖流体动力学模。我们还表明，尽管这一交换子框架也适用于著名的 Fendley 强零模在自旋 1/2 XYZ 链中的非相互作用极限，但相互作用情形下的强零模无法在此框架中理解。这表明强零模分为两类：一类在可积性破缺后仍然存在，另一类则不然。最后，我们利用这一交换子框架，为 Fendley 强零模构造了一种替代性证明，这一证明本身或许也具有独立价值。

目录

I. 引言 2

II. 关键概念回顾 3
A. 对称性与交换子代数 B. 对称性的系统搜索 C. 强零模（SZM） 3 3 4

III. 伊辛强零模 5
A. 对易子的结构 B. 与伊辛模型的相的联系 5 6

IV. XY 强零模与（隐藏的） $U(1)$ 对称性 7
A. XY 强零模 B. 常规 $U(1)$ 对称性 C. 准局域 $U(1)$ 对称性 7 8 9

V. 含有强零模的非可积模型 10
A. 一般构造 B. 对动力学的影响 C. 无简并的强零模 10 11 14

VI. 自旋 1/2 XYZ 链中的 Fendley 强零模 15
A. YZ极限 15 B. XYZ链 16

VII. 结论与展望 18

致谢 19

参考文献 19

A. 具有强零模的准局域 $U(1)$ 对称性 22 B. 将结果转换为费米子语言 23 1. 伊辛强零模 24 2. XY 强零模 24 3. 常规与准局域 $U(1)$ 对称性 25 C. 强零模下的自由费米子超哈密顿量与流体力学 26 1. 一般理论 26 2. 示例：伊辛强零模 27 D. MPO语言中的Fendley强零模性质 29 1. 精确强零模的另一种证明 29 2. 键代数的缺失 30 3. 热力学极限下的可归一化性 30 4. 从精确 SZM 到近似 SZM 31

* sanjay.moudgalya@gmail.com
† motrunch@加州理工学院.edu

5. 热力学极限下的马约拉纳性质 32

I. 引言

量子多体哈密顿量可以呈现多种对称性。量子多体物理文献中，许多研究都默认对对称算符施加某些限制，例如要求其为格点上的酉对称性，或某些晶格对称性。这是有充分理由的，因为这些对称性似乎在解释许多重要物理现象时发挥着最关键的作用，而且也最容易检测和分析。超越这些简单情形后，对称性的定义本身便非同寻常。例如，将对称性广义地定义为与哈密顿量对易的 任意 算符，便有一个重要的限制：哈密顿量的本征态对应的数量呈指数增长的投影算符都满足这一界定，但它们对该问题而言并非有意义的对称性。尽管如此，近期许多研究揭示了新颖的对称性定义，以及实现这些对称性的自然哈密顿量实例。其中包括在平衡态物理背景下研究的“范畴对称性” [1–5]„ 此类对称算符可以是不可逆的，也不必构成简单的群结构。在非平衡态物理背景下，非常规对称性则出现在呈现弱遍历性破缺的系统中 [6–9], , 尤其是希尔伯特空间碎裂（HSF） [10–13] 和量子多体疤痕（QMBS） [8, 9], ； 其中的对称算符可以是非局域的，同样不必具有任何简单的群结构 [14, 15]。

系统地定义这些非常规对称性的一种方法，是使用所谓的交换子代数。这类代数广泛见于量子信息文献 [16, 17]„ 并已用于表征导致较弱遍历性破缺的对称性 [14, 15]。在这一框架中，对称代数被视为键代数 [14, 18, 19],的中心化子或交换子；键代数由哈密顿量中出现的一组严格局域算符生成。由此可以穷尽地构造具有这些对称性的哈密顿量 [15, 20]„ 并发展出检测这些对称性的数值方法 [21]„ 还可以理解由这类对称性导致的流体力学 [22]。许多常规和非常规对称性都能在这一框架下得到理解，这不禁令人思考：文献中的其他对称性是否也能以这种方式理解？是否还存在尚未发现的有趣对称性?

虽然我们将探索对称性的完整图景这一问题留待另一项工作讨论，但本文聚焦于一类有趣的对称性。我们通过系统搜索发现了这类对称性，称为强零模（SZM）。强零模是指数局域守恒量，在热力学极限下出现在一维（1d）链的边缘，

许多此类守恒量近期已在文献中得到研究，其名称包括指数对称性或调制对称性 [23–27] ，也有研究在希尔伯特空间碎裂的背景下探讨它们 [14, 28–31]。不过，本文采用强零模（SZM）的历史定义 [32] （见第 IIC 节的回顾）： 它们类似于 Kitaev 链中的马约拉纳零模 [33–35] ，与系统的 Z 对称性反对易 $_2$ ，并在热力学极限下导致整个能谱出现二重简并。此类强零模已在哈密顿量和 Floquet 两种情形下的众多模型中得到观测。从概念上较为简单的实现出现在非相互作用或有效的自由费米子系统中 [36–44], , 但它们也已在多种相互作用可积系统中得到精确实现 [32, 45–53], 其中一个著名例子是 Bethe Ansatz 可积自旋 1/2 XYZ 链中的 Fendley 强零模 [32]。已有研究提出，强零模可作为量子计算的稳定量子比特 [54, 55] ； 它们也已在实验中实现 [56]。强零模应与“弱”零模区分开来：弱零模类似于拓扑相中的边缘马约拉纳模，在热力学极限下只会使基态（及低能激发）出现二重简并，代表了拓扑相中更为普遍的情形 [57]。非相互作用和相互作用的非可积自旋链中都已发现弱零模的精确实例 [58–62]。与之相反，按照历史定义，长期以来人们认为强零模只会在非相互作用或相互作用可积模型中精确出现；人们曾认为破坏可积性的微扰最终会抹去其特征，尽管即使在此类情形下，强零模物理的残余效应仍可维持很长时间 [63–70]。

在这项工作中，我们通过明确构造具有强零模的非可积模型，消除了这一困惑，并首次清楚地证明：可积性并非强零模存在的必要条件。为此，我们首先指出，若干强零模实例也可以在交换子代数框架下加以理解，而这一框架本身也揭示了它们许多有趣特征背后的奥秘。首先，与通常的守恒量不同，文献中研究的强零模在有限系统尺寸下通常并不与各自的哈密顿量严格对易，而只是相差一些随系统尺寸增大而指数级变小的项。其次，它们仅 在哈密顿量的某些基态相中守恒，例如铁磁相或拓扑相 [32, 58], ； 在这些相中，它们也会影响无限温度动力学和激发态，而在其他相中则不再守恒。乍看之下，无限温度动力学性质与零温基态性质之间的这种关联出人意料。通过以交换子框架下的理解为新视角，重新考察强零模的标准实例（包括横场伊辛模型），我们清楚地阐明了这些特征的起源。这也自然为构造具有这些强零模的非

可积模型铺平了道路。此外，我们还发现了新颖的准局域 $U(1)$ 对称性，它们有时会与这些强零模相伴，并带来有趣的动力学特征，本文将对此进行讨论。最后，我们重新考察了自旋 1/2 XYZ 模型 [32]，这一可积的相互作用 Bethe Ansatz 模型中著名的 Fendley 强零模，并证明除某些特殊参数取值外，它仍不属于交换子框架，因此有别于其他强零模实例。尽管如此，在尝试理解 Fendley 强零模与交换子之间的联系时，我们发现了一种证明其在自旋 1/2 XYZ 模型中存在的简化方法，这一结果本身或许也具有独立价值。

本文结构如下。在第 II 节中，我们回顾本工作所需的关键概念，即交换子代数、获得它们的数值方法，以及强零模的精确工作定义。在第 III 节中，我们用交换子代数的语言讨论横场伊辛模型的强零模，并阐明其与物质基态相的联系。随后在第IV节中，我们讨论自旋 1/2 XY 模型中强零模的推广形式，并发现沿参数空间中某些线伴随强零模出现的新型准局域 $U(1)$ 对称性实例。在第 V 节中，我们利用这一交换子理解，显式构造具有伊辛强零模和 XY 强零模的非可积模型，并讨论其动力学影响，包括含新型守恒量的流体动力学。最后，在第 VI 节中，我们重新审视自旋 1/2 XYZ 模型中著名的 Fendley 强零模，展示其非相互作用极限下的交换子理解，并讨论它与其他强零模实例的差异。最后，我们在第 VII 节以开放问题作结。

II. 关键概念回顾

A. 对称性与交换子代数

我们首先简要回顾本研究所需的交换子代数关键概念；关于这一主题的更全面讨论，参见我们此前发表的论文 [14, 15, 20–22]。核心思想是通过一对算子代数（$\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$）来理解对称性，它们分别称为键代数 和交换子代数，或对称代数 。键代数$\mathcal{A}$ 是由一组严格局域的厄米算符 $\{H_\alpha\}$ 在晶格或自旋链上通过取乘积和线性组合生成的结合代数，我们将其记为 $\mathcal{A} = \langle\!\langle \{\widehat{H}_\alpha\} \rangle\!\rangle$.[1] （注意，默认将 1 包含在 $\mathcal{A}$ 中。）交换子代数 $\mathcal{C}$ 定义为 $\widehat{}$所有与 $\{H_\alpha\}$ 对易的算符所构成的集合：

$$\mathcal{C} = \{\widehat{O} : [\widehat{O}, \widehat{H}_\alpha] = 0, \ \forall\, \alpha\}. \tag{1}$$

该集合构成一个代数，因为它在乘积和线性组合运算下封闭，而且还具有在厄米共轭下封闭这一额外性质。 $\mathcal{C}$ 是所有 可表示为 $\{H_\alpha\}$的乘积$\widehat{}$的线性组合的哈密顿量族的对称代数（涵盖所有守恒量）。在这一框架下思考对称性，有助于系统地理解希尔伯特空间碎裂 [14]，、量子多体疤痕 [15], 以及常规对称性 [20] 等现象，以及它们的流体动力学模式 [22]。

键代数和交换子代数在厄米共轭运算下封闭，因此对于有限维希尔伯特空间，它们是冯·诺依曼代数 [71, 72] 的实例。这带来了若干良好性质；由 $\mathcal{A}$ 的生成元构造的哈密顿量，其对称性扇区（对应于对称性代数 $\mathcal{C}$）可以通过冯·诺依曼代数的表示论来理解。特别是，这保证存在一个酉变换 W，可同时将这些代数化为以下分块对角矩阵形式 [14–17, 20, 21, 73, 74]:

$$\begin{aligned} W^\dagger \widehat{h}_{\mathcal{A}} W &= \bigoplus_\lambda (M^\lambda(\widehat{h}_{\mathcal{A}}) \otimes \mathbb{1}_{d_\lambda}), \\ W^\dagger \widehat{h}_{\mathcal{C}} W &= \bigoplus_\lambda (\mathbb{1}_{D_\lambda} \otimes N^\lambda(\widehat{h}_{\mathcal{C}})), \end{aligned} \tag{2}$$

其中 M^λ ($\widehat{h}_{\mathcal{A}}$) 和 N^λ ($\widehat{h}_{\mathcal{C}}$) 分别是维数为 D_λ 和 d_λ 的矩阵，而这两个维数分别是 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{C}$ 的不可约表示的维数。因此，键代数 $\mathcal{A}$ 中的任意哈密顿量（其对称性为 $\mathcal{C}$）的能谱中，各能级对所有 λ 均具有 d_λ 重简并。例如，当 $\mathcal{C}$ 是 $SU(2)$ 的（由生成元构成的结合代数）时，λ 表示 $\vec{S}^2_{\rm tot}$ 本征值 $\lambda(\lambda+1)$ 和 $d_\lambda = 2\lambda+1$，用以说明不同 $S^z_{\rm tot}$ 值所导致的简并度。 $\mathcal{C}$ 中线性无关算符的数量称为其维数$\dim(\mathcal{C})$，也可表示为 $\dim(\mathcal{C}) = \sum_\lambda d_\lambda^2$。此外，还有各种数值方法可根据生成元 $\frown \{H_\alpha\}$ [21] 构造交换子 $\mathcal{C}$ ，我们将用这些方法验证本文所述结果。

B. 系统搜索对称性

在给出主要结果之前，我们简要概述一种用于寻找新对称性的方法，并借此找出具有新型对称性的键代数。具体而言，我们扫描形如$\frown \mathcal{A}(\vec{\mu}) := \langle\!\langle \{H_\alpha(\vec{\mu})\} \rangle\!\rangle$ 的键代数，其生成元依赖于一个

[1] 键代数的概念也可以推广，将局域算符之和（也称为广延局域算符）纳入其生成集 $\{H_\alpha\}$ [15, 20]，不过本研究不需要这种推广。$\widehat{}$

少数参数，我们将其记为 $\vec{\mu}$，并确定相应的交换子代数 $\mathcal{C}(\vec{\mu})$。原则上，这可以通过构造与生成元 $\{H_\alpha(\vec{\mu})\}$相对应的超哈密顿量$\widehat{\mathcal{P}}(\vec{\mu})$，并确定其基态流形来计算；一个便于计算的量是 $\dim(\mathcal{C}(\vec{\mu}))$。对于大多数参数值，我们预期会得到一个“一般”的交换子，这取决于我们所搜索的参数空间的对称性。

我们将搜索范围限制在量子比特系统中，特别是最近邻生成元

$$\widehat{H}_\alpha(\vec{\mu}) := (\kappa+\gamma)X_jX_{j+1} + (\kappa-\gamma)Y_jY_{j+1} + h_+(Z_j+Z_{j+1}) + h_-(Z_j-Z_{j+1}), \tag{3}$$

其中 $\vec{\mu}=(\kappa,\ \gamma,\ h_+,\ h_-)$，这些参数都具有由下式给出的 Z_2 对称性 Q_Z

$$Q_Z = \prod_j Z_j. \tag{4}$$

这一族模型包括许多具有物理意义的模型，例如横场伊辛模型、自旋-1/2 XY 和 XYZ 模型，以及海森堡模型。对于参数的一般取值，我们预期 $\dim(\mathcal{C}(\vec{\mu}))=2$，这对应的交换子仅由 Z_2 对称性（即 $\mathcal{C}=\{\mathbb{1},Q_Z\}$）构成。我们还确保 κ和 γ 中至少有一个非零，因此搜索范围内至少包含一个“非经典”项，这对于得到有趣且非平凡的交换子至关重要。我们分别针对由 L 个格点组成的链，在开放边界条件（OBC）和周期性边界条件（PBC）下进行搜索，格点标记为 1，.....，L；但本文讨论的所有强零模结果均针对开放边界条件。

在这些一般的交换子中，存在一些特殊的参数值 $\vec{\mu}=\vec{\mu}_0$，此时 $\dim(\mathcal{C}(\vec{\mu}=\vec{\mu}_0))$ 更大；它们是参数空间中的点或低维流形，具有额外对称性。为了探测此类交换子，我们利用这样一个事实：交换子可视为局域超算符 $\mathcal{P}(\vec{\mu})$ [21, 22]，的基态，该超算符定义为

$$\widehat{\mathcal{P}}(\vec{\mu}) := \sum_\alpha (\widehat{H}_\alpha(\vec{\mu})\otimes\mathbb{1} - \mathbb{1}\otimes\widehat{H}_\alpha(\vec{\mu})^T)^2. \tag{5}$$

接着，我们研究 $\mathcal{P}(\vec{\mu})$ 的低能谱，并计算 对易子熵 $S(\vec{\mu})$，其定义为

$$S(\vec{\mu}) := -\sum_\nu p_\nu \log p_\nu,\ \ p_\nu := \frac{\exp(-\beta\epsilon_\nu)}{\sum_\nu \exp(-\beta\epsilon_\nu)}, \tag{6}$$

其中，β 是我们根据当前问题选取的合适参数，$\{\epsilon_\nu \geq 0\}$ 是 $\mathcal{P}(\vec{\mu})$的本征值；我们省略了这些量对 β 和 $\vec{\mu}$的显式依赖。直观地说，当 $\vec{\mu}$趋近于具有更大交换子的特殊点 $\vec{\mu}=\vec{\mu}_0$ 时，我们预期 $\mathcal{P}(\mu)$在靠近基态的处的态密度会增加，因为根据定义，$\mathcal{P}(\mu_0)$具有更多的基态。由于 $S(\vec{\mu})$可解释为一个具有逆温度 β 和能量本征值 $\{\epsilon_\nu\}$的系统的热熵，因此预计它会随着 $\vec{\mu}\to\vec{\mu}_0$平滑增加，使我们能够通过对参数空间进行离散扫描来检测特殊交换子的存在。

我们发现，通过这种方式得到的交换子图景大得令人望而生畏。与其试图穷尽地刻画所有可能的交换子，我们在此选择聚焦于搜索中发现的一些简单而有趣的例子，其中强零模便是典型代表。

C. 强零模（SZM）

现在我们回顾本文所采用的强零模定义 [32, 54], 该定义可能与文献不同部分中使用的定义略有不同。考虑一个具有 L 个格点的一维链，我们称厄米算符 Ψ 为精确强零模（SZM），如果它满足以下性质：

1. 它是一个精确守恒量，即，对于键代数中的哈密顿量 H $[\Psi,H]=0$，并且对于任意有限系统尺寸 L，都存在这样的Ψ。2. 它在链的某个边界处呈指数局域化。特别地，算符 Ψ 在最靠近边界的 x 个格点上的权重（通过支撑在这些格点上的算符基串的权重来衡量）按 $1-e^{-x/\xi}$缩放，其中 ξ 是特征长度尺度。3. 它满足 $\Psi^2=\mathcal{N}_L\mathbb{1}$，其中 $\mathcal{N}_L$ 是可能依赖于系统尺寸 L的归一化因子。尽管这一条件并非根本必要，但它使 Ψ 类似于马约拉纳零模（MZM），并且立即给出强零模的算子范数为$\|\Psi\|=\sqrt{\mathcal{N}_\mathcal{L}}$。4. 它与系统的 Z_2 对称性反对易，即有 $\{\Psi,Q_Z\}=0$，这使得哈密顿量 H的所有本征态都具有精确二重简并。

请注意，我们希望将此类强零模与近似强零模区分开来（文献中通常简称为强零模 [32, 54]），二者有两个方面的不同。首先，性质 1 被 $\|[\Psi,H]\|\sim e^{-cL}$ 取代，也就是说，Ψ 在有限系统尺寸下不必是精确守恒量。其次，性质 3 只需在热力学极限下成立，此时 $\mathcal{N}_L$ 收敛到一个与系统尺寸无关的值；换言之，Ψ 在热力学极限下应当是可归一化的。下文讨论将主要聚焦于精确强零模，但我们也会说明，可以对哈密顿量施加微小扰动，使它们成为近似强零模，与文献中研究的对象一致。

此外，由于我们研究的是具有 Z_2 对称性的自旋-1/2 哈密顿量，许多局域在链两端的强零模都与马约拉纳零模密切相关。马约拉纳零模是由单个马约拉纳算符求和构成的；经过 Jordan-Wigner 变换后，它们局域在链的两端。附录 B回顾了许多相关实例。不过，严格来说，它们并不总是一一对应，也就是说，由于 Jordan-Wigner 弦可能横跨整个系统，局域强零模在费米子语言中并不总会映射为局域马约拉纳零模。尽管如此，在存在 Z_2 对称性的情况下，可以将对称算符相乘，从而也得到一个局域马约拉纳零模。因此，尽管存在这一细微的技术问题，我们仍常将强零模和马约拉纳零模互换使用。

此外，还有另一种截然不同的近似强零模 [51, 63, 69, 75, 76], ，它是在向具有上述定义的近似强零模的模型中加入微扰后得到的，其与哈密顿量的对易子有限，但较小且与系统尺寸无关。此外，许多实例中的对称算符都指数局域于系统两端 [23–28], ，也就是说，它们仅满足上述条件 1 和 2，有时称为指数对称性或调制对称性。本文不会讨论这两类情况。

III. 伊辛强零模

我们从一个简单的例子开始，它对应于横场伊辛模型中的强零模情形。我们从如下形式的键代数开始

$$\mathcal{A}_{\text{I-SZM}} := \langle\!\langle \{X_j X_{j+1} + q Z_j\} \rangle\!\rangle, \tag{7}$$

其中 $1 \le j \le L-1$ 对应于式 (3) 中的 $(\kappa,\ \gamma,\ h_+,\ h_-) = (1,\ 1,\ q,\ q)$。我们通过数值计算发现，该键代数的对易子空间维数为 $\dim(\mathcal{C}_{\text{I-SZM}}) = 8$，其原因将在下文说明。请注意，对于 $\gamma = \kappa$、$h_- = -h_+$ 或 $\gamma = -\kappa$、$h_- = \pm h_+$，也可以进行非常相似的分析；它们都具有相同的伊辛型形式。

A. 交换子的结构

为了确定交换子，我们注意到，公式（7）中的生成元 $T_{j,\ j+1}$ $\mathcal{A}_{\text{I-SZM}}$ 满足以下关系：

$$[X_j + q Z_j X_{j+1}, T_{j,j+1}] = 0. \tag{8}$$

通过观察，我们可以构造出守恒量

$$\Psi^\ell(q) := \sum_{j=1}^{L} q^{j-1} \left(\prod_{i=1}^{j-1} Z_i \right) X_j. \tag{9}$$

此外，对于开放边界条件，我们还注意到 X_L 与所有生成元对易，因为最右侧的格点 L 在任何生成元中都没有 Z_L 。还需记住，这些生成元也具有整体 Z_2 对称性，该对称性由式（4）中的 Q_Z 生成。因此， $\mathcal{A}_{\text{I-SZM}}$的完整交换子为

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\text{I-SZM}} &= \langle\!\langle Q_Z, \Psi^\ell(q), X_L \rangle\!\rangle \\ &= \mathrm{span}\{\mathbb{1},\ Q_Z,\ \Psi^\ell(q),\ X_L,\ Q_Z\Psi^\ell(q),\ Q_Z X_L, \\ &\quad \Psi^\ell(q)X_L,\ Q_Z\Psi^\ell(q)X_L\}, \end{aligned} \tag{10}$$

其中我们利用了以下事实:

$$[\Psi^\ell\ q\ ]^2 \propto \mathbb{1}\ \ Q_Z^2 = (\,)、、(\,)(\,)、、以及 X_L^2 = 1\ \ Q_Z\Psi^\ell\ q\ = -\Psi^\ell\ q\ Q_Z\ \ Q_Z X_L = -X_L Q_Z \Psi^\ell(q)X_L = X_L\Psi^\ell(q)。$$

注意， $\Psi^\ell(q)$ 是由 $\mathcal{A}_{\text{I-SZM}}$ 构造的所有哈密顿量的一个精确强零模，因为对于 $|q| < 1$，它满足第二节 C 中提到的所有性质。对于任意有限系统尺寸，它都是严格守恒的；当 $|q| < 1$ 时，它在链的左边界处呈指数局域化（但如果 $|q| > 1$，则是离域的）。此外，它满足 $[\Psi^\ell(q)\ ]^2 = \frac{1-|q|^{2L}}{1-|q|^2}\,\mathbb{1} \propto \mathbb{1}$; 最后，它与 Z_2 对称性反对易，即 $\{\Psi^\ell(q)\ Q_Z\} = 0$，从而使这类哈密顿量的所有本征态都具有精确二重简并。

注意，交换子 $\mathcal{C}_{\text{I-SZM}}$ 还包含其他满足强零模所需性质的算符，尽管仅当 $|q| > 1$时才如此。这包括诸如下列算符:

$$\widetilde{\Psi}^\ell(q) := -iq^{-L+1} Q_Z \Psi^\ell(q) = \sum_{j=1}^{L} (q^{-1})^{L-j} Y_j \left(\prod_{i=j+1}^{L} Z_i \right), \tag{11}$$

如果 $|q| > 1$，它就是右边界上的强零模；但如果 $|q| < 1$，则是非局域的。此外，还有 X_L，严格来说它也是一个强零模，但并不那么重要，因为它对伊辛模型的物理性质没有任何影响，我们将在下文讨论这一点。事实上，我们总可以将生成元 $\{X_j Y_{j+1}, j = 1, \ldots, L-1\}$ 加入公式（7）的键代数中，以打破这种 X_L 对称性；[2] 于是便得到以下一对键代数和交换子代数

