三十六位量子军官纠缠在一起

Simeon Ball加泰罗尼亚理工大学　　Robin Simoens根特大学 加泰罗尼亚理工大学

arXiv:2603.02334v1 [quant-ph] 2 Mar 2026

摘要

对于任意阶数 n ，都存在一对正交拉丁方， $n = 2$ 除非 $n = 6$ [Bose、Shrikhande 和 Parker， 1960]。特别是，欧拉三十六军官问题没有解。不过，它有一个“量子解”：存在所谓的六阶纠缠量子拉丁方 [Rather 等人， 2022]。我们证明，如果不允许纠缠，则不存在六阶两两正交量子拉丁方。

关键词。量子拉丁方；酉模式；正交归一表示。

数学主题分类。 05B15, 05C62, 81P70.

1 引言

Musto 和 Vicary [11] 引入了如下拉丁方的量子版本。

定义 1 ([11])。 一个 量子拉丁方（阶为 n）是 $\mathbb{C}^n$ 上的 $n \times n$ 矩阵，使得每一行和每一列都构成 $\mathbb{C}^n$ 的一个标准正交基。

文献中至少有四种不同的方式来定义正交拉丁方的量子类比。第一个此类定义由 Musto [9, 定义 10], 给出，他们称之为弱正交 或 左正交 量子拉丁方。Goyeneche、Raissi、Di Martino 和 Zyczkowski [4] 将该概念称为弱正交，并指出它似乎并非恰当的定义，从而提出了另一种[4, 定义 3]。随后，Musto [10, 定义 5.2.1] 给出了正交量子拉丁方的另一概念，并证明当量子拉丁方为非纠缠时，它与 [4] 中的概念等价。在我们看来，这似乎是正交性最自然的定义。

定义 2 ([10]). 若两个量子拉丁方 $(\psi_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 和 $(\phi_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 满足以下条件，则称它们为正交 的:

$$\{\psi_{ij} \otimes \phi_{ij} \colon i, j \in \{1, \dots, n\}\}$$

是 $\mathbb{C}^q \otimes \mathbb{C}^q$ 的标准正交基。

由于 [4] 中的定义与绝对最大纠缠（AME）态的性质不符，Rajchel-Mieldzio´c [13, Definition 54] 对其进行了修改，得到如下定义。为避免与先前的定义混淆，我们称这些方阵为纠缠 方阵，而非正交方阵。

定义 3 ([13]). 一对 阶为 n 的纠缠量子拉丁方构成一个 $n \times n$ 矩阵 $(\psi_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 其元素属于 $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ ，且满足

(i) 所有 n^2 个元素构成 $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ 的标准正交基,

(ii) all rows satisfy $\mathrm{tr}_S\left(\sum_k |\psi_{ik}\rangle\langle\psi_{jk}|\right) = \delta_{ij}\mathbb{1}$ for $S \in \{\{1\},\{2\}\}$, and

(iii) 所有列均满足 $\mathrm{tr}_S\left(\sum_k |\psi_{ki}\rangle\langle\psi_{kj}|\right) = \delta_{ij}\mathbb{1}$ ，其中 $S \in \{\{1\},\{2\}\}$,

其中，tr_S 表示对 S 系统取偏迹，而 $|\psi\rangle\langle\phi|$ 是 ψ 与 ϕ的外积。

根据上述定义，一对 n阶纠缠量子拉丁方等价于存在一个 AME(4， n) 态 [13, 引理 55]。由于经典正交拉丁方是纠缠量子拉丁方的特例，因此除非$n = 2$ 或 $n = 6$ [1]，否则对所有 $n \ge 2$ 都存在 AME(4， n) 态。六阶不存在经典正交拉丁方这一事实归功于 Tarry [20], ，他通过检查所有情形，证明了欧拉三十六军官问题无解。后来，Stinson [19] 、Dougherty [2] 等人给出了非计算性的证明。

定理 4 （[20]）。不存在一对六阶正交拉丁方。

尽管如此，对于 $n = 2$ 和 $n = 6$，是否存在 AME(4，n) 状态仍未有定论。Higuchi 和 Sudbery [6]证明，AME(4，2) 状态不存在。最近，Rather、Burchardt、Bruzda、Rajchel-Mieldzio´c、Lakshminarayan 和 Zyczkowski [15] 证明，存在一对六阶纠缠量子拉丁方，从而解决了所谓的欧拉三十六名纠缠军官问题。此后，Rather [14] 以及 Rather、Ramadas、Kodiyalam 和 Lakshminarayan [16]又找到了其他 AME(4，6) 状态的构造。

定理 5 ([15])。 存在一对六阶纠缠量子拉丁方。

有了这些结果，阶为 n 的纠缠量子拉丁方对是否存在这一问题已经解决。然而，是否存在两张（非纠缠的）六阶正交量子拉丁方，仍未有定论。我们对此给出了否定答案。

定理 6. 不存在一对六阶正交量子拉丁方。

2 预备知识

2.1 拉丁方

阶为 n 的拉丁方 是一个 $n \times n$ 矩阵，其元素来自一个大小为 n 的集合，并且每一行和每一列都恰好包含每个元素一次。
两个拉丁方 $A = (a_{ij})_{1 \le i,\ j \le n}$ 和 $B = (b_{ij})_{1 \le i,\ j \le n}$ 若所有 n^2 元组 $(a_{ij},\ b_{ij})$ 都互不相同，则称它们正交 。一个由 t 个阶为 n 的互相正交拉丁方组成的集合，简称为 t MOLS(n)，是由 t 个阶为 n的拉丁方构成的集合，其中任意两个拉丁方都正交。
给定阶为 n 的拉丁方，其拉丁方图 是一个图，其顶点为该拉丁方各 n^2 元素的坐标；若两个顶点位于同一行或同一列，或者对应的元素相等，则这两个顶点相邻。

拉丁方有几种等价关系的概念，另请参见 [8]:

- 如果两个拉丁方可以通过置换行、列和符号由彼此得到，则称它们同位 。
- 如果两个拉丁方可以通过置换行、列和符号，并交换它们各自的角色由彼此得到，则称它们拟同位 。

例如，交换行和列的角色相当于转置。等价地，如果两个拉丁方的拉丁方图同构（同一行、同一列或含有相同符号的所有元素对应于极大团），则称它们拟同位。

同位和拟同位的定义可以推广到互相正交拉丁方。在此情形下，我们可以在不同的方阵中独立置换符号，但所有拉丁方中的行和列应同时置换。另请参见 [3]。

2.2 量子拉丁方的等价关系

如果两个量子拉丁方可以通过以下操作相互得到，则称它们同位:

(i) 将元素乘以相位因子,

(ii) 置换行和列，以及

(iii) 对所有元素施加酉变换。

如果一个量子拉丁方经过同位变换后，其所有元素都包含在一个固定的标准正交基 $\{|1\rangle, \ldots, |n\rangle\}$ 中，则称它是经典的，或者不是真正的量子的。根据同位定义中的第 (iii) 项，此性质与所选基无关。

请注意，同位这一概念并不适用于非经典量子拉丁方。例如，当量子拉丁方中不同元素的数量多于行数时，就无法互换行和符号的作用。

2.3 两两正交量子拉丁方（MOQLS）

Musto [10] 引入了两两正交量子拉丁方。除其他研究外， [5, 21] 也对这些所谓的 MOQLS 进行了研究。

定义 7 (MOQLS [10])。 t 阶为 n 的两两正交量子拉丁方是 t阶为 n的量子拉丁方，且其中任意两个都正交（如定义 2 所述）。

与量子拉丁方一样，若两个 tMOQLS(n)集合可以通过以下操作相互得到，则称它们是同位的：

(i) 对元素乘以相位因子；(ii) 对所有方阵同时置换行和列；(iii) 对每个方阵，对其所有元素应用酉变换。

若一个 t MOQLS(n)集合经过同位变换后，所有元素都包含在 $\{|1\rangle, \ldots, |n\rangle\}$中，则称该集合为经典的或非真正的量子。同样，根据上文第 (iii) 项，这一性质不取决于所选的标准正交基。

引理8 ([12, 推论 17])。 经过同位变换后， t 个 *MOQLS*(n) 的第一行中有 $|1\rangle \cdots |n\rangle$ 。

3 量子拉丁方的模式

矩阵的模式 是将其中每个非零条目替换为 1 后得到的二元矩阵。酉模式 是酉矩阵的模式，另见 [7]。

类似地，向量的模式是将其中每个非零条目替换为 1 后得到的向量。向量的支撑 是其非零坐标的集合。向量的权重 是其支撑的大小，也就是其模式中 1 的个数。

我们将模式的概念推广到量子拉丁方。请注意，模式取决于所选的标准正交基 $\{|1\rangle, \ldots, |n\rangle\}$。

定义 9. 量子拉丁方的模式 是将其中每个条目替换为其模式后得到的矩阵。

例如：

$\|1\rangle$	$\|2\rangle$	$\|3\rangle$	$\|4\rangle$
$\|2\rangle$	$\|1\rangle$	$\|4\rangle$	$\|3\rangle$
$\|3\rangle$	$\|4\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|1\rangle + \|2\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|1\rangle - \|2\rangle)$
$\|4\rangle$	$\|3\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|1\rangle - \|2\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|1\rangle + \|2\rangle)$

