arXiv:2603.02336v1 [math-ph] 2 Mar 2026

端到端功率耗散约束下的流子图与流网络设计

Zhihao Qiu, [1] Xinhan Liu, [1,*] Rogier Noldus, [1,2] 和 Piet Van Mieghem[1]
[1] *Faculty of Electrical Engineering, Mathematics and Computer Science, Delft University of Technology, 2600 GA Delft, The Netherlands* [2] *Ericsson, The Netherlands*（日期：2026年3月4日）

我们研究网络的底层图如何支持源节点与目的节点之间的流，并提出计算随机图中参与物品传输的预期节点数和链路数。由于传输与“成本”或“功率耗散”相关，我们进一步探讨如何在给定预定端到端功率耗散的情况下构建图；这一问题可以归结为“有效电阻逆问题”，即寻找一个有效电阻矩阵等于预定需求矩阵的加权图。我们提出一种启发式算法——“电阻间隙剪枝”（RGP），该算法能够生成稀疏图，紧密近似需求有效电阻，并且在不同需求场景下表现稳定。

关键词：流网络、流子图、有效电阻、功率耗散。

I. 引言

网络由其底层图和网络的功能过程 [1, 2] 表征。图 G 由一组 $\mathcal{N}$ N 节点构成，这些节点通过一组 $\mathcal{L}$ L 链路相连；网络的功能通常与物品在底层图 [3–5]上的传输有关。根据所传输物品的类型，网络可分为“路径网络”（数据包（例如 IP 数据包、车辆）沿其中传播）和“流网络”（例如电力网络、燃气网络、供水网络等），后者中所传输的物品构成一种流。

在路径网络中，物品在两个节点之间（i, j）的传输沿单一路径 $\mathcal{P}_{ij}$进行，该路径定义为一系列链路 [2, 4]，形式为 $\mathcal{P}_{ij} = \{n_1 \sim n_2, n_2 \sim n_3, \ldots\ldots, n_{k-1} \sim n_k\}$，其中 $k-1$ 是该路径的跳数，且对于 $\mathcal{P}_{ij}$中的链路 $n_a \sim n_b$ 的每个索引 a 和 b，节点标签 $n_1 = i$、$n_k = j$ 和 $n_a \neq n_b$。在大多数实际场景中，传输遵循“最短路径” $\mathcal{P}^*_{ij}$，使路径上所有链路权重之和最小。一个著名的例子是数据通信网络中的开放最短路径优先（OSPF）协议 [2, 6]，在该协议中，IP网络中的路由器维护 IP目的地列表以及通往每个目的地的“下一跳”。下一跳是路由器为将 IP数据包沿最短路径路由至目的地而选定的链路。最短路径问题已在文献中得到广泛研究 [2, 7–16]。

然而，许多实际场景无法仅通过最短路径得到充分描述 [17–21]。当最短路径未知或不可用时，人们会考虑多条替代路径，甚至是随机路径。例如，下一代 6G 通信系统旨在将信息划分为更小的单元。这些更小的单元会同时通过多种路径进行传输，包括卫星、光纤和无线链路，以最大限度地提高覆盖范围、可靠性和传输效率 [22, 23]。其他示例包括流行病传播 [2, 24, 25],，其中感染可以通过所有可用连接传播。类似地，新闻或谣言在社交网络中的传播通常不会遵循从源节点到目的节点的最短路径，而是更类似于随机游走过程 [18, 26–28]。如果最短路径不足以实现信息传输，那么流网络便提供了一种互补视角，因为在流网络中，传输会沿着从节点 i到节点 j 的所有可能路径传播。

本文基于电流-电压类比，聚焦于流网络。物品按照电流通过电网络的原理进行传输，其中链路为电阻器，节点为电阻器之间的连接点。我们首先研究流如何在流网络中传输。具体而言，我们研究网络的底层图如何支持源节点与目的节点之间的流，以及哪些节点和链路参与了传输。我们将有助于传输流的节点和链路称为“流子图”。我们提出了一种方法，用于计算 Erd˝os–R´enyi（ER）随机图中流子图所包含的节点数和链路数的期望值。

底层图中节点与链路上的流也会影响该图链路中的“功率耗散”。对功率耗散的研究受到通信网络的启发：链路上更高的数据传输通常会导致该连接的成本更高 [29]；更高的成本可能是安装成本，例如光纤电缆，也可能是运营成本，例如路由器或中继器的能源消耗。类似的例子也可在社交网络 [30, 31] 和交通网络 [32, 33]中观察到。

* 联系作者：X.Liu-22@tudelft.nl

在本文中，我们应对如下挑战：构建一个流网络，使其由各源—目的节点对之间的流传输所引起的总功率耗散近似匹配预定需求。

本文结构安排如下：第 II 节介绍流网络的术语和背景知识。第 III 节探讨流网络中对信息/数据传输有贡献的链路和节点，并提出一种方法，用于计算随机图中对传输项目有贡献的节点和链路的期望数量。第 IV 节研究功率耗散的逆问题，即在给定端到端功率耗散的预定需求时，如何构建流网络。本文提出了一种名为电阻间隙剪枝（RGP）的启发式方法，并针对不同的需求矩阵进行了测试。最后，在第 V 节总结研究结果。

II. 术语

本节介绍相关术语，符号列表请参见附录 A 。

A. 图

我们仅限于连通无向简单图[1] [4]。我们引入一个 $N \times N$ 邻接矩阵A 来表示一个图：若节点 i 与节点 j 之间存在链路，则元素为 $a_{ij} = 1$ ，否则为 a_{ij} =0。节点 i 与 j 之间的链路由$l = i \sim j$表示。每条链路 $l \in \mathcal{L}$ 具有正权重 w_l，且 $N \times N$ 边权重矩阵记为 W。$\widetilde{}$ $N \times N$ 加权邻接矩阵定义为 A =$W \circ A$，其中Hadamard积 $\circ$ 定义了直接的逐元素乘法 $\widetilde{a}_{ij} = w_{ij}a_{ij}$ ，而“波浪号”指加权图矩阵。在我们的设定中， $\widetilde{a}_{ij}$ =0表示节点 i 与 j之间不存在链路，因为我们排除零链路权重，即 $w_{ij} > 0$，以避免零权重 w_{ij} =0在物理上意味着节点 i 与 j 是同一节点这一复杂情形。

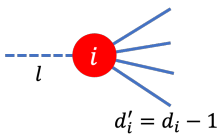


图 1：超额度 d_i' 的示意图。当沿着随机选取的链路 l 到达节点i 时，节点 i 剩余的邻居数为 $d_i' = d_i - 1$。

[1] 简单图中，同一对节点之间没有多条链路，且图中不包含任何自环，即 $a_{ii} = 0$ 对于每个节点 $i \in \mathcal{N}$。

度 d_i （节点 i）等于邻接矩阵 A的行和，即 $d_i = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}$，表示节点 i的邻居数。超额度 d_i' （节点 i ）定义为 [34, 35] 经由一条随机链路到达节点 i后剩余的链路数 l。换言之，对于节点 i ，其度为 d_i时，超额度为 $d_i' = d_i - 1$，如图1所示。假设一个图的度分布为 $\Pr[D = k]$。度概率生成函数（概率生成函数）定义为

$$\varphi_D(z) = E[z^D] = \sum_{k=0}^{N-1} \Pr[D = k]\, z^k,$$

它将度的完整分布 D 编码为解析函数 [2, 第 2]章。超额度分布 [34] 则为

$$\Pr[D' = k] = \frac{k+1}{E[D]} \Pr[D = k+1],$$

其中 $E[D]$ 是图的期望度。超额度分布的概率生成函数 D' 为

$$\varphi_{D'}(z) = E\left[z^{D'}\right] = \sum_{k=0}^{N-1} \Pr[D' = k] z^k = \frac{\varphi_D'(z)}{\varphi_D'(1)}$$

有向图也可以用一个 $N \times L$关联矩阵 B 表示，其元素为

$$b_{il} = \begin{cases} 1 & \text{if link } l = i \to j \\ -1 & \text{if link } l = j \to i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中，链路 $l = i \to j$ 表示从节点 i 到节点 j的方向。关联矩阵各列之和为零，即 $u^T B = 0$，其中 u 表示 $N \times 1$全一向量。无向图可以用一个 $N \times (2L)$ 关联矩阵表示，其中每条链路 $i \sim j$都计数两次，分别对应方向 $i \to j$ 和方向 $j \to i$。在这种情况下，每个节点的度恰好加倍 [4]。

B. 拉普拉斯矩阵Q

对于无向图， $N \times N$ 拉普拉斯矩阵Q 揭示了 [4] 邻接矩阵A 与 $N \times L$ 关联矩阵 B之间的关系：

$$Q = BB^T = \Delta - A \tag{1}$$

其中， $N \times N$ 度对角矩阵 $\Delta = \text{diag}(d)$ 的主对角线上包含各节点的度，而$N \times 1$ 度向量 $d = Au$ 则以分量形式包含节点 i的度 d_i 。拉普拉斯矩阵 Q的特征值分解[36]为

$$Q = Z\text{diag}(\mu)Z^T, \tag{2}$$

定义 N 相互正交的 $N\times 1$ 特征向量 z_i，它们Q包含在 $N\times N$ 特征向量矩阵K的各列中；以及 N特征值 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_N = 0$。拉普拉斯矩阵 Q不可逆，因为 $\det Q = \prod_{k=1}^{N} \mu_k = 0$，这是由于 $\mu_N = 0$。拉普拉斯矩阵的伪逆 [36]

$$Q^{\dagger} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\mu_k} z_k z_k^T \tag{3}$$

满足 $Q^{\dagger}Q = QQ^{\dagger} = I - \frac{1}{N}J$，其中 I 是单位矩阵，J 是 $N\times N$ 全一矩阵。加权 拉普拉斯矩阵定义为 $Q = \Delta - A$，其中 $N\times N$ 加权度对角矩阵 $\Delta = \mathrm{diag}(d)$ 的主对角线上包含加权节点度，而 $N\times 1$ 加权度向量 $d = Au$ 包含每个节点的加权度。拉普拉斯矩阵及其伪逆的详细信息见 [4]和 [36]。

C. 电阻网络与流子图

本文将流网络类比为电阻网络进行建模。考虑一个包含N G个节点和 L 条链路的电阻网络。每条链路 $l = i \sim j$ 连接节点 i和 j，并具有电阻 $r_l = r_{ij} > 0$ 和链路权重 $w_l = w_{ij} = \frac{1}{r_l}$。设 v_k 表示网络中节点 k 的电势或电压，$y_l = y_{ij}$ 表示流经节点 i 与节点 j之间链路 l 上电阻的电流。链路电流的方向规定为 $y_{ij} = -y_{ji}$。欧姆定律给出了关系式 $v_i - v_j = r_{ij}y_{ij}$，表明电阻是电势差 $v_i - v_j$ 与电流 y_{ij} 之间的比例常数或比值。电压向量与链路电流向量之间的关系为

$$y = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{r_l}\right) B^T v, \tag{4}$$

其中，y 是 $L\times 1$ 链路电流向量，v 是包含节点电压的 $N\times 1$向量，而 $L\times L$ 矩阵 $\mathrm{diag}(\frac{1}{r_l})$ 的对角元素为 $(\frac{1}{r_1}, \ldots\ldots, \frac{1}{r_2}, \ldots\ldots, \frac{1}{r_L})$，其中 $r_l \equiv r_{ij}$ 是链路 $l = i \sim j$的电阻。如果链路 $l = i \sim j$ 中的电流为零，则

$$y_l = 0 \iff v_i = v_j \tag{5}$$

定义 x_i 为注入节点i的外部电流。如果电流流出节点 i，则 $x_i < 0$；否则$x_i > 0$。基尔霍夫电流定律表明

$$x = By, \tag{6}$$

其中，$N\times 1$ 节点外部电流向量 x 包含注入每个节点的外部电流 x_i。将（4）代入基尔霍夫电流定律（6），即可得到外部电流与电压之间的关系，

$$x = B\mathrm{diag}\left(\frac{1}{r_{ij}}\right) B^T v = \widetilde{Q}v \tag{7}$$