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{A}}_{\text{I-SZM}} &= \langle\!\langle \{X_j X_{j+1} + q Z_j\}, \{X_j Y_{j+1}\} \rangle\!\rangle, \\ \widetilde{\mathcal{C}}_{\text{I-SZM}} &= \langle\!\langle Q_Z, \Psi^\ell(q) \rangle\!\rangle, \end{aligned} \tag{12}$$

~其维数 $\dim(\mathcal{C}_{\text{I-SZM}})$ 为 $= 4$。

请注意，在周期性边界条件下，这些强零模不再是对称性，即它们与生成元 $T_{L,1}$不对易；该生成元支撑在格点 L 和 1 上，因此周期性边界条件下的交换子代数就是通常的 Z_2 对称性。不过，强零模有可能在适当的扭曲边界条件下得以保留 [59], ，但我们在此不进一步探讨这种情形。

[2] 然而请注意，对于这些生成元的任意线性组合，总存在一个依赖于哈密顿量中具体耦合的不同强零模，它是近似守恒的。这源于此类哈密顿量的无相互作用结构，详见第 III B 1 节的进一步讨论。

B. 与伊辛模型相的联系

现在，我们将强零模 $\Psi^\ell(q)$与横场伊辛模型（TFIM）的马约拉纳模联系起来，其表达式为

$$H_{\mathrm{TFIM}} = -\sum_{j=1}^{L-1} X_j X_{j+1} - q\sum_{j=1}^{L} Z_j = \widetilde{H}_{\mathrm{TFIM}} - qZ_L, \quad (13)$$

其中我们定义了

$$\widetilde{H}_{\mathrm{TFIM}} = -\sum_{j=1}^{L-1}(X_j X_{j+1} + qZ_j), \quad (14)$$

它只是公式（7）中生成元的求和。人们常说，只有当横场伊辛模型（TFIM）的基态处于铁磁相时（即 $|q|<1$），强零模才存在；在无相互作用的表述中，它本质上就是马约拉纳模。鉴于对 $\mathcal{A}_{\text{I-SZM}}$ 的交换子所做的分析对任意 q 都成立，这一点或许令人惊讶。下面我们从两个方面阐明它与基态相之间的关系：首先分析其单粒子谱，其次考察公式（13）中边缘场 qZ_L 的作用。

1. *Single-particle spectrum*

首先注意，横场伊辛模型（TFIM）、~代数 $\mathcal{A}_{\text{I-SZM}}$ [的生成元以及 $\mathcal{A}_{\text{I-SZM}}$]，在经过 Jordan-Wigner 变换后都是无相互作用项，综述见附录B。也就是说，任何此类项 T 用马约拉纳费米子 $\{\chi_k\}_{k=1}^{2L}$ 表示时，形式均为 $T = \sum_{m,\ n} M_{m,\ n}\chi_m\chi_n$；其中 M 是一个反对称厄米矩阵，我们称之为单粒子哈密顿量。对于 $\mathcal{A}_{\text{I-SZM}}$ 的生成元，有（定义和推导见附录B）

$$X_j X_{j+1} + qZ_j = i\chi_{2j}\chi_{2j+1} + iq\chi_{2j-1}\chi_{2j}. \quad (15)$$

在这些非相互作用模型中，我们知道，单粒子哈密顿量 M 的马约拉纳零模是零能本征态（或者在有限系统尺寸下能量呈指数级小的本征态），并且总是成对出现，这是 M 为偶数维反对称矩阵的结果。容易证明，这些能量接近零的马约拉纳零模是完整哈密顿量的守恒量（更确切地说，对于任意具有单粒子能量 ε 的单粒子模 $\Psi = \sum_m a_m\chi_m$ ，其与哈密顿量 $\|[H,\Psi]\| = 4\varepsilon\|\Psi\|$ 的对易子）。

在公式（10）的交换子 $\mathcal{C}_{\text{I-SZM}}$ 中，我们可以识别出两个关于马约拉纳费米子呈线性的算符：

$$\Psi^\ell(q) = \sum_{j=1}^{L} q^{j-1}\chi_{2j-1}, \quad iQ_Z X_L = \chi_{2L}. \quad (16)$$

这些算符必然成对出现，作为 H_{TFIM}的马约拉纳零模，其中 $\mathcal{A}_{\text{I-SZM}}$，并且通常是该哈密顿量中唯一一对零能模。虽然这对任意 q都成立，但这些马约拉纳零模只有在 $|q|<1$时才局域于链的两端，也就是说，处于模型的铁磁相中。此时，由强零模导致的基态二重简并才是“稳定的”，这要求相应的马约拉纳零模局域于链的两端，且不会在局域微扰下发生杂化。换言之，基态的二重简并只有在$|q|<1$时才源于“体区”的自发对称性破缺（或者等价地，源于费米子超导体的拓扑序），而在该区域内无法通过局域微扰消除。另一方面，当$|q|>1$ 时，简并度仅仅源于边界，可以通过加入局域微扰轻易消除。从这个意义上说，虽然任意 q 下都存在强零模，但它只有在铁磁相中才是稳定的。

2. *Approximate SZMs*

在研究将场 qZ_L 加回公式（13）中的影响时，上文讨论的稳定性物理会变得更加清晰；我们现在对此进行分析。由于公式（14）的 H_{TFIM} 与强零模 $\Psi^\ell(q)$ 对易，它与公式（13）中的 H_{TFIM} 的对易子为

$$[H_{\mathrm{TFIM}}, \Psi^\ell(q)] = -2iq^L Z_1 Z_2 \ldots Z_{L-1} Y_L \ . \quad (17)$$

归一化强零模算符与哈密顿量的对易子的算子范数为

$$\frac{\|[H_{\mathrm{TFIM}}, \Psi^\ell(q)]\|}{\|\Psi^\ell(q)\|} = 2q^L\sqrt{\frac{1-q^2}{1-q^{2L}}} \ . \quad (18)$$

因此，当 $|q|<1$时，也就是处于铁磁相时，该范数呈指数级小；而当 $|q|>1$时，也就是处于顺磁相时，该范数为 $O(1)$。因此，$\Psi^\ell(q)$ 仅在其铁磁相中是 H_{TFIM} 的近似强零模。[3]

这个近似强零模还会使整个能谱近似呈现二重简并，这正是下文对 $|q|<1$ 所作的假设。事实上，若 $|\phi\rangle$ 是 H_{TFIM} 的归一化本征态，具有确定的 Q_Z 量子数和能量 ε，那么 $|\phi'\rangle = \Psi^\ell(q)\ |\phi\rangle\ /\|\Psi^\ell(q)\|$ 就是一个归一化态，其 Q_Z 与之相反（因此与 $|\phi\rangle$ 正交），并满足 $\|H_{\mathrm{TFIM}}\,|\phi'\rangle - \varepsilon\,|\phi'\rangle\| < 2|q|^L$。特别是，这表明有能隙的基态具有二重简并，能级劈裂呈指数级小；低能激发态也同样如此。此外，由于多体能量劈裂为 $\mathcal{O}(2^{-L})$，当 $|q|<1/2$ 足够小时，

---

[3] 请注意，公式（13）中的 H_{TFIM} 具有反演对称性，因此我们也可以从键代数 $\langle\langle X_j X_{j+1},\ qZ_{j+1}\rangle\rangle$ 出发，类似地构造一个局域于右边界附近的近似强零模。然而请注意，这个额外的近似强零模不会使 H_{TFIM} 中的简并增加，因为它与 $\Psi^\ell(q)$ 对易，而与 Q_Z 反对易。

我们可以保证整个能谱中也近似存在二重简并（能级间距小于典型能级间距）。然而请注意，在干净的伊辛模型中，能谱较高处的这种二重简并并不一定意味着整个能谱中都存在铁磁序；只有在存在无序 [77, 78] 时，才预期会出现这种情况。

由于在铁磁相中，$\Psi^\ell(q)$ 是一种近似对称性，而 Q_Z 是精确对称性，因此算符 $\widetilde{\Psi}^\ell(q)$（式（11））在铁磁相中也具有 H_{TFIM} 的近似对称性；但它在该相中是非局域的，因此不是强零模。另一方面，式（10）中张成交换子空间的其他元素，例如所有涉及 X_L 的项，与 H_{TFIM} 的对易子都不小，因此在 H_{TFIM} 的任一相中甚至都不是近似对称性。不过，在铁磁相中，H_{TFIM} 还存在其他未被交换子 $\mathcal{C}_{\text{I-SZM}}$ 涵盖的近似对称性。这些对称性源自“另一个”马约拉纳零模 iQ_ZX_L；在马约拉纳表述中，它是 $\Psi^\ell(q)$ 的配对伙伴，正如第 IIIB1 节所述。它也与注 3 中讨论的近似强零模有关。

虽然非相互作用模型的某些性质无法仅由 $\mathcal{C}_{\text{I-SZM}}$ 捕捉（但可通过其他考量加以弥补，例如上文的讨论），但事实证明，对易子表述非常适合分析 $\mathcal{A}_{\text{I-SZM}}$中“通用”模型的动力学。这些模型实际上是相互作用非可积模型，其构造不仅使用生成元的线性组合，还使用生成元的乘积。我们将在第 V 节更详细地讨论这些模型的物理性质，而其中 $\mathcal{C}_{\text{I-SZM}}$ 的结构捕捉了这些系统动力学的诸多方面。

IV. XY 强零模式与（隐藏的）$U(1)$ 对称性

现在我们不再局限于最简单的伊辛情形，而是考察由自旋-1/2 XY项生成的各种键代数。它们展现了上一节所研究的 $\mathcal{C}_{\text{I-SZM}}$ 伊辛交换子的推广，也展现了具有（隐藏的）$U(1)$对称性的情形，我们将在本节讨论这些内容。

A. XY 强零模

1. Definition

首先，我们发现，在式 (3) 中选择 $h_+^2+\gamma^2=h_-^2+\kappa^2$ for $h_+,\ h_-,\ \gamma,\ \kappa\neq 0$，通常会得到一个与 $\mathcal{C}_{\text{I-SZM}}$大小相同的交换子，这表明可能存在类似的强零模。为分析这种情况，我们选取参数化形式 $h_\pm=[q(\kappa+\gamma)\pm q^{-1}(\kappa-\gamma)]/2$，并研究键代数

$$\mathcal{A}_{\text{XY-SZM}}=\langle\!\langle\{(\kappa+\gamma)X_jX_{j+1}+(\kappa-\gamma)Y_jY_{j+1} +q(\kappa+\gamma)Z_j+q^{-1}(\kappa-\gamma)Z_{j+1}\}\rangle\!\rangle, \tag{19}$$

当 $\kappa=\gamma$ 时，它化简为公式（7）中的 $\mathcal{A}_{\text{I-SZM}}$。对于一般的 $\kappa,\ \gamma$，该键代数的生成元 $T_{j,\ j+1}$ 仍满足公式（8），因此公式（9）中的 $\Psi^\ell(q)$ 仍是一个守恒量。此外，我们在局部得到关系

$$[q^{-1}\frac{\kappa-\gamma}{\kappa+\gamma}X_jZ_{j+1}+X_{j+1},T_{j,j+1}]=0, \tag{20}$$

由此可以构造以下守恒量 $\Psi^r(s=q^{-1}\frac{\kappa-\gamma}{\kappa+\gamma})$，其中我们定义

$$\Psi^r(s):=\sum_{j=1}^{L}s^{L-j}X_j\left(\prod_{i=j+1}^{L}Z_i\right), \tag{21}$$

当 $|s|<1$ 时，它局域在链的右边界，而当 $|s|>1$ 时则是离域的。注意，在伊辛极限下，即当 $\kappa=\gamma$ 时，它化简为 X_L。$\mathcal{A}_{\text{XY-SZM}}$ 的交换子为

$$\mathcal{C}_{\text{XY-SZM}}=\langle\!\langle Q_Z,\Psi^\ell(q),\Psi^r(s=q^{-1}\frac{\kappa-\gamma}{\kappa+\gamma})\rangle\!\rangle. \tag{22}$$

与伊辛情形一样，我们有 $\{Q_Z,\Psi^\ell(q)\}=0$，$\{Q_Z,\Psi^r\ s\ \}=0$ $[\Psi^\ell\ q\ \ \Psi^r\ s\ ]=0$ ( ), 和 ( ) ( )，这导致能谱具有二重简并，并解释了 dim($\mathcal{C}_{\text{XY-SZM}}$) $=8$，与公式（10）类似。此外，与公式（11）类似，可以构造强零模，例如 $Q_Z\Psi^\ell(q)$ 和 $Q_Z\Psi^r(s)$；它们分别在 $|q|>1$ 和 $|s|>1$ 时局域，在 $|q|<1$ 和 $|s|<1$ 时离域。

2. Connections to the XY model

这些强零模自然出现在以下形式的 XY 模型中：

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_{\text{XY}}=&-\sum_{j=1}^{L-1}[(\kappa+\gamma)X_jX_{j+1}+(\kappa-\gamma)Y_jY_{j+1}]\\&-[q(\kappa+\gamma)+q^{-1}(\kappa-\gamma)]\sum_{j=2}^{L-1}Z_j\\&-q(\kappa+\gamma)Z_1-q^{-1}(\kappa-\gamma)Z_L,\end{aligned} \tag{23}$$

它是方程 (19) 中 $\mathcal{A}_{\text{XY-SZM}}$ 生成元的和。~由于 H_{XY} 在马约拉纳表述下是一个非相互作用模型（相关综述见附录B），不难看出，这两个马约拉纳零模总是成对出现（见第 III 节 B.1 的讨论），分别是方程 (16) 中的 $\Psi^\ell(q)$ 和 $iQ_Z\Psi^r(s=q^{-1}\frac{\kappa-\gamma}{\kappa+\gamma})$，其表达式为

$$iQ_Z\Psi^r(s)=\sum_{j=1}^{L}s^{L-j}\chi_{2j}, \tag{24}$$

它们都是马约拉纳费米子的线性组合。这种联系也在 [60], 中被指出；他们研究了 Kitaev 链的一个 ~ 版本，该版本在经过 Jordan–Wigner 变换后映射为 H_{XY}。不难证明，当且仅当（见附录 IVA）这些马约拉纳零模局域在链的两端时，

$$|q(\kappa+\gamma)+q^{-1}(\kappa-\gamma)|<2|\kappa|. \tag{25}$$

此时， H_{XY} 中~链体区的基态恰好处于铁磁相 [79, 80]。因此，这些模式只有在铁磁相中才是“稳定的”，这与第 III 节 B 1 中的讨论类似。

在所有格点上施加均匀磁场的 XY 模型中，这些强零模的情况有所不同，其形式为

$$\begin{aligned}H_{\mathrm{XY}} =& -\sum_{j=1}^{L-1}\left[(\kappa+\gamma)X_jX_{j+1}+(\kappa-\gamma)Y_jY_{j+1}\right]\\ &-\left[q(\kappa+\gamma)+q^{-1}(\kappa-\gamma)\right]\sum_{j=1}^{L}Z_j.\end{aligned} \tag{26}$$

与伊辛模型的情形不同， H_{XY} 的 $\Psi^{\ell}(q)$和$\Psi^{r}(s=q^{-1}\frac{\kappa-\gamma}{\kappa+\gamma})$都不是近似强零模，因为要从 H_{XY} 变为 H_{XY}，需要在链的两端添加额外的场~，这会使 H_{XY} 与两个强零模之间产生一个 $\mathcal{O}(1)$阶的对易子，而这一结论对任意 q、 κ、 γ均成立。由于模型是非相互作用的，铁磁相中必定存在一对马约拉纳零模（类似于第 III 节 B 1 中的讨论）；但在这种情况下，它们通常与强零模$\Psi^{\ell}(q)$和 $\Psi^{r}(s)$无关。

B. 常规 $U(1)$ 对称性

现在我们转而讨论参数空间中的特殊点，在这些点上，我们发现式 (19) 的键代数$\mathcal{A}_{\mathrm{XY-SZM}}$ 具有比式 (22) 的$\mathcal{C}_{\mathrm{XY-SZM}}$ 更大的交换子。

1. *Regular $U(1)$*

一个简单的例子是令 $\gamma=0$，此时我们得到键代数（相差一个整体因子 κ，不失一般性，我们可以将其设为 1）

$$\mathcal{A}_{\text{XX-SZM}}=\langle\!\langle\{X_jX_{j+1}+Y_jY_{j+1}+qZ_j+q^{-1}Z_{j+1}\}\rangle\!\rangle. \tag{27}$$

这是由于存在由$\sum_j Z_j$生成的额外 $U(1)$ 对称性，因此 $\mathcal{A}_{\text{XX-SZM}}$ （采用开放边界条件）的交换子为

$$\mathcal{C}_{\text{XX-SZM}}=\langle\!\langle\sum_j Z_j,\Psi^{\ell}(q),\Psi^{r}(q^{-1})\rangle\!\rangle. \tag{28}$$

注意，由总自旋 $\sum_j Z_j$生成的代数包含由 Q_Z [14, 20]生成的 Z_2 对称性。我们注意到，该代数的维数为 $4L$，而非根据对形如 $(\sum_j Z_j)^k(\Psi^{\ell})^{\alpha}(\Psi^{r})^{\beta}$、其中 $0\le k\le L$, $\alpha,\beta\in\{0,1\}$ 的基底 $\mathcal{C}_{\text{XX-SZM}}$ 的直观预期所得的 $4(L+1)$。这是由于这些基底元素之间存在一些线性关系。这里我们不尝试完整地求解这些关系。

容易看出，此处的强零模 [更准确地说，由这些强零模导出的马约拉纳零模] 始终局域在链的同一侧 [即式 (25) 从不满足] 对所有 $|q|\neq 1$ 都成立，并且在$|q|=1$时为离域态。就其与一般 XY 型模型的联系而言，这意味着它们对于加入一般微扰并不“稳定”，且不会在物质基态相中发挥作用，这与第 III 节 B 1 中的讨论类似。事实上，若我们构造形式如式 (23) 或 (26) 的 XY 模型，其中 $(\kappa,\gamma)=(1,0)$，容易证明，对于 $|q|\neq 1$ 的一般取值，系统体区处于有能隙（顺磁）相。随后可以证明，~式 (23) 的 H_{XY} 能谱中的二重简并由强零模导致，其对应的态是顺磁乘积态，以及一个具有单个非平庸磁振子的态；由于边界场的作用，该磁振子态与顺磁态具有相同能量。$|q|=1$ 的情形较为特殊，因为它位于 XY 模型有能隙相与无隙相之间的临界线上，但即便在此处，这些强零模也无法在加入微扰或对所有格点施加均匀磁场后保持稳定。

2. *Staggered $U(1)$*

类似于常规的 $U(1)$ 对称性，我们也可以通过在式 (19) 中令 $\kappa=0$，然后不失一般性地取 $\gamma=1$，得到由$\sum_j(-1)^j Z_j$ 生成的交错 $U(1)$ 对称性，此时键代数为

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{\text{XX-SZM}}=\langle\!\langle\{X_jX_{j+1}-Y_jY_{j+1}+qZ_j-q^{-1}Z_{j+1}\}\rangle\!\rangle, \tag{29}$$

其中交换子为

$$\widetilde{\mathcal{C}}_{\text{XX-SZM}}=\langle\!\langle\{\sum_j(-1)^j Z_j,\Psi^{\ell}(q),\Psi^{r}(-q^{-1})\rangle\!\rangle. \tag{30}$$

由于我们采用开放边界条件，这可以通过以下格点局域幺正旋转（可视为变量替换）与第 IV B 1 节中的前述常规 $U(1)$ 联系起来：

$$\begin{aligned}(X,Y,Z)_{4n+1}&=(\tilde X,\tilde Y,\tilde Z)\ ,\\ (X,Y,Z)_{4n+2}&=(\tilde X,-\tilde Y,-\tilde Z)\ ,\\ (X,Y,Z)_{4n+3}&=(-\tilde X,-\tilde Y,\tilde Z)\ ,\\ (X,Y,Z)_{4n+4}&=(-\tilde X,\tilde Y,-\tilde Z)\ .\end{aligned} \tag{31}$$

等价地，酉矩阵为

$$U=\prod_{n=0}^{L/4-1}\left(I_{4n+1}X_{4n+2}Z_{4n+3}Y_{4n+4}\right), \tag{32}$$

其中，若 L 不是4的倍数，则截断到系统尺寸 L 是隐含的。该特定酉矩阵同时~~将~~ $\mathcal{A}_{\text{XX-SZM}}$ 的所有键生成元变换为$\mathcal{A}_{\text{XX-SZM}}$的键生成元，至多相差无关紧要的符号。因此，具有这种交错 $U(1)$对称性的模型的物理可以直接映射到具有常规 $U(1)$对称性的模型上。

C. 准局域 $U(1)$对称性

我们通过数值计算发现，在另外两种参数取值情况下，式 (19) 的键代数 $\mathcal{A}_{\text{XY-SZM}}$ 的交换子 $\mathcal{C}$ 的维数 $\dim(\mathcal{C}) = 4L$也满足：参数分别为 (i) $q(\kappa+\gamma) = q^{-1}(\kappa-\gamma)$，(ii)$q(\kappa+\gamma) = -q^{-1}(\kappa-\gamma)$。这表明存在一种 $U(1)$ 对称性，类似于式 (27) 中键代数 $\mathcal{A}_{\text{XX-SZM}}$的情况。下面我们分别分析这两种情况，并发现它们可以理解为准局域 $U(1)$ 对称性；这类对称性由指数局域化项之和构成，而非严格局域项。我们分别称它们为“常规”和“交错”准局域 $U(1)$，因为在适当的极限下，它们会退化为上一小节讨论的常规和交错传统 $U(1)$ 对称性。

1. *Regular quasi-local* $U(1)$

在第一种情形中，我们可以不失一般性地令 $q(\kappa+\gamma) = q^{-1}(\kappa-\gamma) = 1$ [，或等价地令 $(\kappa,\gamma) = (\frac{q+q^{-1}}{2}, \frac{q-q^{-1}}{2})$]，，从而得到如下键代数（不计整体因子）

$$\mathcal{A}_{U(1),I} = \langle\!\langle \{q^{-1}X_jX_{j+1} + qY_jY_{j+1} + Z_j + Z_{j+1}\} \rangle\!\rangle. \quad (33)$$

这并不以任何明显的方式具有 $U(1)$ 对称性，这与式 (27) 中的$\mathcal{A}_{\text{XX-SZM}}$ 不同。尽管如此，由于这是第 IVA 节中 XY 键代数的一个特例，我们得到式 (9) 的守恒量 $\Psi^{\ell}(q)$ 以及式 (21) 中的 $\Psi^{r}(s=q)$。结合 [21] 中的数值方法以及对小系统尺寸的穷举代数计算，我们得到如下额外的对称算符：

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_I^X(q) &= \sum_{j=1}^{L} Z_j - \eta \sum_{1\le j_1<j_2\le L} X_{j_1}\left(\prod_{k=j_1+1}^{j_2-1} qZ_k\right)X_{j_2}, \\
\mathcal{Q}_I^Y(q) &= \sum_{j=1}^{L} Z_j + \eta \sum_{1\le j_1<j_2\le L} Y_{j_1}\left(\prod_{k=j_1+1}^{j_2-1} q^{-1}Z_k\right)Y_{j_2},
\end{aligned} \quad (34)$$