模式 $\longrightarrow$

1000	0100	0010	0001
0100	1000	0001	0010
0010	0001	1100	1100
0001	0010	1100	1100

我们总是可以将以下论证应用于 MOQLS 的模式。我们把它们视为某种“量子数独规则”：

#1（标准形式。）根据引理8，我们总可以从标准形式开始，此时每个量子拉丁方的模式的第一行具有如下形式

10...0	010...0	...	0...01

#2（酉模式。）根据量子拉丁方的定义，量子拉丁方的每一行和每一列都构成一个酉模式。特别地，若存在权重为一且支撑为 $\{k\}$的条目，则同一行和同一列中的所有其他元素在坐标k处均为零。

#3（零重叠。）从第二行开始，如果某个模式在某个位置上有一个 1，那么正交量子拉丁方的模式在同一位置上就有一个 0。事实上，由于这些量子拉丁方互相正交， $\psi_{ij} \otimes \phi_{ij}$ 和 $\psi_{1k} \otimes \phi_{1k} = |k\rangle \otimes |k\rangle$正交，因此 $\langle k|\psi_{ij}\rangle \langle k|\phi_{ij}\rangle = 0$。

定理 10。 阶为 n的 *MOQLS* 最多有 $n-1$ 个。若达到等号，则它们是经典的（并且等价于一个阶为 n的射影平面）。

证明。 该不等式已在 [12, 定理 18], 中证明，但我们使用上述规则再证明一次。规则 #1 表明，不失一般性，我们可以假设所有矩阵的第一行都包含状态 $|1\rangle$、.....、 $|n\rangle$。与经典证明一样，我们考察位置 (2，1) 上的 t元素。根据规则 #2，它们的模式在第一个位置为零。根据规则 #3，它们的支撑集构成集合 $\{2,\ldots,n\}$ 的一个划分。因此，阶为 n 的 MOQLS 至多有 $n-1$ 个。若等号成立，则所有拉丁方在位置 (2，1) 上都有一个权重为一的元素。这个位置的选择是任意的，因此所有元素的权重都为一，这意味着这些量子拉丁方都是经典的。

□

在证明不存在 2 个 MOQLS(6) 之前，我们先证明：如果 $n=4$ 或 $n=5$，则不存在非经典的 2 个 MOQLS(n)，从而解决了 [5, 定理 3.7] 中的一些未解决情形。

定理 11. *2* 个*4*阶互正交量子拉丁方是经典的。

证明。 设 $\Psi=(\psi_{ij})_{1\le i,\ j\le 4}$ 和 $\Phi=(\phi_{ij})_{1\le i,\ j\le 4}$ 是 2 个4阶互正交量子拉丁方。根据规则 #1，不妨假设两个方阵的第一行均由 $|1\rangle$、.....、 $|4\rangle$组成。此外，对于所有 $i\in\{2,3,4\}$ 和 $j\in\{1,\ldots,4\}$，元素ψ_{ij} 与 $\psi_{1j}=|j\rangle$ 正交，因为它们位于同一列中。 Φ中的元素也同样如此。因此，这些模式如下所示（* 可以是 0 或 1）：

$\Psi=$

1000	0100	0010	0001
0***	*0**	**0*	***0
0***	*0**	**0*	***0
0***	*0**	**0*	***0

和 $\Phi=$

1000	0100	0010	0001
0***	*0**	**0*	***0
0***	*0**	**0*	***0
0***	*0**	**0*	***0

反设这些拉丁方不是经典的。换句话说，至少有一个元素的权重为二或更高。经过置换，不妨设该元素是 ψ_{21} Ψ 的第二行第一列中的条目，且其模式为 011*。根据规则 #3，我们有 $\phi_{21}=|4\rangle$ ，因此 $\langle 4|\psi_{21}\rangle=0$，于是这些拉丁方变为：

$\Psi=$

1000	0100	0010	0001
0110	*0**	**0*	***0
0***	*0**	**0*	***0
0***	*0**	**0*	***0

以及 $\Phi=$

1000	0100	0010	0001
0001	*0**	**0*	***0
0***	*0**	**0*	***0
0***	*0**	**0*	***0

Ψ第一列中剩余的状态不能同时为 $|4\rangle$ ，因为它们彼此正交。因此不失一般性， ψ_{31} 具有 01** 模式。由于它与 ψ_{21}正交，其模式为 011*；但根据之前相同的论证（规则 #3）， $\phi_{31}=|4\rangle$，这就产生了矛盾，因为 $\phi_{21}=|4\rangle=\phi_{31}$ 位于同一列，因此彼此正交。

□

定理12. *2* 个 *5*阶互正交量子拉丁方是经典的。

证明. 考虑 2 个 5阶互正交量子拉丁方。应用规则 #1 和规则 #2，可得如下形式的拉丁方：

$\Psi=$

10000	01000	00100	00010	00001
0****	*0***	**0**	***0*	****0
0****	*0***	**0**	***0*	****0
0****	*0***	**0**	***0*	****0
0****	*0***	**0**	***0*	****0

和 $\Phi=$

10000	01000	00100	00010	00001
0****	*0***	**0**	***0*	****0
0****	*0***	**0**	***0*	****0
0****	*0***	**0**	***0*	****0
0****	*0***	**0**	***0*	****0

反设存在一个权重不小于二的条目。

情形 1：所有条目的权重至多为二。不失一般性，设 ψ_{21} 的模式为 01100。第二行中的其余条目不可能全部包含在一个三维向量空间（简称三维空间）中，因此还存在另一个模式完全相同的条目 011000。设 ψ_{24} 为这个条目。第一列也一样；设 ψ_{31} 也具有这种模式：

$\Psi=$

10000	01000	00100	00010	00001
01100	*0***	**0**	01100	****0
01100	*0***	**0**	***0*	****0
0****	*0***	**0**	***0*	****0
0****	*0***	**0**	***0*	****0

和 $\Phi=$

10000	01000	00100	00010	00001
0****	*0***	**0**	***0*	****0
0****	*0***	**0**	***0*	****0
0****	*0***	**0**	***0*	****0
0****	*0***	**0**	***0*	****0

应用规则 #2 和规则 #3 后，我们得到：

$\Psi =$

10000	01000	00100	00010	00001
01100	*00**	*00**	01100	*00*0
01100	*00**	*00**	***0*	****0
000**	*0***	**0**	***0*	****0
000**	*0***	**0**	***0*	****0

以及 $\Phi =$

10000	01000	00100	00010	00001
000**	*0***	**0**	*000*	****0
000**	*0***	**0**	***0*	****0
0****	*0***	**0**	***0*	****0
0****	*0***	**0**	***0*	****0

对于 $i \in \{1,2,3\}$，我们有 $\langle 3|\psi_{i2}\rangle = 0$，因此 $\langle 3|\psi_{42}\rangle \neq 0$ 或 $\langle 3|\psi_{52}\rangle \neq 0$。不妨假设 $\langle 3|\psi_{42}\rangle \neq 0$，其中行的置换不影响结论。现在来看表格中的灰色单元格：

$\Psi =$

10000	01000	00100	00010	00001
01100	*00**	*00**	01100	*00*0
01100	*00**	*00**	***0*	****0
000**	*01**	**0**	***0*	****0
000**	*0***	**0**	***0*	****0

和 $\Phi =$

10000	01000	00100	00010	00001
000**	*0***	**0**	*000*	****0
000**	*0***	**0**	***0*	****0
0****	*00**	**0**	***0*	****0
0****	*0***	**0**	***0*	****0

我们证明， Φ 中的四个灰色元素两两正交。根据定义，同一行或同一列中的状态是正交的。对于位于不同行和不同列的元素对，只需证明 Ψ 中的相应元素不正交，因为张量积 $\psi_{ij} \otimes \phi_{ij}$ 是正交的（根据MOQLS的定义）。状态 ψ_{42} 与 ψ_{21}、 ψ_{31} 和 ψ_{24} 不正交，因为它们的支撑恰好在一个位置上重叠。状态 ψ_{24} 和 ψ_{31} 不正交，因为它们都与ψ_{21} 正交，并且具有相同的大小为二的支撑（因此事实上， $\psi_{24} = \psi_{31}$ 仅相差一个相位因子）。于是， Φ 中的四个灰色元素两两正交，从而得出矛盾，因为它们包含在由 $|1\rangle$、$|4\rangle$和 $|5\rangle$张成的三维空间中。

情形 2：存在一个权重至少为三的条目。不失一般性，设该条目为 ψ_{21}，其模式为 0111*。我们通过考察正交方阵的第二行来导出矛盾。根据规则 #3，状态 ϕ_{21} 的模式必须为 00001，因此 ψ_{21} 的模式为 01110。根据 Φ中的规则 #2，第二行中的其他元素在最后一个坐标上均为零。于是得到：

$\Psi =$

10000	01000	00100	00010	00001
01110	*0***	**0**	***0*	****0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

以及 $\Phi =$

10000	01000	00100	00010	00001
00001	*0**0	**0*0	***00	****0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