其中加权拉普拉斯矩阵

$$\widetilde{Q} = B\mathrm{diag}\left(\frac{1}{r_{ij}}\right) B^T \tag{8}$$

的定义方式与式（1）中的无权拉普拉斯矩阵分解类似。

尽管矩阵关系 中的关系无法求逆，因为 $\det Q = 0$，Van Mieghem [4] 证明了

$$v = \widetilde{Q}^{\dagger}x, \tag{9}$$

令平均电压 $\frac{1}{N}u^T v$ 等于零。将式（9）中的电压替换为式（9），即可将外部电流向量与链路电流向量联系起来:

$$y = Cx, \tag{10}$$

其中 $L\times N$矩阵 $C = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{r_l}\right) B^T \widetilde{Q}^{\dagger}$。

若在源节点 i注入单位电流 $I_c = 1$ 安培，该电流从网络 G 流出并到达目的节点 j，则链路电流

$$y = C(e_i - e_j), \tag{11}$$

其中 e_k 表示一个 $N\times 1$ 仅有一个非零元素的基向量 $(e_k)_k = 1$。对于链路 $l = m \sim n$，（11）和 $C = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{r_l}\right) B^T \widetilde{Q}^{\dagger}$ 可得

$$\begin{aligned} y_l &= \frac{1}{r_l}(e_m - e_n)^T \widetilde{Q}^{\dagger}(e_i - e_j) \\ &= \frac{1}{r_l}\left(\widetilde{Q}^{\dagger}_{mi} - \widetilde{Q}^{\dagger}_{mj} - \widetilde{Q}^{\dagger}_{ni} + \widetilde{Q}^{\dagger}_{nj}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

对于给定的源-目的节点对（i，j），流子图 G^*_{ij} 定义为电阻网络 G中电流传播所经过的子图。具体而言，流子图 G^*_{ij} 由所有承载非零电流的链路以及与这些链路相连的节点组成。形式上，流子图 G^*_{ij} 的链接集合 $\mathcal{L}(G^*_{ij})$ 为

$$\mathcal{L}(G^*_{ij}) := \{\, l \in \mathcal{L}(G) \,|\, y_l \neq 0 \,\},$$

且节点集 $\mathcal{N}(G^*_{ij})$ 为

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(G^*_{ij}) := \{\, & m \in \mathcal{N}(G) \,|\, \exists\, n \in \mathcal{N}(G) \\ & \text{such that } l = m \sim n \in \mathcal{L}(G^*_{ij}) \,\} \end{aligned}$$

D. 有效电阻与功率耗散

考虑第 GII C 节中介绍的电阻网络，其中每条链路 $l = i \sim j$ 都包含一个电阻，其电阻值为 $r_{ij} = \frac{1}{w_l}$。比值 $\frac{v_i - v_j}{I_c}$ 衡量注入电流在节点 I_c 处流入后，流经子图并 i 向节点 j 扩散 ω_{ij} 的电阻，称为节点 [4]与节点 i j之间的“有效”电阻。

如 [4, 36], 所示，节点 ω_{ij}与节点 i之间的有效电阻 j 满足

$$\omega_{ij} = (e_i - e_j)^T \widetilde{Q}^{\dagger} (e_i - e_j) \tag{13}$$

将式（13）展开可得

$$\omega_{ij} = \widetilde{Q}^{\dagger}_{ii} + \widetilde{Q}^{\dagger}_{jj} - 2\widetilde{Q}^{\dagger}_{ij} \tag{14}$$

关系式（14）可转换为矩阵形式，定义 $N \times N$ 有效电阻矩阵

$$\Omega = \zeta u^T + u\zeta^T - 2\widetilde{Q}^{\dagger}, \tag{15}$$

其中， $N \times 1$向量 $\zeta = \left(\widetilde{Q}^{\dagger}_{11}, \widetilde{Q}^{\dagger}_{22}, \ldots, \widetilde{Q}^{\dagger}_{NN}\right)$ 包含加权拉普拉斯矩阵 Q的伪逆 $\widetilde{Q}^{\dagger}$ ˜的对角元素。

我们将链路电流 y_l （12）表示为有效电阻（14）的形式：

$$y_l = \frac{1}{2r_l}\left(\omega_{mj} + \omega_{ni} - \omega_{mi} - \omega_{nj}\right) \tag{16}$$

而（16）表明

$$y_l = 0 \iff \omega_{mj} - \omega_{mi} = \omega_{nj} - \omega_{ni} \tag{17}$$

两个相邻节点ω_{ij}之间的有效电阻i 和 j （即 $a_{ij} = 1$），表示并联连接的有效电阻

$$\frac{1}{\omega_{ij}} = \frac{1}{r_{ij}} + \frac{1}{\left(\omega_{G\setminus l}\right)_{ij}}, \tag{18}$$

其中 $\left(\omega_{G\setminus l}\right)_{ij}$ 是图 $G \setminus l$从图 G删除链路 $l = i \sim j$后得到的图中，节点 i与 j之间的有效电阻 ω_{ij}相邻节点 i 与 j 在（18）中的有效电阻有一个上界，即它们之间直接链路的电阻 r_{ij}

$$\omega_{ij} = \frac{r_{ij}\left(\omega_{G\setminus l}\right)_{ij}}{r_{ij} + \left(\omega_{G\setminus l}\right)_{ij}} \leq \min\left(r_{ij}, \left(\omega_{G\setminus l}\right)_{ij}\right) \tag{19}$$

在网络中从源节点 i注入电流 I_c ，并使其从目的节点 j流出。网络中的功率耗散 P_G，即单位时间能量（单位为瓦特），等于各条链路上耗散功率之和，

$$P_G = \sum_{l\in\mathcal{L}} P_l = \sum_{l\in\mathcal{L}} y_l^2 r_l, \tag{20}$$

这也等于电流的平方与有效电阻的乘积

$$P_G = I_c^2 \omega_{ij} \tag{21}$$

III. 流子图的规模

给定流网络 G 和一对节点（i， j），传输的物品只沿相应的流子图 G^*_{ij}传播。事实上，流子图 G^*_{ij} 中的节点数和链路数通常由底层图 G决定。例如，对于树图，节点（i， j）之间的流子图 G^*_{ij} 与相应的（最短）路径 $\mathcal{P}^*_{ij}$ 相同。在二维格图 G中，对于每一对节点（i， j），流子图 G^*_{ij} 都与图 G 相同。

本节提出一种“自洽方法”，用于计算流子图 G^*_{ij}中的节点数和链路数的期望值。自洽方法的主要思路受到以下性质的启发：

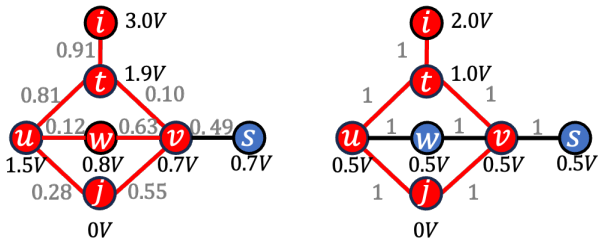
性质 1. 流子图 G^*_{ij} 中不同于节点 i和 j的节点 k，在节点 (i, j) 之间，至少有两个邻居属于流子图 G^*_{ij}。

证明。 对于属于流子图 G^*_{ij}的任意节点 k ，流经节点 k 的电流 I_k 不为零，因为 G^*_{ij} 之外的节点不承载电流。基尔霍夫电流定律表明，流入节点 k 的总电流等于流出节点 k的总电流。因此，节点 k 必须至少有两个属于流子图 G^*_{ij}的邻居。 □

在具有独立同分布连续电阻（等价地，独立同分布的连续链路权重）的图中，性质1 对于一个节点（除 i 和 j之外）属于流子图也是充分的。该结论由附录B中给出的两条辅助引理得出：(i) 流子图中两个不同节点具有相同电位的概率为零，以及 (ii) 连接到至少两个具有不同电位的流子图节点的节点本身必须属于流子图。在图2a中，我们给出一个示例，以展示具有独立同分布链路权重的图的流子图。

对于链路权重（链路电阻）相同的图，性质1 对于某个节点（除 i和 j之外）属于流子图而言仍然只是必要条件。局部结构对称性可能导致不同节点具有相同的电势，因此节点 k可能与多个流子图节点相邻，且 k 的所有关联链路上的电流都为零。图2b展示了一个例子：等势邻居（节点 u和 v）阻止电流通过中间节点（节点 w）传播。尽管性质1并非充分条件，但在链路权重相同的随机图中，由精确的结构对称性导致节点等势的构型并不常见，发生的概率很小 [37]。

本节分析 Erd˝os–R´enyi 随机图中流子图的结构，并基于我们提出的自洽方法计算流子图的期望大小。该自洽方法能够捕捉流子图的典型结构，可应用于所有节点度概率生成函数 (pgf) D 已知的随机图。



(a) 一个的流子图
具有独立同分布随机的图
链路权重

(b) 一个的流子图
具有相等链路的图
权重

图 2：示例说明链路权重退化在流子图中的作用。流子图中的节点和链路以红色标出。在 (a) 中，链路权重是独立同分布连续随机变量，因此几乎必然产生互不相同的节点电势。因此，

性质1已不成立。在 (b) 中，所有链路权重都相同，且结构对称性会产生等势节点 u 和 v。因此，节点 w 不属于流子图，尽管它满足性质1。

A. Erd˝os–R´enyi（ER）随机图中流子图的节点数

我们首先分析流子图 G^*_{ij} 的组成。对于期望度 $E[D] < 1$较小的 ER 图 $G_p(N)$，所有连通分量都很小 [34, 38]，其规模为 $O(\log(N))$量级。因此，在此情形下，流子图的相对规模 $\rho_N = |\mathcal{N}(G^*_{ij})|/N$ 也可以忽略不计，其中 $|\mathcal{N}(G^*_{ij})|$ 表示流子图 G^*_{ij}中的节点数。随着期望度增大，巨型连通分量（GC）会出现 [34]。在 GC 之外，所有连通分量的相对规模都趋于零，因此，当 i 和/或 j 位于 GC 之外时，流子图的相对规模 ρ_N 仍可忽略不计。因此，流子图的平均规模G^*_{ij} 主要由两个节点都属于 GC 的节点对（i, j）决定。

接下来，我们将巨型连通分量分解为骨干子图$\mathcal{B}$ 和分支。

1. 骨干 $\mathcal{B}$：该（巨型）分量的极大诱导子图，其中每个节点在 $\mathcal{B}$ 内至少有两个邻居（图中以绿色轮廓标出的节点 3）。记 $b = |\mathcal{B}|/N$ 为骨干的相对大小 $\mathcal{B}$，其中 $|\mathcal{B}|$ 表示集合 $\mathcal{B}$的基数。

2. 分支：以下对象的连通分量 $U := GC \backslash \mathcal{B}$ （图3中没有绿色轮廓的节点）。每个分支 T_k（索引为 $k = 1, \ldots, M$）都是附着于 $\mathcal{B}$ 单个节点上的有限子图，其中 M表示分支总数。令 $\theta := |U|/N$ 表示所有分支并集的总相对大小。

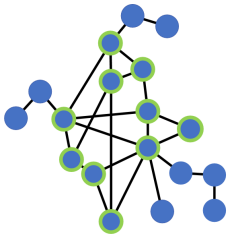


图 3：骨干—分支分解：骨干节点（每个节点在骨干内有 ≥ 2 个邻居）以绿色轮廓标出；其他节点为附着在骨干上的分支（有限子图）。

1. *Relative size of the backbone*

考虑一个流子图 G^*_{ij}，其源节点为 i，目的地为 j。一个节点属于骨干 $\mathcal{B}$或属于其补集 $\mathcal{B}^c$ 的概率分别为 b 和 $1-b$。根据定义，任意节点 m若不同于节点 i 或 j，则只有当它至少有两个邻居也位于骨干 $\mathcal{B}$ 中时，才可能属于 $\mathcal{B}$，依据性质1。

令 p_b 表示通过均匀随机选取的链路到达的节点 m 至少有一个其余邻居属于骨干 $\mathcal{B}$的概率。对于节点 m的每个其余邻居节点 n，节点 n无法经由链路 $l = m \sim n$ 到达节点 m 的概率为 $1-p_b$。在大N 极限下，Erd˝ős–R´ényi 随机图在局部上呈树状（例如参见 [39]），因此不同其余邻居之间的相关性消失。在此近似下，我们得到自洽方程

$$\begin{aligned} p_b &= 1 - \Pr\left[\text{No remaining neighbor belongs to } \mathcal{B}\right] \\ &= 1 - \sum_{k}^{N-1} \Pr[D' = k](1-p_b)^k \\ &= 1 - \varphi_{D'}(1-p_b) \end{aligned} \tag{22}$$