其中 $\eta := q - q^{-1}$。请注意，在 $q=1$ 极限下（即，当 $\gamma = 0$ 时），这些就退化为第 IV B 1 节中讨论的常规 $U(1)$ 对称性。对于 $|q|<1$（分别是 $|q|>1$），$\mathcal{Q}_I^X$（分别是 $\mathcal{Q}_I^Y$）是一个准局域算符，因为其表达式中范围为 r 的泡利串会随着 q^r（分别是 q^{-r}）呈指数级衰减，使其成为指数局域项之和。这种准局域的 $U(1)$ 可以粗略地理解为常规 $U(1)$ 的一种“形变”对称性，尽管 $U(1)$ 结构远非显而易见；事实上，$\mathcal{Q}_I^X$ 和 $\mathcal{Q}_I^Y$ 的不同特征值数量为 $2L$，而常规 $U(1)$ 对称性的数量则为 $L+1$。特别是，算符 $\mathcal{Q}_I^X(q)$ 的不同特征值为 $\{-L+2(n-mq^L) + (1-q^L)\}$，其中整数 n，m 取自范围 $0\le n\le L-1$ 和 $0\le m\le 1$[；对于 $\mathcal{Q}_I^Y(q)$ 且 $q\to q^{-1}$]，情况类似。这些结果可利用它们以马约拉纳费米子表示的二次算符表达式计算得出，详见附录B 3。

如我们在附录 A 中所示，它们可以紧凑地表示为矩阵乘积算符（矩阵乘积算符），这也使得证明它们属于交换子$\mathcal{C}_{U(1),I}$更为容易。不过，在存在强零模 $\Psi^{\ell}(q)$ 和 $\Psi^{r}(q)$ 以及整体 $\mathbb{Z}_2$ 对称性的情况下，$\mathcal{Q}_I^X$与 $\mathcal{Q}_I^Y$ 并非独立；具体而言，我们得到如下关系

$$q\mathcal{Q}_I^X - q^{-1}\mathcal{Q}_I^Y = \frac{\eta Q_Z \Psi^{\ell}(q)\Psi^{r}(q)}{q^{L-1}}. \quad (35)$$

因此，只需在 $\mathcal{C}_{U(1),I}$ 的交换子中纳入一个准局域 $U(1)$ 生成元，我们推测它为

$$\mathcal{C}_{U(1),I} = \langle\!\langle Q_Z, \Psi^{\ell}(q), \Psi^{r}(q), \mathcal{Q}_I(q) \rangle\!\rangle, \quad (36)$$

其中 $\mathcal{Q}_I$ 可以是 $\mathcal{Q}_I^X$或 $\mathcal{Q}_I^Y$。我们还注意到，与第 IV B 1 节讨论的常规 $U(1)$ 对称性不同，$\mathcal{Q}_I(q)$ 本身不能成为局域生成的键代数的对称性——任何具有该对称性的局域哈密顿量必然还具有额外对称性，例如 $\mathbb{Z}_2$ 和强零模。我们将在附录 A 中进一步讨论这一点。

注意，采用这一组 (κ,γ) 参数时，对于任意 $|q|\neq 1$，公式（25）都成立。因此，强零模局域在链的不同两侧，这意味着对于这些参数，具有这些参数的非相互作用哈密顿量（例如公式（23））的基态处于铁磁相 [81]。有趣的是，这样的哈密顿量自然出现在对某些随机线路系综的纠缠动力学研究中 [82–84]，；在这些情形下，晚时刻的纠缠物理要求系统处于铁磁相。然而，在这些研究背景下，人们并未指出准局域 $U(1)$ 对称性，其对基态物理的影响也尚不明朗。由公式（33）的键代数 $\mathcal{A}_{U(1),I}$ 构造的非可积模型中，这种 $U(1)$ 对称性可能产生相关的流体动力学效应，我们将在第 V 节讨论这些效应。

2. *Staggered quasi-local* $U(1)$

我们还注意到，当 $q(\kappa+\gamma) = -q^{-1}(\kappa-\gamma)$ 时，存在隐藏的 $U(1)$ 对称性；不失一般性，我们可以将其设为 1 [，或等价地设为 $(\kappa,\ \gamma) = (-\frac{q-q^{-1}}{2}, \frac{q+q^{-1}}{2})$]。由此得到键代数

$$\mathcal{A}_{U(1),II} = \langle\!\langle \{q^{-1}X_jX_{j+1} - qY_jY_{j+1} + (Z_j - Z_{j+1})\} \rangle\!\rangle. \quad (37)$$

由于这也是第 IVA 节中 XY 键代数的一个特例，因此我们同样得到式 (9) 的守恒量 $\Psi^{\ell}(q)$，此外还有式 (21) 的守恒量$\Psi^{r}(s=-q)$。按照第 IV C 1 节中的相同步骤，我们得到守恒量

$$\mathcal{Q}^{X}_{II}(q)=\sum_{j=1}^{L}(-1)^{j}Z_j-\eta\sum_{1\le j_1<j_2\le L}X_{j_1}\left(\prod_{k=j_1+1}^{j_2-1}qZ_k\right)X_{j_2}$$
$$\mathcal{Q}^{Y}_{II}(q)=\sum_{j=1}^{L}(-1)^{j}Z_j+\eta\sum_{1\le j_1<j_2\le L}Y_{j_1}\left(\prod_{k=j_1+1}^{j_2-1}q^{-1}Z_k\right)Y_{j_2} \tag{38}$$

注意，在 $q=1$ 极限下，这约化为由$\mathcal{A}_{U(1),II}$在公式（37）中的生成元所显现的交错U(1)对称性。事实上，借助公式（32）的格点上酉矩阵变换，该键代数$\mathcal{A}_{U(1),II}$ 可以精确映射到公式（33）中键代数$\mathcal{A}_{U(1),I}$ 的生成元。这意味着，具有这种交错准局域对称性的系统的全部代数关系及其物理，都可以精确映射到上文所讨论的常规准局域 U(1)对称性。

V. 具有强零模的非可积模型

A. 一般构造

基于对强零模的交换子理解，我们现在表明，构造具有精确强零模的非可积模型是直接的。在本节讨论的所有情形中，强零模的键代数由经Jordan-Wigner变换后为费米子双线性项的项生成，因此这些生成元的线性叠加总是可积的。此类模型一直是以往大多数强零模研究的重点 [32, 37, 45, 48, 58–60, 85, 86]。然而，键代数也包含生成元的乘积，这使我们能够构造非可积模型。虽然两个不对易的厄米算子 A与 B 的乘积一般不是厄米的，但它们的对易子$i[A,B]$ 和反对易子 $\{A,B\}$ 是厄米的。注意，费米子二次项的对易子仍是费米子二次项，因此为了得到相互作用项，我们需要考虑生成元及其线性组合的反对易子。

给定一组自由费米子生成元 $\{T_{j,j+1}\}$，我们总能构造出一个相互作用局域哈密顿量:

$$H_{\text{int}}:=\sum_j T_{j,j+1}+\frac{c}{2}\sum_j\{T_{j,j+1},T_{j+1,j+2}\}, \tag{39}$$

其中 c 是任意常数。 H_{int} 至少具有由 $\{T_{j,j+1}\}$ 生成的键代数所具有的同样的对称性，包括强零模。举一个简单的例子，我们可以选取 $T_{j,\,j+1}$ 作为公式（7）中 $\mathcal{A}_{\text{I-SZM}}$ 的生成元，使用公式（39），并添加项 $\{X_jY_{j+1}\}$

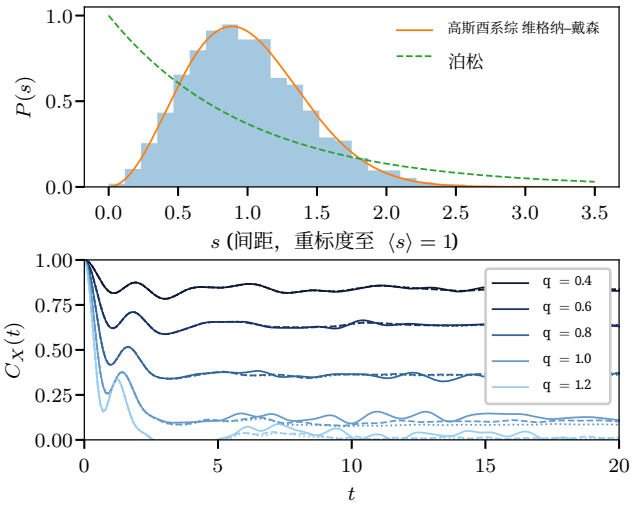

图1. 具有伊辛强零模的非可积模型。所示数据对应式（40）的非可积模型，该模型具有式（9）中的伊辛强零模 $\Psi^{\ell}(q)$，它是一个精确守恒量。（上）能谱中间一半范围内 $Q_Z=+1$ 扇区的能级差统计 $\{s_n=E_{n+1}-E_n\}$（经归一化，使平均间距 $\langle s\rangle=1$），参数为 $(q,c,r)=(0.55,0.53,0.23)$，系统尺寸为 $L=14$。结果清楚地呈现出高斯酉系综的维格纳-戴森统计，这是破坏时间反演对称性的非可积模型的典型特征，与可积模型表现出的泊松能级统计形成对比。（下）参数为 $(c,r)=(0.53,0.23)$ 时，左端格点上的算符 X_1 的自相关函数 $C_X(t)=2^{-L}\mathrm{Tr}[X_1(t)X_1(0)]$，其中 q 取 0.4 至 1.2 之间的不同值，系统尺寸为 $L=8$、10、12（不同线型依次为实线、虚线、点线）。当 $q<1$ 时，自相关函数趋于饱和值 $\sim 1-|q|^2$，表明左边缘存在局域化的强零模；而当 $q>1$ 时，自相关会迅速衰减至 0。

以打破公式（12）中的平凡 X_L 对称性。由此我们得到一个相互作用哈密顿量

$$H_{\text{I-int}}=-\sum_{j=1}^{L-1}(X_jX_{j+1}+qZ_j+rX_jY_{j+1})$$
$$-c\sum_{j=1}^{L-2}(X_jX_{j+2}+q^2Z_jZ_{j+1}+qZ_jX_{j+1}X_{j+2}), \tag{40}$$

根据构造，它与式（12）中$\sim\mathcal{C}_{\text{I-SZM}}$ 的算符对易。因此，该模型具有由 Q_Z 生成的全局 Z_2 对称性，以及一个强零模 $\Psi^{\ell}(q)$；二者彼此反对易，从而使 $H_{\text{I-int}}$的能谱出现二重简并。如图1a所示，很容易通过数值验证，在给定的 Z_2 对称性扇区内，$H_{\text{I-int}}$ 的本征值表现出能级排斥和维格纳-戴森统计，这是非可积模型的典型特征。因此，这是一个具有式（9）的精确强零模 $\Psi^{\ell}(q)$ 的非可积模型。对于 $|q|<1$，该强零模局域在链的左端，这一点反映在图示的最左侧自旋的自关联函数中

图1b，并且第V节B.3小节也对此进行了讨论。在链的右端加入任意局域项，就可以使它成为一个近似强零模，这与第III节B.2小节中的讨论类似。例如，我们可以在式（40）中加入qZ_L 和 $q^2Z_{L-1}Z_L$ 项，以确保整条链上的耦合“均匀”，即

$$\widetilde{H}_{\text{I-int}} = H_{\text{I-int}} - qZ_L - q^2Z_{L-1}Z_L. \tag{41}$$

这仍将具有式（9）的 $\widetilde{H}_{\text{I-int}}$ $\Psi^{\ell}(q)$，作为一个近似强零模。这样的系统是均匀伊辛模型的一个清晰例子：它具有非可积相互作用，同时还拥有一个近似强零模。

$H_{\text{I-int}}$ 的所有本征态都具有严格的二重简并，而 $H_{\text{I-int}}$ 的本征态则具有近似的二重简并（其含义见第III节B.2小节的讨论）。然而，即使存在无序，二重简并也未必会转化为本征态中的铁磁序，因为多体局域化（MBL）的稳定性仍存在疑问 [78, 87, 88]。对于基态，由于我们知道 $c = 0$（非相互作用极限）处于铁磁相（如第IIIB节所述），因此可以保证，诸如式（40）第二行所示的弱 Z_2对称微扰仍应保持铁磁序。然而，随着 c的幅度增大，我们通常无法排除体系发生相变、进入顺磁相或其他某种相的可能性，尤其是因为 c 可以为正，也可以为负。未来若能更加仔细地研究这类模型的相图，将会很有意义。

类似的构造也适用于第 IV 节中围绕 XY 强零模讨论的键代数。在第 IV C 节的情形中，强零模 [的精确性以及准局域 $U(1)$ 对称性，在这些情形下同样需要相当精细调节的边界项，如式（40）的哈密顿量$H_{\text{I-int}}$ 所示。然而，对于 XY 强零模，要构造一个沿整条链具有均匀耦合、且拥有近似强零模~（类似于式（41） $H_{\text{I-int}}$ ）的模型也很困难。这是因为在 XY 情形下，为了使耦合均匀，必须在链的两端都添加项（参见第 IVA 2 节中的讨论），而这也会破坏强零模的近似性。

最后，我们指出，这些构造具有某些共同强零模的大族哈密顿量的方法，与从零模逆向工程哈密顿量密切相关。文献 [89], 展示了这种方法，其中探讨并演示了如何构造具有所需“拓扑”模式的非相互作用和相互作用模型（因此推测为非可积模型）。

B. 对动力学的影响

1. *Correlation Functions and Mazur Bounds*

鉴于强零模是指数局域化的守恒量，它们应该会对.....产生某种影响，进而影响关联函数的动力学。例如，众所周知，伊辛强零模会使边缘算符 X_1 [38, 48, 64, 85] 的自关联函数达到饱和或形成预热平台。利用所谓的 Mazur界 [14, 90, 91], ，很容易理解这类现象。该界指出，某个算符 O 的时间^平均自关联函数可以由下式给出一个下界：

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T (\widehat{O}(t)|\widehat{O}(0)) \geq \sum \frac{|(\widehat{O}|Q_\alpha)|^2}{(Q_\alpha|Q_\alpha)}, \tag{42}$$

其中我们定义了 $(\widehat{A}|\widehat{B})$ ：$= \text{Tr}\left[\widehat{A}^{\dagger}\widehat{B}\right]/D$，其中 D 是希尔伯特空间维数，而 Q_α 是系统中经过正交化的守恒量。虽然通常在式（42）的求和中只纳入准局域对称性，但在许多系统中，纳入多种非局域对称性有助于获得一个界，例如在希尔伯特空间碎片化的情况下 [14, 28]。

对于非可积模型而言，这些由强零模（SZM）等守恒量产生的动力学特征，可能比其可积对应模型中的特征更加显著，因为后者的关联函数可能会受到其他特殊性质（例如非相互作用性质）的影响，而不只是受到强零模的影响。例如，在非可积系统中，我们预计，只要将所有已知的守恒量都纳入考虑，式（42）的 Mazur界就会在晚时间达到饱和。通过使用非可积系统动力学的简化模型，可以使这一点表述得更加精确，例如随机幺正电路 [92]。特别是，可以对电路中的随机性进行平均，从而对关联函数进行平均，以便更精确地计算动力学；这里假设该平均结果能够代表典型行为（原则上也可以通过更复杂的计算加以检验）。

2. *Brownian Circuit Formalism*

为模拟由键代数 $\mathcal{A} = \langle\!\langle \{T_{j,j+1}\} \rangle\!\rangle$ 构成的局域非可积系统的动力学，已证明，称为布朗电路 [93–96] 的随机演化是有效的 [22]。给定一组生成元 $\{T_{j,j+1}\}$，这类系统的时间演化由全局幺正算符构成，而全局幺正算符又由如下形式的局域含时幺正算符组成

$$U_{\delta t} = e^{i\sum_j J_j^{(t)} T_{j,j+1}\delta t}, \quad \overline{J_j^{(t)} J_k^{(t')}} = \frac{2g}{\delta t}\delta_{j,k}\delta_{t,t'}, \tag{43}$$

其中， $J_j^{(t)}$ 是具有所示关联的高斯随机变量，并且我们取 $\delta t \to 0$ 极限。可以证明，对任意算^符 O 的自关联函数，其平均行为（对电路中的随机性取平均，记为 $\cdots$）为 [22, 93–95, 97]

$$\overline{(\widehat{O}(t)|\widehat{O}(0))} = (\widehat{O}(0)|e^{-g\widehat{\mathcal{P}}t}|\widehat{O}(0)), \tag{44}$$

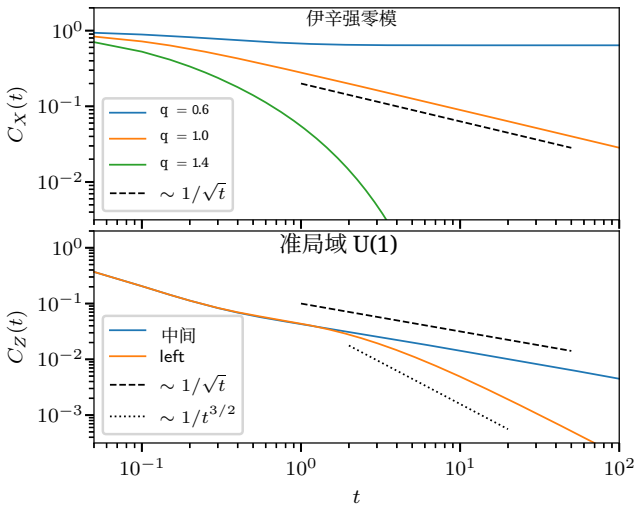

图 2. 含有强零模的布朗电路中自相关函数的动力学。计算采用时间演化块解码（TEBD），对公式（44）设定 $g = 1$，系统尺寸为 $L = 100$，最大键维数为 $\chi = 50$。（上）布朗电路中左边缘自旋上的算符X_1 的 $C_{X_1}(t) = 2^{-L}\mathrm{Tr}[X_1(t)X_1(0)]$。该电路由公式（7）中的伊辛键代数 $\mathcal{A}_{\text{I-SZM}}$ 的生成元构造，取 q的三个值。这表明其分别趋于常数（$q < 1$）、呈扩散幂律衰减（$q = 1$）和指数衰减（$q > 1$）；对应地，伊辛强零模局域于链的左边缘、发生离域并具有流体动力学模，或局域于链的右边缘。（下）布朗电路中链的左侧（格点 $j = 4$）或中间（格点 $j = 50$）算符 Z_j 的$C_{Z_j}(t) = 2^{-L}\mathrm{Tr}[Z_j(t)Z_j(0)]$。该电路由公式（33）中键代数$\mathcal{A}_{U(1),I}$ 的生成元，以及打破准局域 $U(1)$对称性的边界项 $\{Z_1\}$ 和 $\{Z_L\}$ 构造。中间的 $Z_{j=50}$ 表现出与具有常规 $U(1)$守恒的系统相似的流体动力学行为，在较长时间尺度 $\sim O(L^2)$ 内呈现清晰的扩散幂律衰减。靠近系统边界的 $Z_{j=4}$在有限时间尺度$\sim O(j^2)$ 内会感受到边界处准局域对称性的破缺，并呈现幂律衰减 $\sim t^{-\frac{3}{2}}$，这对应于具有吸收边界的扩散粒子的物理行为，详见第V.B.4节。

其中 $\widehat{\mathcal{P}}$ 是定义为如下形式的超算符

$$\widehat{\mathcal{P}} = \sum_j \widehat{\mathcal{L}}^\dagger_{j,j+1}\widehat{\mathcal{L}}_{j,j+1}, \quad \widehat{\mathcal{L}}_{j,j+1} = T_{j,j+1}\otimes\mathbb{1} - \mathbb{1}\otimes T^T_{j,j+1}. \tag{45}$$

这里我们还使用了 Choi-Jamiolkowski 算符到态的映射，并用双重空间记法写出了最终表达式。容易证明，$\widehat{\mathcal{P}}$ 的基态恰好是 $\mathcal{A}$ [22]的交换子 $\mathcal{C}$ 中的对称算符，因此，选取交换子的一组正交基 $|Q_\alpha)$后，公式（44）的 $t \to \infty$ 极限为

$$\lim_{t\to\infty}\overline{(\widehat{O}(t)|\widehat{O}(0))} = \sum_\alpha \frac{|(\widehat{O}|Q_\alpha)|^2}{(Q_\alpha|Q_\alpha)}, \tag{46}$$

这正是公式（42）右侧的表达式。这表明，对这些随机线路取随机性平均后，其自关联函数会达到相应的Mazur界。从公式（44）也可以清楚看出，趋近这一稳态值的过程由 $\mathcal{P}$的低能量激发所支配；这些激发是与 $\mathcal{C}$ [22, 97]中的对称性相对应的慢模。有时可以通过研究对称算符 $|Q_\alpha)$的结构，以变分方式推导出这些慢模；这些算符是 $\mathcal{P}$的基态。下面我们将讨论一些这样的例子。

当经过 Jordan–Wigner 变换后，所有 $\{T_{j,j+1}\}$ 都是二次费米子算符时（本工作研究的所有键代数都满足这一条件），结果表明$\widehat{\mathcal{L}}_{j,\ j+1}$ 公式（45）具有 $U(1)$ 超算符对称性 [98]（当将 $\mathcal{P}$ 解释为林布拉德算符 [99]时，这种对称性也可称为 弱 $U(1)$对称性）。这种超算符对称性也延伸至超哈密顿量 $\mathcal{P}$，可用于将其分块对角化为在该超算符 $U(1)$作用下保持不变的子空间，从而有时能更简单地求解交换子和流体动力学模。我们将在附录 C1 中进一步讨论这一点，并展示一些例子。不过请注意，由自由费米子项构造的布朗电路，其平均行为预计与具有相同交换子的相互作用布朗电路相似，尤其是在考察公式（44）这类简单关联函数时。这与以下事实有关：具有任意对称性的自由费米子电路（也称为匹配门电路）相对于该对称性构成酉 1-设计 [98]。

3. *Edge Autocorrelations with the Ising SZM*

现在，我们研究具有伊辛强零模的非可积系统中预期的关联函数动力学。我们从一个由公式（7）的键代数 $\mathcal{A}_{\text{I-SZM}}$ 的生成元构成的布朗电路入手，并聚焦于边缘算符 X_1的自关联函数。利用公式（46）可以计算其随机性平均的无限时间值：从公式（10）中选取 $|Q_\alpha)$'s；可以验证，这些算符构成交换子的正交基（尽管未归一化）。注意到算符 X_1 与它们中的所有算符都正交，唯独 $\Psi^\ell(q)$除外，因此我们得到

$$\lim_{t\to\infty}\overline{(X_1(t)|X_1(0))} = \frac{|(X_1|\Psi^\ell(q))|^2}{(\Psi^\ell(q)|\Psi^\ell(q))} = \frac{1-|q|^2}{1-|q|^{2L}}, \tag{47}$$

其中，$|q| = 1$ 情形是该表达式在形式上的 $q \to 1$ 极限，即 $1/L$。直观地说，在 $L \to \infty$ 极限下，仅当 $|q| < 1$时，$1 - |q|^2$ 才取非零值；此时强零模局域在链的左侧。正如图 2 上图所示，我们使用相应的超哈密顿量进行直接计算，确实得到了这一结果。这也与

图1下图所示的、具有伊辛强零模的非可积哈密顿量中观察到的动力学一致。

趋近于这一无限时间值的过程，可以根据公式（45）中由公式（7）的生成元构造出的相应超-$\widehat{}$哈密顿量 $\mathcal{P}_{\text{I-SZM}}$ 的能隙推断出来。在附录 C 中，我们展示了两种实现这一点的方法。首先，我们表明，一组自然的试探态与其基态[（即公式（10）中的算符）正交，且具有$|\Psi^{\ell}$ $(z_k))$的形式，其中 $z_k = q^{-1}e^{ik}$；这里我们已将公式（9）隐式推广到了复数自变量。我们发现，在 $\widehat{\mathcal{P}}_{\text{I-SZM}}$下，该态的试探能量为 $E_k = 4|q - z_k|^2$，这表明当 $|q| \neq 1$时它是有能隙的，与预期一致：强零模由于具有离散对称性，不存在慢模式。其次，$\widehat{}$我们利用 $\mathcal{P}_{\text{I-SZM}}$的 $U(1)$ 超算符对称性；这一对称性源于 $\mathcal{A}_{\text{I-SZM}}$ 由自由费米子项生成。我们用它求解 $\mathcal{P}_{\text{I-SZM}}$的一些精确低能激发态$\widehat{}$。然而，第二种方法仅适用于 $\mathcal{A}_{\text{I-SZM}}$生成元的这一特定选择，而变分法即使面对一组更复杂、在费米子语言中可能存在相互作用的生成元，也同样适用。