在状态 ψ_{2i} for $i \in \{2,3,4\}$中，至少有一个状态的支撑与 $\{2,3,4\}$ 相交；否则，三者都会包含在由 $|1\rangle$ 和 $|5\rangle$张成的二维子空间中，这与它们两两标准正交的事实相矛盾。因此，不失一般性地， ψ_{22} 的支撑与 $\{2,3,4\}$相交。它与 ψ_{21}正交，所以其模式为 *011*。这意味着 $\phi_{22} = |1\rangle$ （模式为 10000），在 Φ中应用规则 #2后，我们得到：

$\Psi =$

10000	01000	00100	00010	00001
01110	*011*	**0**	***0*	****0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

以及 $\Phi =$

10000	01000	00100	00010	00001
00001	10000	0*0*0	0**00	0***0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

根据规则 #3， ψ_{23} 和 ψ_{24} 的支撑与 $\{2,3,4\}$ 至多相交于一个元素。因此，为了使这些状态与 ψ_{21}正交，它们的支撑必须与 $\{2,3,4\}$不相交。换言之，它们张成了由 $|1\rangle$ 和 $|5\rangle$张成的二维子空间。因此，三个状态 ψ_{21}、 ψ_{22} 和 ψ_{25} 张成了正交空间，也就是由 $|2\rangle$、 $|3\rangle$ 和 $|4\rangle$张成的三维空间。为了

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

成为酉模式，所有 * 都必须为 1（查看各列时最容易看出这一点）。另一方面，根据规则 #3， ψ_{25} 的权重不能为三，这就产生了矛盾。 □

4 个六阶 MOQLS

在本节中，我们证明定理 6。

4.1 我们可以假设 2MOQLS(6) 中有一个是经典的

引理 13。 如果 Ψ 是一个不含重量三或更高元素的量子拉丁方，那么存在一个经典拉丁方 Ψ'，使得当且仅当 Ψ 与 Φ 正交时， Ψ' 与 Φ 也正交。

证明。 设 n 是 Ψ 的阶。我们可以假设 $n \geq 4$，否则结论显然成立。我们证明，只要 Ψ 含有重量为二的元素，我们就可以将 Ψ 替换为一个量子拉丁方，使重量为二的元素严格减少，且不含重量为三或更高的元素，同时仍与 Φ 正交。我们可以重复这一操作，直到所有元素的重量都为一。

选取一个重量为二的元素 ψ_{ij}，不失一般性地假设其模式为 110...0。令 U 为唯一一个将 ψ_{ij} 转换为 $|1\rangle$ 且固定 $|3\rangle, \ldots, |n\rangle$ 的酉变换。令 Ψ' 为对 Ψ 中所有模式为 110...0 的元素应用 U，同时保持其他元素不变后得到的量子拉丁方。首先，该操作不会增加任何元素的重量，并会降低 ψ_{ij} 的重量。其次，该操作保持与其他量子拉丁方的正交性，因为每当 Ψ 中的两个元素正交时， Ψ' 中对应的元素也正交。唯一可能出问题的情况是两个正交元素中的一个具有模式 110...0，但此时另一个元素要么也具有支撑 $\{1,2\}$，要么其支撑与之不相交。

□

注意，当 Ψ含有重量三的元素时，引理 13 的证明不再适用。

引理14. 如果一个 6×6 酉模式有一行的权重为三，且没有权重为四或更高的行，那么以下情况之一成立：

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & * & 0 & 0 & 0 \\ & & \cdots & & & \end{bmatrix} \quad or \ (ii) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & \cdots & & & \end{bmatrix}$$

（*i*）存在另一行，其权重为三且支撑集相同；此外，至少还有一行的权重为二或三，且其支撑集包含于给定的权重为三的行的支撑集中，或者

（*ii*）存在四行，权重均为三，且支撑集包含于一个固定的四元素集合中，并且两两在两个位置上重叠。

证明. 不失一般性，设第一行为 111000。至少还必须有两行的支撑集与第一行的支撑集重叠，否则同一个由 $|4\rangle$、 $|5\rangle$ 和 $|6\rangle$张成的三维空间中就会有四个状态。两个正交状态的支撑集只要有重叠，就至少会在两个元素上重叠。因此，如果存在另一行具有相同的支撑集，那么我们就处于情形（i）。如果没有，则存在一行，其支撑集为 $\{1,2,4\}$（在不改变 $\{1,2,3\}$的置换 $\{1,\ldots,6\}$ 下）：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & \cdots & & & \end{bmatrix}$$

观察第一列和第三列，为了使这两列的支撑集至少在两个位置重叠，这两列中必须存在某一行的元素均为 1。该行的支撑集必须与 $\{1,2,4\}$ 至少在两个位置重叠，因此它是 101100。类似地，存在一行，其支撑集为 $\{2,3,4\}$，于是我们处于情形 (ii)。

□

引理 15. 如果一个 6×6 酉模式中有一行的权重为四，且没有权重为五或更大的行，那么：

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \cdots & & & \end{bmatrix} \quad or \ (ii) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ & & \cdots & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \text{weight} \geq 3 \\ \leftarrow \text{weight} \geq 3 \\ \leftarrow \text{weight} \geq 3 \end{matrix}$$

(i) 存在另一行，其权重为四且支撑集相同；另有一行的权重为二，且其支撑集包含于给定的权重为四的行的支撑集内；或者

(ii) 存在四行，其权重至少为三。

在这两种情况下，酉模式至少有四行的权重为二或更高。

证明。 我们可以假设第一行为 111100。还有五行，其中至多两行可以是 0000** 的形式，因此至少有三行的支撑与 111100 的支撑至少有一个元素重叠。如果这三行的权重都至少为三，我们就处于情况 (ii)。因此，假设其中一行的权重为一或二。根据它与第一行的正交性，其权重必须为二。不失一般性，我们有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \cdots & & & \end{bmatrix}$$

第一列和第三列必须对应酉矩阵中的正交列，因此还存在一行形如 1*1***。它与第二行正交，所以其形式为 111***。如果第四个坐标是 1，我们就处于情形（i）。否则，它的形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & * & * \\ & & \cdots & & & \end{bmatrix}$$

于是，我们可以对第一列和第四列应用类似的论证，证明存在一行形如 11*1**。同样，如果它的第三个坐标是 1，我们就处于情形（i）。否则，我们有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & * & * \\ 1 & 1 & 0 & 1 & * & * \\ & & \cdots & & & \end{bmatrix}$$

对第三列和第四列应用相同的论证，可知必定存在一行形如 **11**。它不可能是 001100，因此其权重至少为三，我们处于情形（ii）。如果

有三行的权重为一，那么所有其他行的权重都至多为三 . □

引理 16. 如果标准形式的两个 *MOQLS(6)* 之一有一个权重为四的元素，那么另一个方阵在对应的列中只有权重为一的元素。

证明。 我们假设这些拉丁方处于标准形式，因此在对称性意义下，模式的第一行是 100000。我们也可以假设第二行是 011110。根据规则 #3，正交模式中的第二行是 000001。反设后者有一行形如 011**0。我们不妨假设这是第三行。因此，第二列和第三列都形如 001***。由于矩阵是酉的，第二列和第三列正交，所以它们在另一个位置上有一个非零条目。换言之，还存在另一行形如 *11***。于是，正交酉模式如下

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ & & \cdots & & & \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 1 & 1 & * & * & 0 \\ & & \vdots & & & \end{bmatrix}.$$

左侧模式中的第三行和第四行不可能都为 000001，因此其中一行形如 00011*。左侧模式中的第二列和第四列必须正交，因此还存在另一行形如 01*1**。我们得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & 1 & * & * \\ & & \cdots & & & \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\ & & \vdots & & & \end{bmatrix}.$$

要使右侧的模式成为酉矩阵，第五行必须是 000010。因此，左侧的 (5,5) 位置为零。左侧酉矩阵的第二行和第五行不同，且最后三列中的元素均非零。这意味着酉矩阵的第三行和第四行相差一个相位因子，因为它们都是由首三列为零且同时垂直于这两行的向量所确定的，这就产生了矛盾。

□

引理 17。 如果标准形式的两个 *MOQLS(6)* 之一有一个重量三的条目，那么另一个方阵在对应列中仅有重量一或重量二的条目。

证明。 我们假设这些拉丁方均为标准形式，因此不妨利用对称性设模式的第一行是 100000。如果该列有一个权重为四的条目，那么由引理 16 即得结论。因此，假设该列中所有条目的权重至多为三。根据引理14，该列的模式要么是

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0\\ 0&1&1&1&0&0\\ 0&1&1&*&0&0\\ 0&0&0&0&*&*\\ 0&0&0&0&*&* \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0\\ 0&1&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}.$$

根据规则 #3，正交量子拉丁方中对应列的酉模式要么是

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&*&*\\ 0&0&0&0&*&*\\ 0&0&0&*&*&*\\ 0&*&*&*&*&*\\ 0&*&*&*&*&* \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&*&*\\ 0&0&0&*&0&*\\ 0&0&*&0&0&*\\ 0&*&0&0&0&*\\ 0&*&*&*&*&0 \end{bmatrix}.$$