式（22）表明，概率 p_b <style id='8}>与节点属于随机图 [1, 35, 40]的巨型连通分量的概率相同。

给定节点 m 的度为 $D = k$，令 X 表示节点 m的邻居中属于骨干 $\mathcal{B}$的邻居数量。在给定 $D = k$的条件下，变量 X 服从二项分布，且

$$\Pr[X = j \mid D = k] = \binom{k}{j} p_b^j (1-p_b)^{k-j}$$

节点 w 只有在至少有两个邻居属于骨干 $\mathcal{B}$ 时，才属于骨干 $\mathcal{B}$。因此，

$$\begin{aligned} &\Pr[w \in \mathcal{B} \mid D = k] \\ =&\Pr[X \geq 2 \mid D = k] \\ =&1 - \Pr[X = 0 \mid D = k] - \Pr[X = 1 \mid D = k] \end{aligned}$$

利用 X 的二项分布，

$$\Pr[w \in \mathcal{B} \mid D = k] = 1 - (1 - p_b)^k - k p_b (1 - p_b)^{k-1} \quad (23)$$

应用关于度的全概率定律，骨干 $\mathcal{B}$ 中节点所占的比例 b为

$$b = \sum_{k=0}^{N-1} \Pr[D = k] \Pr[w \in \mathcal{B} \mid D = k]$$

将 $\Pr[w \in \mathcal{B} \mid D = k] = 1 - (1 - p_b)^k - k p_b (1 - p_b)^{k-1}$ 代入，得到

$$b = \sum_{k=0}^{N-1} \Pr[D = k] \Big[1 - (1 - p_b)^k - k p_b (1 - p_b)^{k-1} \Big]$$

分离各项，并将所得求和分别对应为 $\varphi_D(1 - p_b)$和 $\varphi'_D(1 - p_b)$，我们得到

$$b = 1 - \varphi_D(1 - p_b) - p_b \, \varphi'_D(1 - p_b) \quad (24)$$

对于 ER 图 $G_p(N)$，其平均度为 $E[D] = (N-1)p = \lambda$，度分布为二项分布 [2]，其概率生成函数为

$$\varphi_D(z) = (1 - p(1 - z))^{N-1}$$

在 $N \to \infty$ 且 λ 固定的稀疏区域中，该概率生成函数具有展开式 [2]

$$\varphi_D(z) = e^{-\lambda(1-z)} \left(1 + O\left(\frac{1}{N} \right) \right) \quad (25)$$

由 $\varphi_D(z) = (1 - p(1 - z))^{N-1}$ 与 $\varphi_{D'}(z) = (1-p(1-z))^{N-2}$分别给出的 ER 图的度概率生成函数与超额度概率生成函数因此满足 $\varphi_{D'}(z) = e^{-\lambda(1-z)} + O(1/N)$。将此展开式代入自洽方程（22），得到

$$p_b = 1 - e^{-E[D] \, p_b}, \quad (26)$$

其中省略项为 ER 图引入了 $O(1/N)$ 阶的修正。

方程（26）可以写成闭式求解。改写

$$p_b = 1 - e^{-E[D] p_b} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - p_b = e^{-E[D] p_b}$$

令 $y = E[D](1 - p_b)$。则

$$(-y) e^{-y} = -E[D] \, e^{-E[D]} \quad (27)$$

Lambert–W函数 [41] 由 $W(x) \, e^{W(x)} = x$隐式定义。将（27）用 Lambert–W 函数求解，可得

$$p_b = 1 + \frac{1}{E[D]} \, W_0\Big(-E[D] \, e^{-E[D]} \Big), \quad (28)$$

其中，W_0 表示主分支。对于 $E[D] \geq 0$，该分支给出了满足 $p_b \in [0, 1]$的唯一解，

而其余的实数分支会导致非物理解，因此被舍弃。

在骨干大小表达式（24）中采用与25相同的稀疏区域近似，省略 $O(\frac{1}{N})$，可得

$$b = 1 - e^{-E[D] \, p_b} \big(1 + E[D] \, p_b \big) \quad (29)$$

方程（26）始终有平凡解 $p_b = 0$；对于期望度 $E[D] \leq 1$，平凡解是唯一的不动点，这意味着 $b = 0$，由（29）可知。当期望度 $E[D] > 1$时，会出现一个正的不动点 $p_b > 0$，并随 $E[D]$增大，骨干比例 b 由（29）给出，也相应增大。

2. *Relative size of the branches*

对于所有分支的并集 $U = GC \setminus \mathcal{B}$，相对大小为 $\theta = \frac{|U|}{N} = p_b - b$；而每个分支的相对大小 T_k 定义为 $\tau_k = \frac{|T_k|}{N}$，其中 $|T_k|$是单个分支的大小。

对于 ER 图或具有有限二阶矩的固定度分布的配置模型，每个分支都可以视为一个次临界 Galton–Watson 树 [34, 35, 40]，其后代均值记为 $\xi < 1$。设 p_T 表示相应 Galton–Watson 过程的灭绝概率，且 p_T 满足 $p_T = \varphi_{D'}(p_T)$，其中 $\varphi_{D'}(z)$是该图超额度分布的概率生成函数。平均后代数 [34, 35, 40] 由 $\xi = (1 - p_T) \varphi'_{D'}(p_T)$给出。对于 ER 图这一特例，平均后代数可简化为 $\xi = E[D] p_T (1 - p_T) < 1$。

由于单个分支表现为一个亚临界 Galton–Watson 树，分支 T_k 的期望大小是常数，与图 N 的大小无关$E[|T_k|] = \frac{1}{1-\xi}$。分支大小分布具有指数衰减尾部 [34, 35, 40]，，这意味着$|T_k| = O(1)$，因此

$$\tau_k = \frac{|T_k|}{N} = O\left(\frac{1}{N} \right)$$

由于分支总质量为 $|U| = \theta N$，而单个分支具有 $E[|T_k|] = \frac{1}{1-\xi}$，因此分支的期望数量为 $E[M] \approx \frac{|U|}{E[|T_k|]} = \theta N (1 - \xi)$。

3. *Relative size of the flow subgraph*

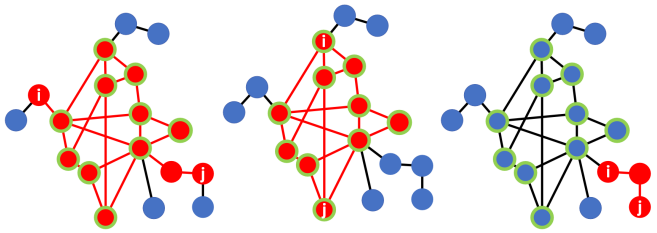
给定源-目的节点对 $(i, \ j) \in$巨型连通分量 GC，图 4 中考虑了三种不同情况：

1. 情形 (i)：节点 i 和 j 位于不同分支中，或者一个位于分支中，另一个位于骨干 $\mathcal{B}$ 中。情形 (i) 发生的概率为 $O(1)$，因为所有分支的相对总规模为 $O(1)$，而每个单独分支的规模为 $O(1)$。因此，两个

随机 GC 节点以非消失概率落在不同分支中（或者一个在分支中，另一个在 $\mathcal{B}$ 中），当 $N \to \infty$ 时如此。骨干内部的归一化覆盖率收敛于 b，而流子图 G^*_{ij} 的分支部分仅包含 $O(1)$ 个节点，因此归一化后贡献为 $O(1/N)$。这是因为每个分支都表现为一棵次临界 Galton–Watson 树，其期望规模有界且独立于 N （见上文讨论）。

2. 情况（ii）：节点 i 和 j 均位于骨干$\mathcal{B}$内。在相同条件下，情况（ii）的概率同样为 $O(1)$。在这种情况下，流完全保持在骨干内部，所访问骨干部分的归一化大小收敛到 b。

3. 情况（iii）：节点 i 和 j 属于同一分支。流子图 G^*_{ij} 包含在一棵有限树内。由于分支是期望大小为常数（与 N无关）的次临界Galton–Watson树，我们有流子图的大小 $|\mathcal{N}(G^*_{ij})| = O(1)$，因此流子图的相对大小为 $|\mathcal{N}(G^*_{ij})|/N = O(1/N)$。情况（iii）的概率为 $O(1/N)$，因此其对流子图期望归一化大小的贡献为 $O(1/N) \cdot O(1/N) = O(1/N^2)$，该贡献在期望意义下可忽略。



(a) 情况（i） (b) 情况（ii） (c) 情况（iii）

图 4：不同源—目的节点对的示例。红色节点和链路表示流子图的组成部分。骨干节点以绿色节点轮廓突出显示。

在第 III A1 节中，我们已证明，随机选取的一个节点属于巨型连通分量 GC 的概率为 Pr i属于巨型连通分量 GC 的概率为 $\Pr[i \in \mathrm{GC}] = p_b$。因此，两个节点 i和 j 均属于 GC 的概率为 $\Pr[i,j \in \mathrm{GC}] = p_b^2$。以此事件为条件，情况（i）和（ii）表明，限制在 GC 内的流子图的归一化大小满足

$$E\left[\frac{|\mathcal{N}(G^*_{ij})|}{N}\,\middle|\, i,j \in \mathrm{GC}\right] = b + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

其中，$O(1/N)$ 项来自巨型连通分量上的分支。巨型连通分量之外的节点以概率 $1-p_b^2$ 出现，并生成大小为 $O(1)$ 的流子图，因为每个巨型连通分量之外的连通分量都是大小有界的有限树。因此，它们对 $E[\rho_N]$ 的总贡献也为 $O(1/N)$。由此，流子图的期望归一化大小满足

$$E[\rho_N] = b\,p_b^2 + O\left(\frac{1}{N}\right) \tag{30}$$

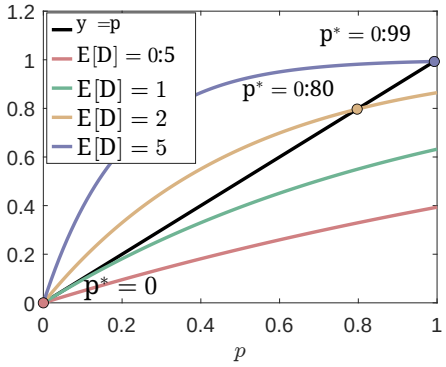


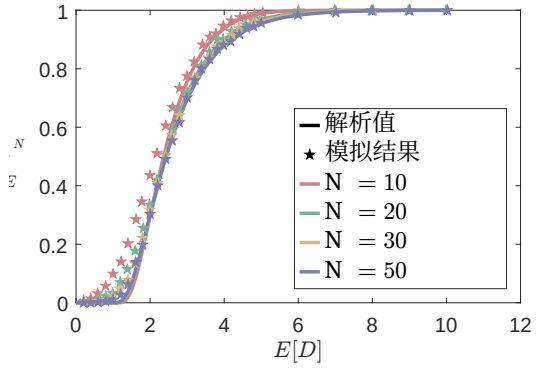
图 5：不同期望度 $E[D]$ 下，$y = p$（黑色）与 $y = 1 - e^{-E[D]p}$（彩色）的交点。当期望度 $E[D] \le 1$ 时，仅存在平凡解 $p = 0$。对于 $E[D] > 1$，会出现一个非平凡不动点，并随 $E[D]$ 增大。

图5 显示，当期望度 $E[D]$ 较小（例如 $E[D] = 0.5$）时，两条曲线 $y = p$ $y = 1 - e^{-E[D]p}$ 仅在 $p = 0$处相交。此时，方程（ ）只有解 0，因此骨干 b 的归一化大小$\mathcal{B}$ 为零。当期望度 $E[D]$ 超过临界值（$E[D]$）$_c = 1$时，会出现第二个交点，这表明巨流子图开始形成。随着期望度 $E[D]$ 进一步增大（例如 $E[D]$ =2、5），不动点 p 及其对应的大小 b 都会增大，并最终趋近于 1。