有趣的是，试探态计算还意味着，当 $q = 1$, $|\Psi^{\ell}($ $z_k = e^{ik})$ 时，$k = 2\pi/L$ 存在一个能量为 $\sim k^2$ 的无能隙模式，因此 $\widehat{\mathcal{P}}_{\text{I-SZM}}$ 是无能隙的。正如附录 C 1 中所述，也可以利用其对称性，对 $\mathcal{P}_{\text{I-SZM}}$ 的部分能谱进行精确计算$\widehat{}$来验证这一点。利用这些布朗电路的低能流体动力学模进行解析计算（公式（44））， 并考虑到 X_1 与这些流体动力学模有重要的重叠，表明在示意意义上，对于较大的 t，有 $(X_1(t)|X_1(0))$ $\sim \int dk\ e^{-k^2 t} \sim t^{-\frac{1}{2}}$。事实上，体区中的费米子算符 $(\prod_{j'=1}^{j-1} Z_{j'})X_j$ $(= \chi_{2j-1}$，见附录B) 在 $q = 1$情形下也表现出类似的自相关幂律衰减。这也可以利用附录 C 中的结果，以更严格的方式推导；具体做法类似于参考文献 [22] 中的计算，该文详细讨论了具有局域守恒荷的系统中电荷密度的自关联函数。图 1b 所示的数值结果也验证了这一点。未来，值得研究非可积模型（例如公式（40）中的 $H_{\text{I-int}}$ ）是否也存在这种迹象。我们应当强调，由于存在许多其他守恒量，这些行为未必适用于平移不变（“洁净”）的自由费米子哈密顿量模型，例如公式（13）所示的模型。尽管如此，我们通过数值计算发现，在洁净模型中也存在相同的定性行为，只不过这些行为是“平均”意义上的，或是在对关联函数进行小时间窗口平均后才会出现；具体而言，当 $|q| \neq 1$时呈指数衰减，当 $q = 1$时呈幂律衰减，不过边缘自相关的幂指数不同。进一步探究 $\Psi^{\ell}(q)$ 在这类情形中的作用将会很有意思。

可以进行类似的分析，以揭示近似的强零模；当 $|q| < 1$时，即使在链的右端加入微扰，它仍然存在。例如，存在第 III B2 节讨论的最右端场 Z_L 时也是如此，另见公式（13）。一个能够描述存在此类场时关联函数动力学的简单玩具模型，是由公式（7）的生成元以及右边缘的 Z_L项构成的布朗电路。在这种情况下，有效超哈密顿量为

$$\widehat{\mathcal{P}}_{\text{tot}} = \widehat{\mathcal{P}}_{\text{I-SZM}} + \widehat{\mathcal{P}}_{\text{bdy}}, \tag{48}$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$其中，$\mathcal{P}_{\text{I-SZM}}$ [分别具有公式（45）的形式，其中T_j、$_{j+1}$ 选自公式（7） [，或者用 Z_L 代替$\sim T_j$、$_{j+1}$]。如前所述， $\mathcal{P}_{\text{I-SZM}}$的基态就是交换子 $\mathcal{C}_{\text{I-SZM}}$中的算符，因此，$\widehat{}$添加 $\mathcal{P}_{\text{bdy}}$ 的影响可以通过在该基态空间上应用简并微扰理论来计算，这与近期为研究存在对称性破缺杂质时对称系统中关联函数动力学所进行的计算类似 [31]。$\widehat{}$对于 $|q| < 1$，添加 $\mathcal{P}_{\text{bdy}}$ 只会使 $\mathcal{P}_{\text{I-SZM}}$的部分基态$\widehat{}$发生指数级小的能级分裂； $|1)$和 $|Q_Z)$仍是 $\mathcal{P}_{\text{tot}}$ [的零能$\widehat{}$基态，因为它们与Z_L]严格对易；而 $|\Psi^{\ell}(q))$和 $|Q_Z\Psi^{\ell}(q))$则获得能量$\sim q^L$ [，因为正如公式（18）所示，它们与 Z_L 近似对易], ，其余所有算符则都有能隙。根据公式（44），这种指数级小的能级分裂意味着 X_1的平均自关联函数会出现一个指数级长的预热平台，其由公式（47）所示的贡献 $\Psi^{\ell}(q)$主导。在时间尺度 $t \gg O(1/q^L)$上，自关联函数预计会衰减至零，衰减形式为 $\sim e^{-cq^L t}$，这与[31]中讨论的希尔伯特空间碎裂 [10–12, 14, 28] 示例中存在局域运动积分的情况类似。对于第 IVA 节讨论的其他强零模示例，也可以进行类似的稳定性分析，这里不再详述。

4. *Hydrodynamics with the Quasi-local $U(1)$ Symmetry*

现在，我们讨论具有第 IVC 节所述准局域 $U(1)$ 对称性的非可积系统的流体力学。由于公式（34）中的守恒量是与常规 $U(1)$ 对称性相似的准局域算符，我们预期其流体力学与具有常规 $U(1)$ 对称性的系统相似，例如第 IV B 节所讨论的系统；这方面已有非常深入的研究。我们重点考察系统体区中 Z_j 的自关联函数（$Z_j(t)|Z_j$），正如我们将要证明的，它表现出有趣的流体动力学行为。根据公式（44），我们将考虑一个由公式（33）中 $\mathcal{A}_{U(1),I}$ 的生成元构成的布朗电路，并将相应的公式（45）中的$\widehat{}$超哈密顿量称为 $\mathcal{P}_{U(1),I}$。$\mathcal{P}_{U(1),I}$ 的基态$\widehat{}$是交换子中的 $4L$元素

$\mathcal{C}_{U(1),I}$，其定义见公式（36）。

现在，我们描述系统尺寸较大时低能激发的结构。这预计与具有常规 $U(1)$ 守恒的系统类似，因此下文只作示意性说明；更精确的细节请参阅 [22] 。$\mathcal{P}_{U(1),I}$ 的一个基态就是准局域守恒量本身，它可以表示为

$$\mathcal{Q}_{U(1),I} = \sum\nolimits_j \widetilde{Z}_j + \cdots_{\text{bdy}}, \tag{49}$$

其中，Z_j 是一个以格点 j 为中心指数局域化的算符，而 $\cdots_{\text{bdy}}$ 是系统边界附近的修正项。根据公式（34），我们可以选择 Z_j 为关于格点 j 对称的某个准局域项。例如，对于 $|q|<1$，$\mathcal{Q}_I^X$ 是具有公式（49）形式的准局域守恒量，其中

$$\widetilde{Z}_j = Z_j - \frac{\eta}{2}(X_{j-1}X_j + X_jX_{j+1}) - \eta q X_{j-1}Z_jX_{j+1} - \cdots, \tag{50}$$

而当 $|q|>1$ 时，$\mathcal{Q}_I^Y$ 是具有类似表达式的准局域守恒量。给定超哈密顿量 $\mathcal{P}_{U(1),I}$ 在公式（49）中的基态，我们预计，形如 $\widetilde{Z}_k = \sum_j e^{ikj}\widetilde{Z}_j$ 的平面波是 $\widehat{\mathcal{P}}_{U(1),I}$ 的无能隙激发，其能量为 $\sim k^2$。这一切与常规的 $U(1)$ 对称性 [22]，完全类似，其中 $Z_j = Z_{j^\dagger}$。

接下来我们注意到，经过适当归一化后，算符 Z_j 与准-粒子算符 Z_j 的重叠为 $O(1)$，这也意味着 Z_j 在所有平面波态 $\{Z_k\}$ 上的总重叠为 $O(1)$。由于这些平面波也是 $\mathcal{P}_{U(1),I}$ 的低能模式，我们预计，使用公式（44）计算的 $(Z_j(t)|Z_j)$ 表达式将由这些平面波的贡献主导 $\{\widetilde{Z}_k\}$。根据它们的色散关系，这给出 $(Z_j(t)|Z_j(0)) \sim \int dk\ e^{-k^2t} \sim t^{-\frac{1}{2}}$，与常规 $U(1)$ 对称性的情况类似 [22, 97]。如图1c所示，对于系统体区深处的 Z_j 算符，其布朗电路演化可以明确验证这一行为。

现在我们讨论加入边界扰动的情形，这些扰动会破坏准局域 $U(1)$ 对称性。若要构造具有此类 $\mathcal{Q}_I^X$ 或 $\mathcal{Q}_I^Y$ 准局域守恒量的模型，并希望使整条链上的耦合和场均匀化，这些扰动是自然需要的。随后，我们便可探究链的这种均匀化对关联函数 $(Z_j(t)|Z_j(0))$ 的影响。[31]研究了类似的情形，考察了一维系统中自关联函数 $(Z_j(t)|Z_j(0))$ 的行为；该系统具有规则的 $U(1)$ 守恒荷 $\sum_j Z_j$，并且该守恒荷会被链边缘处诸如 X_1 这样的项破坏。研究利用具有适当生成元的布朗电路，表明此类关联函数的动力学可映射为一个粒子的概率分布，该粒子初始时位于位置 j，并在一维空间中扩散，且满足吸收性边界条件。对于 $j \ll L$，这会导致自相关函数按 $(Z_j(t)|Z_j(0)) \sim t^{-\frac{3}{2}}$ 的形式衰减，其时间尺度为 $O(j^2) \ll t \ll O(L^2)$。依照同样的论证，我们预期，当边缘处的准局域守恒量被破坏时，自相关函数也会呈现相同的行为。事实上，如图 2 的下图所示，可以在布朗电路中验证这一点：我们使用由公式（33）中的 $\mathcal{A}_{U(1),\ I}$ 生成元产生的布朗门，以及由边界项 $\{Z_1, Z_L\}$ 生成、可破坏准局域 $U(1)$ 对称性的布朗门。

我们还预计，由公式（33）的生成元 $\mathcal{A}_{U(1),I}$ 构造并采用公式（39）等方法得到的非可积模型中，这些物理现象也会持续存在。诚然，由于可处理的系统尺寸有限，简单的精确对角化难以揭示这一点；不过，未来若能运用更先进的技术开展全面的数值研究，以检验上述物理现象是否可见，将会很有意义。

C. 无简并的强零模

最后，简单补充一点：在保留强零模的同时破坏可积性，也使我们能够构造出不存在伴随二重简并的强零模。在第三节和第四节中研究的所有交换子都包含强零模，以及一个与强零模反对易的 Z_2 对称算符 Q_Z，这会使由键代数构造的算符的谱出现精确的双重简并。这里存在 Q_Z 对称性，仅仅是因为我们考虑的代数由这样的项生成：经过 Jordan-Wigner 变换后，这些项映射为二次自由费米子项，而其 Z_2 宇称对称性在自旋表象中是 Q_Z。超越这类自由费米子生成元后，我们便能在保留强零模的同时，破坏系统底层的 Z_2 对称性。例如，若在链的右边缘向公式（7）的键代数中加入 $X_{L-1}Z_L \quad \mathcal{A}_{\text{I-SZM}}$，则 Q_Z 不再属于由此得到的交换子，而该交换子仅由 $\Psi^\ell(q)$ 生成。因此，由这类键代数的生成元构造的哈密顿量，其谱不再具有双重简并，但仍呈现第五节 B 中讨论的强零模动力学特征。这类交换子与具有指数对称性 [23–27] 的系统中出现的交换子十分相似。

然而需要注意的是，要获得仅由伊辛强零模 $\Psi_\ell(q)$ 生成的交换子，需要使用严格局域于右边缘附近的生成元，例如上述的 $X_{L-1}Z_L$。事实上，可以证明，不存在能够添加到键代数中的体局域项，使其与 $\Psi_\ell(q)$ 对易、但不与 Q_Z 对易。这是因为，对于格点 $\{j, j+1, \cdots, j+n\}$ 的任意局部连续区段，$\Psi^\ell(q)$ 在该区段上的“施密特向量”都包含 $\prod_{k=j}^{j+n} Z_n$，因此，作用于这些格点的任意局域算符如果

与 $\Psi^{\ell}(q)$ 对易，也会与 Q_Z 对易。我们还发现，对于我们将在第 VI A 节讨论的 Fendley 强零模的 YZ极限，情况也同样如此。所有这些都表明，半无限链上任何在开放端具有这些强零模之一的局域哈密顿量，必然也具有 Z_2 对称性，但未来的研究仍需对此进行更为严谨的证明。[4]

VI. FENDLEY 自旋 1/2 XYZ 链中的强零模

鉴于我们已经认识到，强零模可以用交换子代数来理解，并且也可以出现在非可积模型中，现在我们重新审视 Fendley 在 [32] 中提出的著名强零模。它存在于具有开放边界条件的自旋 1/2 XYZ 模型中，其哈密顿量为

$$H_{\mathrm{XYZ}} = \sum_{j=1}^{L-1} (J_x X_j X_{j+1} + J_y Y_j Y_{j+1} + J_z Z_j Z_{j+1}) = \sum_{j=1}^{L-1} (x X_j X_{j+1} + y Y_j Y_{j+1} + Z_j Z_{j+1}), \quad (51)$$

其中我们定义了 $x = J_x/J_z$ 和 $y = J_y/J_z$，并且不失一般性地假设 $J_z = 1$。该哈密顿量具有两个相互独立的 Z_2 对称性，由以下算符生成

$$Q_Z := \prod_{j=1}^{L} Z_j, \quad Q_X := \prod_{j=1}^{L} X_j, \quad (52)$$

文献 [32] 明确构造了一个算符 $\Psi(x,\ y)$ [其精确表达式见下文] ，该算符满足 $\|[\Psi(x,\ y)\ H_{\mathrm{XYZ}}]\| \sim \exp(-cL)$，也就是说，在 $L \to \infty$ 极限下，它与哈密顿量的对易子呈指数级趋于零；与此同时，$\|\Psi(x,\ y)\|$ 对 $|x|,\ |y| < 1$仍保持有限。此外，它还满足 $\{\Psi(x,\ y)\ Q_Z\} = 0$，因此当系统尺寸较大时，H_{XYZ} 的能谱会出现（近似）双重简并。因此，这是一个符合我们定义的近似强零模实例，定义见第 IIC 节。

然而，正如 [32], 中所提到的，加入一个额外的格点 $L+1$ 和一个边界项 $J_z Z_L Z_{L+1}$后，它便成为一个精确的强零模。将总系统尺寸记为 L更为方便，因此 $\Psi(x,\ y)$精确地与哈密顿量对易

$$\widetilde{H}_{\mathrm{XYZ}} := H_{\mathrm{XYZ}} - x X_{L-1} X_L - y Y_{L-1} Y_L \ . \quad (53)$$

这种为存在精确的 强零模而对边界项进行的“微调”，让人联想到强零模可以用由若干项叠加生成的键代数来理解，例如第 III 节和第 IV 节中讨论的情形。不过，正如我们将在第 VI A 节所展示的，这种理解仅适用于 XYZ 模型的非相互作用极限，此时 J_x、J_y、J_z 中至少有一个为 0。尽管如此，这一分析仍为相互作用 XYZ 模型中的 Fendley 强零模带来了有趣的见解。

A. YZ极限

为研究其与第 II C 节中所述键代数的关系，我们首先考虑 XYZ 模型的一个非相互作用极限：在方程（51）和（53）中令 $J_x = 0$ （即 x =0），并将由此得到的~哈密顿量分别记为 H_{YZ} 和 H_{YZ}。请注意，我们选择“YZ 极限”而非更常见的“XY 极限”，是为了沿用参考文献 [32], 中的记号，并将其与第 IVA 节中在存在磁场时出现的强零模区分开来。在 YZ 极限下，强零模为

$$\Psi(y) := \Psi(0,y) = \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{L-1}{2} \rfloor} (-y)^s Z_{2s+1} \prod_{j=1}^{2s} X_j. \quad (54)$$

文献 [32] 指出，$\Psi(y)$ 与~哈密顿量 H_{YZ}精确对易，后者可改写为

$$\widetilde{H}_{\mathrm{YZ}} := \sum_{j=1}^{L-2} (y Y_j Y_{j+1} + Z_j Z_{j+1}) + Z_{L-1} Z_L = Z_1 Z_2 + \sum_{j=1}^{L-2} (y Y_j Y_{j+1} + Z_{j+1} Z_{j+2}). \quad (55)$$

正如下文所述，$\Psi(y)$ 与式 (55) 第二行求和中的各个单项分别对易。

1. *Matrix Product Operator (MPO) expression*

为说明这一点，我们借鉴 [102], 中的思路，将 $\Psi(y)$表示为矩阵乘积算符，其形式为

$$\Psi(y) = \sum_{\{s_n\},\{t_n\}} [b^{l\,T} A_1^{[s_1 t_1]} A_2^{[s_2 t_2]} \dots A_L^{[s_L t_L]} b^r] \, |\{s_n\}\rangle \langle\{t_n\}| \, , \quad (56)$$

其中，A可以视为 $\chi \times \chi$ 个矩阵（此处 χ =3），其元素由作用于物理指标（此处 $d = 2$）上的 $d \times d$ 个矩阵（算符）表示；b^l 和 b^r是辅助空间中MPO的 χ维边界向量，分别设为 $b^l = (1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)^T$和 $b^r = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1)^T$。MPO张量的显式形式为

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & f X_j & Z_j \\ f X_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad f := \sqrt{-y}. \quad (57)$$

[4] 严格局域项具备此类性质，并不意味着严格局域项之和也具备此类性质；后者需要单独证明，这一点可从量子多体疤痕相关研究中的已知例子看出 [15, 100, 101]。

为了证明式（56）中的MPO与式（55）中的各项 $\{yY_jY_{j+1}+Z_{j+1}Z_{j+2}\}$ 对易，求得三位点矩阵乘积算符 $A_jA_{j+1}A_{j+2}$很有帮助，其形式为

$$A_jA_{j+1}A_{j+2}= \begin{pmatrix} 0 & f^3X_jX_{j+1}X_{j+2} & Z_j+f^2X_jX_{j+1}Z_{j+2} \\ f^3X_jX_{j+1}X_{j+2} & 0 & fX_jZ_{j+1} \\ 0 & 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \tag{58}$$

并且很容易验证，式（58）中的所有元素都与 $Z_{j+1}Z_{j+2}+yY_jY_{j+1}$对易，因此我们有 $[Z_{j+1}Z_{j+2}+yY_jY_{j+1},\Psi(y)]=0$。为了证明 $\Psi(y)$ 与 Z_1Z_2 对易，我们可以考虑最左侧格点上的两位点矩阵乘积算符以及边界向量 b^l，由此得到

$${b^l}^T A_1A_2=\begin{pmatrix} f^2X_1X_2 & 0 & Z_1 \end{pmatrix}. \tag{59}$$

式（59）中的所有元素都与 Z_1Z_2 对易，因此我们有 $[Z_1Z_2,\Psi(y)]=0$。

2. Bond and Commutant algebras

总之，这些结果表明 $\Psi(y)$ 属于下列键代数的交换子 $\mathcal{C}_{\mathrm{YZ}}$：

$$\mathcal{A}_{\mathrm{YZ}}=\langle\!\langle Z_1Z_2,\{yY_jY_{j+1}+Z_{j+1}Z_{j+2}\}\rangle\!\rangle. \tag{60}$$

我们通过数值计算发现，交换子的维数为 $\dim(\mathcal{C}_{\mathrm{YZ}})=16$, 这可以理解为

$$\mathcal{C}_{\mathrm{YZ}}=\langle\!\langle Q_X,Q_Z,\Psi(y),Z_L\rangle\!\rangle, \tag{61}$$

因此，它完全由式（52）中的两个 Z_2 对称性 Q_X 和 Q_Z，以及两个强零模 $\Psi(y)$ 和 Z_L 所穷尽。$\mathcal{C}_{\mathrm{YZ}}$ 与式（10）的伊辛强零模交换子有相似之处，只是由于不存在磁场，额外具有 Z_2 对称性。

基于这一理解，也很容易运用与第 V 节所讨论思路类似的方法，构造以 $\Psi(y)$为强零模的非可积模型。此外，即使破坏 $\mathcal{C}_{\mathrm{YZ}}$中的某些其他对称性，也可以保留该强零模。例如，我们可以得到键代数与对易子代数这一对

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{SZM}}=\langle\!\langle Z_1Z_2,\{yY_jY_{j+1}+Z_{j+1}Z_{j+2}\},\{Z_jY_{j+1}\}\rangle\!\rangle,$$
$$\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{SZM}}=\langle\!\langle \Psi(y),Q_X\rangle\!\rangle. \tag{62}$$

3. Properties of the SZM

容易证明，根据第 IIC 节的定义，$\Psi(y)$ 满足成为精确的强零模的条件。此外，对于 $|y|<1$，它局域在链的左端。归一化强零模与完整哈密顿量 H_{YZ} [的对易子类似于

将 $J_x=0$ 代入公式（51）得到的公式（18）] 为

$$\frac{\|[H_{\mathrm{YZ}},\Psi(y)]\|}{\|\Psi(y)\|}=\frac{2J_z|y|^{\lfloor\frac{L-1}{2}\rfloor}\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{(1-y^{2(\lfloor\frac{L-1}{2}\rfloor+1)})}}\delta_{L,\mathrm{even}}. \tag{63}$$

因此，对于 $|y|<1$，当 L为偶数时，$\Psi(y)$是 H_{YZ}的一个近似强零模；而当 L为奇数时，它仍是一个精确强零模。对于偶数 L 和 $|y|<1$（因此处于 z铁磁相），这会使整个能谱近似二重简并，能级劈裂呈指数级小（若 $|y|$ 足够小，劈裂也小于典型能级间距）。另一方面，当 L 为奇数时，对于 y 的所有取值，整个能谱都精确二重简并（因此同时处于 z铁磁相和 y铁磁相）。然而，在这种情况下，这种精确简并也可以简单地用这些系统尺寸下 Q_X 与 Q_Z 的反对易性来解释，而强零模 $\Psi(y)$不会带来任何额外简并。

B. XYZ链

在理解了 H_{YZ}的强零模之后，我们现在转而讨论 $x\neq 0$时的 H_{XYZ}。我们发现，此时无法对强零模 $\Psi(x,y)$作类似的交换子理解。尽管如此，类似的思路仍可为强零模给出另一种证明。

1. Matrix Product Operator Expression

鉴于式（56）的矩阵乘积算符在YZ极限下很有用，我们首先将Fendley强零模改写为键维数为 $\chi=4$的矩阵乘积算符（MPO）：

$$\Psi(x,y)=\sum_{\{s_n\},\{t_n\}}[{b_F^l}^T F_1^{[s_1t_1]}F_2^{[s_2t_2]}\cdots F_L^{[s_Lt_L]}b_F^r]\,|\{s_n\}\rangle\langle\{t_n\}|, \tag{64}$$

其中，$(b_F^l)^T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\end{pmatrix}$、$(b_F^r)^T=\begin{pmatrix}0&0&0&1\end{pmatrix}$为边界向量，且

$$F_j=\begin{pmatrix} xy\mathbb{1}_j & fX_j & gY_j & Z_j \\ fX_j & x\mathbb{1}_j & 0 & 0 \\ gY_j & 0 & y\mathbb{1}_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1}_j \end{pmatrix},\quad \begin{matrix} f:=\sqrt{y(x^2-1)} \\ g:=\sqrt{x(y^2-1)} \end{matrix}, \tag{65}$$

这可以通过仔细审视 [32] 中的表达式，并使用构造矩阵乘积算符的标准方法 [102]推导得出。与矩阵乘积算符的通常情况一样，该表达式并不唯一，存在许多自由度，例如 Z_j 前面的系数，它只是将$\Psi(x,y)$乘以一个整体常数，我们已将该常数设为1。还存在一种自由度：将其中一个 X_j（或Y_j）乘以一个c数，并将另一个 X_j（或 Y_j）除以