在第一种情形中，酉矩阵的第二行和第三行构成由$|5\rangle$ 和 $|6\rangle$张成的空间的一组基，因此其他行在第五和第六个位置上均为零。因此，第四行是 000100，最后两行具有 0**000 这种模式。在第二种情形中，将其补全为酉模式的唯一方法是使其成为置换矩阵。两种情形下，所有行的权重都至多为二。 □

引理 18。 如果标准形式的两个 *MOQLS(6)* 之一有一个重量四的条目，那么另一个方阵没有重量四的条目。此外，另一个方阵中至多有三列包含重量三的条目。

证明。反设两个拉丁方的元素权重都为四。由引理 17 和引理 16，其中一个（不妨记为 Ψ）至多有三列包含权重至少为三的元素。不妨设 ψ_{21} 的模式为 001111。由 Ψ 第二行确定的酉模式至多有三个权重至少为三的元素，因此属于引理 15 的情形（i）。于是，ψ_{22} 的模式也为 001111，并且我们可以假设 ψ_{23} 的模式为 000011。第三列的某处必定还有另一个模式为 ****11 的元素，不妨记为 ψ_{33}。我们分两种情形讨论。**情形 1：** ψ_{33} **的权重为**二。 换言之，它的模式为 000011。应用规则 #2 和规则 #3 后，我们得到：

$\Psi =$

100000	010000	001000	000100	000010	000001
001111	001111	000011	***0**	****0*	*****0
0*****	*0****	000011	***0**	****0*	*****0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

和 $\Phi =$

100000	010000	001000	000100	000010	000001
010000	100000	000100	***0**	****0*	*****0
0*****	*0**** *		***0**	****0*	*****0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

看一下 Ψ 中的灰色单元格。对应的元素 ψ_{21} 和 ψ_{33}不可能正交，否则 ψ_{23} 和 ψ_{33} 将相差一个相位因子，这就矛盾了。因此，根据规则 #3， ϕ_{33} 与ϕ_{21} 正交。同理，它也与 ϕ_{22}正交，这就矛盾了。

情形 2： ψ_{33} **的权重为三或四**。 设 $i \in \{1, \ldots, 6\}$ 使得 Φ 的第 i行包含一个权重为四的元素。根据引理 16， Φ 的第 i行在前两列中的元素权重为一。根据引理 15，该行在第三列中有一个权重至少为二的元素。根据引理 16，权重不可能为四；根据引理 17，也不可能为三，因此 Φ 的第 i行在第三列中有一个权重为二的元素。特别地，由 Φ的第 i行确定的模式属于引理 15 的情形（i）。此外，在 Φ的第三列中某处，还有另一个元素，其支撑与 Φ的第 i列中的第三个元素的支撑重叠。它的权重至多为二（同样根据引理 17），且必须正交，因此它具有相同的模式。由此可知， Φ 满足情形 1 的条件，从而得到矛盾。

我们得出结论：如果 Ψ 有一个权重为四的条目，那么 Φ 没有权重为四的条目。此外， Φ不可能有四列各含一个权重为三的条目，否则根据引理 17， Ψ就会处于情形 1 中，从而产生矛盾。 □

引理 19。 不存在两个标准形式的 *MOQLS(6)*，使得其中一个有一个重量三的元素，没有重量至少为四的元素，并且至多有三列包含重量三的元素。

证明。 设 Ψ 是具有此性质的量子拉丁方， Φ 是与之正交的量子拉丁方。根据这一假设， Ψ 中含有权重为三的条目的每一行所对应的酉模式都属于引理14的情形（i）。特别地，对每个权重为三的条目，同一行中都存在一个具有相同模式的条目。

情形 1：有一列具有引理14中形式 (i) 的酉模式。我们可以假设：

$\Psi =$

100000	010000	001000	000100	000010	000001
011100	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0
011100	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0
011*00	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0
0*****	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0
0*****	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0

以及 $\Phi =$

100000	010000	001000	000100	000010	000001
0000**	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0
0000**	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0
000***	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0
0*****	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0
0*****	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0

在 Ψ 的第二行某处，还有一个模式为 011100 的条目，设它为 ψ_{25}。我们使用规则 #2 和规则 #3 得到：

$\Psi =$

100000	010000	001000	000100	000010	000001
011100	*0****	**0***	***0**	011100	*****0
011100	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0
011000	*00***	*00***	***0**	****0*	*****0
0000**	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0
0000**	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0

以及 $\Phi =$

100000	010000	001000	000100	000010	000001
0000**	*0****	**0***	***0**	*0000*	*****0
0000**	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0
000100	*0*0**	**00**	***0**	***00*	***0*0
0**000	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0
0**000	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0

如果 ψ_{25} 与 ψ_{31}正交，那么它将等于 ψ_{41}（相差一个相位因子），这就产生了矛盾。因此，它们并不正交；而且 ϕ_{25} 与 ϕ_{21} 和 ϕ_{31}都正交，所以 ϕ_{25} 的模式为 100000。由此可知， ψ_{35} 不可能具有模式 011100，否则基于同样的理由， ϕ_{35} 也会具有模式 100000，从而产生矛盾。因此， ψ_{36} 的模式为 011100：

$\Psi =$

100000	010000	001000	000100	000010	000001
011100	*0****	**0***	***0**	011100	*****0
011100	*0****	**0***	***0**	****0*	011100
011000	*00***	*00***	***0**	****0*	*****0
0000**	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0
0000**	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0

以及 $\Phi =$

100000	010000	001000	000100	000010	000001
0000**	00****	0*0***	0**0**	100000	0****0
0000**	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0
000100	*0*0**	**00**	***0**	***00*	***0*0
0**000	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0
0**000	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0

我们已经有三列，每列都包含权重为三的元素。特别是， Ψ 的第二列只能包含权重为一或二的元素。我们利用这一点导出矛盾。首先注意到， ψ_{22} 不可能具有模式 001100。为什么不可能？因为它不可能与 ψ_{31} 正交；否则它就会在相位因子的差异下等于 ψ_{41} ，但事实并非如此：否则 ϕ_{21}、 ϕ_{31} 和 ϕ_{22} 将两两正交，并且都具有 0000** 这种形式的模式。类似地， ψ_{23}、 ψ_{32} 和 ψ_{33} 都具有 *000** 这种形式的模式。第二列中必定有某个元素在第三个坐标上为 1，设它为 ψ_{52}。我们声称它具有模式 001100。反设 ψ_{52} 具有模式 *010**。它与 Ψ 中任何灰色元素都不正交，这意味着 ϕ_{52} 与 Φ 中所有灰色元素正交：

$\Psi =$

100000	010000	001000	000100	000010	000001
011100	*000**	*000**	***0**	011100	*****0
011100	*000**	*000**	***0**	****0*	011100
011000	*00***	*00***	***0**	****0*	*****0
0000**	*01***	**0***	***0**	****0*	*****0
0000**	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0

以及 $\Phi =$

100000	010000	001000	000100	000010	000001
0000**	00****	0*0***	0**0**	100000	0****0
0000**	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0
000100	*0*0**	**00**	***0**	***00*	***0*0
0**000	*00***	**0***	***0**	****0*	*****0
0**000	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0

这是不可能的，因此 ψ_{52} 的模式是 001100。回想一下，它的权重不可能达到重量三或更大。此外，第二列中必定还有另一个条目，其第三个位置为 1。按照前面的相同论证， ψ_{62} 的模式也为 001100。对第三列重复这一推理可知， ψ_{53} 的模式为 010100，因此它不可能与 ψ_{52} 正交，这就产生了矛盾。**情形 2：所有含有重量为三的条目的列都具有引理14中 (ii) 形式的酉模式**。

我们可以假设 Ψ 具有以下形式：

$\Psi =$

100000	010000	001000	000100	000010	000001
011100	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0
011010	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0
010110	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0
001110	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0
000001	*0***0	**0**0	***0*0	****00	*****0

每个行模式都属于引理14中的情形（i），因此第二行中还有另一个模式为 011100 的条目。在该条目所在的同一列中，至少还有两个权重为三且不在最后一行的条目。不失一般性，设它们是第三行和第四行中的条目。由于每个行模式都属于引理14中的情形（i），它们的模式与该行在第一列中的模式相同。特别地，这里讨论的是最后一列：

$\Psi =$

100000	010000	001000	000100	000010	000001
011100	*0****	**0***	***0**	****0*	011100
011010	*0****	**0***	***0**	****0*	011010
010110	*0****	**0***	***0**	****0*	010110
001110	*0****	**0***	***0**	****0*	*****0
000001	*0***0	**0**0	***0*0	****00	*****0

根据规则 #3，我们看到 Φ 必须具有如下形式的模式

$\Phi =$

100000	...	000001
0000**	...	*000*0
000*0*	...	*00*00
00*00*	...	*0*000
...	...	...