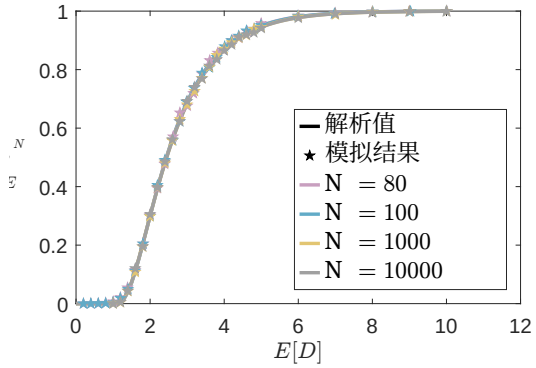
图6 将我们在（30）中的解析预测与 ER 图上的仿真进行了比较。对于较小的网络规模 N，理论曲线与模拟结果之间存在明显差距，这与我们分析中得到的$O(1/N)$ 有限尺寸偏差一致。随着N 增大，这种有限尺寸效应逐渐减弱，（30）中的解析预测也趋于模拟结果。当图足够大时，$O(1/N)$ 修正变得可以忽略，理论与仿真几乎完全吻合。

B. Erd˝os–R´enyi（ER）随机图中的流子图链路数

对于源-目的节点对（i，j），链路 $l = m \sim n$ 属于流子图 G^*_{ij}，当且仅当它承载非零电流；根据欧姆定律，这等价于 $v_m \neq v_n$。流子图G^*_{ij} 中的每条链路都必须以节点集 $\mathcal{N}(G^*_{ij})$ 中的两个节点为端点



(a) N 从 10 到 50



(b) N 从 80 到 10000

图 6：流子图的平均相对大小 $E[\rho_N]$ 随期望度变化的函数关系 $E[D]$ 在具有相同链路权重且图规模不同的 ER 图中 N。式（30）中的解析结果是利用 ER 图的二项度分布推导得到的。

流子图。对于属于 G^*_{ij} 的链路，成员条件等价于

$$l = m \sim n \in \mathcal{L}(G^*_{ij}) \iff y_l \neq 0 \iff v_m \neq v_n$$

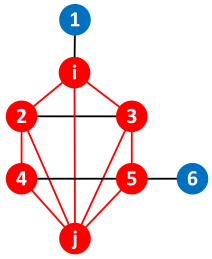
识别流子图中的链路，归结为考察两端点都属于流子图节点集 $\mathcal{N}(G^*_{ij})$ 且电势不同 v 的链路。

为了研究流子图的链接集合 $\mathcal{L}(G^*_{ij})$，我们首先定义一个链路集合 $\mathcal{L}_{\rm FS}(i,\ j)$，称为候选链路，

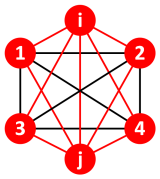
$$\mathcal{L}_{\rm FS}(i,j) := \{\, l = m \sim n \in \mathcal{L}(G) \mid m,n \in \mathcal{N}(G^*_{ij}) \,\},$$

集合 $\mathcal{L}_{\rm FS}(i,\ j)$ 包含所有端点均属于流子图节点集 $\mathcal{N}(G^*_{ij})$ 的链路。然而，在链路权重相同的图中，链路 $l = m \sim n \in \mathcal{L}_{\rm FS}(i,\ j)$ 可能连接两个等势节点 m 和 n，因此电流为零，所以该链路 l 不属于流子图（示例见图2b和7a）。

根据构造，每条流子图链路都必须连接两个流子图节点，但反之则未必成立



(a) 流子图 G^*_{ij} 包含 $N = 6$ 个节点和 $L = 9$ 条链路。



(b) 流子图 G^*_{ij} 完全图的 包含 $N = 6$ 个节点。

图 7：流子图中链路的示意图。流子图以红色突出显示。在 (a) 中，节点 2、3、4 和 5 属于流子图。由于节点 1 和 6 不属于流子图，因此不包含链路 $1 \sim i$ 和 $5 \sim 6$。链路 $2 \sim 3$和 $4 \sim 5$ 也被排除，因为节点对 (2，3) 和 (4，5) 具有电 qual p势。在 (b), 所有链路节点 1、2、3 和 4 之间的链路不是流子图链路。

不成立。因此，流子图的链接集合满足

$$\mathcal{L}(G^*_{ij}) \subseteq \mathcal{L}_{\rm FS}(i,j) \tag{31}$$

对于链路权重独立地从连续分布中抽取的加权 ER 图，节点电势互不相同（引理 1），这意味着 $\mathcal{L}(G^*_{ij}) = \mathcal{L}_{\rm FS}\ i\ j$ (,)。然而，在链路权重相同的 ER 图中，局部结构对称性可能导致节点等势，即两个不同节点 m 和 n 相对于图中其余部分具有相同的邻接模式。换言之，存在一个图自同构 [37]，能够将节点 m映射到 n。在这种对称配置中，这两个节点的电势相同，因此它们之间的候选链路中电流为零，不属于$\mathcal{L}(G^*_{ij})$。

对于链路权重相同且期望度适中的 ER 图，此类非平凡自同构以概率 [37] $O(1/N)$ 发生，从而得到

$$|\mathcal{L}_{\rm FS}(i,j)| - |\mathcal{L}(G^*_{ij})| = O(1),\ \frac{|\mathcal{L}(G^*_{ij})|}{|\mathcal{L}_{\rm FS}(i,j)|} = 1 - O(1/N)$$

然而，当期望度 $E[D]$变得非常大（趋近于完全图）时，许多节点拥有几乎相同的邻居，使它们在结构上无法区分，因而处于等势状态。此类等电势节点对的数量会随 p 迅速增加，并且 $\mathcal{L}_{\rm FS}(i,j)$ 中有一部分链路承载零电流。因此，差值 $|\mathcal{L}_{\rm FS}(i,j)| - |\mathcal{L}(G^*_{ij})|$ 不再是 $O(1)$，而是与对称（且等势）节点对的数量成正比。

现在，我们推导具有相同链路权重的 ER 图 $G_p(N)$ 中流子图期望链路数的上界。考虑一对无序节点

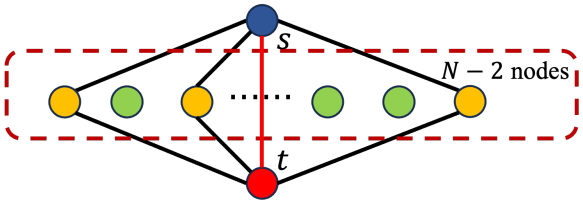


图 8：具有相同邻居集的两个节点 s 和 t示意图。网络中其余 $N-2$ 个节点中，有 k 个节点（黄色）同时与 s 和t相连，其余 $N-2-k$ 个节点（绿色）既不与 s相连，也不与 t相连。为使图示清晰，除 s 和 t以外的节点之间的链路均未显示。

（s，t），并以链路 $l=s\sim t$存在为条件。如图 8所示，节点 s 和 t 相对于其余 $N-2$个节点具有相同的邻接模式。除节点 s和 t 之外，每个节点要么同时连接到 s 和 t（s 和t的共同邻居），要么都不与它们相连。如果节点 s 和 t 既不是电流源节点，也不是汇节点，那么对称性会使 s 和 t 处的电势相等，链路 $l=s\sim t$ 中的电流为零。

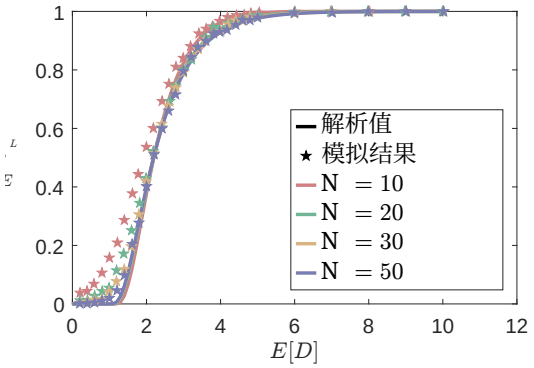
假设 k 在 $N-2$ 个节点中，恰有 s 和 t 在图8所示的构型中拥有共同邻居，而其余 $N-2-k$ 个节点既不与 s 相连，也不与 t相连。忽略除 s 和 t以外节点之间的连接，则该构型的条件概率（给定$l=s\sim t$存在）为 $\binom{N-2}{k}(p^2)^k\left((1-p)^2\right)^{N-2-k}$。对$k=0,\ \ldots,$ $N-2$求和后，已存在的链路连接两个具有相同邻居集的节点的概率为

$$\begin{aligned}\Pr[\mathcal{E}_{st}] &= \sum_{k=0}^{N-2}\binom{N-2}{k}(p^2)^k\left((1-p)^2\right)^{N-2-k} \\ &= \left(p^2+(1-p)^2\right)^{N-2}\end{aligned} \tag{32}$$

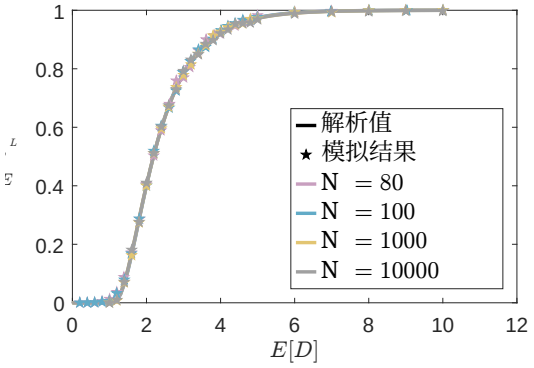
由于 ER 图中有 $\binom{N}{2}$ 个无序节点对 $G_p(N)$，且链路权重相同，因此此类现存链路的期望比例等于 $\Pr[\mathcal{E}_{st}]$。邻居集相同（图 8）只是导致 $l=s\sim t$ 上电流为零的一种构型。其他图自同构也可能使链路中没有电流。因此，对于较大的 N，$E[\rho_L]$ 流子图中的链路数占 ER 图中相同链路权重的链路总数的比例，其期望值有如下上界：

$$1-\left(p^2+(1-p)^2\right)^{N-2} \tag{33}$$

在具有相同链路权重的完全图 K_N 中，除源-目的节点 i 和 j 之外的所有节点都具有完全相同的邻居，因此处于等势状态。因此，端点不包含 i 或 j的每条链路的电势差均为零，也不承载电流。具有非零电势差的链路只有：(i) 链路 $l=i\sim j$；以及(ii) 两跳路径上的 $2(N-2)$ 条链路 $\mathcal{P}_{ij}=\{i\sim k, k\sim j\}$，$k$ 与节点 i和 j不同。因此，K_N 的几乎所有链路都位于流子图之外。



(a) N 从 10 到 50



(b) N 从 80 到 10000

图 9：在具有独立同分布的连续链路权重的 ER 图中，对于不同节点数 N，流子图的平均链接比例 $E[\rho_L]$ 随期望度 $E[D]$ 的变化。

最后，我们给出流子图中链路期望比例的解析公式 $E[\rho_L]$。在第 III A3 节中，我们已经证明，随着图的规模 N 增大，对于比例为 $1-p_b^2$ 的源-目的节点对（i，j），这些节点对位于巨型连通分量之外，其流子图的相对规模 ρ_N 满足

$$\rho_N=\frac{|\mathcal{N}(G_{ij}^*)|}{N}\longrightarrow 0,$$

这进一步表明，候选链路的期望比例$\mathcal{L}_{\mathrm{FS}}(i,j)$ 与 $\mathcal{L}_{\mathrm{FS}}(i,j)$，以 ER 图的链路总数 L 归一化后，随着 $N\to\infty$趋于 0。对于剩余比例为 p_b^2 的节点对，流子图的相对规模趋近于骨干的规模 $\mathcal{B}$，即，

$$\rho_N\longrightarrow\frac{|\mathcal{B}|}{N}$$

对于骨干 $\mathcal{B}$ 中固定的源—目的节点对 $(i,\ j)$，均匀随机选取的一条链路的每个端点属于骨干的概率为 i。

因此，在给定 $(i,\ j) \in \mathcal{B}$ 的条件下，一条链路属于候选链路集 $\mathcal{L}_{\mathrm{FS}}(i,\ j)$ 的概率为 p_b^2。等价地，

$$E\left[\frac{|\mathcal{L}_{\mathrm{FS}}(i,j)|}{L}\ \middle|\ (i,j)\in\mathcal{B}\right]=p_b^2$$