同一个c数；将其选为 i 可使矩阵乘积算符在 $|x|,|y|<1$ 时明显为厄米的，这在某些计算中可能较为方便。Fendley 等人 [103, 104]也独立得到了等价表达式，可通过将式(65)中的 F_j 乘以整体因子 $x^{-1}y^{-1}$，并利用其中的自由度], 将 Z_j 的系数设为1而得到，Katsura [105]也得到了该结果。

仅凭这一矩阵乘积算符表达式，就能简化对 Fendley 强零模性质的研究。例如，当 $|x|,\ |y|<1$ 时，该算符局域在链的左端这一性质可以直接看出，因为矩阵乘积算符中出现的各个系数 xy、f、g、x、y 的绝对值都小于 1。此外，还可以利用这些矩阵乘积算符的相应转移矩阵的结构，证明其在热力学极限下的可归一化性和马约拉纳性质，如附录 D 所示。最后，如下文所述，也如文献 [104] 最近所示，可以通过对各项进行望远镜式抵消，证明~该矩阵乘积算符与哈密顿量 H_{XYZ} 对易。

2. Telescoping Structure

~为证明该矩阵乘积算符与 H_{XYZ} 对易，我们首先以类似于式 (55) 的方式将其重写为

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_{\mathrm{XYZ}} &= \sum_{j=1}^{L-2}(xX_jX_{j+1}+yY_jY_{j+1}+Z_jZ_{j+1})+Z_{L-1}Z_L \\ &= Z_1Z_2+\sum_{j=1}^{L-2}(xX_jX_{j+1}+yY_jY_{j+1}+Z_{j+1}Z_{j+2}).\end{aligned} \tag{66}$$

我们接着考虑三位点项的对易

$$T_{j,j+1,j+2} := xX_jX_{j+1}+yY_jY_{j+1}+Z_{j+1}Z_{j+2} \tag{67}$$

它出现在公式（66）中，并与三位点矩阵乘积算符 $F_jF_{j+1}F_{j+2}$ 的各元素对易。如第 VI A 节所示，当 $x=0$（或等价地，当$y=0$）时，它完全对易。然而，当 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$时，我们发现该~不再对易。相反，H_{XYZ} 与 Ψ（x,y）对易这一事实，来自一种更为复杂的伸缩结构；我们在附录 D1 中讨论该结构，并在下文加以总结。

具体而言，我们发现

$$\begin{aligned}[T_{j,j+1,j+2},\Psi(x,y)] &= -\widehat{\Psi}_{j,j+1}(x,y)+\delta_{j\neq L-2}\widehat{\Psi}_{j+1,j+2}(x,y), \\ [Z_1Z_2,\Psi(x,y)] &= \widehat{\Psi}_{1,2}(x,y),\end{aligned} \tag{68}$$

^其中，$\Psi_{j,j+1}(x,y)$ 可解释为在格点 j and $j+1$ 上的 $\Psi(x,y)$ 中插入某种“缺陷”，其精确表达式见附录 D 中的公式（D10）。

公式（66）中哈密顿量的形式以及公式（68）中的关系表明

$$[\widetilde{H}_{\mathrm{XYZ}},\Psi(x,y)]=0. \tag{69}$$

虽然该关系对 x 和 y的所有取值都成立，但对于$|x|$, $|y|<1$，我们可以利用 Ψ（x,y）在链的左端呈指数局域化这一事实，进一步证明

$$\begin{aligned}\|[H_{\mathrm{XYZ}},\Psi(x,y)]\| &= \|[xX_{L-1}X_L+yY_{L-1}Y_L,\Psi(x,y)]\| \\ &\sim \exp(-cL),\quad \text{if}\quad |x|,|y|<1.\end{aligned} \tag{70}$$

如附录 D4 所述，也可以使用 MPO 转移矩阵更系统地证明这一点。

值得注意的是，文献中曾用这种望远镜级数方法证明了若干强零模实例的存在 [38], ，最近也用它证明了 Fendley 强零模本身的存在 [104]。[5] Ψ（$x,\ y$）与这些实例的不同之处在于，正如下一个小节将要讨论的，望远镜结构是必需的；而在许多其他情形下，例如第 III 节和第 VIA 节中的情形，则可以通过适当地组合各项来消除望远镜结构。

3. Necessity of the Telescoping Structure

现在我们讨论为什么公式（66）的望远镜结构是必需的，以及为什么无法重新组合公式（66）中的各项，使各个部分都与 Ψ（$x,\ y$）对易。换言之，我们要论证，不存在由严格局域项生成的非平凡键代数，使得 Ψ（$x,\ y$）属于其对易子代数。

首先，我们也可以显式地寻找与 $\Psi(x,\ y)$ 对易的严格局域算符（即潜在键代数的生成元），并发现不存在作用范围为 ≤ 6 的此类算符，如附录 D 所述。更一般地，这也可以通过比较 $\Psi(y)$ 与 $\Psi(x,\ y)$ 的能谱来理解。$\Psi(y)$ 在此处及下文均假定经过适当归一化，其能谱具有高度简并性，其中 2^{L-1} 个本征值为 $+1$，其余 2^{L-1} 个为 -1，这与 $\Psi(y)^2\propto \mathbb{1}$ 一致。能谱的这种简并性很重要，因为它使得具有该对称性的任意项或哈密顿量的能谱只能对应两个不同的量子数；这些量子数就是对称算符不同的本征值。这种简并性还使得可能存在多个与 $\Psi(y)$ 对易、但彼此不对易的项，

[5] Our focus 与参考文献 [104] 中的不同之处在于，我们采用如式（67）所示分组的三格点项，而参考文献 [104] 直接采用 XYZ 模型的最近邻项。这里采用的三格点分组自然揭示了与非相互作用极限下交换子的联系，正如我们在第 VI A 节所讨论的那样。

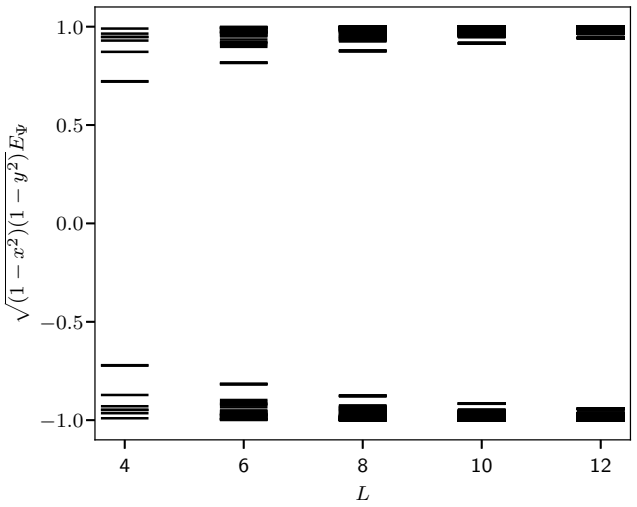

图 3. **Fendley 强零模的特征值 $\Psi(x,y)$.** 图中展示了 $(x,y)=(0.6,0.4)$下，从$L=4$到 $L=12$的不同系统尺寸对应的数据。经过乘以逆范数$\|\Psi(x,y)\|^{-1}=\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$进行缩放后，随着系统尺寸 L增大，特征值 $\{E_\Psi\}$ 越来越聚集在 $+1$ 和 -1 附近；但事实上，对于任意有限系统尺寸 L，它们都完全非简并。这与本文讨论的其他强零模形成对比：对于那些强零模，在有限系统尺寸下，其所有特征值都为 $+1$或 -1。

例如，生成式（60）中键代数 $\mathcal{A}_{\rm YZ}$ 的那些项。

另一方面，如图 3 所示，对于任意有限系统尺寸 L，能谱 $\Psi(x,y)$完全非简并。经过适当归一化后，其中包含两簇特征值：其中 2^{L-1} 个接近 $+1$，另有2^{L-1} 个接近 -1。这与以下事实相符：对于有限系统尺寸， $\Psi(x,y)^2$ 并不正比于 1，而只有在 $L\to\infty$ 极限 [32] 下才成立（参见附录 D，其中利用矩阵乘积算符表达式给出了证明）。 $\Psi(x,y)$的这一非简并能谱意味着，所有与之对易的项在$\Psi(x,y)$的特征基中都是对角的，因此它们彼此也应当对易。这排除了由彼此不对易的项生成键代数的可能性。事实上，对于任意有限系统尺寸，与 $\Psi(x,y)$对易的任何算符也都可以由$\Psi(x,y)$生成（按代数意义，即作为幂的线性组合）； [不过形式上需要用到 $\Psi(x,y)$的所有不超过2^L-1 次的幂，因此实际应用价值不大~]。由于 $H_{\rm XYZ}$ 与 $\Psi(x,y)$对易，对于任意有限系统尺寸，它也应当可以用 $\Psi(x,y)$表示。

这表明，无论如何对 $H_{\rm XYZ}$的项进行重新分组，都必须存在像式 (68)~这样的望远镜结构。事实上，具有非简并谱的对称算符是 Bethe Ansatz 可积系统的典型特征，因此我们推测，$\Psi(x,\ y)$的存在与 $H_{\rm XYZ}$的 Bethe Ansatz 可积性有关。这与文献 [104]最近的观察结果一致

该文指出，XYZ 模型的所有运动积分都可以从一类与其哈密顿量对易的通用矩阵乘积算符中导出，而与式 (65) 中的矩阵乘积算符等价的算符是其中一个特例（另见文献 [106]）。

VII. 结论与展望

在这项工作中，我们首先介绍了一种技术，用于寻找某些局域哈密顿量系列中可实现的有趣对称性或交换子代数。该方法利用了这样一个观点：交换子代数可以理解为局域“超哈密顿量”的基态；这一观点已在早期的数值 [21]和解析 [22] 研究中提出。仅针对非常小的系统尺寸（例如，自旋-1/2系统的 $L=4$）以及由最近邻项生成的一小类键代数进行此类计算，就已发现局域哈密顿量中可能存在的新型非常规对称性。我们认为，这些对称性着实令人惊叹：其中一些曾在截然不同的背景下出现，过去的研究也曾花费大量精力才将其识别出来；而原则上，正如本文所展示的，只需简单的穷举搜索便能“发现”它们。将这一技术应用于更广泛的哈密顿量系列，并对这类系统中可能出现的对称性进行粗略“分类”，将会很有意义。然而，鉴于高自旋系统或长程自旋-1/2系统中可能出现的对称性种类繁多，例如希尔伯特空间碎裂 [14], 量子多体疤痕 [15],调制对称性 [23]„ 甚至范畴对称性 [5, 107, 108], ，这可能是一项艰巨的任务；搜索空间急剧增大的事实也意味着我们需要更好的搜索方法。这个问题的一个较简单版本，或许是考察由泡利串或“稳定子项”生成的键代数，并对其交换子进行分类。这与近期对由泡利串生成的所谓动力学李代数 [109] 所做的分类方向一致；动力学李代数与超算符对称性 [98, 110, 111] 密切相关。

尽管对称性的完整集合相当庞大，将在其他工作中进行更详细的探讨，但在本文中，我们聚焦于强零模（SZM）；从交换子的角度理解它们，有助于阐明若干方面。首先，这清楚地表明，精确强零模可以存在于非可积模型中，而以往关于这一主题的研究尚未明确这一点。其次，这揭示了强零模与物质基态相之间的关系，并给出了它们成为精确或近似守恒量的明确条件。第三，这也揭示了新颖的准局域 $U(1)$ 对称性可以与某些强零模并存，例如在参数取特定值的自旋 1/2 XY 模型中。第四，这表明，在具有强零模的非可积模型中可能存在表观的流体动力学行为，例如具有适当相互作用的临界伊辛模型，或具有新颖准局域 $U(1)$ 对称性的模型中；这些情况都值得在未来的工作中通过数值方法仔细探索。

最后，这促使我们重新审视自旋 1/2 XYZ 模型中著名的 Fendley 强零模 [32]，并考察它与交换子框架的联系。我们发现，在非相互作用极限下，可以用交换子来理解 Fendley 强零模，但在相互作用情形下则不然。尽管如此，这还是带来了一种证明 Fendley 强零模的替代方法，与近期文献 [104] 中展示的方法类似。这表明强零模可能分为两类：一类可以推广到非可积模型，另一类则与可积性联系得更为紧密。

鉴于我们对强零模的这一理解，重新审视文献中许多其他强零模实例 [51, 86, 112–115]，并探究其存在是否必须依赖可积性，将会很有意思。另一个有趣的问题是，交换子方面的理解能否推广到副费米子系统中的强零模 [45, 54, 116]，以及 Floquet 系统中的强零模 [63, 67, 86]；在后者中，除了强零模 [51, 86, 112之外，还有许多其他关于长寿命模式的概念，最后还可以探究强零模 [118]是否对经典马尔可夫过程有某些启示。最后但同样重要的是，虽然我们关注的是一维空间中的系统，但探索高维中的强零模 [24, 38, 89, 119, 120] 或其类似物也将很有意思。

致谢

我们感谢 Bryan Clark、Paul Fendley、Hosho Katsura 和 Aditi Mitra 所进行的有益讨论。本研究得到了加州理工学院 Walter Burke 理论物理研究所、量子信息与物质研究所（美国国家科学基金会物理前沿中心，NSF Grant PHY-1733907）、美国国家科学基金会项目 DMR-2001186，以及慕尼黑量子科学与技术中心（MCQST）的支持；后者由德国卓越战略 EXC-2111-390814868 资助。

[1] W. Ji 和 X.-G. Wen，范畴对称性以及对称性破缺与拓扑相变中的不可逆异常，《物理评论研究》**2**，033417（2020）。[2] J. McGreevy，凝聚态物质中的广义对称性，《凝聚态物理年度评论》**14**，57（2023）。[3] S.-H. Shao，《覆水难收：不可逆对称性的 TASI 讲义》，arXiv预印本 arXiv:2308.00747（2023）。[4] L. Bhardwaj、L. E. Bottini、L. Fraser-Taliente、L. Gladden、D. S. Gould、A. Platschorre 和 H. Tillim，广义对称性讲义，《物理学报告》**1051**，1 2024( )，广义对称性讲义。[5] L. Bhardwaj、L. E. Bottini、S. Schafer-Nameki 和 A. Tiwari，具有不可逆对称性的相与相变的格点模型，arXiv预印本 arXiv:2405.05964（2024）。[6] M. Serbyn、D. A. Abanin 和 Z. Papi´c，量子多体疤痕与遍历性弱破缺，《自然物理》**17**，675（2021）。[7] Z. Papi´c，《从量子纠缠的视角看弱遍历性破缺》，载于 *Entanglement in Spin Chains: From Theory to Quantum Technology Applications*，A. Bayat、S. Bose 和 H. Johannesson 编（2022），第341–395页。[8] S. Moudgalya、B. A. Bernevig 和 N. Regnault，量子多体疤痕与希尔伯特空间碎裂：精确结果综述，《物理学进展报告》**85**，086501（2022）。[9] A. Chandran、T. Iadecola、V. Khemani 和 R. Moessner，量子多体疤痕：准粒子视角，《凝聚态物理年度评论》**14**，443（2023）。[10] P. Sala、T. Rakovszky、R. Verresen、M. Knap 和 F. Pollmann，偶极守恒哈密顿量中由希尔伯特空间碎裂引发的遍历性破缺，《物理评论X》**10**，011047（2020）。[11] V. Khemani、M. Hermele 和 R. Nandkishore，《希尔伯特空间粉碎导致的局域化：从理论到物理实现》，物理评论B**101**, 174204 (2020)。[12] S. Moudgalya、A. Prem、R. Nandkishore、N. Regnault 和 B. A. Bernevig，《受约束哈密顿量的克雷洛夫子空间中的热化及其缺失》，载于 *Memorial Volume for Shoucheng Zhang*，第 7 章，第 147–209 页。[13] Z.-C. Yang、F. Liu、A. V. Gorshkov 和 T. Iadecola，《严格禁闭导致的希尔伯特空间碎裂》，物理评论快报**124**, 207602 (2020)。[14] S. Moudgalya 和 O. I. Motrunich，《希尔伯特空间碎裂与交换子代数》，《物理评论X》**12**, 011050 2022( )。[15] S. Moudgalya 和 O. I. Motrunich，《利用交换子代数穷尽刻画量子多体疤痕》，物理评论X**14**, 041069 (2024)。[16] P. Zanardi，《虚拟量子子系统》，物理评论快报**87**, 077901 (2001)。[17] S. D. Bartlett、T. Rudolph 和 R. W. Spekkens，《参考系、超选择规则与量子信息》，现代物理评论**79**, 555 (2007)。[18] Z. Nussinov 和 G. Ortiz，《键代数与哈密顿量的精确可解性：自旋 $S = \frac{1}{2}$ 多层系统》，物理评论B**79**, 214440 (2009)。[19] A. Chatterjee 和 X.-G. Wen，《局域对称算符的代数与编织融合 n-范畴——对称性是拓扑序的影子》，物理评论B**107**, 155136 2023( )。[20] S. Moudgalya 和 O. I. Motrunich，《从对称性到标准哈密顿量中的交换子代数》，物理年鉴**455**, 169384 (2023)。[21] S. Moudgalya 和 O. I. Motrunich，《检测对称性与交换子代数的数值方法》，物理评论B**107**, 224312 (2023)。[22] S. Moudgalya 和 O. I. Motrunich，《作为局域超算子基态的对称性：流体动力学

含义》，PRX Quantum 5, 040330 (2024)。[23] P. Sala、J. Lehmann、T. Rakovszky 和 F. Pollmann，《调制对称性系统中的动力学》，物理评论快报 129, 170601 (2022)。[24] J. Lehmann、P. S. de Torres-Solanot、F. Pollmann 和 T. Rakovszky，《二维及更高维中的碎片化诱导局域化与边界电荷》，《SciPost物理》14, 140 (2023)。[25] Y. Hu 和 H. Watanabe，《广义 N-态钟模型中无基态简并的自发对称性破缺》，物理评论B 107, 195139 (2023)。[26] B. Lian，《量子击穿模型：从多体局域化到带有量子疤痕的混沌》，物理评论B 107, 115171 2023( )。[27] Y.-M. Hu 和 B. Lian，《玻色量子击穿哈伯德模型》，物理评论B 112, L100504 (2025)。[28] T. Rakovszky、P. Sala、R. Verresen、M. Knap 和 F. Pollmann，《统计局域化：从强碎片化到强边缘模》，物理评论B 101, 125126 2020( )。[29] T. M. Gunawardana 和 B. Buˇca，《斯塔克多体局域化中的动力学l比特与持续振荡》，物理评论B 106, L161111 (2022)。[30] B. Buˇca，《局域量子多体动力学统一理论：本征算符热化定理》，《物理评论X》13, 031013 (2023)。[31] Y. Li、P. Sala、F. Pollmann、S. Moudgalya 和 O. Motrunich，《局域对称性破缺杂质存在时的动力学》，物理评论B 112, 155108 2025( )。[32] P. Fendley，《XYZ/相互作用马约拉纳链中的强零模与本征态相变》，《物理学A：数学与理论》49, 30 01 2016LT ( )。[33] P. Pfeuty，《具有横场的一维伊辛模型》，物理年鉴 57, 79 (1970)。[34] A. Y. Kitaev，《量子线中的未配对马约拉纳费米子》，《物理学-乌斯佩希》44, 131 (2001)。[35] O. Motrunich、K. Damle 和 D. A. Huse，《无自旋旋转不变性的脏超导体中的格里菲斯效应与量子临界点：一维实例》，物理评论B 63, 224204 (2001)。[36] M. I. K. Munk、A. Rasmussen 和 M. Burrello，《双荷零能模》，物理评论B 98, 245135 (2018)。[37] L. M. Vasiloiu、F. Carollo 和 J. P. Garrahan，《通过耗散增强边缘自旋的关联时间》，物理评论B 98, 094308 (2018)。[38] L. M. Vasiloiu、F. Carollo、M. Marcuzzi 和 J. P. Garrahan，《具有方格相互作用的一类广义伊辛自旋梯子中的强零模》，物理评论B 100, 024309 (2019)。[39] R. A. Santos 和 B. B´eri，《准一维莫特绝缘体中由几何手性产生的强零模》，物理评论快报 125, 207201 (2020)。[40] C. Monthus，《满足宇称 P 和时间反演对称性 T 的随机相互作用马约拉纳模型中的偶、奇归一化零模》，《物理学A：数学与理论》51, 265303 (2018)。[41]M. McGinley、A. Nunnenkamp 和 J. Knolle，《可积无序系统中非时序关联函数与纠缠熵的缓慢增长》，物理评论快报 122, 020603 (2019)。

[42] J. Bjerlin、A. S. Sørensen 和 S. Haas，通过局域自旋动力学探测马约拉纳模式，物理评论B 106，035414（2022）。[43] C. B. Daˇg、L.-M. Duan 和 K. Sun，无限温度下拓扑诱导的预扰乱及拓扑相变的动力学探测，物理评论B 101，104415（2020）。[44] I. Mahyaeh 和 E. Ardonne，基塔耶夫-哈伯德链的相图研究，物理评论B 101，085125（2020）。[45] P. Fendley，Zn 不变自旋链中的副费米子边缘零模，《统计力学杂志：理论与实验》2012，P11020（2012）。[46] N. Chepiga 和 F. Mila，受挫哈尔丹链中的精确零模，物理评论B 96，060409（2017）。[47] N. Moran、D. Pellegrino、J. K. Slingerland 和 G. Kells，副费米子时钟模型与量子共振，物理评论B 95，235127（2017）。[48] I. A. Maceira 和 F. Mila，有限长度链中边缘自旋的无限相干时间，物理评论B 97，064424（2018）。[49] D. Pellegrino、G. Kells、N. Moran 和 J. K. Slingerland，通过畴壁角守恒构造边缘零模，《物理学A：数学与理论》53，095006（2020）。[50] J. Kemp、N. Y. Yao 和 C. R. Laumann，无限温度下对称性增强的边界量子比特，物理评论快报 125，200506（2020）。[51] C. T. Olund、N. Y. Yao 和 J. Kemp，边界强零模，物理评论B 111，L201114（2025）。[52] D. J. Yates 和 A. Mitra，克雷洛夫子空间中的 Floquet 自旋链强模式与近强模式，物理评论B 104，195121（2021）。[53] H.-C. Yeh、G. Cardoso、L. Korneev、D. Sels、A. G. Abanov 和 A. Mitra，弱非可积边界杂质模型中的缓慢衰减零模，物理评论B 108，165143（2023）。[54] J. Alicea 和 P. Fendley，副费米子拓扑相：理论与蓝图，《凝聚态物理年度评论》7，119（2016）。[55] D. V. Else、P. Fendley、J. Kemp 和 C. Nayak，预热化强零模与拓扑量子比特，《物理评论X》7，041062（2017）。[56] X. Mi *et al.*，超导量子比特链上的抗噪边缘模，《科学》378，785（2022）。[57] T. Koma，相互作用下马约拉纳边缘零模的稳定性，arXiv预印本 arXiv:2205.11222（2022）。[58] H. Katsura、D. Schuricht 和 M. Takahashi，相互作用基塔耶夫/马约拉纳链中的精确基态与拓扑序，物理评论B 92，115137（2015）。[59] K. Kawabata、R. Kobayashi、N. Wu 和 H. Katsura，扭曲基塔耶夫链中的精确零模，物理评论B 95，195140（2017）。[60] J. Wouters、H. Katsura 和 D. Schuricht，相互作用基塔耶夫链的精确基态，物理评论B 98，155119（2018）。[61] J. Fu，自旋/费米子链中的精确弱玻色零模，物理评论B 106，L161412（2022）。[62] I. Mahyaeh 和 E. Ardonne，Z_3-时钟型模型及其若干近似模型的精确结果，物理评论B 98，245104（2018）。[63] D. J. Yates、F. H. L. Essler 和 A. Mitra，近强（0