从而得出矛盾。 □

定理 20. 如果存在 *2* 个 *MOQLS(6)*，则存在 *2* 个 *MOQLS(6)*，其中之一是经典的 *l.*

证明。 回想一下，根据规则 #1，我们可以假设这些拉丁方处于标准形式。根据规则 #3，它们不可能有重量为五或六的条目。如果其中一个量子拉丁方有重量为四的条目，那么引理 18 表明，另一个量子拉丁方没有重量为四的条目，并且至多有三列含有重量为三的条目。此外，如果两个量子拉丁方都没有重量至少为四的条目，那么根据引理 17，其中一个至多有三列含有重量为三的条目。将这个拉丁方称为 Ψ。引理 19 表明，Ψ 没有重量为三或更大的条目。由引理 13 可得结论。

□

4.2 检查十二种情况

既然我们可以假设其中一个方阵是经典的，就可以用图论的术语来表述这个问题。

图在 $\mathbb{R}^n$（或 $\mathbb{C}^n$）中的正交归一表示 是一个从该图的顶点集到 $\mathbb{R}^n$（或 $\mathbb{C}^n$）中的单位向量的映射，使得不相邻顶点被映射为标准正交向量。

引理 21. 存在 *2* 个 *MOQLS(6)*，当且仅当存在一个顶点集为 6×6 的拉丁方图，其补图在 $\mathbb{C}^6$ 中具有正交归一表示。

证明. 根据定理 20，如果存在 2 个 MOQLS(6) Ψ 和 Φ，那么其中一个是经典的，不妨设为 Ψ。根据定义，Φ 是量子拉丁方，当且仅当同一行或同一列中的任意两个元素都标准正交。这两个方阵正交，当且仅当 Φ 中对应于 Ψ 中同一条目的任意两个元素都标准正交。因此，Φ 的元素构成与 Ψ 相关联的拉丁方图的补图的一个正交归一表示。反过来，若给定经典拉丁方 Ψ 的拉丁方图的补图在 $\mathbb{C}^6$，中具有正交归一表示，则该表示定义了一个与它正交的量子拉丁方。

□

同位拉丁方具有相同的拉丁方图。因此，为了证明不存在 2 个 MOQLS(6)，我们只需检查其中一个方阵是六阶十二个经典拉丁方之一（在拟同位意义下，亦称为主类 或种类）的所有配对。这一分类最初由 Sch¨onhardt [17], 发现（另见 [8] https://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/latin_mc6.txt 或 https://users.monash.edu.au/~iwanless/data/MOLS/maxMOLS6.1.txt），可在线查阅目录。

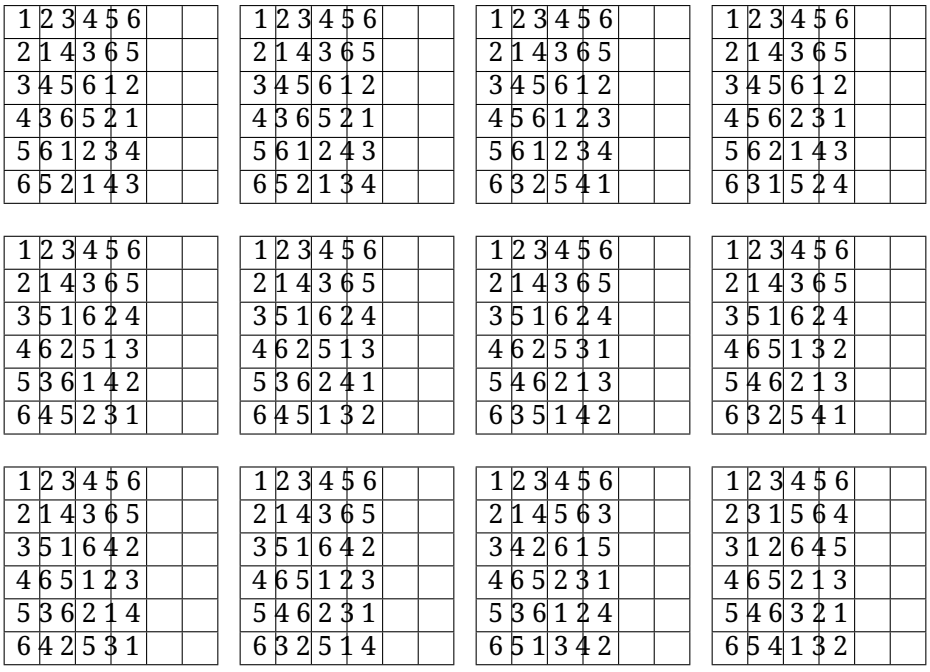


图 1：六阶拉丁方在同位意义下共有十二个。

4.3 一种 用于证伪正交归一表示存在性的算法

在十二种情况中的十种情况下，我们可以将问题归约为一个离散问题，并借助计算机求解。算法 1 在该图在 R^6（或 C^6）中不存在正交归一表示时输出 False。如果输出 True，我们无法据此判断是否存在正交归一表示。伪代码下方给出了说明。

算法 1 complementCouldHaveOrthonormalRepresentation(G, L) **要求：图 G，顶点三元组列表 L，其中的顶点来自 G。确保：若 G 的补图不存在六维正交归一表示，使得 L中的所有三元组都映射到射影直线上的三个不同点，则返回假；否则返回真（结论不确定）1：添加边 $\leftarrow$ 真 2：当添加边时执行 3：添加边 $\leftarrow$ 假 4：对于 $\ell \in L$ 执行 5：对于 $x \in V(G)$ 执行 6：如果 x 与 ℓ 的三个顶点中的两个相邻，则 7：使 x与 ℓ的所有顶点相邻 8：添加边 $\leftarrow$ 真 9：结束如果 10：结束循环 11：结束循环 12：结束循环 13：如果** cliqueNumber(G) ≥ 7 **，则 14：返回假 15：结束如果 16：对于满足 $|X| \leq 3$、$|Y| \leq 3$、$|Z| \leq 3$ 和 $|X| + |Y| + |Z| = 7$ 的完全三部图 $X \sqcup Y \sqcup Z \subseteq V(G)$ 执行 17：返回** couldBeDependent(G, L, X) **或** couldBeDependent(G, L, Y) **或**couldBeDependent(G, L, Z) **18：结束循环**

第一步，我们添加边。每当一个顶点与 L 中某个三元组里的三个顶点中的两个相邻时，这意味着对应的射影点与射影直线上三个（互不相同）点中的两个正交，因此它与该直线上的所有点都正交。特别是，可以让它与

第三个顶点相邻。
第二步中，我们计算团数。如果存在一个大小为七的团，那么 $\mathbf{C}^6$, 中就有七个线性无关向量，这与矛盾。

第三步中，我们应用以下引理：

引理22。 如果 X、 Y 和 Z 是 $\mathbb{R}^n$ （或 $\mathbb{C}^n$）中的向量多重集，并且不同集合中的任意两个向量都正交，那么 维数$\langle X\rangle$ + 维数$\langle Y\rangle$ + 维数$\langle Z\rangle$ = 维数$\langle X$、 Y、 $Z\rangle \leq n$。
证明。 由格拉斯曼公式可得此结论，因为对于任意子空间 π， $\pi \cap \pi^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ 。 □

用图论术语来说，该条件对应于一个完全三部子图（不一定是诱导子图），其三分划类为 X、 Y 和 Z。为了让代码更简单，我们只考虑这些类的元素数不超过三个的情况。如果我们再增加一种情况，允许四个点线性相关（即一个子图 $K_{3,4}$），那么该算法就能多解决一种情况，但证明中并不需要这样做。如果 $|X| + |Y| + |Z| = 7$，那么集合 X、 Y 和 Z 中至少有一个会映射到三个线性相关点，并调用算法2的函数。

算法 **2** couldBeDependent(*G*, *L*, *X*) 要求：图 G，由 L 个 G 的顶点三元组组成的列表，顶点集合 X，其中 G 满足 $|X| \leq 3$。确保：若 G 的补图不存在六维正交归一表示，且使 L 中的所有三元组都映射到射影直线上的三个不同点，并使 X 映射到一组线性相关向量，则返回 False；否则返回 True（无法确定）。1：对 $\{x, y\} \in \binom{X}{2}$ 中的每个▷ 执行：情形 1： X 中的两个顶点映射到同一点。2：如果 $x \not\sim y$ 且 $\forall \ell \in L$： $\{x, y\} \not\subseteq \ell$，则 3：$G' \leftarrow G$，其中 x 和 y 合并。4：如果 complementCouldHaveOrthonormalRepresentation(G', L)，则 5：返回 True。6：结束 if。7：结束 if。8：结束 for。9：如果 $|X| = 3$ 且 $|E(X)| \leq 1$，则▷ 情形 2： X 映射到直线上的三个不同点。10：如果 complementCouldHaveOrthonormalRepresentation($G, L \cup \{X\}$)，则 11：返回 True。12：结束 if。13：结束 if。14：返回 False

该算法 每个含有 6×6 个顶点的十二个拉丁方图，算法运行时间约为一分钟。 ces.
其中仅有两个 的结果为无法确定的真。它们都有一个三阶子方阵。

4.4 不存在三阶子方阵

接下来需要证明：如果一个六阶拉丁方有一个三阶子方阵，那么它就没有“量子正交伴侣”。

引理23。 如果两个 *MOQLS(6)* 中的一个是经典的，且含有一个三阶子方阵，那么另一个方阵中对应区块的九个元素各不相同。

证明。 经过适当的置换，我们可以假设这些拉丁方具有如下模式：

$\Psi =$

1			5	6	
2	3	1			
3	1	2			
4	5	6			
5	6	4			
6	4	5			

以及 $\Phi =$

100000			000100	000010	000001
00****		0*0***			
0*0***	00****				
0**0**	*0**0*	**0**0			
0***0*	*0***0	**00**			
0****0	*0*0**	**0*0*			