对所有源—目的节点对 $(i,\ j)$ 取平均后，我们注意到 $\Pr[(i,\ j)\ \in \mathcal{B}] = p_b^2$，而对于骨干以外的节点对，流子图为空。因此，流子图中链路的总体期望比例满足

$$\begin{aligned} E[\rho_L] &= p_b^2 \times p_b^2 + (1-p_b^2)\times 0 + O\left(\frac{1}{N}\right) \\ &= p_b^4 + O\left(\frac{1}{N}\right) \end{aligned} \tag{34}$$

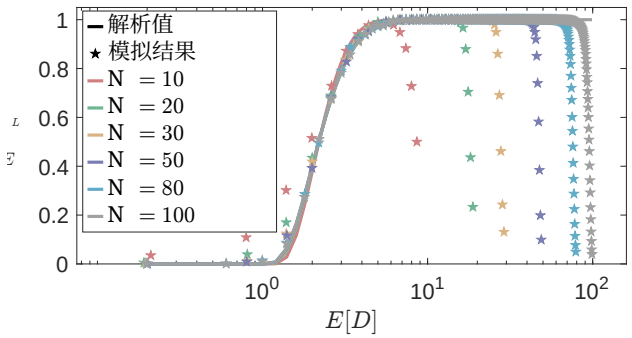


图 10：对于具有相同链路权重、节点数为 N 的 ER 图，流子图的平均链接比例 $E[\rho_L]$ 随期望度 $E[D]$ 变化的曲线。

图 9 将我们的解析结果（34）与加权 ER 图上的仿真结果进行了比较。链路权重服从区间（0，1）上的均匀分布。可以看到与图 6相似的模式。当图规模 N 较小时，分支会导致解析结果与仿真结果之间出现差距。随着N 增大，差距逐渐缩小并趋近于 0。对于具有相同链路权重的 ER 图，只要期望度不是太大，我们的（34）就能给出准确预测。然而，在期望度较大的范围内，由于（31），流子图中的链路数会减少。在极端情况下，当等链路权重图为完全图时，流子图的规模达到 $|G_{ij}^*| = 1 + 2（N - 2）$。

IV. 基于端到端需求的功率耗散图构造

在电阻网络中 G，流经每条链路的电流会因电阻而产生功率耗散，（20）和（21）。然而，反问题仍然是一项不小的挑战：如何构建一个图，使其满足预先设定的图功率耗散需求 d_{ij}，即流网络中节点对之间所需的运输成本（$i,\ j$）。例如，低功耗物联网网络 [42] 通常会对两个节点间传输单位数据所需的能量耗散提出要求。本节聚焦于流网络设计问题，并借鉴电阻网络进行类比。

由于需求 d_{ij} 可归一化为图中注入单位电流时的图功率耗散 P_G，因此在以下分析中，我们考虑 $I_c = 1$。在路径网络中，物品沿最短路径传输，链路权重 w_l 表示传输过程中链路 l 上的“电阻”或运输成本，此时功率耗散 P_G 在数值上等于节点 i 与 j之间的最短路径权重 s_{ij}。因此，问题归结为构造一个图，使其对应的最短路径权重矩阵 S 等于给定的需求 D，这可通过全最短路径逆问题 [5]求解。

与路径网络类似，在考虑单位电流时，流网络上的功率耗散逆问题可归结为构造一个满足规定端到端有效电阻需求的网络：

问题 1 (有效电阻逆问题 (IERP))。 给定一个 $N \times N$ 对角元素为零、非对角元素为正的对称需求矩阵D 。确定流网络的一个 $N \times N$ 加权邻接矩阵$\tilde{}$ A，使需求矩阵与有效电阻矩阵之间的范数 $\|D - \Omega\|$最小。

A. 逆有效电阻问题

由于有效电阻矩阵是距离矩阵[2]，，因此在下文中我们假设需求矩阵 D 也是距离矩阵。事实上，Van Mieghem [43]提出了一种将任意需求矩阵 D 转换为距离矩阵的方法：若 $d_{ik} + d_{kj} < d_{ij}$对于至少一个违反距离矩阵三角不等式的节点 $k \in \mathcal{N}$ 成立，则我们可以将$d_{ij} =$ 替换为 $\min^{1\le k\le N}(d_{ik} + d_{kj})$ 和 $d_{ji} = d_{ij}$。

当给定的需求矩阵 D 可以由一个图实现时，也就是说，存在至少一个图，其有效电阻矩阵为 $\Omega = D$，则可以通过 Fiedler 的分块矩阵关系 [43–45],优雅地求解 IERP。

$$\begin{pmatrix} 0 & u^T \\ u & \Omega \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2\sigma^2 & p^T \\ p & -\frac{1}{2}\widetilde{Q} \end{pmatrix} \tag{35}$$

其中 $\Omega p = 2\sigma^2 u$，$\widetilde{Q} = \widetilde{\Delta} - \widetilde{A}$ 是流网络的加权拉普拉斯矩阵，而该对角矩阵

[2] 距离矩阵 H 的任意元素 h_{ij} 均为非负数 $h_{ij} \ge 0$，但 $h_{ii} = 0$ h_{ij} $h_{ij} \le h_{ik} +$ 且满足三角不等式：。 h_{kj}

$\sim$ $\sim$ $\sim\Delta = \mathrm{diag}(Au)$，$A$ 是流网络的加权邻接矩阵，方差 $\sigma^2 = \frac{\zeta^T \widetilde{Q} \zeta}{4} + R_G$，其中 R_G 是有效图电阻 [4] 且 u 是 $N \times 1$ 全一向量。向量 ζ 包含拉普拉斯矩阵 $\widetilde{Q}^{\dagger}$ 伪逆 $\widetilde{Q}$的对角元素。Fiedler 分块矩阵关系（35）表明，有效电阻矩阵 Ω 与加权$\widetilde{}$拉普拉斯矩阵 Q 之间存在一一对应关系，因此，有效电阻矩阵 Ω 与加权邻接矩阵$\sim A$之间也存在一一对应关系。通过对 Fiedler 分块矩阵关系应用分块求逆公式 [4] ，拉普拉斯矩阵为

$$\widetilde{Q} = \frac{2}{2\sigma^2} pp^T - 2\Omega^{-1} \tag{36}$$

其中 $2\sigma^2 = {}_{u^T} \frac{1}{\Omega^{-1} u} \Omega^{-1} u$，向量 $p = {}_{u^T} \frac{1}{\Omega^{-1} u} \Omega^{-1} u$。$\sim$ $\sim$ $\widetilde{}$给定 $Q = \Delta - A$ 后，加权邻接矩阵可得

$$\widetilde{A} = \widetilde{\Delta} + 2\Omega^{-1} - \frac{1}{\sigma^2} pp^T \tag{37}$$

我们将式（37）中以给定需求替换有效电阻矩阵 Ω 的方法 D 称为“Fiedler 方法”。给定需求矩阵 D，若至少存在一个图，其有效电阻矩阵 $\Omega = D$，则 Fiedler 方法可以为 IERP 实例提供精确解。

B. 扰动后的有效电阻的图可实现性

如果存在至少一个图 D ，其有效电阻矩阵 G Ω $= D$，我们就称需求矩阵[5] 为图可实现的。据我们所知，构造能够保证图可实现的需求矩阵仍然是一项具有挑战性的问题。主要难点在于不同节点对之间的有效电阻彼此相关。Qiu 等人[5] 指出，有效电阻的图可实现性对扰动高度敏感。如 [5], 所示，即使对可实现的有效电阻矩阵 Ω 施加微不足道的扰动，也可能产生一个不再可实现的扰动矩阵 Ω′ 。具体而言，通过式（37）从受扰动的有效电阻 Ω′ 推导出的加权邻接$\widetilde{}$矩阵 A'，可能因有效电阻之间复杂的相互依赖关系而出现负的非对角元素。

类似的情况也出现在 Calder´on 逆问题的网络版本中：有效电阻矩阵的微小扰动可能使该矩阵不再图可实现，而这个问题已知病态程度极高 [46–48], 。考虑一个电网络 G，其链路权重表示电导，节点分为边界节点和内部节点。给定网络 G的邻接矩阵 A 、边界节点上指定的电势以及注入边界节点或从边界节点抽取的电流，Calder´on 逆问题要求求出每条链路的电导，使所有电势和电流约束均得到满足。Carmona 等人 [47]证明，对给定电势或电流进行微小扰动，可能会导致恢复出的电导发生极大变化，在某些情况下甚至会产生负电导。此外，较大的差异会出现在按跳数计远离边界节点的链路上。问题的严重病态性源于，电流和电压的边界测量对网络深处电导的变化只有很弱的敏感性，因此边界输入的微小扰动可能对应内部电导巨大且不唯一的变化。

对有效电阻进行小幅扰动的研究表明，即使微不足道的变化也可能破坏有效电阻的图可实现性，因此，基于扰动或直接指定有效电阻矩阵来构造需求并不可靠。因此，在测量精度有限的实际情形下，通过将有效电阻矩阵 Ω 替换为给定需求矩阵 D，直接执行 (37) 的 Fiedler 方法便不再可行。为求解任意需求 D下的 IERP，我们利用电阻规则和并联电路规则，在第 IVC 节提出一种名为“电阻间隙剪枝（RGP）”的算法（算法 11）。

C. 电阻间隙剪枝算法

电阻间隙剪枝（RGP）算法旨在求得一个图，使其有效电阻矩阵 Ω 近似等于任意给定的需求矩阵 D。考虑一个流网络 G ，其中每条链路 $l = i \sim j$ 都具有一个电阻$r_{ij} = \frac{1}{w_{ij}}$ ，其值等于链路权重的倒数。在路径网络中，Qiu 等人 [5] 证明，链路权重 w_{ij}较小的链路（对应于流网络中的高电阻 r_{ij} ）不太可能出现在最短路径中。基于这一原理，Qiu 等人 [5]提出了 Omega 链路移除算法，用于构造一个图，使其对应的最短路径权重矩阵S 近似等于给定的需求矩阵 D。受 [5], 启发，我们现提出 RGP 算法来设计流网络。

RGP 的主要机制基于并联电路规则和（18）。并联电路规则表明，电路中的有效电阻始终小于或等于最小电阻（参见 [5] 和第 IID节）。换言之，对于两个相邻节点 i 和j，有效电阻始终满足 $\omega_{ij} \le r_{ij}$，且仅当直接链路 $i \sim j$ 是连接节点 i 和 j的唯一路径时，等号才成立。因此，对于任意节点对（i， j），在 G 中添加链路只能降低有效电阻 ω_{ij} 或使其 ω_{ij} 保持不变，

图 11：电阻间隙剪枝（RGP）

Input: $N \times N$ demand matrix D
Output: $N \times N$ weighted adjacency matrix $\widetilde{A}$ for flow network

$A \leftarrow J - I$
$W \leftarrow$ element-wise reciprocal of D over nonzero elements
$\widetilde{A} \leftarrow A \circ W$
$\Omega \leftarrow$ effective resistance matrix of $\widetilde{A}$
$\epsilon \leftarrow \|D - \Omega\|$
do
  $\epsilon' \leftarrow \epsilon$
  $\hat{\Omega} \leftarrow$ element-wise reciprocal of Ω over nonzero elements
  $\Gamma \leftarrow (\hat{\Omega} - \widetilde{A}) \circ (D - \Omega) \circ A$
  $(i, j) \leftarrow$ indices of the maximum element in Γ
  $A \leftarrow A - e_i e_j^T - e_j e_i^T$
  $\widetilde{A} \leftarrow A \circ W$
  $\Omega \leftarrow$ effective resistance matrix of $\widetilde{A}$
  $\epsilon \leftarrow \|D - \Omega\|$
while $\epsilon < \epsilon'$
$A \leftarrow A + e_i e_j^T + e_j e_i^T$
$\gamma_{ij} \leftarrow d_{ij}/\omega_{ij}$ for each non-diagonal (i, j) in Ω
$\alpha \leftarrow$ mean of all γ_{ij}
$\widetilde{A} \leftarrow \frac{1}{\alpha} A \circ W$
return $\widetilde{A}$

而移除 G 中的链路则不能 降低有效电阻 ω_{ij}。此外，（18）表明，移除电阻值较大的电阻[3] r_{ij} 对有效电阻 ω_{ij} 的影响微乎其微。因此， $l = i \sim j$电阻值较大的链路 r_{ij} 被称为“冗余有效电阻链路”。RGP 的主要思想是从完全图中移除冗余有效电阻边，使有效电阻矩阵 Ω 接近目标需求 D:

