arXiv:2603.02339v1 [math.OC] 2 Mar 2026

面向能源受限赛车的计算高效且可由人类实施的最短圈速控制策略

Erik van den Eshof、Wytze de Vries、Mauro Salazar

摘要——本文提出一种经过严格证明的最优实时能量管理策略，适用于赛车，并能提供简单易行、可由人类驾驶员执行的控制提示。具体而言，我们首先通过庞特里亚金极小值原理（PMP）建立能量约束下的最短圈速控制问题，并利用Karush–Kuhn–Tucker（KKT）最优性条件推导最优策略和协态动力学。我们证明，最优控制策略遵循一种易于人类驾驶员实施的开关结构，从而无需采用可能引发危险的油门踏板主动覆盖控制，也无需发出令人分心的信号。此外，最优系统动力学的解析表达使我们能够将问题改写为一系列边值问题，并通过求根方法高效求解。结果表明，我们提出的方法能够计算出与基于直接最优控制的现有数值方法相同的全局最优控制策略，同时将计算时间从数秒大幅缩短至数毫秒。

I. 引言

随着电动方程式于2025年引入比赛中充电，以及2026年一级方程式规则大幅依赖电池能量部署 [1], [2], 能量管理在赛车运动中的重要性比以往任何时候都更加突出。赛车的高速特性要求能量管理算法具备较高的计算效率，并能与人类驾驶员安全协同，尽量减少控制权接管或分心情况。与此同时，鉴于赛车运动中的性能裕度通常很小，采用可证明最优的方法至关重要。在能量限制较轻的情况下，最优能量管理策略只需对输出功率进行小幅调整，因此车辆速度的变化也较小且可预测。然而，出于安全考虑，对驾驶员功率需求的主动覆盖通常受到严格的变化率限制，或被完全禁止，以确保驾驶员始终掌控车辆。当能量可用量十分有限时，这一限制就会成为瓶颈，例如在全电动动力总成中，为了节省能量，比赛时间最优策略可能需要大幅降低功率，从而导致明显的速度变化 [3]。为了在与竞争对手近距离行驶时确保安全，驾驶员必须在认知负荷尽可能低的情况下保持对车辆的控制。与驾驶员能够通过身体感知的轮胎抓地力极限不同，能量限制无法被直接感知。因此，在电池或燃料限制显著的比赛中，驾驶员需要依靠外部提供的提示或策略来管理能量

作者来自控制系统技术组、机械工程系、埃因霍温理工大学（TU/e），埃因霍温，5600MB，荷兰。电子邮箱：{r.c.p.v.d.eshof,w.a.b.d.vries,m.r.u.salazar}@tue.nl

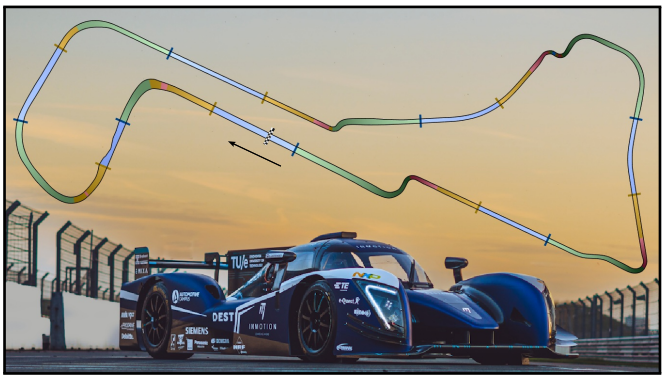

图1. 电动耐力赛车（InMotion） [4],通常受到严重的能量限制。赛道上的最佳滑行点和再生制动点分别以蓝色和金色标出。深色区域和浅色区域分别表示低速和高速。

用途：能量管理系统会指示驾驶员何时松开油门或启用再生制动，使驾驶员仅在安全的情况下执行这些操作。

相关文献： 随着对电池电能的依赖日益增加，能量管理已成为赛车运动中越来越重要的研究领域。与主要目标是尽量降低能耗的道路车辆不同，赛车运动着重于在严格的能量约束下尽量缩短单圈时间 [5]。研究人员采用简化的凸模型，研究了凸优化 [3], [6]–[8], 等技术在能量受限赛车应用中的作用；也研究了能够捕捉更复杂动力学、但缺乏实时应用所需计算效率的非线性规划（NLP） [9]–[11],。针对实时最优控制，研究人员应用序贯凸规划方法（SCP） [12], [13],和凸模型，利用庞特里亚金极小值原理（PMP） [14],推导最优策略，并通过模型预测控制（MPC） [15] 实现扰动抑制、采用等效单圈时间最小化策略（ELTMS） [16],，或将两者结合 [17]。这些方法大多局限于混合动力总成：其电动机与内燃机之间的功率分配受到主动控制，而车轮的大部分动力输出仍由驾驶员掌控。对于能量限制更为显著的情况，例如需要在比赛中加油或（尤其是）充电停站时的能量管理，最优控制要求主动接管车轮的动力输出 [3], [12]。虽然这种方式适用于自动驾驶赛车应用，但通常会受到赛车规则的限制；而且在有

人类驾驶员参与的情况下，难以安全实施 [1], [2]。在我们此前的工作中 [18], , 我们提出通过调整平滑的凸最优控制解，生成近似最优的邦邦控制输入供驾驶员执行，同时让驾驶员继续掌控动力输出。然而，该方法不具备全局最优性，且仅考虑通过滑行阶段节能，这意味着再生制动只能与摩擦制动器配合使用，从而限制了能量回收潜力。