两个拉丁方都被划分为四个区块，使得左侧方阵的灰色块中包含元素 1、2 和 3，白色块中包含元素 4、5 和 6。我们关注白色的左下区块，但根据对称性，我们的论证对其他区块也同样成立。

假设 Φ 的同一区块中有两个元素相等。这两个元素不能位于同一行或同一列，也不能对应 Ψ 中的同一个数字。因此，不失一般性，我们可以假设 $\phi_{41} = \phi_{52}$。它们的模式为 00*0*0。

情形 1： $\phi_{41} = \phi_{52} = |3\rangle$。 Φ第五列中的所有元素都与 $|3\rangle$正交，除了 ϕ_{65}。作为标准正交基中唯一一个不与 $|3\rangle$正交的元素，条目 ϕ_{65} 必须等于$|3\rangle$。在经典拉丁方 Ψ中，位置 (6，5) 上的数字只能是 1 或 2：不可能是 3，因为$\psi_{13} \otimes \phi_{13} = |3\rangle \otimes |3\rangle = |3\rangle \otimes \phi_{65}$。如果它等于 1，那么 Φ 中与 Ψ 中的 2 相对应的所有元素，都因与等于 $|3\rangle$的条目同行或同列而与 $|3\rangle$ 正交。这会导致矛盾，因为与 Ψ 中相同数字相对应的所有元素构成一个标准正交基。如果 ψ_{65} 等于 2，那么同理， Φ 中与 Ψ 中的 1 相对应的所有元素都与 $|3\rangle$正交，这也会导致矛盾。

情形 2： $\phi_{41} = \phi_{52} = |5\rangle$。 Φ 的第四列中，除 ϕ_{64} 外，所有元素都与 $|5\rangle$ 正交。同样， Φ 的第六列中，除 ϕ_{66} 外，所有元素都与 $|5\rangle$ 正交。因此 $\phi_{64} = \phi_{66} = |3\rangle$，矛盾。**情形 3：** $\phi_{41} = \phi_{52}$ **的权重为二。** Φ 的第五列中，除 $|5\rangle$ 和 ϕ_{65} 外，所有元素都与 $|5\rangle$ 和 $\phi_{41} = \phi_{52}$ 正交。因此， $\phi_{65} = |3\rangle$。第一列中的所有元素都与 ϕ_{41} 以及 $|3\rangle$ 或 $|5\rangle$ 正交，但 ϕ_{41} 本身和 ϕ_{21} 除外。因此， ϕ_{21} 的模式为 001010。同样， ϕ_{32} 的模式为 001010。但现在，第三列中除 $|3\rangle$ 外的每个元素，其模式都形如 **0*0*，矛盾。 □

引理 24. 如果标准形式的两个 *MOQLS(6)* 中有一个是经典的，并且含有一个三阶子方阵，则另一个方阵具有如下形式:

$\Phi =$

$(1,0,0,0,0,0)$	$(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$	$(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$			
$\lambda_{41}(0, a_2, a_3, 0, a_5, a_6)$	$\lambda_{42}(b_1, 0, b_3, b_4, 0, b_6)$	$\lambda_{43}(c_1, c_2, 0, c_4, c_5, 0)$			
$\lambda_{51}(0, -c_2, c_3, -c_4, 0, c_6)$	$\lambda_{52}(a_1, 0, -a_3, a_4, -a_5, 0)$	$\lambda_{53}(-b_1, b_2, 0,0, b_5, -b_6)$			
$\lambda_{61}(0, b_2, b_3, b_4, b_5, 0)$	$\lambda_{62}\ (c_1,\ 0,\ c_3,\ 0,\ c_5,\ c_6)$	$\lambda_{63}(a_1, a_2, 0, a_4, 0, a_6)$			

证明。 取引理23中的 Ψ 和 Φ ，令 $X = \{\phi_{41}, \phi_{52}, \phi_{63}\}$、 $Y = \{\phi_{42}, \phi_{53}, \phi_{61}\}$ 和 $Z = \{\phi_{43}, \phi_{51}, \phi_{62}\}$。向量 ϕ_{41} 与 ϕ_{42}、 ϕ_{43}、 ϕ_{51}、 ϕ_{52} 正交，因为 Φ 是一个量子拉丁方；它也与 ϕ_{53} 和 ϕ_{62} 正交，因为 Ψ 和 Φ 正交。因此， ϕ_{41} 与 Y和 Z中的所有向量正交。同理可得，不同集合中的任意两个向量都正交。应用引理22可知，维数$\langle X\rangle$ + 维数$\langle Y\rangle$ + 维数$\langle Z\rangle \leq 6$。由引理23可知，每个集合中的三个向量互不相同，因此维数$\langle X\rangle$ = 维数$\langle Y\rangle$ = 维数$\langle Z\rangle = 2$。现在可以对元素进行缩放，并假设其具有陈述中的形式。 □

引理25。 如果一个量子拉丁方具有引理 *24* 中的形式，那么左下方白色块中的所有元素的权重至多为二。

证明。 不计缩放，令 $S = (s_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ 为 Φ 中的左下方白色块:

$S =$

$(0, a_2, a_3, 0, a_5, a_6)$	$(b_1,\ 0,\ b_3,\ b_4,\ 0,\ b_6)$	$(c_1, c_2, 0, c_4, c_5, 0)$
$(0, -c_2, c_3, -c_4, 0, c_6)$	$(a_1, 0, -a_3, a_4, -a_5, 0)$	$(-b_1, b_2, 0,0, b_5, -b_6)$
$(0, b_2, b_3, b_4, b_5, 0)$	$(c_1, 0, c_3, 0, c_5, c_6)$	$(a_1, a_2, 0, a_4, 0, a_6)$

S 的行和列仍然具有正交的性质，但不一定是标准正交的。设 $w(S)$为 S的九个元素中的最小权重。

可以看出，这里具有很高的对称性。我们不仅可以置换前三列和后三列，并相应地置换各行，从而得到形式相同的方阵；还可以互换列与符号的角色，将坐标 $\{1,2,3\}$ 与 $\{4,5,6\}$ 互换。

情形 1： $w(S) = 1$。 考虑到 $\{1,2,3\}$ 与 $\{4,5,6\}$ 之间的对称性，并在需要时互换列与符号的角色，我们不妨设 $s_{11} = |2\rangle$，因此 $a_2 = 1$ 和 $a_3 = a_5 = a_6 = 0$。

$S =$

$(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$	$(b_1,\ 0,\ b_3,\ b_4,\ 0,\ b_6)$	$(c_1,\ c_2,\ 0,\ c_4,\ c_5,\ 0)$
$(0, -c_2, c_3, -c_4, 0, c_6)$	$(a_1, 0,0, a_4, 0,0)$	$(-b_1, b_2, 0,0, b_5, -b_6)$
$(0, b_2, b_3, b_4, b_5, 0)$	$(c_1, 0, c_3, 0, c_5, c_6)$	$(a_1, 1,0, a_4, 0,0)$

根据正交性，我们有 $b_2 = c_2 = 0$。

$S =$

$(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$	$(b_1,\ 0,\ b_3,\ b_4,\ 0,\ b_6)$	$(c_1, 0,0, c_4, c_5, 0)$
$(0, 0, c_3, -c_4, 0, c_6)$	$(a_1, 0,0, a_4, 0,0)$	$(-b_1, 0,0, 0, b_5, -b_6)$
$(0, 0, b_3, b_4, b_5, 0)$	$(c_1, 0, c_3, 0, c_5, c_6)$	$(a_1, 1,0, a_4, 0,0)$

情形 1.1： $a_1 = 0$。在相差一个缩放因子的意义下，我们有 $a_4 = 1$，并且根据正交性，$b_4 = c_4 = 0$。

$$S = \begin{array}{|c|c|c|} \hline (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) & (b_1, 0, b_3, 0, 0, b_6) & (c_1, 0, 0, 0, c_5, 0) \\ \hline (0, 0, c_3, 0, 0, c_6) & (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0) & (-b_1, 0, 0, 0, b_5, -b_6) \\ \hline (0,\ 0,\ b_3,\ 0,\ b_5,\ 0) & (c_1,\ 0,\ c_3,\ 0,\ c_5,\ c_6) & (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0) \\ \hline \end{array}$$

再次根据正交性，$b_1c_1 = b_3c_3 = b_5c_5 = b_6c_6 = 0$。反设存在一个重量三的条目。共有三种可能性:

- 如果 $b_1b_3b_6 \neq 0$，那么 $s_{21} = \mathbf{0}$，矛盾。
- 如果 $b_1b_5b_6 \neq 0$，那么 $s_{13} = \mathbf{0}$，矛盾。
- 如果 $\{c_1, c_3, c_5, c_6\}$ 中至少有三个元素非零，那么 $s_{12} = \mathbf{0}$ 或 $s_{23} = \mathbf{0}$ 或 $s_{31} = \mathbf{0}$，矛盾。