, π) 干净的相互作用一维系统中的边缘模

Floquet 系统，物理评论B 99, 205419 (2019)。[64] D. J. Yates、A. G. Abanov 和 A. Mitra，《远离可积性的自旋链中近强边缘模的动力学》，物理评论B 102, 195419 (2020)。[65] K. Wada、T. Sugimoto 和 T. Tohyama，《具有次近邻相互作用的各向异性XY自旋链中强马约拉纳零模与弱马约拉纳零模的共存》，物理评论B 104, 075119 (2021)。[66] D. J. Yates、A. G. Abanov 和 A. Mitra，《相互作用且无无序的Floquet自旋链中长寿命的周期加倍边缘模》，Communications Physics 5, 43 (2022)。[67] B. Mukherjee、R. Melendrez、M. Szyniszewski、H. J. Changlani 和 A. Pal，《通过局域弗洛凯工程涌现的强零模》，物理评论B 109, 064303 2024( )。[68] B. Pandey、N. Mohanta 和 E. Dagotto，《相互作用基塔耶夫链中的非平衡马约拉纳零模》，物理评论B 107, L060304 (2023)。[69] N. Laflorencie、G. Lemari´e 和 N. Mac´e，《由多体局域化稳定的随机相互作用伊辛-马约拉纳链中的拓扑序》，物理评论研究 4, L032016 (2022)。[70] N. Laflorencie，《临界基塔耶夫链中马约拉纳零模的普适特征》，arXiv预印本 arXiv:2311.07571 (2023)。[71] N. P. Landsman，《C*代数、希尔伯特C*模与量子力学讲义》，arXiv预印本 math-ph/9807030 (1998)。[72] D. Harlow，《从量子纠错推导笠-高柳公式》，Communications in Mathematical Physics 354, 865 (2017)。[73] D. A. Lidar，《无退相干子空间、无噪声子系统与动力学解耦综述》，载于 *Quantum Information and Computation for Chemistry* (2014)，第295–354页。[74] W. Fulton 和 J. Harris，*Representation theory: a first course* 129 2013 ，第（ ）卷。[75] D. J. Yates、A. G. Abanov 和 A. Mitra，《一维相互作用对称性保护拓扑相中近强边缘模算符的寿命》，物理评论快报 124, 206803 (2020)。[76] N. Tausendpfund、A. Mitra 和 M. Rizzi，《有限温度下的近强零模》，物理评论研究 7, 023245 (2025)。[77] D. S. Fisher，《随机横场伊辛自旋链》，物理评论快报 69, 534 (1992)。[78] D. A. Huse、R. Nandkishore、V. Oganesyan、A. Pal 和 S. L. Sondhi，《局域化保护的量子序》，物理评论B 88, 014206 (2013)。[79] A. Dutta、G. Aeppli、B. K. Chakrabarti、U. Divakaran、T. F. Rosenbaum 和 D. Sen，*Quantum Phase Transitions in Transverse Field Spin Models: From Statistical Physics to Quantum Information* (剑桥大学出版社，剑桥，2015)，arXiv:1012.0653的扩展版本。[80] S. Sachdev，*Quantum phase transitions* (2011)。[81] F. Franchini，*An Introduction to Integrable Techniques for One-Dimensional Quantum Systems*，《物理学讲义》，第940卷 (2017)。[82] S. Vardhan 和 S. Moudgalya，《普适低能模式产生的纠缠动力学》，物理评论B 113, 014308 2026( )。

[83]R. Suzuki、H. Katsura、Y. Mitsuhashi、T. Soejima、J. Eisert 和 N. Yoshioka，《以更少的随机局部门获得更多全局随机性》，arXiv预印本 arXiv:2410.24127（2024）。[84] M. ˇZnidariˇc，《生成随机双分纠缠的精确收敛时间》，《物理评论A》**78**，032324（2008）。[85] J. Kemp、N. Y. Yao、C. R. Laumann 和 P. Fendley，《边缘自旋的长相干时间》，《统计力学杂志：理论与实验》**2017**，063105（2017）。[86] E. Vernier、H.-C. Yeh、L. Piroli 和 A. Mitra，《可积量子电路中的强零模》，物理评论快报**133**，050606（2024）。[87] J. ˇSuntajs、J. Bonˇca、T. c. v. Prosen 和 L. Vid- mar，《量子混沌对多体局域化提出挑战》，《物理评论E》**102**，062144（2020）。[88] P. Sierant、M. Lewenstein、A. Scardicchio、L. Vidmar 和 J. Zakrzewski，《经典计算时代的多体局域化*》，《物理学进展报告》**88**，026502（2025）。[89] E. Chertkov、B. Villalonga 和 B. K. Clark，《利用通用对称性到哈密顿量方法构建拓扑模型》，《物理评论研究》**2**，023348（2020）。[90] P. Mazur，《某些系统中相位函数的非遍历性》，《物理学》**43**，533（1969）。[91] A. Dhar、A. Kundu 和 K. Saito，《重新审视Mazur界和Suzuki等式》，《混沌、孤子与分形》**144**，110618（2021）。[92] M. P. Fisher、V. Khemani、A. Nahum 和 S. Vijay，《随机量子电路》，《凝聚态物理年度评论》**14**，335（2023）。[93] N. Lashkari、D. Stanford、M. Hastings、T. Osborne 和 P. Hayden，《迈向快速扰乱猜想》，《高能物理学杂志》**2013**，22（2013）。[94] M. Bauer、D. Bernard 和 T. Jin，《随机耗散量子自旋链（I）：量子涨落离散流体力学》，《SciPost物理》**3**，033（2017）。[95] C. S¨underhauf、L. Piroli、X.-L. Qi、N. Schuch 和 J. I. Cirac，《大有限N下布朗SYK模型中的量子混沌：OTOC和三分信息》，《高能物理学杂志》**2019**，38（2019）。[96] S. Xu 和 B. Swingle，《局域性、量子涨落与扰乱》，《物理评论X》**9**，031048（2019）。[97] O. Ogunnaike、J. Feldmeier 和 J. Y. Lee，《统一不同对称性、约束和长程相互作用下的涌现流体力学与林布拉德算符低能谱》，物理评论快报**131**，220403（2023）。[98] M. Lastres、F. Pollmann 和 S. Moudgalya，《幺正电路中守恒超算符导致的非普适性》，物理评论B**113**，014310（2026）。[99] B. Buˇca 和 T. Prosen，《关于林德布拉德方程的对称性约化：受约束开放自旋链中的输运》，《新物理学杂志》**14**，073007（2012）。[100] L. Gioia、S. Moudgalya 和 O. I. Motrunich，《量子态的不同类型母哈密顿量：来自 W 作为量子多体疤痕态的态的见解》，arXiv预印本 arXiv:2510.24713（2025）。[101] N. O'Dea、L. Gioia、S. Moudgalya 和 O. I. Motrunich，《局域性迫使量子多体疤痕塔具有等能级间距》，arXiv预印本 arXiv:2601.14206（2026）。

[102] G. M. Crosswhite 和 D. Bacon，《矩阵乘积算法中用于缓存的有限自动机》，《物理评论A》**78**，012356（2008）。[103] P. Fendley，在“统计力学中的巧思与可积性”会议上作报告，题为“利用守恒流进行Baxter化”，阿姆斯特丹，2017年9月27日至29日。[104]P. Fendley、S. Gehrmann、E. Vernier 和 F. Verstraete，《轻松实现XYZ可积性》，arXiv 预印本 arXiv:2511.04674（2025）。[105] H. Katsura，，（私人通信）。[106] V. I. Yashin，《海森堡自旋链中MPO运动积分的二参数族》，arXiv电子预印本 arXiv:2602.19741 10.48550/arXiv.2602.19741（2026）。[107] A. Chatterjee、Omer M. Aksoy 和 X.-G. Wen，《具有不可逆对称性的自旋链中的量子相与相变》，《SciPost物理》**17**，115（2024）。[108] L. Bhardwaj、L. E. Bottini、S. Sch¨afer-Nameki 和 A. Tiwari，《在格点模型中阐释范畴朗道范式》，物理评论 B**111**，054432（2025）。[109] R. Wiersema、E. K¨okc¨u、A. F. Kemper 和 B. N. Bakalov，《线性、环形和全连接拓扑上二体自旋系统动力学李代数的分类》，《npj量子信息》**10**，110（2024）。[110] R. Zeier 和 T. Schulte-Herbr¨uggen，《量子系统理论中的对称性原理》，《数学物理杂志》**52**，113510（2011）。[111] Z. Zimbor´as、R. Zeier、T. Schulte-Herbr¨uggen 和 D. Burgarth，《有效相互作用可量子模拟性的对称性判据》，《物理评论A》**92**，042309（2015）。[112] P. Richelli、K. Schoutens 和 A. Zorzato，《具有全局费米子对称性的砖墙量子电路》，《SciPost物理》**17**，087（2024）。

[113]M. Znidaric、U. Duh 和 L. Zadnik，《齐次U(1)不变最近邻量子比特电路中的可积性普遍存在》，arXiv预印本 arXiv:2410.06760（2024）。[114] F. H. L. Essler、P. Fendley 和 E. Vernier，《可积自旋-S链中的强零模》，arXiv:

2512 07742 。凝

[ ] 2025

聚态物理统计力学（），预印本。[115] S. Gehrmann 和 F. H. L. Essler，《具有非对角边界条件的量子电路和自旋链中的精确强零模》，arXiv预印本 arXiv:2511.05490（2025），预印本。[116] A. S. Jermyn、R. S. K. Mong、J. Alicea 和 P. Fend- ley，《副费米子链中零模的稳定性》，物理评论B **90**，165106（2014）。[117] H.-C. Yeh、A. Rosch 和 A. Mitra，Floquet乘积模，物理评论B **110**，075117（2024）。[118] K. Klobas、P. Fendley 和 J. P. Garrahan，《随机强零模及其动力学表现》，《物理评论E》**107**，L042104（2023）。[119] J. Wildeboer、T. Iadecola 和 D. J. Williamson，《子系统码带来的对称性保护无限温量子存储》，PRX Quantum **3**，020330 2021（）。[120] Y. Kuno 和 I. Ichinose，《晶格规范理论与子系统码之间的相互作用》，物理评论B **108**，045150（2023）。[121] G. B. Mbeng、A. Russomanno 和 G. E. Santoro，《量子伊辛链入门》，《SciPost物理讲义》，82（2024）。[122] W.-C. Yueh 和 S. S. Cheng，《具有四个受扰角的三对角托普利茨矩阵的显式特征值和逆矩阵》，《ANZIAM期刊》**49**，361（2008）。[123] R. A. Horn 和 C. R. Johnson，*Matrix Analysis*，第2版（2012）。

附录 A：具有强零模的准局域 $U(1)$ 对称性

在本附录中，我们将补充说明第 IV C 节讨论的准局域 $U(1)$ 对称性。正如正文所述，我们发现对称算符为

$$\mathcal{Q}_I^X(q) := \sum_{j=1}^{L} Z_j - \eta \sum_{1\le j_1<j_2\le L} X_{j_1}\left(\prod_{i=j_1+1}^{j_2-1} qZ_i\right)X_{j_2},$$
$$\mathcal{Q}_I^Y(q) := \sum_{j=1}^{L} Z_j + \eta \sum_{1\le j_1<j_2\le L} Y_{j_1}\left(\prod_{i=j_1+1}^{j_2-1} \frac{1}{q}Z_i\right)Y_{j_2}, \tag{A1}$$

其中 $\eta := q - q^{-1}$。为证明这些算符与公式（33）的键代数生成元$\mathcal{A}_{U(1),I}$ 对易，将它们表示为矩阵乘积算符（MPO）会更方便:

$$\mathcal{Q} = \sum_{\{s_n\},\{t_n\}} [b^l{}^T A_1^{[s_1t_1]} A_2^{[s_2t_2]} \dots A_L^{[s_Lt_L]} b^r] \,|\{s_n\}\rangle\langle\{t_n\}|\,, \tag{A2}$$

其中， A 可视为 $\chi\times\chi$ 矩阵，其元素是作用于物理指标上的 $d\times d$ 矩阵；b^l 和 b^r 则是 MPO 在辅助空间中的 χ维边界向量，分别设为 $b^l = (1\ 0\ \cdots\ 0)^T$和 $b^r = (0\ \cdots\ 0\ 1)^T$。式（A1）中守恒量对应的 MPO 张量为

$$A_j^X = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_j & \sqrt{\eta}X_j & Z_j \\ 0 & qZ_j & -\sqrt{\eta}X_j \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_j \end{pmatrix}, \quad A_j^Y = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_j & \sqrt{\eta}Y_j & Z_j \\ 0 & q^{-1}Z_j & \sqrt{\eta}Y_j \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_j \end{pmatrix}. \tag{A3}$$

于是，双位点矩阵乘积算符为

$$A_j^X A_{j+1}^X = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{j,j+1} & \sqrt{\eta}X_{j+1} + \sqrt{\eta}qX_jZ_{j+1} & Z_{j+1} - \eta X_jX_{j+1} + Z_j \\ 0 & q^2 Z_jZ_{j+1} & -\sqrt{\eta}Z_jX_{j+1} - \sqrt{\eta}X_{j+1} \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_{j,j+1} \end{pmatrix}, \tag{A4}$$

$$A_j^Y A_{j+1}^Y = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{j,j+1} & \sqrt{\eta}Y_{j+1} + \sqrt{\eta}qY_jZ_{j+1} & Z_{j+1} + \eta Y_jY_{j+1} + Z_j \\ 0 & q^2 Z_jZ_{j+1} & \sqrt{\eta}Z_jY_{j+1} + \sqrt{\eta}Y_{j+1} \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_{j,j+1} \end{pmatrix}. \tag{A5}$$

这些双格点张量中的所有算符都可以证明与键代数$\mathcal{A}_{U(1),I}$的生成元严格对易，即

$$[(A_j^{X/Y} A_{j+1}^{X/Y})^{[\mu\nu]}, q^{-1}X_jX_{j+1} + qY_jY_{j+1} + Z_j + Z_{j+1}] = 0, \tag{A6}$$

其中， μ, ν 表示式 (A3) 中矩阵相乘后的辅助指标。这表明，式 (A2) 中的完整矩阵乘积算符也与每个键代数生成元对易，因此 $\mathcal{Q}_I^X$和 $\mathcal{Q}_I^Y$属于交换子 $\mathcal{C}_{U(1),I}$。对于第 IV C 2 节的交错准局域 $U(1)$ 对称性，也可以进行类似的构造。

附录 B：将结果转化为费米子语言

现在，我们利用 Jordan-Wigner 变换将许多结果转化为费米子语言，从而阐明正文中讨论的强零模及其他对称算符的诸多性质。首先定义无自旋费米子产生与湮灭算符 $\{c_j^\dagger\}$ 和 $\{c_j\}$，它们满足 $\{c_j^\dagger, c_k\} = \delta_{j,k}$，$\{c_j^\dagger, c_k^\dagger\} = \{c_j, c_k\} = 0$；并将费米子数算符定义为 $n_j = c_j^\dagger c_j$。接着，我们进行变换 [121],[6]

$$X_j = (-1)^{\sum_{k=1}^{j-1} n_k}(c_j^\dagger + c_j), \quad Y_j = i(-1)^{\sum_{k=1}^{j-1} n_k}(c_j^\dagger - c_j), \quad Z_j = 1 - 2n_j = (-1)^{n_j}, \tag{B1}$$

可以验证，它们满足泡利矩阵所需的对易关系，例如 $[X_j, Y_k] = 2iZ_j\delta_{j,\ k}$。我们还可以将 $2L$ 马约拉纳算符 $\{\chi_{2j-1}, \chi_{2j}\}$ 定义为

$$c_j^\dagger = \frac{1}{2}(\chi_{2j-1} + i\chi_{2j}), \ \ c_j = \frac{1}{2}(\chi_{2j-1} - i\chi_{2j}), \tag{B2}$$

可以证明它们满足关系 $\{\chi_a, \chi_b\} = 2\delta_{a,\ b}$，从而确保所有费米子反对易关系均成立。

用常规（亦称复）费米子和马约拉纳（亦称实）费米子表示时，我们在正文中研究的各项可转换为

$$\begin{gathered} X_jX_{j+1} = c_j^\dagger c_{j+1} + c_j^\dagger c_{j+1}^\dagger + h.c. = i\chi_{2j}\chi_{2j+1}, \quad Y_jY_{j+1} = c_j^\dagger c_{j+1} - c_j^\dagger c_{j+1}^\dagger + h.c. = -i\chi_{2j-1}\chi_{2j+2}, \\ X_jY_{j+1} = i(-c_j^\dagger c_{j+1} + c_j^\dagger c_{j+1}^\dagger) + h.c. = -i\chi_{2j}\chi_{2j+2}, \quad Y_jX_{j+1} = i(c_j^\dagger c_{j+1} + c_j^\dagger c_{j+1}^\dagger) + h.c. = i\chi_{2j-1}\chi_{2j+1}, \\ Z_j = 1 - 2n_j = i\chi_{2j-1}\chi_{2j}. \end{gathered} \tag{B3}$$

由此可知，我们研究的键代数的生成元全都是二次费米子算符。下面我们用费米子语言描述各个交换子中的算符。所有交换子共有的 Z_2 对称算符 Q_Z，用费米子语言表示为

$$Q_Z = (-1)^{\sum_{j=1}^{L} n_j} = i^L \prod_{k=1}^{2L} \chi_k. \tag{B4}$$

---

[6] 请注意，有些参考文献将其定义为 $Y_j \to -Y_j$ 和 $Z_j \to -Z_j$，这与此等价。我们作出这一选择是为了使下文的一些表达式更加简洁优雅。

1. 伊辛强零模

我们从公式（7）的伊辛键代数 $\mathcal{A}_{\text{I-SZM}}$ 及公式（10）的交换子 $\mathcal{C}_{\text{I-SZM}}$ 开始。$\mathcal{A}_{\text{I-SZM}}$ 的生成元表示为

$$X_jX_{j+1}+qZ_j=i\chi_{2j}(-q\chi_{2j-1}+\chi_{2j+1}). \tag{B5}$$

式 (9) 中的伊辛强零模也是一个马约拉纳零模（MZM），其表达式为

$$\Psi^\ell(q)=\sum_{j=1}^{L}q^{j-1}(c_j^\dagger+c_j)=\sum_{j=1}^{L}q^{j-1}\chi_{2j-1}, \tag{B6}$$

它根据反对易关系与 $\mathcal{A}_{\text{I-SZM}}$ 的生成元对易

$$\{\chi_{2j-1}+q\chi_{2j+1},q\chi_{2j-1}-\chi_{2j+1}\}=0, \tag{B7}$$

这与式 (8) 类似。利用式 (B4) 和 (B6) 可得到 $Q_Z\Psi^\ell(q)$，但它不是马约拉纳零模，也就是说，它是多个马约拉纳算符的乘积。另一方面，虽然 X_L 也不是马约拉纳零模，其表达式为$X_L=i^{L-1}\prod_{k=1}^{2L-2}\chi_k\times\chi_{2L-1}$，但我们可以用它来构造马约拉纳零模

$$iQ_ZX_L=\chi_{2L}. \tag{B8}$$

如第 III 节 B 1 小节所述，这对马约拉纳零模 $\Psi^\ell(q)$ 和 iQ_ZX_L，恰好也是键代数 $\mathcal{A}_{\text{I-SZM}}$ 中任意二次自由费米子哈密顿量的单粒子谱中出现的那对马约拉纳零模。当 $|q|<1$ 时，它们局域在链的两端。这使得在该参数范围内，即使存在额外项，能谱的二重简并仍保持稳定。这也与洁净 Kitaev 链的拓扑相相吻合；该拓扑相是式 (B5) 中各项的均匀叠加 [，在自旋表象中，这对应于如此构造的横场伊辛模型的铁磁相]。

2. XY 强零模

我们也可以类似地将 第 IV A 节关于 XY 强零模的结果转译为马约拉纳表述。生成元为

$$\begin{aligned}&(\kappa+\gamma)X_jX_{j+1}+(\kappa-\gamma)Y_jY_{j+1}+q(\kappa+\gamma)Z_j+q^{-1}(\kappa-\gamma)Z_{j+1}\\&=(\kappa+\gamma)i\chi_{2j}\chi_{2j+1}-i(\kappa-\gamma)\chi_{2j-1}\chi_{2j+2}+iq(\kappa+\gamma)\chi_{2j-1}\chi_{2j}+iq^{-1}(\kappa-\gamma)\chi_{2j+1}\chi_{2j+2}\\&=i(\kappa+\gamma)\chi_{2j}(\chi_{2j+1}-q\chi_{2j-1})+i(\kappa-\gamma)\chi_{2j+2}(\chi_{2j-1}-q^{-1}\chi_{2j+1}).\end{aligned} \tag{B9}$$

如第 IV 节所述，由这些项生成的键代数除了式 (B4) 的 Z_2 对称性Q_Z外，还具有两个强零模。其中一个就是式 (B6) 中的 $\Psi^\ell(q)$，另一个则是式 (21) 中为 $s=q^{-1}\frac{\kappa-\gamma}{\kappa+\gamma}$定义的 $\Psi^r(s)$。与伊辛情形中的 X_L 类似，强零模 $\Psi^r(s)$ 不是马约拉纳零模，但可以利用一 Q_Z 构造一个马约拉纳零模：

$$iQ_Z\Psi^r(s)=-\sum_{j=1}^{L}s^{L-j}\left(\prod_{k=1}^{j-1}Z_k\right)Y_j=-i\sum_{j=1}^{L}s^{L-j}(c_j^\dagger-c_j)=\sum_{j=1}^{L}s^{L-j}\chi_{2j}. \tag{B10}$$

与伊辛情形类似，这对马约拉纳零模 $\Psi^\ell(q)$ 和 $iQ_Z\Psi^r(s=q^{-1}\frac{\kappa-\gamma}{\kappa+\gamma})$，正是由式 (B9) 给出的各项构成的自由费米子模型中出现的马约拉纳零模。此外，正如我们将在下文所示，当由这些项构成的平移不变马约拉纳链在体区处于拓扑相 [时（等价地，XY 链处于铁磁相]），这两个马约拉纳零模分别局域在链的两端。

引理 1. 设 $\kappa,\gamma,q\in\mathbb{R}$ 满足 $\kappa+\gamma\neq0$, $\kappa-\gamma\neq0$, $q^{-1}\neq0$, 且 $q\neq0$。式 *(16)* 和 *(24)* 中的马约拉纳零模 $\Psi^\ell(q)$ 和 $iQ_Z\Psi^r(s=q^{-1}\frac{\kappa-\gamma}{\kappa+\gamma})$局域在链的相反两端，当且仅当式 *(23)* 中 *XY* 链的体区处于铁磁相；已知在以下条件下会出现这种情况

$$\left|\,q(\kappa+\gamma)+q^{-1}(\kappa-\gamma)\,\right|<2|\kappa|. \tag{B11}$$

证明. 注意，在以下两种情况中的任意一种下，所述马约拉纳零模都局域在链的相反两端:

$$\text{(i)}\ \ |q|<1\ \text{ and }\ \left|q^{-1}\frac{\kappa-\gamma}{\kappa+\gamma}\right|<1,\quad \text{(ii)}\ \ |q|>1\ \text{ and }\ \left|q^{-1}\frac{\kappa-\gamma}{\kappa+\gamma}\right|>1. \tag{B12}$$

为了证明这些情形等价于式 (B11)，我们首先定义

$$s:=q^{-1}\frac{\kappa-\gamma}{\kappa+\gamma}, \tag{B13}$$

从而 $\kappa-\gamma=(\kappa+\gamma)qs$。于是我们有如下关系

$$|q(\kappa+\gamma)+q^{-1}(\kappa-\gamma)|=|(\kappa+\gamma)(q+s)|,\ \ 2|\kappa|=|(\kappa+\gamma)(1+qs)|. \tag{B14}$$

因此，式 (B11) 与式 (B12) 之间的等价性可以直接建立为

$$\big|\,q(\kappa+\gamma)+q^{-1}(\kappa-\gamma)\,\big|<2|\kappa|\iff |q+s|<|1+qs|\iff (1-q^2)(1-s^2)>0\iff |q|,|s|<1\text{ or }|q|,|s|>1, \tag{B15}$$