1. 构建一个加权邻接矩阵为 $\widetilde{A} = D$ 的完全图。2. 迭代移除对图的有效电阻影响不显著的链路。

具体细节如算法11所示。

RGP 算法在第 1 行通过邻接矩阵 $A = J - I$ 所表示的完全图进行初始化，而第 2 行中的链路权重矩阵 W 是 D 在非零元素上的逐元素倒数。随后，第 3 行和第 4 行获得流网络的加权邻接矩阵 A 及其对应的有效电阻矩阵 Ω。在第 5 行中，计算需求矩阵 D 与有效电阻矩阵 Ω 之间的差异，记为 ϵ。具体而言，该差异通过 $L1$ 范数进行度量

$\|D - \alpha\Omega\| = \sum_{ij} |d_{ij} - \alpha\omega_{ij}|$。假设存在一个图 G，其有效电阻矩阵 Ω_G 恰好等于需求矩阵 D。有效电阻矩阵 $\Omega < \Omega_G$，因为每条链路 $r_{ij} = d_{ij}$ 的电阻，并且节点 i 与 j 之间存在多条路径。我们预计，随着链路被迭代移除，差异 ϵ 将逐渐减小，直到所获得的图接近图 G，其有效电阻矩阵 Ω_G 恰好等于需求矩阵 D。为了确定应移除哪条链路，在第 9 行中，我们计算 $N \times N$启发式得分矩阵

$$\Gamma \leftarrow \left(\hat{\Omega} - \widetilde{A}\right) \circ (D - \Omega) \circ A,$$

ˆ其中， $N \times N$ 矩阵 Ω 包含有效电阻在非对角元素上的逐元素倒数，而对角元素保持为零。启发式得分由三个部分组成:

1. 启发式得分矩阵的第一个因子 $\left(\hat{\Omega} - \widetilde{A}\right)$ Γ表示一对相邻节点之间有效电阻的倒数（即 $a_{ij} = 1$），条件是移除它们之间的直接链路（如（18）所示）。具体而言，根据（18），我们有

$$\frac{1}{\left(\omega_{G\setminus l}\right)_{ij}} = \frac{1}{\omega_{ij}} - \frac{1}{r_{ij}}$$

较小的 $\left(\omega_{G\setminus l}\right)_{ij}$，等价于较大的 $\frac{1}{(\omega_{G\setminus l})_{ij}}$，可能意味着 $\frac{1}{r_{ij}}$ 的贡献较小，从而使 r_{ij}较大，这表明链路 $l = i \sim j$ 可视为冗余。此外，较小的 $\left(\omega_{G\setminus l}\right)_{ij}$ 表明，移除链路 $l = i \sim j$后，节点i 和 j 仍可能通过多条并联路径保持连通。换言之，移除链路后，邻接节点 i 和 j 可通过图中的其余部分轻易到达。

2. 第二个因子（D –Ω）量化了当前迭代中预定需求与所得有效电阻之间的差距。

3. 第三个因子是邻接矩阵，它编码了当前迭代的图拓扑，并确保仅考虑移除现有链路。

通过综合考虑链路冗余、链路移除后两个节点之间的可达性，以及当前有效电阻与目标需求之间的差异，我们移除 Γ 中取值最高的现有链路（第 10 行和第 11 行）。流网络的邻接矩阵$\sim A$、加权邻接矩阵 A 、相应的有效电阻矩阵 Ω，以及需求矩阵与有效电阻矩阵之间的差异 ϵ，随后分别在第 12—14 行进行更新。我们持续进行链路移除，直到更新后的 ϵ 大于

[3] 根据欧姆定律，电阻较大的链路中电流较小，因此其流量占比较低。在极端情况下，电阻 $r_{ij} \to \infty$，这意味着几乎没有电流流经该链路 $l = i \sim j$。

上一轮迭代中的差异 ϵ' 。此时，返回最后移除的链路（第 16 行）。

在第 17–19 行中，我们进一步缩放链路权重矩阵W，使其范数满足 $\|D - \Omega\|$。由于有效电阻 Ω 对微小扰动也很敏感 [5], ，我们无法使用不同的参数独立缩放有效电阻 Ω 的每个元素。幸运的是，使用正缩放参数 α 对整个有效电阻矩阵 Ω 进行缩放，得到 $\alpha\Omega$，可以保证相应的加权邻接矩阵仍为非负矩阵：由式（13）可得

$$\alpha\omega_{ij} = \alpha\left(e_i - e_j\right)^T Q^{\dagger}\left(e_i - e_j\right) \tag{38}$$

$$= \left(e_i - e_j\right)^T \left(\frac{1}{\alpha}Q\right)^{\dagger}\left(e_i - e_j\right), \tag{39}$$

这表明， $\alpha\Omega$ 是某个图的有效电阻，其拉普拉斯矩阵为 $\frac{1}{\alpha}\widetilde{Q}$，加权邻接矩阵为$\frac{1}{\alpha}\widetilde{A}$。剩下的任务是求出使范数 $\|D - \Omega\|$ 最小的缩放参数 α ，例如 $L1$范数 $\|D - \alpha\Omega\| = \sum_{ij}|d_{ij} - \alpha\omega_{ij}|$。由于需求 d_{ij} 和有效电阻 ω_{ij} 均为正数，因此每一项 $|d_{ij} - \alpha\omega_{ij}|$ 都可以分段表示为

$$|d_{ij} - \alpha\omega_{ij}| = \begin{cases} d_{ij} - \alpha\omega_{ij}, & \text{if } \alpha \le \dfrac{d_{ij}}{\omega_{ij}}, \\ \alpha\omega_{ij} - d_{ij}, & \text{if } \alpha > \dfrac{d_{ij}}{\omega_{ij}}, \end{cases}$$

这是一个凸分段线性函数，在$\alpha = \frac{d_{ij}}{\omega_{ij}}$处取得最小值。因此，范数 $\|D - \alpha\Omega\| = \sum_{ij}|d_{ij} - \omega_{ij}|$ 也是凸分段线性函数，且最小值出现在某个断点处，该断点对应于某个节点对（i, j）的 $\frac{d_{ij}}{\omega_{ij}}$。在第 18 行，我们不再遍历所有可能的 d_{ij} 来求得ω_{ij}范数 $\|D - \alpha\Omega\|$的最小值，而是使用 α ，其值等于所有可能的（i, j）对应的 $\frac{d_{ij}}{\omega_{ij}}$ 的均值，从而降低计算复杂度。在第 19 行，通过因子 $\frac{1}{\alpha}$ 缩放边权重矩阵 W ，以更新加权邻接矩阵$\sim A$ 。最后，在第 20 行，RGP 返回所得的加权邻接矩阵 A，即$\widetilde{}$。

RGP 算法的主要计算复杂度来自更新有效电阻（第 13 行），每次迭代都需要 $O(N^3)$ 的计算复杂度。由于 RGP 算法以完全图初始化拓扑，并通过迭代移除冗余边，最坏情况下图会变成含有 $N-1$ 条链路的树图，因此最多需要 $\frac{N(N-1)}{2}$ $(N-1)$ 次迭代。因此，RGP 算法在最坏情况下的总体计算复杂度为 $O(N^5)$。为了降低计算复杂度，一种可行的策略是采用 Sherman-Morrison 公式 [49], ，它能够高效地计算矩阵经过秩一修改后的逆矩阵。在每次 RGP 迭代中，我们都会从图中移除一条链路，这相当于对拉普拉斯矩阵 Q 进行秩一更新。因此，在第一次迭代之后，Sherman-Morrison 公式可以省去从头计算拉普拉斯矩阵的伪逆 $Q^{\dagger}$ 和有效电阻 Ω 的步骤，从而将更新 Ω 的计算复杂度从 $O(N^3)$ 降低到 $O(N^2)$。相应地，RGP 的总体计算复杂度可降低至 $O(N^4)$。

在附录 C中，我们全面评估了 RGP 算法的性能。我们引入了一种基准方法——“Fiedler 方法”，作为参照：该方法通过将有效电阻矩阵 Ω 替换为输入需求矩阵 D 来执行（37）。随后，在相同的预定需求矩阵下，对 RGP 算法和 Fiedler 方法生成的图进行比较。

如图 12、13、14 和附录II 中的C所示，RGP 算法生成的图的有效电阻矩阵能够很好地近似预先确定的需求矩阵，并且在不同需求下表现出一致的性能。RGP 生成的图中几乎所有链路也都出现在基准方法生成的图中。与基准方法相比，RGP 通常生成更稀疏的图。具体而言，当需求矩阵等于由树图导出的有效电阻时，RGP 算法通常能够生成与基准方法生成的树完全相同的树，如图 12所示。

V. 结论

受 6G 通信和社交平台信息传播中的实际场景启发，在这些场景中，传输无法用单一最短路径准确描述，我们研究了流在所有可用路径上按比例分配的流网络。我们首先分析流网络中流子图的大小。我们将巨型连通分量（GC）分解为骨干子图 $\mathcal{B}$ 和分支。根据流子图中的每个非终端节点必须至少有两个邻居也位于该流子图中的要求，我们建立了一个自洽公式。由此公式，我们得到节点至少有一个邻居属于骨干的概率 p_b 以及骨干比例 b。当期望度 $E[D] < 1$ 时，概率 p_b 和骨干比例 b 均为零；当期望度超过 1 时，两者均变为正值。基于这些量，我们刻画了流子图的期望大小。在给定两个节点都位于巨型连通分量中的条件下，流子图的归一化大小收敛于 bp_b^2，并存在 $O(1/N)$ 有限尺寸偏差。类似的推理也适用于流子图中的连接数，其在相同的修正阶下收敛于 p_b^4 。仿真结果与这些结论一致，并再现了大尺度行为和

有限尺寸偏差。

最后，我们考虑如何构造具有预设端到端功率耗散的图这一挑战，该问题可以改写为逆有效电阻问题，即寻找一个图，使其对应的有效电阻矩阵等于给定的需求矩阵。受电路规则和有效电阻计算的启发，我们提出了一种启发式算法——“电阻间隙剪枝”（RGP），该算法可生成能够紧密近似需求有效电阻的稀疏图，并在不同需求场景下表现稳定。此外，我们的仿真表明，RGP 得到的稀疏图中几乎所有链路 H 也都存在于通过 Fiedler 方法得到的基准 ER 图中 G，这表明图中的这些链路H 对有效电阻有显著影响。事实上，先前研究 [17, 50–53] 已表明，对于具有相同链路权重的 ER 图，有效电阻可近似表示为$\omega_{st} \propto \frac{1}{d_s} + \frac{1}{d_t}$，这意味着传输主要由与节点 s 和 t 相邻的链路承担，而图中的其余部分实际上可视为理想导体。因此，我们的发现为理解决定流网络中有效电阻的那些“关键”链路/节点提供了补充视角：有效电阻可能由少数互联网络的链路主导。此外，所提出的 RGP 算法还可用于一种“网络稀疏化”，在保留相似有效电阻矩阵的同时，使网络更加稀疏。

作者贡献

Z. Qiu 完成了所有仿真，提出并处理了第四节研究的问题，并主导撰写了第一节（引言）、第二节（术语）、第四节和第五节（结论）。X. Liu 构建了用于计算流子图期望规模的分析框架，撰写了第三节，并证明并撰写了附录B（具有独立同分布连续链路权重的图中的流子图引理）。R. Noldus 提出了流子图和端到端功率耗散的概念，并审阅了稿件。P. Van Mieghem 提出了流子图规模问题，担任该项目的主要顾问，并审阅了稿件。