我们得出结论：如果 $a_1 = 0$，那么所有元素的权重至多为二。

情形 1.2： $a_1 \neq 0$。根据正交性，$b_1 = c_1 = 0$。

$$S = \begin{array}{|c|c|c|} \hline (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) & (0,\ 0,\ b_3,\ b_4,\ 0,\ b_6) & (0,\ 0,\ 0,\ c_4,\ c_5,\ 0) \\ \hline (0, 0, c_3, -c_4, 0, c_6) & (a_1, 0, 0, a_4, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, b_5, -b_6) \\ \hline (0, 0, b_3, b_4, b_5, 0) & (0,\ 0,\ c_3,\ 0,\ c_5,\ c_6) & (a_1, 1, 0, a_4, 0, 0) \\ \hline \end{array}$$

反设存在一个重量三的条目。共有五种可能:

- 若 $b_3b_4b_6 \neq 0$，则 $s_{21} = \mathbf{0}$，矛盾。
- 若 $c_3c_4c_6 \neq 0$，则 $s_{12} = \mathbf{0}$，矛盾。
- 若 $b_3b_4b_5 \neq 0$，则 $s_{13} = \mathbf{0}$，矛盾。
- 若 $c_3c_5c_6 \neq 0$，则 $s_{23} = \mathbf{0}$，矛盾。
- 若 $a_4 \neq 0$，则 $b_4 = c_4 = 0$。考察 s_{13}，可得 $c_5 \neq 0$。由与 s_{23} 正交，得到$b_5 = 0$:

$$S = \begin{array}{|c|c|c|} \hline (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) & (0, 0, b_3, 0, 0, b_6) & (0, 0, 0, 0, c_5, 0) \\ \hline (0, 0, c_3, 0, 0, c_6) & (a_1, 0, 0, a_4, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0, -b_6) \\ \hline (0,\ 0,\ b_3,\ 0,\ 0,\ 0) & (0,\ 0,\ c_3,\ 0,\ c_5,\ c_6) & (a_1,\ 1,\ 0,\ a_4,\ 0,\ 0) \\ \hline \end{array}$$

现在 $b_3 \neq 0$ 且 $b_6 \neq 0$，这意味着 $s_{21} = \mathbf{0}$，矛盾。

我们得出结论：即使 $a_1 \neq 0$，所有元素的权重也至多为二。

情形 2： $w(S) = 2$。也就是说，存在一个权重为二的元素，而不存在权重为一的元素。利用 $\{1, 2, 3\}$ 和 $\{4, 5, 6\}$的对称性，并在必要时交换列和符号的角色，我们不妨设 $a_1 = a_2 = 0$ 或 $a_1 = a_4 = 0$。

情形 2.1： $a_1 = a_2 = 0$。在这种情况下，$a_4 \neq 0$ 和 $a_6 \neq 0$。

$$S = \begin{array}{|c|c|c|} \hline (0,\ 0,\ a_3,\ 0,\ a_5a_6) & (b_1,\ 0,\ b_3b_4,\ 0,\ b_6) & (c_1c_2,\ 0,\ c_4c_5,\ 0) \\ \hline (0,\ -c_2c_3-c_4,\ 0,\ c_6) & (0,\ 0,\ -a_3a_4-a_5,\ 0) & (-b_1, b_2, 0, 0, b_5, -b_6) \\ \hline (0, b_2, b_3, b_4, b_5, 0) & (c_1, 0, c_3, 0, c_5, c_6) & (0, 0, 0, a_4, 0, a_6) \\ \hline \end{array}$$

根据正交 性，第三行和列中的元素分别满足 $b_4 = c_6 = c_4 = b_6 =$ 0.

$$S = \begin{array}{|c|c|c|} \hline (0,\ 0,\ a_3,\ 0,\ a_5,\ a_6) & (b_1, 0, b_3, 0, 0, 0) & (c_1, c_2, 0, 0, c_5, 0) \\ \hline (0, -c_2, c_3, 0, 0, 0) & (0,\ 0,\ -a_3,\ a_4,\ -a_5,\ 0) & (-b_1, b_2, 0, 0, b_5, 0) \\ \hline (0, b_2, b_3, 0, b_5, 0) & (c_1, 0, c_3, 0, c_5, 0) & (0, 0, 0, a_4, 0, a_6) \\ \hline \end{array}$$

灰色的元素是正交的，因为它们都对应于 Ψ中的一个 $|5\rangle$，因此 $b_3c_3 = 0$，这意味着一个权重为一的元素，矛盾。

情形 2.1： $a_1 = a_4 = 0$。在这种情况下，$a_2 \neq 0$ 和 $a_6 \neq 0$。

$$S = \begin{array}{|c|c|c|} \hline (0,\ 0,\ a_3,\ 0,\ a_5,\ a_6) & (b_1,\ 0,\ b_3,\ b_4,\ 0,\ b_6) & (c_1, c_2, 0, c_4, c_5, 0) \\ \hline (0, -c_2, c_3, -c_4, 0, c_6) & (0, 0, -a_3, a_4, -a_5, 0) & (-b_1, b_2, 0, 0, b_5, -b_6) \\ \hline (0, b_2, b_3, b_4, b_5, 0) & (c_1, 0, c_3, 0, c_5, c_6) & (0, a_2, 0, 0, 0, a_6) \\ \hline \end{array}$$

B根据第三行和列中各元素的正交性，我们有 $c_6 = c_2 = 0$.

$$S = \begin{array}{|c|c|c|}\hline (0,\ 0,\ a_3,\ 0,\ a_5,\ a_6) & (b_1,\ 0,\ b_3,\ b_4,\ 0,\ b_6) & (c_1,0,0,c_4,c_5,0) \\ \hline (0,0,c_3,-c_4,0,0) & (0,0,-a_3,a_4,-a_5,0) & (-b_1,b_2,0,0,b_5,-b_6) \\ \hline (0,b_2,b_3,b_4,b_5,0) & (c_1,0,c_3,0,c_5,0) & (0,a_2,0,0,0,a_6) \\ \hline \end{array}$$

灰色条目的重量至少为二，因此 $c_3 \neq 0$ 和 $c_4 \neq 0$。它与 $(0,0,a_3,0,a_5,a_6)$ 以及 $(0,0,-a_3,a_4,-a_5,0)$ 正交，因此，$a_3 = a_4 = 0$，从而产生了一个重量为一的条目，矛盾。

情形 3： $w(S) = 3$。存在一个重量三的元素，且不存在重量一或重量二的元素。在 $\{1,2,3\}$ 和 $\{4,5,6\}$ 之间进行对称变换，并在必要时交换列和符号的作用后，不妨设 $a_1 = 0$。

$$S = \begin{array}{|c|c|c|}\hline (0,a_2,a_3,0,a_5,a_6) & (b_1,\ 0,\ b_3,\ b_4,\ 0,\ b_6) & (c_1,c_2,0,c_4,c_5,0) \\ \hline (0,-c_2,c_3,-c_4,0,c_6) & (0,0,-a_3,a_4,-a_5,0) & (-b_1,b_2,0,0,b_5,-b_6) \\ \hline (0,b_2,b_3,b_4,b_5,0) & (c_1,0,c_3,0,c_5,c_6) & (0,a_2,0,a_4,0,a_6) \\ \hline \end{array}$$

在这种情况下，$a_2 \neq 0$、$a_3 \neq 0$、$a_4 \neq 0$、$a_5 \neq 0$ 和 $a_6 \neq 0$。

根据 B的第二行的正交性，我们得到 $b_5 = 0$。观察左下方的条目，我们得到$b_3 \neq 0$。根据第三行的正交性，$c_3 = 0$，但也有 $c_6 = 0$，这意味着存在一个权重至多为二的元素，矛盾。

情况 4： $w(S) = 4$。所有元素的权重均为四，因此所有变量都非零。同一行中向量之间的正交性给出九个方程

$$\begin{array}{lll} a_3\overline{b_3} = -a_6\overline{b_6} & b_1\overline{c_1} = -b_4\overline{c_4} & c_2\overline{a_2} = -c_5\overline{a_5} \\ c_3\overline{a_3} = -c_4\overline{a_4} & a_1\overline{b_1} = -a_5\overline{b_5} & b_2\overline{c_2} = -b_6\overline{c_6} \\ b_3\overline{c_3} = -b_5\overline{c_5} & c_1\overline{a_1} = -c_6\overline{a_6} & a_2\overline{b_2} = -a_4\overline{b_4} \end{array}$$

将它们相乘后得到，

$$|a_1a_2a_3b_1b_2b_3c_1c_2c_3|^2 = -|a_4a_4a_5b_3b_4b_5c_3c_4c_5|^2$$

这与这些变量均非零相矛盾。

综合这四种情况，我们得出 $w(S) = 1$，并且 Φ 的子方阵中的所有元素的权重至多为二。

□

定理 26。 不存在这样的两个 *MOQLS(6)*：其中一个是经典的，且含有一个三阶子方阵。

证明。反设 Ψ 和 Φ 是两两正交量子拉丁方，其中 Ψ 是经典的，且含有一个三阶子方阵。将它们化为标准形式：

$\Psi =$

1			5	6	
2	3	1			
3	1	2			
4	5	6			
5	6	4			
6	4	5			

以及 $\Phi =$

100000			000100	000010	000001
00****		0*0***			
0*0***	00****				
0**0**	*0**0*	**0**0			
0***0*	*0***0	**00**			
0****0	*0*0**	**0*0*			