其中，在倒数第二步，我们只是将两边平方并改写了不等式。至此证明完成。

□

3. 常规与准局域 $U(1)$ 对称性

我们现在说明第 IV B 节和第 IV C 节中讨论的常规与准局域 $U(1)$ 对称性的马约拉纳形式；二者在马约拉纳表述中均为二次的。常规 $U(1)$ 对称性由守恒总自旋给出

$$\sum_j Z_j=i\sum_{j=1}^{L}\chi_{2j-1}\chi_{2j}. \tag{B16}$$

为了将其与此处发现的准局域 $U(1)$ 对称性进行对比，我们简要讨论该算符的单粒子谱，因为它是一个二次马约拉纳算符。由于它只是相互对易项之和，具有 $2L$ 个能级的单粒子谱仅由 L 重简并的 -1 和 L 重简并的 $+1$ 组成。这给出了该总 $U(1)$ 荷算符的标准多体谱，其中包含 2^L 个能量能级。其获得方式是始终填满全部 L 个 -1 单粒子能级，并以 2^L 种不同方式占据剩余的 L 个 $+1$ 单粒子能级。多体本征值可由单粒子本征值直接计算。给定单粒子本征值 $\{\pm\varepsilon_\alpha\}$，多体本征值由 $\{\sum_{\alpha=1}^{L}(2n_\alpha-1)\varepsilon_\alpha\}$ 给出，其中 $n_\alpha\in\{0,1\}$ 是能量为 $+\varepsilon_\alpha$ 的单粒子能级的占据数。容易算出，这给出对应于 $0\le n\le L$ 的多体本征值 $\{-L+2n\}$，共计 $L+1$ 个不同的特征值，这是众所周知的。下面我们将看到，对于准局域 $U(1)$ 算符，情况有所不同。

准局域的 $U(1)$ 对称算符 $\mathcal{Q}_I^X(q)$ 为

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_I^X(q)&=\sum_{j=1}^{L}Z_j-\eta\sum_{1\le j_1<j_2\le L}q^{j_2-j_1-1}X_{j_1}\left(\prod_{k=j_1+1}^{j_2-1}Z_k\right)X_{j_2}\\
&=\sum_{j=1}^{L}(1-2n_j)-\eta\sum_{1\le j_1<j_2\le L}q^{j_2-j_1-1}(-1)^{\sum_{k=1}^{j_1-1}n_k}(c_{j_1}^\dagger+c_{j_1})(-1)^{\sum_{k=j_1+1}^{j_2-1}n_k}(-1)^{\sum_{k=1}^{j_2-1}n_k}(c_{j_2}^\dagger+c_{j_2})\\
&=\sum_{j=1}^{L}(1-2n_j)-\eta\sum_{1\le j_1<j_2\le L}q^{j_2-j_1-1}(c_{j_1}^\dagger-c_{j_1})(c_{j_2}^\dagger+c_{j_2})\\
&=\sum_{j=1}^{L}i\chi_{2j-1}\chi_{2j}-\eta\sum_{1\le j_1<j_2\le L}q^{j_2-j_1-1}i\chi_{2j_1}\chi_{2j_2-1}=\sum_{j=1}^{L}i\chi_{2j-1}\chi_{2j}-\eta\sum_{r=1}^{L-1}\sum_{k=1}^{L-r}q^{r-1}i\chi_{2k}\chi_{2(k+r)-1}.
\end{aligned} \tag{B17}$$

类似地， $\mathcal{Q}_I^Y(q)$表示

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_I^Y(q) &= \sum_{j=1}^{L} Z_j + \eta \sum_{1\le j_1<j_2\le L} q^{-(j_2-j_1-1)} Y_{j_1}\left(\prod_{k=j_1+1}^{j_2-1} Z_k\right) Y_{j_2} \\ &= \sum_{j=1}^{L}(1-2n_j) - \eta \sum_{1\le j_1<j_2\le L} q^{-(j_2-j_1-1)}(c_{j_1}^\dagger + c_{j_1})(c_{j_2}^\dagger - c_{j_2}) \\ &= \sum_{j=1}^{L} i\chi_{2j-1}\chi_{2j} - \eta \sum_{1\le j_1<j_2\le L} q^{-(j_2-j_1-1)} i\chi_{2j_1-1}\chi_{2j_2} = \sum_{j=1}^{L} i\chi_{2j-1}\chi_{2j} - \eta \sum_{r=1}^{L-1}\sum_{k=1}^{L-r} q^{-(r-1)} i\chi_{2k-1}\chi_{2(k+r)}.\end{aligned} \tag{B18}$$

交错的 $\mathcal{Q}_{II}^X(q)$ 和 $\mathcal{Q}_{II}^Y(q)$ 的表达式可用类似方法求得。通过直接写出相应的矩阵，可以求解单粒子能级。对于 $\mathcal{Q}_I^X(q)$，我们发现存在具有本征值 $-q^{-1}$和 $+q^{-1}$的 $(L-1)$ 重简并能级，以及具有本征值 $-q^{L-1}$, $+q^{L-1}$的非简并能级。随后可按常规方法由此计算多体谱，多体本征值为 $\{q^{-1}[-L+2(n+mq^L)+(1-q^L)]\}$，其中 $0\le n\le L-1$ 为整数， $0\le m\le 1$为整数，共有 $2L$ 个不同的值；在 $q\to 1$ 极限下，这些值变为$L+1$ 个不同的本征值；若 $q<1$，则在 $L\to\infty$ 极限下变为 L 个不同的本征值，此时 $\mathcal{Q}_I^X(q)$ 算符为准局域算符。 $\mathcal{Q}_I^Y(q)$ 算符的本征值与之相同，只需替换为 $q\to q^{-1}$。

附录 C： 具有强零模的自由费米子超哈密顿量与流体力学

1. 一般理论

本附录讨论推导含有强零模的系统的流体力学所需的超哈密顿量结构。在讨论具体例子之前，我们先探讨与自由费米子项相对应的超哈密顿量的一些一般特征。更一般地，考虑键代数

$$\mathcal{A}_{\rm FF} = \langle\!\langle \{T_A = \frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}\chi_\alpha\chi_\beta\}\rangle\!\rangle, \tag{C1}$$

其中， A 是一个反对称厄米单粒子矩阵（为方便后续讨论，定义时带有因子1_4），$\{\chi_\alpha\}$ 是马约拉纳费米子，而键代数则通过指定一组这样的 A来定义，例如对应于不同键项的生成元。 [存在其他结构/对称性时，我们还可以进一步简化，例如在研究具有电荷守恒的复费米子时；此处不再进一步推导这些结果。]如第 V B 2 节所述，由这类生成元定义的超哈密顿量通常会在完整的加倍希尔伯特空间 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$上成为相互作用哈密顿量，例如，

$$\widehat{\mathcal{P}} = \sum\nolimits_A \widehat{\mathcal{L}}_A^\dagger \widehat{\mathcal{L}}_A, \quad \widehat{\mathcal{L}}_A = T_A\otimes\mathbb{1} - \mathbb{1}\otimes T_A^T. \tag{C2}$$

然而，当 T_A 具有二次费米子结构时，已知 $\mathcal{L}_A$ 具有 $U(1)$ 超算符对称性 [98]，因为它会保持任意算符串中的马约拉纳算符数量不变。也就是说，李乌维尔算符 $\mathcal{L}_A$ 作用于一个n 马约拉纳算符 $\chi_{\gamma_1}\cdots\chi_{\gamma_n}$时，会返回马约拉纳算符的线性组合 n，即，

$$\widehat{\mathcal{L}}_A|\chi_{\gamma_1}\chi_{\gamma_2}\cdots\chi_{\gamma_n}) = \frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}|[\chi_\alpha\chi_\beta, \chi_{\gamma_1}\chi_{\gamma_2}\cdots\chi_{\gamma_n}]) = \sum_\alpha\sum_{\ell=1}^{n} A_{\alpha\gamma_\ell}|\chi_{\gamma_1}\cdots\chi_{\gamma_{\ell-1}}\chi_\alpha\chi_{\gamma_{\ell+1}}\cdots\chi_{\gamma_n}), \tag{C3}$$

其中，我们利用了 A 的反对称性来简化表达式。 [请注意，尽管我们采用记号$|O)$将算符视为算符空间中的态，但并未使用任何双空间形式，而是直接对算符进行运算，以计算 $\mathcal{L}_A$ 的作用。] 因此，这种超算符对称性也扩展到了超-哈密顿量 $\mathcal{P}$，从而可以将 $\mathcal{P}$ 分块对角化为超算符 $\mathcal{P}_n$ ，它们只在含有 n 个马约拉纳算符的算符扇区内作用，其中 $0\le n\le 2L$。若 $\mathcal{P}_n$存在零能基态，则它们就是式（C1）中 $\mathcal{A}_{\rm FF}$ 的交换子代数的元素。

现在我们证明， $\mathcal{P}_n$ 可以解释为定义在具有 L^n 个格点的晶格上的单粒子“跃迁问题”。首先，以 $n=1$为例说明这一点；由式（C3）可得

$$\widehat{\mathcal{L}}_A|\chi_\gamma) = \sum_\alpha A_{\alpha\gamma}|\chi_\alpha), \quad \Longrightarrow \quad (\chi_\beta|\widehat{\mathcal{P}}_1|\chi_\gamma) = \sum\nolimits_A [A^2]_{\beta\gamma}. \tag{C4}$$

因此，在单个马约拉纳算符构成的空间上， $\mathcal{P}$ 是一个简单的半正定 $2L\times 2L$ 矩阵，可以利用生成元计算得到。其零能本征态是 $\mathcal{A}_{\rm FF}$ 交换子中的算符，它们是单个马约拉纳算符的线性组合。在此情况下，请注意，这些算符同时也是每个 T_A 本身的马约拉纳零模，而这恰恰正是我们在本文中讨论的强零模的形式。对于流体动力学模，同样的结论也成立；它们是 $\mathcal{P}_1$的低能激发，并由单个马约拉纳算符组成。我们将在附录 C 2 节通过伊辛强零模的一个具体例子对此进行说明。

类似的思想也可以应用于 n 马约拉纳算符构成的空间（针对 $n\geq 1$），不过 $\mathcal{P}_n$ 的有效“跃迁矩阵”的表达式可能更加复杂。例如，对于 $n=2$，我们可以使用反对称矩阵来表示算符，即

$$|\Omega) := \frac{1}{4}\sum_{\gamma,\delta}\Omega_{\gamma,\delta}|\chi_\gamma\chi_\delta), \quad \Omega^T=-\Omega. \tag{C5}$$

$\mathcal{L}_A$ 和 $\mathcal{P}$ 对这些算符的作用为

$$\widehat{\mathcal{L}}_A|\Omega) = |[A,\Omega]) \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\mathcal{P}}|\Omega) = \sum_A |[A,[A,\Omega]]). \tag{C6}$$

这表明，如果将 $|\Omega)$直接视为矩阵 $2L\times 2L$ Ω的向量化，那么 $\mathcal{P}$ 的作用等价于如下形式的“超哈密顿量”的作用

$$\widehat{\mathcal{P}}_2 = \sum_A \widehat{\ell}_A^\dagger \widehat{\ell}_A, \quad \widehat{\ell}_A := A\otimes\mathbb{1} - \mathbb{1}\otimes A^T, \tag{C7}$$

这可以解释为在 $2L\times 2L$ 矩阵空间上的单粒子“跃迁问题”，该空间共有 $4L^2$ 个“格点”（严格来说，我们还需要进一步限制到反对称 $2L\times 2L$ 矩阵构成的子空间，即 $L(2L-1)$个独立“格点”）。因此， $\mathcal{P}_2$ 的基态就是与所有 A对易的 $2L\times 2L$ 矩阵；这也可以转化为与所有 T_A对易的二次马约拉纳算符集合。原则上，在许多情况下都可以求解这一问题，从而得到精确的流体动力学模；例如，利用文献 [22], 中的相互作用超哈密顿量所展示的 $U(1)$对称性，以及第 IV C 节讨论的准局域 $U(1)$对称性。不过，这里不再展示这些计算。

2. 示例：伊辛强零模

现在，我们以伊辛强零模为例来说明超哈密顿量。其键代数由项 $\{h_{j,j+1} := X_jX_{j+1}+qZ_j = i\chi_{2j}(-q\chi_{2j-1}+\chi_{2j+1})\}$ 生成，这些项具有二次马约拉纳形式。我们采用两种互补的方法：首先进行不依赖于生成元自由费米子结构的变分计算，其次运用上一小节讨论的一般理论。

a. Variational Calculation

我们从这些生成元 $\{h_{j,j+1}\}$ 出发，变分地研究公式（45）形式的完整超哈密顿量，以展示其基态和低能激发。给定任意变分试探态 $\Psi(z_k)$，其在超哈密顿量下的能量可写为

$$E_k := \frac{(\Psi(z_k)|\sum_j \widehat{\mathcal{L}}^\dagger_{j,j+1}\widehat{\mathcal{L}}_{j,j+1}|\Psi(z_k))}{(\Psi(z_k)|\Psi(z_k))} = \sum_j \frac{([\Psi(z_k),\widehat{h}_{j,j+1}]|[\Psi(z_k),\widehat{h}_{j,j+1}])}{(\Psi(z_k)|\Psi(z_k))} = \sum_j \frac{\mathrm{Tr}([\Psi(z_k),\widehat{h}_{j,j+1}]^\dagger[\Psi(z_k),\widehat{h}_{j,j+1}])}{\mathrm{Tr}(\Psi(z_k)^\dagger\Psi(z_k))}. \tag{C8}$$

对于伊辛强零模，我们选择如下形式的变分试探态

$$\Psi(z_k) := \sum_{j=1}^{L} z_k^{j-1} \left(\prod_{i=1}^{j-1} Z_i \right) X_j. \tag{C9}$$

对于 $z_k = q$，它简单地化简为式 (9) 中的强零模 $\Psi^{\ell}(q)$，我们得到超哈密顿量的一个精确基态，并且很容易根据式 (C8) 看出 $E_k = 0$。

为得到低能激发，我们打算选择 z_k，使其“接近” q，从而在局部模拟精确基态的结构 $\widehat{}$。为了得到 $\mathcal{P}$ 能隙的一个有用界限，我们还应要求 $|\Psi(z_k)\rangle$ 与 $\Psi(q)$ 正交；可以验证，只有在以下情况下这一条件才成立

$$\sum_{j=1}^{L-1} (z_k^* q)^{j-1} = 1 \quad \Longrightarrow \quad z_k = \frac{1}{q} e^{i\frac{2\pi n}{L}}, \quad n \neq 0. \tag{C10}$$

如果 $|q| \neq 1$，$|z_k - q|$ 不再是“小量”，那么我们就不期待 $\Psi(z_k)$ 是一个无能隙激发。另一方面，如果 $q = \pm 1$，我们可以选择满足 $k = \frac{2\pi n}{L}$ 的 $z_k = e^{ik}$，使得式 (C10) 成立，同时 $|z_k - q|$ 很小（并随系统尺寸 L 增大而减小）。

因此我们将范围限制为 $q = 1$ 并利用式 (C8) 计算 $z_k = e^{ik}$的 E_k。我们得到如下对易子 r

$$[\widehat{h}_{j,j+1}, \Psi(z_k)] = \left(\prod_{m=1}^{j-1} Z_m \right) \times [X_j X_{j+1} + q Z_j, X_j + z_k Z_j X_{j+1}] = \left(\prod_{m=1}^{j-1} Z_m \right) \times 2i(q - z_k) Y_j, \tag{C11}$$

利用式 (C8)，我们得到

$$E_k = 4 \left(1 - \frac{1}{L} \right) \times |q - z_k|^2 = 8 \left(1 - \frac{1}{L} \right) \times (1 - \cos(k)) \sim \frac{1}{L^2} \text{ for large } L. \tag{C12}$$

这是超哈密顿量能隙的一个上界，并表明对于 $q = 1$，超哈密顿量在热力学极限下是无能隙的。这会产生式 (C9) 形式的流体动力学模，并带来 VB3 节中讨论的动力学特征。

b. Exact calculation

$\widehat{}$利用生成元 $\{h_{j,j+1}\}$ 的自由费米子性质，并采用 C1 节的一般理论，可以精确地推导出相同的结果。按照式 (B5) 将其表示为马约拉纳算符时，与各项 $\{\widehat{h}_{j,j+1}\}$ 对应的反对称单粒子矩阵 $\{A^{j,j+1}\}$ 具有如下形式

$$A^{j,j+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2iq & 0 \\ -2iq & 0 & 2i \\ 0 & -2i & 0 \end{pmatrix}, \tag{C13}$$

其中，我们将完整的 $2L \times 2L$ 矩阵限制在由马约拉纳算符$\sim\{\chi_{2j-1}, \chi_{2j}, \chi_{2j+1}\}$张成的非零三位点块上。接着，利用式 (C4)，我们可以得到限制在单个马约拉纳算符空间内的超哈密顿量 $\mathcal{P}_1$

$$\widehat{\mathcal{P}}_1 = 4q \sum_{j=1}^{L-1} \left[q|\chi_{2j-1})(\chi_{2j-1}| + q^{-1}|\chi_{2j+1})(\chi_{2j+1}| - |\chi_{2j-1})(\chi_{2j+1}| - |\chi_{2j+1})(\chi_{2j-1}| \right] + 4(q^2+1) \sum_{j=1}^{L-1} |\chi_{2j})(\chi_{2j}|. \tag{C14}$$

偶数格点和奇数格点完全解耦，因此我们得到 $\{|\chi_{2j})\}$ 个本征值为 $4(q^2+1)$ 的简并本征向量。最后一个偶数“格点” $|\chi_{2L})$ 完全不出现在上述超哈密顿量中，因此它是本征值为 0 的本征向量；这对应于交换子中式 (B8) 的 $iQ_Z X_L$。其余 L 个本征向量，即所有奇数“格点”，可以通过将这个矩阵解释为一个粒子在具有开放边界条件的 L 个格点上跳跃的哈密顿量来求解，其能谱可以利用三对角托普利茨矩阵的标准结构精确求得

角部受扰动的矩阵 [122]。这些特征值及其未归一化本征向量为

$$\lambda_0 = 0, \quad |\lambda_0) = \sum_{j=1}^{L} q^{j-1} |\chi_{2j-1}),$$

$$\lambda_m = 4\left[q^2 + 1 - 2q\cos\Big(\frac{m\pi}{L}\Big)\right], \ |\lambda_m) = \sum_{j=1}^{L}\left[\sin\left(\frac{jm\pi}{L}\right) - q^{-1}\sin\left(\frac{(j-1)m\pi}{L}\right)\right]|\chi_{2j-1}), \ 1 \le m \le L-1. \quad \text{(C15)}$$

$|\lambda_0)$ 恰好是式（B6）中的伊辛强零模 $\Psi^{\ell}(q)$，而该扇区中的能隙为 $4(q-1)^2$。因此，对于 $q=1$， $\widehat{\mathcal{P}}_1$是无能隙的，而小 m 时的本征向量 $|\lambda_m)$ 是与强零模对应的流体动力学模。这些模也可由式（C9）的变分试探态描述，其特征值在大 L 时为式（C12）中的 E_k 。

附录 D：MPO语言中的 Fendley强零模性质

本附录将进一步介绍文献 [32] 研究的自旋 1/2 XYZ 模型中的强零模，并说明如何利用近期发现的式（65）的矩阵乘积算符表达式揭示其性质。

1. 精确强零模的另一种证明

我们首先明确地使用 MPO语言，给出该强零模存在性的另一种证明。该证明与文献 [104]，中近期提出的证明类似，只是在分组各项等方面存在一些技术差异。

为了证明 Fendley 强零模确实与公式（66）中的 H_{XYZ} 对易，我们先引入一些便于处理矩阵乘积算符的记号。我们将带有开放辅助指标的矩阵乘积算符记为 $|\bullet)$，其中 $\bullet$ 是由若干格点组成的区块对应的 MPO张量。例如，单格点矩阵乘积算符记为 $|F_j)$，公式（58）中的三位点矩阵乘积算符记为 $|A_jA_{j+1}A_{j+2})$。此外，如果左边界向量或右边界向量已收缩，我们就在张量上额外加上左括号或右括号来表示，分别记为 $|[\bullet)$ 或 $|\bullet])$。如果左右边界向量都已收缩，则两侧都加上括号，记为 $|[\bullet])$；此时，矩阵乘积算符对应物理希尔伯特空间上的通常算符。例如，采用这种记号，Fendley 强零模可写为

$$\Psi(x,y) = |[F_1F_2\cdots F_L])\,. \quad \text{(D1)}$$

考虑一个 MPO张量 $|M)$，其元素记为 $\{M^{[st]}_{\alpha\beta}\}$，其中 $\{s,t\}$和 $\{\alpha,\beta\}$分别是物理$\widehat{\ }$和辅助指标；再考虑一个矩阵元为 $\{O_{st}\}$的物理算符 O 。算符 O 的李乌维尔算符对 MPO张量 $|M)$ 的作用，即算符 O的伴随作用，定义如下：

$$\mathcal{L}_{\widehat{O}}\,|M) := |\mathfrak{M})\,, \quad \mathfrak{M}^{[st]}_{\alpha\beta} = \sum_{v}\Big(O_{sv}M^{[vt]}_{\alpha\beta} - M^{[sv]}_{\alpha\beta}O_{vt}\Big), \quad \text{(D2)}$$

$\widehat{\ }$这只是算符 O 与 MPO 中每个物理算符的对易子。定义以下双位点矩阵乘积算符

$$|\mathcal{X}_{j,k}) := \mathcal{L}_{X_jX_k}\,|F_jF_k)\,, \quad |\mathcal{Y}_{j,k}) := \mathcal{L}_{Y_jY_k}\,|F_jF_k)\,, \quad |\mathcal{Z}_{j,k}) := \mathcal{L}_{Z_jZ_k}\,|F_jF_k)\,, \quad \text{(D3)}$$

$\widetilde{\ }$三位点项 $T_{j,\ k,\ l}$ 的伴随作用：$= xX_jX_k + yY_jY_k + Z_kZ_l$ 出现在 H_{XYZ} 中（具体取值为$k=j+1$， $l=j+2$，但为简洁起见保留一般形式），其表达式为

$$\mathcal{L}_{T_{j,k,l}}\,|F_jF_kF_l) = \big(x\mathcal{L}_{X_jX_k} + y\mathcal{L}_{Y_jY_k} + \mathcal{L}_{Z_kZ_l}\big)\,|F_jF_kF_l) = x\,|\mathcal{X}_{j,k}F_l) + y\,|\mathcal{Y}_{j,k}F_l) + |F_j\mathcal{Z}_{k,l})\,. \quad \text{(D4)}$$

$\widetilde{\ }$因此，根据公式（66），完整哈密顿量 H_{XYZ} 对 SZM 算符 $\Psi（x,\ y）= |[F_1\cdots F_L])$ 的伴随作用为

$$\mathcal{L}_{\widetilde{H}_{\mathrm{XYZ}}}\,|[F_1\cdots F_L]) = \mathcal{L}_{Z_1Z_2}\,|[F_1\cdots F_L]) + \sum_{j=1}^{L-2}\mathcal{L}_{T_{j,j+1,j+2}}\,|[F_1\cdots F_L])$$

$$= |[\mathcal{Z}_{1,2}F_3\cdots]) + \sum_{j=1}^{L-2}(x\,|[\cdots F_{j-1}\mathcal{X}_{j,j+1}F_{j+2}\cdots]) + y\,|[\cdots F_{j-1}\mathcal{Y}_{j,j+1}F_{j+2}\cdots]) + |[\cdots F_j\mathcal{Z}_{j+1,j+2}F_{j+3}\cdots])). \quad \text{(D5)}$$