致谢

P. Van Mieghem 得到欧盟地平线2020研究与创新计划的欧洲研究理事会资助（拨款协议101019718）。

附录A：符号

表I：符号

符号	定义
G	网络或图
$\mathcal{N}$	节点集
N	节点数
$\mathcal{L}$	边集
L	连接数
$l = i \sim j$	连接节点 i 和 j 的链路
$\mathcal{P}_{ij}$	从节点 i到节点 j的路径
A	邻接矩阵
W	边权重矩阵
$\widetilde{A}$	加权邻接矩阵
B	关联矩阵
Q	拉普拉斯矩阵
$\widetilde{Q}$	加权拉普拉斯矩阵
$Q^\dagger$	拉普拉斯伪逆矩阵
Ω	有效电阻矩阵
R_G	有效图电阻
r_l	链路 l 的电阻
S	最短路径权重矩阵
d_i	节点度 i
$\widetilde{\Delta}$	加权度矩阵
u	全一向量
J	全一矩阵
I	单位矩阵
e_i	$N \times 1$ 基向量只有一个非零元素（e_i）$_i = 1$
x_i	注入节点 i 的外部电流。
v_i	节点 i 的电势或电压势
y_l	链路 l 的链路电流
P_G	网络 G 中的功率耗散
G^*_{ij}	以（i, j）为源-目的地的流子图
	节点对
$\mathcal{B}$	流子图中的骨干子图
T_k	流子图中的第 k 个分支
ρ_N	流子图的节点数占比
	以图的节点数归一化
ρ_L	流子图的链路数占比
	按图的链路数归一化

附录B：具有独立同分布的连续链路权重的图中的流子图引理

引理 1。考虑第 *IIC* 节中的电阻网络模型，其中链路电阻 $\{r_l : \ l \in \mathcal{L}\}$ 是相互独立的连续随机变量。固定一个源—目的节点对 $(i, \ j)$ 并注入单位电流。

设 $s \neq t$ 为由一条路径连接的两个节点，该路径至少包含一条具有非零电流的链路。则

$$\Pr[v_s = v_t] = 0.$$

证明。对于每条链路 $l \in \mathcal{L}$，根据欧姆定律，链路 l 上的电压降 U_l 为

$$U_l = r_l \, y_l.$$

固定一条从节点 s 到节点 t的路径 $\mathcal{P}_{st}$ 。根据基尔霍夫电压定律，节点s 与 t 之间的节点电势差等于沿路径 $\mathcal{P}_{st}$各电压降的代数和，

$$v_s - v_t = \sum_{l\in\mathcal{P}_{st}} U_l = \sum_{l\in\mathcal{P}_{st}} y_l\, r_l.$$

因此， s与 t 处节点电势相等，等价于条件

$$v_s = v_t \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{l\in\mathcal{P}_{st}} y_l\, r_l = 0.$$

由于路径 $\mathcal{P}_{st}$ 包含至少一条电流非零的链路 l_0 $y_{l_0} \neq 0$, 系数 $\{y_l : l \in \mathcal{P}_{st}\}$并非全为零。定义标量随机变量

$$S := \sum_{l\in\mathcal{P}_{st}} y_l\, r_l.$$

在给定电阻 $\{r_l : l \in \mathcal{P}_{st},\ l \neq l_0\}$的条件下，随机变量 S 是独立且连续分布的电阻 r_{l_0}的仿射函数。因此，

$$\Pr[S = 0 \mid \{r_l : l \in \mathcal{P}_{st}, l \neq l_0\}] = 0,$$

因为连续分布的随机变量取任意给定值的概率为零（例如参见[54, 第 5 节。3]）。由此可得 $\Pr[v_s = v_t] = 0$。 □

引理 *2.* 考虑第 *II C* 节中的电阻网络模型。假设链路电阻 $\{r_l : l \in \mathcal{L}\}$ 是相互独立且连续分布的随机变量。固定一个源—目的节点对 *(i, j)*，并考虑其对应的流子图 G^*_{ij}。设 $w \neq i, j$ 是满足性质 *1* 的节点，即存在两个不同的邻居 $m \neq n$ ，使得链路 $l_{wm} = w \sim m$和 $l_{wn} = w \sim n$ 属于 $\mathcal{L}(G)$，且节点 m, n 属于流子图节点集 $\mathcal{N}(G^*_{ij})$。如果 m 与 n 处的节点电势满足 $v_m \neq v_n$，那么节点 w属于流子图节点集，

$$w \in \mathcal{N}(G^*_{ij}).$$

证明。 假设节点 w 的两个邻居m 和 n 的电位满足 $v_m \neq v_n$。 反设节点 w 不属于流子图的节点集，即 $w \notin \mathcal{N}(G^*_{ij})$。那么，所有与 w 相连的链路上的电流均为零，特别是， $l_{wm} = w \sim m$ 和 $l_{wn} = w \sim n$ 上的链路电流满足

$$y_{l_{wm}} = 0 \quad \text{and} \quad y_{l_{wn}} = 0.$$

对于电阻为 $r_{l_{wm}} > 0$ 的链路 $l_{wu} = w \sim m$ ，根据欧姆定律 $v_w - v_m = r_{l_{wm}}\, y_{l_{wm}}$ 可得

$$v_w = v_m.$$

对于电阻为 $r_{l_{wn}} > 0$的链路 $l_{wn} = w \sim n$ ，根据欧姆定律 $v_w - v_n = r_{l_{wn}}\, y_{l_{wn}}$ 可得

$$v_w = v_n.$$

因此 $v_m = v_n$，这与假设 $v_m \neq v_n$矛盾。因此，两个链路电流 $y_{l_{wm}}$或 $y_{l_{wn}}$ 中至少有一个非零，且节点 w 与一条电流非零的链路相连。根据流子图的定义，这意味着 $w \in \mathcal{N}\ (G^*_{ij})$ 。 □

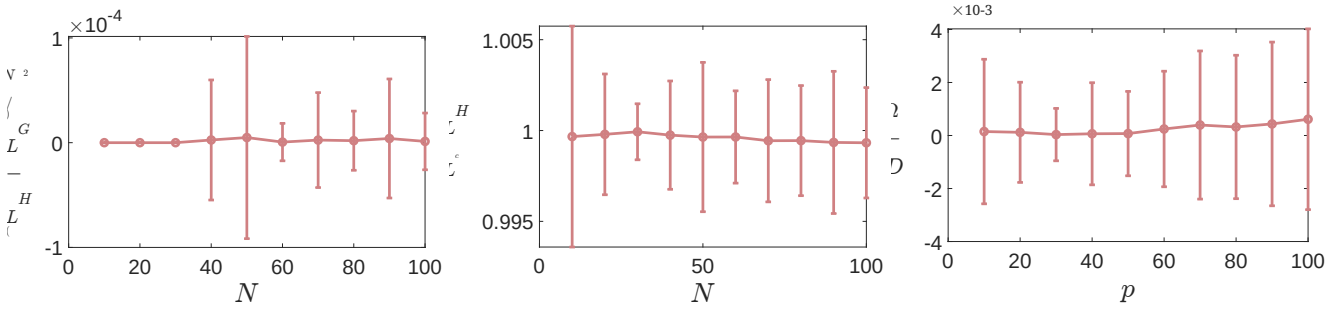
附录 C：RGP 算法的性能

本节评估 RGP 算法的性能。我们引入一种基准方法“Fiedler 方法”，通过将有效电阻矩阵 Ω 替换为输入需求矩阵 D来执行 (37)，作为参照。由于仅当需求矩阵可由图实现时，Fiedler 方法才可行，因此我们的实验是在给定需求$D = \Omega_G$的情况下进行的，其中 Ω_G 是随机生成图 G的有效电阻矩阵。具体而言，每次实验试次中，我们首先生成一个“基线”图G ，并计算相应的有效电阻矩阵 Ω_G。以需求矩阵 $D = \Omega_G$ 为输入，分别运行 RGP 和 Fiedler 方法，得到生成图 H 及其对应的有效电阻矩阵 Ω。随后，我们衡量 RGP 生成的图 H与基准方法生成的图之间的差异。我们通过以下三个互补指标评估 RGP 的性能：(i) 生成图 H中额外链路数量 $\frac{2}{N(N-1)}(L_H - L_G)$ 的归一化值；(ii) 基线图 G与生成图 H 共有的链路数量 $L_c = \frac{1}{2}u^T(A \circ A_H)\, u$；以及 (iii) 需求矩阵$D$ 与有效电阻矩阵 Ω 之差的范数$||D-\Omega|| = \frac{1}{N(N-1)} \sum_i \sum_j \frac{|d_{ij}-\omega_{ij}|}{d_{ij}}$。

表 II：以实证网络为基线时 RGP 的性能。

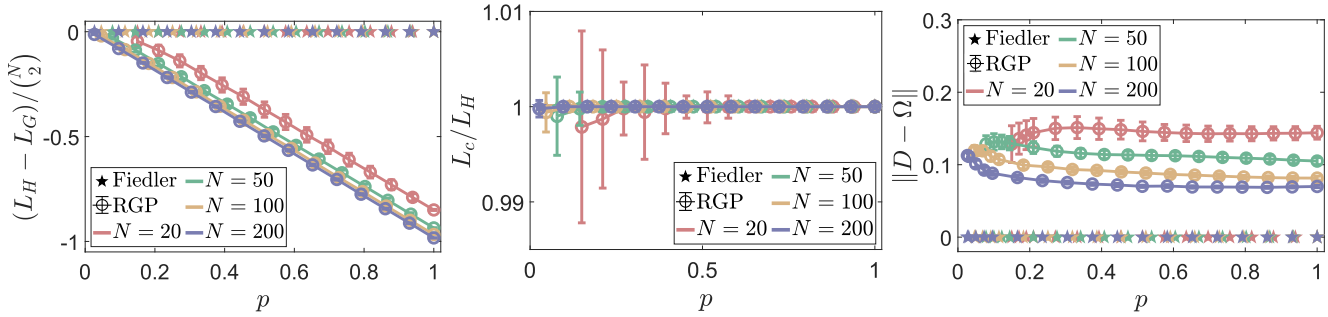
网络	N	L_G	$L_H - L_G$	L_c/L_H	$\|\|D - S\|\|$
karate	34	78	-35	1	0.1533
dolphins	62	159	-79	1	0.1273
NewSpainTravelMap	224	241	-13	1	0.0491
wiki-vote	889	2914	-1745	1	0.1045

我们首先考虑由最稀疏图（树）导出的需求 $D = \Omega_G$ 。给定一个树图 G，RGP 算法通常能够恢复一个以$D = \Omega_G$ 为输入的图 $H = G$，见图 12。树图中，任意节点对（i， j）之间都存在一条唯一路径 $\mathcal{P}_{ij}$ ，其有效电阻 ω_{ij} 等于路径 $\mathcal{P}_{ij}$上各链路的电阻 r_l 之和。通过 RGP 从初始完全图开始（算法 11 第 1–3 行），其链路权重 W 是需求 D 在非零元素上的逐元素倒数；对于基准树 G中不存在的任意链路$l = i \sim j$ ，其电阻 r_l都相对较高，因为节点 i 和 j 已经可以通过基准树 G中的路径 $\mathcal{P}_{ij}$ 相互连接。此外，根据串并联规则，存在于完全图中、但不存在于基准树中的链路 $l = i \sim j$ 的有效电阻 ω_{ij}



（a）归一化新增边数　（b）归一化公共边数　（c）范数差

图 12：RGP 算法在树基准图上的性能评估。（a）生成图中新增边数的归一化值 H 与基线 G相比。（b）基准图 G 与生成图 H中的公共链路数的归一化值。（c）展示需求矩阵 D 与生成的有效电阻矩阵 Ω 之间的范数。三个面板的 x 轴均表示树图的节点数 N。对于每个图规模 N，生成 1000 棵树作为基准图，链路权重为从 $[1, 10]$中独立且均匀抽取的整数。误差棒表示标准差。



(a) 归一化新增边数　(b) 归一化公共边数　(c) 范数差

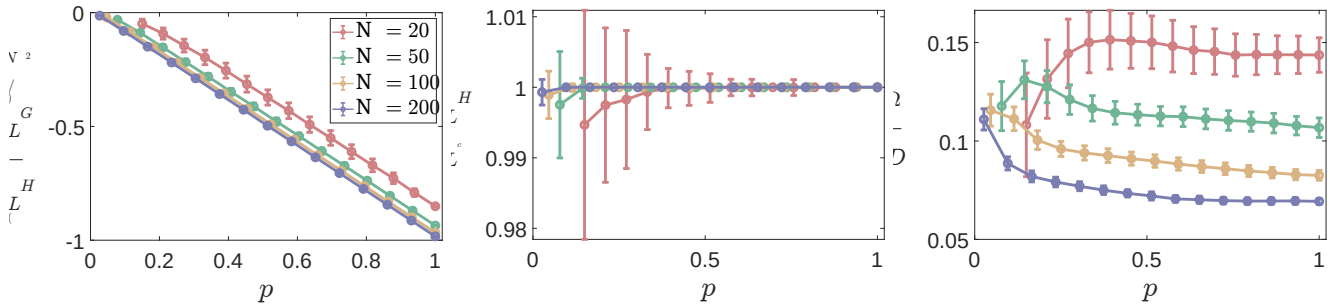
图 13：RGP 算法（RGP）与 Fiedler 方法（Fiedler）的性能评估。(a) 生成图 H 中新增边数的归一化值，与基线 G相比。(b) 基准图 G与生成图 H中的公共链路数的归一化值。(c) 显示需求矩阵 D 与生成的有效电阻矩阵 Ω 之间的范数。三个子图的横轴均表示 ER 图 G_p的连接概率 p （N）。对于每个图规模 N 和概率 p，生成 1000 个链路权重均匀分布的 ER 图作为基准图。误差棒表示标准差。