引理25表明，Φ 左下方白色块中的元素权重至多为二。根据对称性，右下方灰色块中的元素也满足同样的结论。因此，在 Φ的每一列中，重量三或四的元素至多有两个。

情形 1： Φ **有一个权重至少为三的元素。** 根据引理14和引理 15，同一列中还有另一个支撑相同的条目。特别是，这样的条目权重为三，其模式为 000111（上方左侧的灰色块中）或 111000（上方右侧的白色块中）。因此，Φ 的第二行所构成的酉模式属于引理14的情形（i）。不失一般性，我们可以假设 Φ 如下所示：

$\Phi =$

100000			000100	000010	000001
000111	000111	0*0***			
000111	000111	*00***			
0**0**	*0**0*	**0**0			
0***0*	*0***0	**00**			
0****0	*0*0**	**0*0*			

第一列中的三个白色条目的模式不可能全都是 0**000，因此其中一个（记作 ϕ_{i1}，其中$i \in \{4,5,6\}$）在位置 4、5 或 6 上有一个非零元素。根据引理25， ϕ_{i1} 的权重至多为二；又由于它与一个模式为 000111 的条目正交，因此它的模式为 000011、000101 或 000110。由于ϕ_{22}、 ϕ_{21} 和 ϕ_{31} 都包含在由 $|4\rangle$、 $|5\rangle$ 和 $|6\rangle$ 张成的三维空间中，且 ϕ_{22} 与 ϕ_{21}和 ϕ_{31} 正交（ϕ_{22} 和 ϕ_{31} 在 Ψ中都对应于 3），所以 ϕ_{22} 等于 ϕ_{i1} ，相差一个相位因子。这就产生了矛盾，因为 ϕ_{22} 的权重为三，而 ϕ_{i1} 的权重为二。
情形 2：所有元素的 Φ 权重至多为二。根据引理 13，存在 2 个 6阶互正交拉丁方，这与定理 4 矛盾。

□

我们得出结论：不存在 2 个 MOQLS(6)。

定理 *6* 的证明。反设存在 2 个 MOQLS(6)。根据定理 20，不妨设其中一个方阵是经典的。根据引理 21 和第4.3节中的算法，另一个方阵有一个三阶子方阵。但根据定理 26，这同样不可能。因此得到矛盾，故不存在 2 个 MOQLS(6)。

□

5 结论

利用酉模式和图的正交归一表示这一概念，我们证明了不存在 2 个 MOQLS(6)。我们还证明了 2 个 MOQLS(4) 和 2 个 MOQLS(5) 都是经典的（定理 11 和定理12）。

作为推论，我们改进了 Han、Zang、Zhang 和 Tian 的一条定理 [5, 定理 3.7] ，该定理指出，若 $n \geq 4$，则存在非经典的 2 个 MOQLS(n)，但 $n \in \{4,5,6,7\}$除外。我们证明，4、5 和 6 这几个值不可能，因此只剩下 $n = 7$ 这一情形有待作为开放问题研究：

开放问题1. 2 个 7阶互正交量子拉丁方是经典的吗?

请注意，如果 2 个 MOQLS 中有一个是经典的，另一个不一定是经典的。下面给出了一个 9阶互正交量子拉丁方的例子，其中只有一个方阵不是经典的：

1	2	3	4	5	6	7	8	9			
2	3	1	5	6	4	8	9	7			
3	1	2	6	4	5	9	7	8			
4	5	6	7	8	9	1	2	3			
5	6	4	8	9	7	2	3	1			
6	4	5	9	7	8	3	1	2			
7	8	9	1	2	3	4	5	6			
8	9	7	2	3	1	5	6	4			
9	7	8	3	1	2	6	4	5			

and

1	2	3	4	5	6	7	8	9			
3	1	2	6	4	5	9	7	8			
2	3	1	5	6	4	8	9	7			
7	8	9	1	2	3	4	5	6			
9	7	8	3	1	2	6	4	5			
8	9	7	2	3	1	5	6	4			
4	5	6	7	8	9	1				a	b
6	4	5	9	7	8	b	1	a			
5	6	4	8	9	7			a	b	1	

其中 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |3\rangle)$ 和 $b = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle - |3\rangle)$。

引理 13 可用于将一些关于互相正交拉丁方的结果转化为关于 MOQLS 的结果。类似于定理 10 的证明，可以证明，如果存在 $n-2$ MOQLS(n)，那么就存在 $n-2$ 互相正交拉丁方(n)。由于 $n-2$ 互相正交拉丁方(n) 总能扩展为 $n-1$ 互相正交拉丁方(n)， [18], 因此，存在 $n-2$ MOQLS(n) 意味着存在 $n-1$ 互相正交拉丁方(n)，进而意味着存在一个阶为 n 的射影平面。

致谢。 作者感谢西班牙科学、创新与大学部资助项目 PID2023-147202NB-I00 的支持。Robin Simoens 获得弗兰德斯研究基金会（FWO）通过资助项目 11PG724N 提供的支持。我们感谢 Quentin Palazon、Tabriz Popatia 和 Albert Rico 的宝贵讨论。

参考文献

[1] R.C. Bose、S.S. Shrikhande 和 E.T. Parker。关于构造两两正交拉丁方的进一步结果，以及欧拉猜想不成立的证明。加拿大数学杂志，12:189–203，1960年。

[2]S.T. Dougherty。《36军官问题》的编码理论解法。设计、编码与密码学，4(2):123–128，1994年。

[3] J. Egan 和 I .M. Wanless . 小阶 MOLS 的枚举 . *Math. Comp.*, 85:799 824 2016 –, .[4] D. Goyeneche、Z. Raissi、S. Di Martino 和 K. Zyczkowski。纠缠与量子组合设计。Phys. Rev. A，97(6)，2018。[5] Y. Han、Y. Zang、H. Zhang 和 Z. Tian。非经典正交量子拉丁方的存在性，2025。arXiv:2507.20154。[6] A. Higuchi 和 A. Sudbery。两对粒子能够纠缠到什么程度？Phys. Lett. A，273(4)：213–217，2000。[7] C. Larson、B. Lins 和 L. Mitchell。酉矩阵图与正半定零迫。Rep. Math. Phys.，72(3)：311–320，2013。[8] B.D. McKay 和 I.M. Wanless。关于拉丁方的数量。Ann. Comb.，9：335–344，2005。[9] B. Musto。由量子拉丁方构造互无偏基。Electron. Proc. Theor. Comput. Sci., EPTCS，236：108–126，2017。[10] B. Musto。量子拉丁方与量子函数：在量子信息中的应用。博士论文，牛津大学，2019。[11] B. Musto 和 J. Vicary。量子拉丁方与酉误差基。Quantum Info. Comput.，16(15–16)：1318–1332，2016。[12] B. Musto 和 J. Vicary。量子拉丁等距方阵的正交性。Electron. Proc. Theor. Comput. Sci., EPTCS，287：253–266，2019。[13] G. Rajchel-Mieldzio´c。量子映射与设计。博士论文，波兰科学院，2022年。[14] S.A. Rather。利用双酉模向量构造完美张量。Quantum，8：1528，2024。[15] S.A. Rather、A. Burchardt、W. Bruzda、G. Rajchel-Mieldzio´c、A. Lakshminarayan 和 K. Zyczkowski。欧拉三十六名纠缠军官问题：经典上不可能问题的量子解。Phys. Rev. Lett.，128(8)：080507，2022。[16] S.A. Rather、N. Ramadas、V. Kodiyalam 和 A. Lakshminarayan。绝对最大纠缠态的等价关系，以及构造欧拉三十六军官问题的无限多个量子解。Phys. Rev. A，108：032412，2023。.[17] E. Sch¨onhardt。关于拉丁方与并。J. Reine Angew. Math.，1930(163)：183–230，1930。[18] S.S. Shrikhande。关于互相正交拉丁方的一则注记。Sankhya: Indian J. Stat.，23(2)：115– 116，1961。[19] D.R. Stinson。六阶正交拉丁方对不存在的一个简短证明。J. Comb. Theory Ser. A.，36(3)：373–376，1984。[20] G. Tarry。三十六名军官问题。Comptes Rendus Assoc. France Av. Sci.，29(2)：170–203，1900。[21] Y. Zang、P. Facchi 和 Z. Tian。量子组合设计与 k-均匀态。J. Phys. A: Math. Theor.，54(50)：505204，2021。

Simeon Ball
Department of Mathematics
Universitat Politècnica de Catalunya
C. Pau Gargallo 14, 08028 Barcelona, Spain
电子邮件地址：simeon.michael.ball@upc.edu

Robin Simoens
Department of Mathematics: Analysis, Logic and Discrete Mathematics
Ghent University
Krijgslaan 297, 9000 Gent, Belgium
Department of Mathematics
Universitat Politècnica de Catalunya
C. Pau Gargallo 14, 08028 Barcelona, Spain
电子邮件地址：Robin.Simoens@UGent.be