尽管公式（D5）并未提供太多启示，我们却惊奇地发现，存在一个两位点矩阵乘积算符张量$C_{j,\ k}$，使得以下性质对$j\neq k\neq l$成立

$$x\,|\mathcal{X}_{j,k}F_l)+y\,|\mathcal{Y}_{j,k}F_l)+|F_j\mathcal{Z}_{k,l})=-\,|C_{j,k}F_l)+|F_jC_{k,l})\,,\quad |[\mathcal{Z}_{j,k})=|[C_{j,k})\,,\quad |C_{k,l}])=0. \tag{D6}$$

此类张量的存在性导致了一种望远镜结构，我们在正文以及下文中都会讨论这一点。在此之前，我们指出，为了显式求解具有所需性质的$C_{j,\ k}$可以将左边界向量和右边界向量与第一个方程进行缩并，并利用式 (D6) 中的第二个和第三个方程，得到

$$|[F_jC_{k,l})=x\,|[\mathcal{X}_{j,k}F_l)+y\,|[\mathcal{Y}_{j,k}F_l)+|[F_j\mathcal{Z}_{k,l})+|[\mathcal{Z}_{j,k}F_l)\,,\quad |C_{j,k}F_l])=-\left\{x\,|\mathcal{X}_{j,k}F_l])+y\,|\mathcal{Y}_{j,k}F_l])+|F_j\mathcal{Z}_{k,l}])\right\}. \tag{D7}$$

式 (D7) 中的方程，再加上式 (D6) 中的第二个和第三个方程，总共构成 16 个线性方程，它们完全确定了张量$C_{j,\ k}$的所有元素。$C_{j,\ k}$的元素为

$$C_{j,k}=2i\sqrt{xy}\times\begin{pmatrix}0 & \sqrt{x(x^2-1)}(yZ_jY_k+Y_jZ_k) & -\sqrt{y(y^2-1)}(xZ_jX_k+X_jZ_k) & 0\\ y\sqrt{x(x^2-1)}(yZ_jY_k+Y_jZ_k) & 0 & y\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}Z_j & 0\\ -x\sqrt{y(y^2-1)}(xZ_jX_k+X_jZ_k) & -x\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}Z_j & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{D8}$$

利用式 (D6)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{T_{j,j+1,j+2}}\,|[F_1\cdots F_L])&=-\,|[F_1\cdots F_{j-1}C_{j,j+1}F_{j+2}\cdots F_L])+|[F_1\cdots F_jC_{j+1,j+2}F_{j+3}\cdots F_L])\,,\\ \mathcal{L}_{Z_1Z_2}\,|[F_1\cdots F_L])&=|[C_{1,2}F_3\cdots F_L])\,.\end{aligned} \tag{D9}$$

当我们定义下式时，这正是式 (68)

$$\widehat{\Psi}_{j,j+1}(x,y):=|[F_1\cdots F_{j-1}C_{j,j+1}F_{j+2}\cdots F_L])\,, \tag{D10}$$

$\widehat{\ }$并注意到，根据式 (D6)，$\Psi_{L-1,\ L}=0$。于是我们可以将式 (D5) 改写为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\widetilde{H}_{\rm XYZ}}\,|[F_1\cdots F_L])&=|[C_{1,2}F_3\cdots])+\sum_{j=1}^{L-2}(-\,|[\cdots F_{j-1}C_{j,j+1}F_{j+2}\cdots])+|[\cdots F_jC_{j+1,j+2}F_{j+3}\cdots]))\\ &=|[C_{1,2}F_3\cdots])-|[C_{1,2}F_3\cdots])+|[\cdots F_{L-2}C_{L-1,L}])=0.\end{aligned} \tag{D11}$$

$\widetilde{\ }$这表明 $\mathcal{L}_{\widetilde{H}_{\rm XYZ}}\,|[F_1\cdots F_L])=0$，或者换句话说，$[H_{\rm XYZ},\Psi(x,\ y)]=0$。

2. 键代数的缺失

$\Psi(x,\ y)$ 的 MPO 形式也使我们能够寻找一种键代数，其交换子包含 $\Psi(x,\ y)$。特别是，我们已经验证，不存在作用范围为 6 或更小且与 $\Psi(x,\ y)$ 对易的严格局域项。为此，我们寻找一个算符 $\Pi_{[j,j+n]}$，其支撑覆盖格点 j 到 $j+n$，并满足

$$\mathcal{L}_{\Pi_{[j,j+n]}}|F_jF_{j+1}\cdots F_{j+n})=0\quad\Longleftrightarrow\quad[\Pi_{[j,j+n]},(F_jF_{j+1}\cdots F_{j+n})_{\alpha\beta}]=0\ \ \forall\,1\leq\alpha,\beta\leq\chi. \tag{D12}$$

这意味着 $\Pi_{[j,j+n]}$ 必须属于算符集合 $\{(F_jF_{j+1}\cdots F_{j+n})_{\alpha\beta}\}$ 的交换子。对式 (65) 中的 MPO F_j 和 $x,\ y\neq 0$ 的一般取值进行显式计算后，我们发现，对于 $n\leq 6$，算符 $\{(F_jF_{j+1}\cdots F_{j+n})_{\alpha\beta}\}$ 的交换子中唯一的算符是 $\mathbb{1}$；这排除了存在满足式 (D12) 的任何非平凡 $\Pi_{[j,j+n]}$。然而，当 $x=0$ 或 $y=0$ 时，存在若干与式 (57) 中的 MPO 对易的严格局域算符，因此我们可以恢复式 (60) 所示的键代数。

3. 热力学极限下的可归一化性

现在我们证明，$\Psi(x,\ y)$ 的 MPO表达式还能复现 [32]，中的其他一些计算，例如热力学极限下的可归一化性。算符 $\Psi(x,\ y)$ 的弗罗贝尼乌斯范数定义为

$$\|\Psi(x,y)\|^2:=\frac{\mathrm{Tr}\big(\Psi(x,y)^\dagger\Psi(x,y)\big)}{\mathrm{Tr}(\mathbb{1})}=\frac{\mathrm{Tr}\big(\Psi(x,y)^\dagger\Psi(x,y)\big)}{2^L}. \tag{D13}$$

这可以利用 MPO 通过适当的“转移矩阵”计算得出

$$E := \frac{1}{2}\sum_{s,t} F^{[st]} \otimes \left(F^{[st]}\right)^*, \tag{D14}$$

其中， $\otimes$ 作用于辅助指标上，并且我们利用了张量 F 中的物理算符是厄米算符这一事实。由于式 (D14) 中所有物理指标都已收缩， E 可视为一个元素为数值的 $\chi^2 \times \chi^2$ 矩阵。因此，式 (D13) 可表示为

$$\|\Psi(x,y)\|^2 = (b_l^T \otimes b_l^T) E^L (b_r \otimes b_r), \tag{D15}$$

下面，我们将利用 E 在划分为 15 维块和 1 维块后的分块结构来计算式 (D15)。在整个讨论过程中，我们将稍作记号上的滥用，用 0 和 1 分别表示零矩阵和相应维数的单位矩阵；除非存在歧义，否则不明确标出它们的维数。利用式 (65) 的表达式，容易证明 E 具有如下分块上三角结构，因此有

$$E = \begin{pmatrix} U & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad E^n = \begin{pmatrix} U^n & (1-U)^{-1}(1-U^n)V \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{D16}$$

其中， V是一个大小为 15 的列向量，其形式为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T$； U是一个 15×15 矩阵，将行和列按 $\{1,6,11,2,5,3,9,4,7,8,10,12,13,14,15\}$ 的顺序重新排列后，它具有如下分块对角形式

$$\Pi U \Pi^\dagger = \mathrm{diag}\Big(\widetilde{U}^{(3)},\ \widetilde{U}^{(2,1)},\ \widetilde{U}^{(2,2)},\ xy,\ xy,\ x,\ xy,\ y,\ xy,\ x,\ y\Big), \tag{D17}$$

$$\widetilde{U}^{(3)} = \begin{pmatrix} x^2y^2 & |(x^2-1)y| & |x(y^2-1)| \\ |(x^2-1)y| & x^2 & 0 \\ |x(y^2-1)| & 0 & y^2 \end{pmatrix},\ \widetilde{U}^{(2,1)} = \begin{pmatrix} x^2y & |(x^2-1)y| \\ |(x^2-1)y| & x^2y \end{pmatrix},\ \widetilde{U}^{(2,2)} = \begin{pmatrix} xy^2 & |x(y^2-1)| \\ |x(y^2-1)| & xy^2 \end{pmatrix},$$

其中 Π 是执行该置换的酉矩阵。对于 $|x|$， $|y|<1$，容易证明，通过用无穷范数 [123],界定谱半径，可以进一步利用矩阵元的具体形式对其进行界定，从而得到 U 的特征值 $\{u_\alpha\}$ 的绝对值严格小于 1。也就是说，我们有

$$\rho(U) := \max_\alpha\{|u_\alpha|\} \le \|U\|_\infty := \max_i\{\sum\nolimits_j |U_{i,j}|\} < 1 \quad \text{for } |x|,|y|<1 \tag{D18}$$

其中 $U_{i,\ j}$ 是 U的矩阵元；右端的不等式可通过对式 (D17) 中的每个块进行显式计算得出。特别地，利用当 $|a|<1$ 时$|a^2-1| = 1-|a|^2$ 这一事实，可以将所有的 $\sum_j |U_{i,\ j}|$ 上界为 1，并且有以下不等式

$$\begin{aligned} |a|^2|b|^2 + |a||(b^2-1)| + |b||(a^2-1)| &= |a|^2|b|^2 + |b|(1-|a|^2) + |a|(1-|b|^2) \le |a| + |b| - |a||b| = 1-(1-|a|)(1-|b|) < 1, \\ |a|^2 + |b||(a^2-1)| &= |a|^2 + |b|(1-|a|^2) = |b| + |a|^2(1-|b|) < 1, \end{aligned} \tag{D19}$$

这些不等式对 $|a|<1$ 和 $|b|<1$均成立。因此，在热力学极限下，利用式 (D16) 和 (D17)，我们可以将式 (D15) 求得为

$$\lim_{L\to\infty}\|\Psi(x,y)\|^2 = (b_l^T\otimes b_l^T)\begin{pmatrix} 0 & (1-U)^{-1}V \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(b_r\otimes b_r) = [(1-U)^{-1}]_{1,1} = [(1-\widetilde{U}^{(3)})^{-1}]_{1,1} = \frac{1}{(1-x^2)(1-y^2)}, \tag{D20}$$

其中我们利用了 V 的结构，以及这一事实：

$$b_l^T \otimes b_l^T = \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}, \quad (b_r\otimes b_r) = \begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}^T, \tag{D21}$$

并且 U 具有式 (D17) 中所示的分块对角形式。这重新得到了参考文献 [32] 中的结果。

4. 从精确强零模到近似强零模

我们也可以使用类似的方法证明，与完整 XYZ 哈密顿量的对易子的范数随系统尺寸呈指数级减小，即式（70）。该范数可表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_C &= \|[H_{\mathrm{XYZ}}, \Psi(x,y)]\|^2 = \|[xX_{L-1}X_L + yY_{L-1}Y_L, \Psi(x,y)]\|^2 \\ &= \frac{\mathrm{Tr}([xX_{L-1}X_L + yY_{L-1}Y_L, \Psi(x,y)]^\dagger [xX_{L-1}X_L + yY_{L-1}Y_L, \Psi(x,y)])}{2^L}. \end{aligned} \tag{D22}$$

我们也可以利用 $\Psi(x,\ y)$ 的 MPO 表达式所对应的适当转移矩阵来计算这一结果。由于这种 MPO 形式，我们实际上关注的是项 $X_{L-1}X_L$ 和 $Y_{L-1}Y_L$ 与作用在格点 $L-1$ 和 L 上的 $\Psi(x,\ y)$ 的两位点矩阵乘积算符之间的对易子。采用第 D 1 节中的记号，可将其表示为一个 MPO：

$$[xX_{L-1}X_L + yY_{L-1}Y_L, \Psi(x,y)] = (x\mathcal{L}_{X_{L-1}X_L} + y\mathcal{L}_{Y_{L-1}Y_L})\,|[F_1\cdots F_L]) = |[F_1\cdots F_{L-2}(x\mathcal{X}+y\mathcal{Y})_{L-1,L}])\,, \quad \text{(D23)}$$

其中，$\mathcal{L}_{\dots}$ 是式（D2）中定义的李乌维尔算符，而 MPO 张量 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 定义于式（D3）。因此，式（D22）恰好是式（D23）中 MPO 的范数计算，正如式（D13）是式（D1）中 MPO 的范数计算一样。类似于式（D15），我们也可以将式（D22）写成

$$\mathcal{N}_C = (b_l^T \otimes b_l^T)E^{L-2}\mathcal{E}(b_r \otimes b_r), \quad \text{(D24)}$$

其中，我们定义双位点转移矩阵

$$\mathcal{E} := \frac{1}{4}\sum_{s,t}(x\mathcal{X}+y\mathcal{Y})^{[st]} \otimes [(x\mathcal{X}+y\mathcal{Y})^{[st]}]^*, \quad \text{(D25)}$$

其中，$s,\ t$ 是对双位点矩阵乘积算符 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$的物理指标求和。接下来可以计算得

$$\mathcal{E}(b_r \otimes b_r) = \begin{pmatrix} w_r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi w_r = \begin{pmatrix} (w_r^{(3)})^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \text{(D26)}$$

其中，左侧等式表示式（D16）的块基中的向量，而右侧等式进一步表示式（D17）基底中的非零块，其中 Π 是该处所述的置换，$w_r^{(3)}$是一个三维非零列向量。利用式（D17）、（D26）和（D21），我们可以将式（D24）写成

$$\mathcal{N}_C = [(\widetilde{U}^{(3)})^{L-2}w_r^{(3)}]_{1,1}. \quad \text{(D27)}$$

如式 (D18) 所示，对于 $|x|,|y|<1$，$\widetilde{U}^{(3)}$ 的特征值小于 1，而 $w_r^{(3)}$是一个范数有界的向量，因此 $\mathcal{N}_C$ 随系统尺寸呈指数衰减。要精确计算 $\mathcal{N}_C$，需要对 $\widetilde{U}^{(3)}$进行对角化；对于一般的 x和 y，它似乎没有很简洁的表达式。

5. 热力学极限中的马约拉纳性质

我们还可以利用转移矩阵的思路证明，在热力学极限下，算符 $\Psi(x,y)^2 \propto \mathbb{1}$，因此在该极限下，它与马约拉纳零模（MZM）相似。为证明这一点，考虑 $\Psi(x,y)^2$ 在泡利弦基 $\{P^{\mu_1\cdots\mu_L}$ 中的展开：$=\sigma_1^{\mu_1}\cdots\sigma_L^{\mu_L}\}$，其中 $\mu_j\in\{0,x,y,z\}$ 和 $\{\sigma_j^\mu\}$ 是泡利矩阵（且 $\sigma_j^0=\mathbb{1}_j$），如下所示：

$$\Psi(x,y)^2 = \sum\nolimits_{\{\mu_j\}} c_{\mu_1\cdots\mu_L}P^{\mu_1\cdots\mu_L}, \quad c_{\mu_1\cdots\mu_L} = \frac{1}{2^L}\mathrm{Tr}(P^{\mu_1\cdots\mu_L}\Psi(x,y)^2). \quad \text{(D28)}$$

我们可以利用 $\Psi(x,\ y)$ 的 MPO表达式计算 $c_{\mu_1\cdots\mu_L}$，结果为

$$c_{\mu_1\cdots\mu_L} = (b_l^T \otimes b_l^T)\left(\prod_{j=1}^{L}E_{\mu_j}\right)(b_r \otimes b_r), \quad \text{(D29)}$$

其中边界向量　　是公式（D21）中的边界向量，且 E_μ 是定义如下的广义矩阵乘积算符转移矩阵

$$E_\mu := \frac{1}{2}\sum_{s,t,u}\sigma_{st}^\mu F^{[tu]} \otimes F^{[us]}. \quad \text{(D30)}$$

请注意，E_0 与式 (D14) 中的 E 略有不同，因为这里我们计算的是 $\Psi(x,\ y)^2$，而不是$\Psi(x,\ y)^\dagger\Psi(x,\ y)$，并且我们使用的矩阵乘积算符表示并不明显是厄米的［，尽管 $\Psi(x,\ y)$ 是厄米的］。尽管如此，E 的许多一般结构仍适用于这些转移矩阵 $\{E_\mu\}$，例如，它们具有（分块）上三角形式

$$E_0 = \begin{pmatrix} U_0 & V_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_z = \begin{pmatrix} U_z & V_z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_\alpha = \begin{pmatrix} U_\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \alpha\in\{x,y\}. \quad \text{(D31)}$$

利用这些结果，当至少有一个 $\{\mu_j \neq 0\}$ 时，式 (D29) 中的泡利串权重 $\{c_{\mu_1\cdots\mu_L}\}$ 可写为

$$\begin{aligned} c_{\mu_1\cdots\mu_L} &= \left[\sum_{k=1}^{L}\left(\prod_{j=1}^{k-1}U_{\mu_j}\right)[V_0\delta_{\mu_k,0}+V_z\delta_{\mu_k,z}]\prod_{j=k+1}^{L}\delta_{\mu_j,0}\right]_{1,1} \\ &= \left[\left(\prod_{j=1}^{\ell-1}U_{\mu_j}\right)[U_{\mu_\ell}\sum_{k=0}^{L-\ell-1}U_0^k V_0+V_z\delta_{\mu_\ell,z}]\right]_{1,1}, \quad \ell=\max\{k:\mu_k\neq 0\} \\ &= \left[\left(\prod_{j=1}^{\ell-1}U_{\mu_j}\right)[U_{\mu_\ell}(1-U_0^{L-\ell})(1-U_0)^{-1}V_0+V_z\delta_{\mu_\ell,z}]\right]_{1,1}, \end{aligned} \tag{D32}$$

其中，在第二行中，我们使用了第一行中的 $\delta_{\mu_j,0}$，将求和改写为关于 $\ell \geq 1$ 的形式； $\ell \geq 1$ 是字符串 $\sigma_1^{\mu_1}\cdots\sigma_L^{\mu_L}$ 中最右侧非平凡泡利矩阵的位置。为便于分析，我们还可以进一步将式 (D32) 拆分为

$$c_{\mu_1\cdots\mu_L} = \left[\left(\prod_{j=1}^{\ell-1}U_{\mu_j}\right)[U_{\mu_\ell}(1-U_0)^{-1}V_0+V_z\delta_{\mu_\ell,z}]\right]_{1,1} - \left[\left(\prod_{j=1}^{L}U_{\mu_j}\right)(1-U_0)^{-1}V_0\right]_{1,1}, \tag{D33}$$

其中， ℓ 再次表示最右侧非平凡泡利矩阵的位置。现在，我们分别分析式 (D33) 中的两项。

为分析式 (D33) 中的第二项，我们先注意到几个性质。将顺序置换为 $\{1,2,3,5,6,7,9,10,11,4,8,12,13,14,15\}$ 后，所有 $\{U_\mu\}$ 均可排列成分块上三角形式

$$\Pi U_\mu \Pi^\dagger = \begin{pmatrix} A_\mu & R_\mu & S_\mu \\ 0 & T_\mu & 0 \\ 0 & 0 & T_\mu \end{pmatrix}, \tag{D34}$$

其中， Π 是实现该置换的酉矩阵，子矩阵的维数分别为 $\{A_\mu\}$: 9×9、$\{R_\mu\}$: 9×3、 $\{S_\mu\}$: 9×3、 $\{T_\mu\}$: 3×3。这与式 (D17) 中对 U 的分块对角化类似，但这里的划分更粗，也包含了 $U_{\mu\neq 0}$。接下来我们注意到，在这个置换基 $(1-U_0)$ 中，$^{-1}V_0$ 具有如下形式

$$\Pi(1-U_0)^{-1}V_0 = \begin{pmatrix} W_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \tag{D35}$$

其中 W_0 是一个 9 维向量。这意味着，式 (D33) 中的第二项可以表示为

$$\left[\left(\prod_{j=1}^{L}U_{\mu_j}\right)(1-U_0)^{-1}V_0\right]_{1,1} = \left[\left(\prod_{j=1}^{L}A_{\mu_j}\right)W_0\right]_{1,1}. \tag{D36}$$

接下来可以证明，所有 $\{A_\mu\}$ 的无穷范数均有如下界

$$\|A_\mu\|_\infty := \max_i\{\textstyle\sum_j (A_\mu)_{i,j}\} < 1 \quad \text{for } |x|,|y|<1, \tag{D37}$$

利用显式矩阵形式以及式 (D19) 中类似的较简单不等式即可证明这一点。由此得到如下界

$$\left|\left[\left(\prod_{j=1}^{L}A_{\mu_j}\right)W_0\right]_{1,1}\right| \leq \prod_{j=1}^{L}\|A_{\mu_j}\|_\infty \|W_0\|_\infty \to 0 \text{ as } L\to\infty, \tag{D38}$$

这里用到了式 (D37)，以及对于任意固定的 $|x|$, $|y|<1$, $\|W_0\|_\infty$ 有界这一事实；这一点可以通过显式推导加以证明。

最后，我们证明，对于任意 $\ell \neq 0$，式 (D33) 中的第一项恒等于零，即 i。 e.,

$$\left[\left(\prod_{j=1}^{\ell-1}U_{\mu_j}\right)[U_{\mu_\ell}(1-U_0)^{-1}V_0+V_z\delta_{\mu_\ell,z}]\right]_{1,1} = 0 \text{ for } \mu_\ell \in \{x,y,z\}. \tag{D39}$$

当 $\mu_\ell \in \{x, y\}$ 时，通过直接计算很容易证明这一点，我们得到

$$U_x(1-U_0)^{-1}V_0 = 0, \quad U_y(1-U_0)^{-1}V_0 = 0, \tag{D40}$$

因此使第一项消失。$\mu_\ell = z$ 的情形稍微复杂一些，但在这种情况下第一项仍然消失。为此，我们定义一个向量 v_{xy}

$$\begin{gathered} v_{xy} := U_z(1-U_0)^{-1}V_0 + V_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & i\frac{xy}{fg} & 0 & 0 & -i\frac{xy}{fg} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \\ f := \sqrt{y(x^2-1)}, \;\; g := \sqrt{x(y^2-1)}. \end{gathered} \tag{D41}$$

在 $\{U_\mu\}$ 矩阵的作用下，它具有以下性质

$$U_0 v_{xy} = xy v_{xy}, \;\; U_x v_{xy} = f v_x, \;\; U_y v_{xy} = g v_y, \;\; U_z v_{xy} = 0, \tag{D42}$$

其中 v_x 和 v_y 是向量，其形式为

$$\begin{aligned} v_x &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i\frac{x}{fg} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -i\frac{x}{fg} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \\ v_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{y}{fg} & 0 & 0 & i\frac{y}{fg} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T. \end{aligned} \tag{D43}$$

这些向量 v_x 和 v_y 在 $\{U_\mu\}$的作用下又具有以下性质：

$$\begin{aligned} &U_0 v_x = x v_x, \;\; U_x v_x = f v_{xy}, \;\; U_y v_x = 0, \;\; U_z v_x = 0, \\ &U_0 v_y = y v_y, \;\; U_x v_y = 0, \;\; U_y v_y = g v_{xy}, \;\; U_z v_y = 0. \end{aligned} \tag{D44}$$

由式 (D42) 和 (D44) 可知，由 $\{v_x, v_y, v_{xy}\}$ 张成的三维子空间在 $\{U_\mu\}$的作用下是封闭的。因此，式 (D33) 中的第一项是该子空间中的一个向量。然而，由式 (D41) 和 (D43) 可知，该子空间中所有向量的 (1，1) 元素均为零，因此当 $\mu_\ell = z$时，式 (D33) 的第一项也为 0。

方程 (D38) 和 (D39) 表明，在所有至少有一个 $\mu_j \neq 0$ 消失的泡利串上，权重 $\{c_{\mu_1 \cdots \mu_L}\}$ 消失，因此结合方程 (D20) 的范数，我们有

$$\Psi(x, y)^2 = \frac{1}{(1-x^2)(1-y^2)}\mathbb{1} \;\; \text{as} \;\; L \to \infty. \tag{D45}$$