显著小于需求 d_{ij}。随后，RGP 算法可以利用较高的电阻 r_{ij}和较大的差值 $d_{ij} - \omega_{ij}$，移除冗余的有效电阻链路，最终恢复出与给定树图 G相匹配的树图H。

随后，我们使用由具有不同边密度的 ER 图计算得到的需求，扩展了性能评估 $D = \Omega_G$，见图 p，图13。具体而言，对于图的每种规模 N 和边密度 p，生成 1000 个 ER 图 $G_p(N$，其链路权重均匀分布于 (0,1) 区间内。如图 13所示，Fiedler 方法能够精确恢复给定的基准图 $G_p(N$，这符合预期。与基准 Fiedler 方法相比，RGP 通常生成链路更少的图 H （图 13a）。额外链路数的归一化值

RGP 生成的图中的链路数 H 会随着边密度 p 的增加而线性下降。图 13b 展示了图 L_c 与图 H 之间的公共链路，并 G按链路数进行归一化 L_H。该比率 $\frac{L_c}{L_H}$ 约为 1，表明重构图中的几乎所有链路H 也存在于给定图中 G。在图 13c中，我们进一步研究了 RGP 生成图的有效电阻矩阵 Ω 与需求D之间的差异。对于规模更大的图，RGP 算法的表现更好 N。

我们还考察了对于由链路权重分布不同的 ER 图所推导出的需求，RGP 的可行性。图 13 中呈现了与图14类似的模式，其中给定 ER 图的链路权重服从指数分布，平均值为 0。5。此外，在表 II中，我们展示了 RGP 在不同实证网络所生成的需求下始终保持稳定的性



(a) 归一化新增边数　　(b) 归一化公共边数　　(c) 范数差

链路

图 14：(a) 生成图中新增边数相对于基线的归一化值。(b) 基准图与生成图中的公共链路归一化数量。(c) 需求矩阵与生成的有效电阻矩阵 Ω 之间的范数。三个面板的 x 轴均表示 ER 图的连接概率（N）。对于每种图规模和概率，生成 1000 个 ER 图作为基准图，每个图的链路权重均从均值为 0.5 的指数分布中抽取。误差棒表示标准差。

能 [55, 56]。

[1] M. E. J. Newman, 《复杂网络的结构与功能》, SIAM Review 45, 167 (2003)。[2] P. Van Mieghem, *Performance Analysis of Complex Net-works and Systems*（剑桥大学出版社，英国剑桥，2014）。[3] P. Van Mieghem、C. Doerr、H. Wang、J. M. Hernandez、D. Hutchison、M. Karaliopoulos 和 R. Kooij, 《一种计算拓扑网络鲁棒性的方法》, 代尔夫特理工大学，报告 20101218，1 (2010)。[4] P. Van Mieghem, *Graph Spectra for Complex Networks*，第 2 版，2023 年（剑桥大学出版社）。[5] Z. Qiu、I. Joki´c、S. Tang、R. Noldus 和 P. Van Mieghem, 《全最短路径逆问题》, IEEE网络科学与工程汇刊 11, 2703 (2024)。[6] B. Fortz 和 M. Thorup, 《通过优化 OSPF 权重进行互联网流量工程》, 载于 *Proceedings IEEE INFOCOM 2000. Conference on Computer Communications. Nineteenth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies* 2 2000，第 卷（IEEE, ）第 519–528 页。[7] E. W. Dijkstra, 《关于图论中两个问题的注记》, Numerische Mathematik 1, 269 (1959)。[8] R. Bellman, 《关于一个路由问题》, Quarterly of Applied Mathematics 16, 87 (1958)。[9] A. Schrijver, 《最短路径问题的历史》, Documenta Mathematica 17, 155 (2012)。[10] T. H. Cormen、C. E. Leiserson、R. L. Rivest 和 C. Stein, *Introduction to Algorithms*（麻省理工学院出版社，2022）。[11] M. Kitsak、A. Ganin、A. Elmokashfi、H. Cui、D. A. Eisenberg、D. L. Alderson、D. Korkin 和 I. Linkov, 《通过双曲映射，在大型且严重不完整的网络中寻找最短路径节点和近最短路径节点》, Nature Communications 14, 186 (2023)。[12] R. M. Gomathi 和 J. Martin Leo Manickam, 《能量水下声学无线传感器网络的高效最短路径路由协议》, Wireless Personal Communications 98, 843 (2018). [13] D. Zhang, Y. Shou, and J. Xu, 基于 MapReduce 的道路网络最短路径问题求解方法, Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing 15, 1251 (2024). [14] F. B. Zhan and C. E. Noon, 最短路径算法：基于真实道路网络的评估, 《交通科学》32, 65 (1998). [15] F. Begta˘sevi¨u and P. Van Mieghem, 互联网中的跳数测量，载于 *Proceedings of Workshop on Passive and Active Measurement (PAM)* 2001 183 () pp. – 190.[16] Y.-X. Qiu, D. Wen, L. Qin, W. Li, R.-H. Li, a nd Y. Zhang, 大型道路网络中的高效最短路径计数, VLDB基金会论文集 15, 2626 (2022). [17] P. Akara-pipattana, T. Chotibut, and O. Evnin, 大型稀疏随机图中的电阻距离分布, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experi ment 2022, 033404 (2022), 出版方：IOP Publishing and SISSA。[18] M. J. Newman, 一种基于随机游走的中介中心性度量, 《社会网络》27, 39 (2005). [19] L. C. Freeman, S. P. Borgatti, and D. R. White, 赋权图中的中心性：一种基于网络流的中介中心性度量, 《社会网络》13, 141 (1991). [20] E. Bozzo and M. Franceschet, 电阻距离、接近中心性与中介中心性, 《社会网络》35, 460 (2013). [21] A.-L. Barab´asi, 网络科学, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 371, 20120375 (2013). [22] F. A. Dicandia, N. J. G. Fonseca, M. Bacco, S. Mug-

naini, and S. Genovesi，空天地一体化 6G 无线通信网络：天线技术与应用场景综述，Sensors 22, 10 3390 22093136 2022 。/s ( )。[23] Z. Zhang, Y. Xiao, Z. Ma, M. Xiao, Z. Ding, X. Lei, G. K. Karagiannidis, and P. Fan，6G无线网络：愿景、需求、架构与关键技术，IEEE Vehicular Technology Magazine 14, 28 (2019). [24] R. Pastor-Satorras, C. Castellano, P. Van Mieghem, and A. Vespignani，复杂网络中的流行病过程，Reviews of Modern Physics 87, 925 (2015). [25] C. Nowzari, V. M. Preciado, and G. J. Pappas，流行病的分析与控制：复杂网络传播过程综述，IEEE Control Systems Magazine 36, 26 (2016). [26] M. Franceschet and E. Bozzo，图拉普拉斯矩阵广义逆的近似，Internet Mathematics 1, 10.1080/15427951.2012.715115 (2012). [27] N. Masuda, M. A. Porter, and R. Lambiotte，网络中的随机游走与扩散，Physics Reports 716- 717, 1 (2017). [28] K. Pearson，随机游走问题，Nature 72, 342 1905( )。[29] G. Guennebaud and A. Bugeau，数据传输的能源消耗：强度指标与绝对估算，Journal of Industrial Ecology 28, 996 (2024). [30] P. Holme and G. Ghoshal，外交官困境：社交网络中以最小努力获取最大权力，载于 *Adaptive Networks: Theory, Models and Applications*, Understanding Complex Systems (Springer, 柏林, Heidelberg, 2009) pp. 269–288. [31] M. O. Jackson，经济学中的社交网络研究，载于 *The Missing Links: Formation and Decay of Economic Networks*，编者为 J. E. Rauch and A. Casella (Russell Sage Foundation, 纽约, 2007) pp. 1–24. [32] A. Hassidim, D. Raz, M. Segalov, and A. Shaqed，网络利用率：流量视角，载于 *2013 Proceedings IEEE INFOCOM* 2013 1429 1437 (IEEE,) pp. – . [33] D. J. Aldous，链路成本随链路容量呈次线性变化的最优空间运输网络，Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment 2008, P03006 (2008). [34] M. E. J. Newman, *Networks: An Introduction* (牛津大学出版社, 2010). [35] M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts，具有任意度分布的随机图及其应用，Physical Review E 64, 026118 (2001). [36] P. Van Mieghem, K. Devriendt, and H. Cetinay，拉普拉斯矩阵的伪逆与网络中的最佳传播节点，Physical Review E 96, 032311 (2017). [37] P. Erd˝os and A. R´enyi，非对称图，Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 14, 295 (1963). [38]P. Erd˝os and A. R´enyi，随机图的演化，匈牙利科学院数学研究所出版物 5, 17 (1960). [39] R. Van Der Hofstad, *Random graphs and complex networks*，第 2 卷（剑桥大学出版社，2024）。[40] D. S. Callaway、M. E. J. Newman、S. H. Strogatz 和 D. J. Watts，《网络鲁棒性与脆弱性：随机图上的渗流》，《物理评论快报》85，5468（2000）。[41] R. M. Corless、G. H. Gonnet、D. E. G. Hare、D. J. Jeffrey 和 D. E. Knuth，《关于朗伯 W 函数》，《计算数学进展》5，329（1996）。[42] C.-F. Chiasserini 和 M. Garetto，《含休眠节点的无线传感器网络解析模型》，《IEEE 移动计算汇刊》5，1706（2006）。[43] P. Van Mieghem，《距离矩阵的一种树实现：由树生成需求矩阵的逆最短路径问题》，代尔夫特理工大学，报告 20211012，1（2021）。[44] M. Fiedler，《对称逆 M 矩阵的若干刻画》，《线性代数及其应用》275，179（1998）。[45] M. Fiedler，*Matrices and Graphs in Geometry*，《数学百科全书及其应用》第 139 卷（剑桥大学出版社，剑桥，2011）。[46] G. Alessandrini，《通过边界测量稳定确定电导率》，《应用分析》27，153（1988）。[47] ´A. Carmona、A. M. Encinas、M. J. Jim´enez 和 ´A. Sam- perio，《蜘蛛网络上分段常数电导的稳定恢复》，《国际计算数学杂志》101，1237（2024）。[48] H. Gernandt 和 J. Rohleder，《树图上的 Calder´ón 型逆问题》，《线性代数及其应用》646，29（2022）。[49] G. H. Golub 和 C. F. Van Loan，*Matrix Computations- 4th Edition*（约翰·霍普金斯大学出版社，费城，宾夕法尼亚州，2013）。[50] U. von Luxburg、A. Radl 和 M. Hein，《大型随机邻域图中的到达时间和往返时间》，《机器学习研究杂志》15，1751（2014）。[51] J. Sylvester，《稀疏连接的 Erd˝os-R´enyi 随机图中的随机游走到达时间和有效电阻》，《图论杂志》96，44（2021）。[52] S. Carmi、Z. Wu、E. L´opez、S. Havlin 和 H. Eu- gene Stanley，《复杂网络中多个用户之间的传输》，《欧洲物理学杂志 B 辑》57，165（2007）。[53] S. Carmi、Z. Wu、S. Havlin 和 H. E. Stanley，《具有多个源点和汇点的网络中的传输》，《欧洲物理快报》84，28005（2008）。[54] S. M. Ross，*Introduction to probability models*（学术出版社，2014）。[55] R. Rossi 和 N. Ahmed，《交互式图分析与可视化网络数据存储库》，《人工智能 AAAI 会议论文集》29，10.1609/aaai.v29i1.9277（2015）。[56] 匿名，《墨西哥大主教区地图》（2018），访问于2018年6月9日。