据作者所知，目前尚不存在既能实时运行、又能由人类驾驶员执行，并且能够证明对赛车实现最优能量管理的方法。

贡献声明： 本文提出了一种能够实时运行且经过严格证明为最优的赛车能量管理方法。通过对凸能量管理问题的全局最优性所必需的 Karush–Kuhn–Tucker（KKT）条件进行解析推导 [19], , 我们深入了解了最优解的行为。由此我们发现，通过选择线性化动力总成损耗模型，最优解表现为动能与电池能量协态比的函数形式下的理想开关控制策略；人类驾驶员只需极少分心即可执行该策略，同时避免了可能存在安全风险的主动油门请求覆盖。随后，我们应用受约束庞特里亚金极大值原理推导最优协态动力学 [20], [21] ，并将问题构造为一组序贯边值问题，再利用求根方法高效求解。

II. 方法论

本节使用 KKT 条件和庞特里亚金极大值原理，推导能量受限赛车问题的最短圈速控制策略和最优动力学。首先，我们定义优化问题。

在先前的工作中，我们证明了能量管理策略对行驶空间轨迹的影响很小 [13]。因此，在能量管理问题的表述中，我们假设采用一条固定的、预先计算的基于曲率的轨迹。这样可以大幅简化控制问题，因为我们只需关注纵向动力学，而无需考虑空间轨迹优化。我们在单个赛车圈的距离域内运行 $s \in [s_0, s_\mathrm{f}]$，并将目标单圈时间 t_lap 定义为速度v 倒数沿此距离的积分：

$$t_\mathrm{lap} = \int_{s_0}^{s_\mathrm{f}} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(s)\,\mathrm{d}s = \int_{s_0}^{s_\mathrm{f}} \frac{1}{v(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{s_0}^{s_\mathrm{f}} \frac{1}{\sqrt{2\,E_\mathrm{kin}(s)/m}}\,\mathrm{d}s, \tag{1}$$

其中， E_kin 为动能， m 为车辆质量。我们选择动能作为状态，因为这样可以在距离域内得到有利的线性力动力学。因此，我们将状态和动力学定义如下：

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{kin}}{\mathrm{d}s}(s) = F_\mathrm{m}(s) - F_\mathrm{brk}(s) - F_\mathrm{d}(s,\kappa,E_\mathrm{kin}), \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{b}}{\mathrm{d}s}(s) = \begin{cases} F_\mathrm{m}(s)/\eta^{+} + F_{\mathrm{b},0}, & \text{if } F_\mathrm{m}(s) \geq 0, \\ F_\mathrm{m}(s)\cdot\eta^{-} + F_{\mathrm{b},0}, & \text{if } F_\mathrm{m}(s) < 0, \end{cases} \tag{3}$$

其中， F_d 是作用于车辆的总阻力， κ是沿赛道空间轨迹的曲率（先验已知）， η^{+} 和 η^{-} 分别是动力总成的驱动效率和能量回收效率，而 $F_{\mathrm{b},\,0}$ 表示辅助性、固定的能量需求。 F_m 是对应于电机功率需求的控制输入， F_brk 是制动力， E_b 是跟踪赛圈内累计消耗的（电池）能量的状态。我们的应用场景是电动赛车，但该方法论也适用于燃料受限的燃油汽车，只需将 E_b 视为累计消耗的燃料能量。

我们对电池施加动力总成限制，具体如下：

$$\begin{aligned} F_\mathrm{m}(s) &\leq F^{+}_\mathrm{PT}(s, E_\mathrm{kin}), \\ F_\mathrm{m}(s) &\geq F^{-}_\mathrm{PT}(s, E_\mathrm{kin}), \end{aligned} \tag{4}$$

其中， $F^{+}{}_\mathrm{PT}$ 为最大功率输出，对应全油门工况； $F^{-}{}_\mathrm{PT}$ 为再生制动力的上限，对于内燃机汽车，该值设为零。

与密切相关的研究 [6], [14]–[18], 相比，我们通过限制纵向力来约束抓地力，而非通过设定动能上界来表征轮胎抓地力极限，

$$\begin{aligned} F_\mathrm{m}(s) - F_\mathrm{brk}(s) &\leq F^{+}_\mathrm{grip}(s,\kappa,E_\mathrm{kin}), \\ F_\mathrm{m}(s) - F_\mathrm{brk}(s) &\geq F^{-}_\mathrm{grip}(s,\kappa,E_\mathrm{kin}), \end{aligned} \tag{5}$$

其中， $F^{\pm}{}_\mathrm{grip}$ 分别为抓地力的上限和下限。这种方法确保我们的动能协态动力学中仅出现瞬时跳变，因为只有在弯道顶点处才会达到与控制无关的状态限制。我们将在第 II-B 节中对此作更深入的讨论，并说明其优势。此外，这种力极限表述可直接根据可能由数据驱动的 *g-g-v* 包络线限制 [13], [22]–[24], 推导得出，也避免了为求得最大动能上界而进行预求解。关于这些限制和阻力的定义方式，详见附录。

完整的最优控制问题，其状态 $\mathbf{x}(s) := \{E_\mathrm{kin}, E_\mathrm{b}\}$ 与控制 $\mathbf{u}(s) := \{F_\mathrm{m}, F_\mathrm{brk}\}$ 表述如下：

问题1： （能量受限圈时优化）。最小圈时控制策略是下列问题的解

$$\min_{\mathbf{u}(s),\mathbf{x}(s)} \quad \int_{s_0}^{s_\mathrm{f}} \frac{1}{\sqrt{2\,E_\mathrm{kin}(s)/m}}\,\mathrm{d}s$$

s.t.

Vehicle Dynamics:	(2)
Battery/Fuel Dynamics:	(3)
Powertrain Limits:	(4)
Grip Limits:	(5)
Braking Non-negativity:	$F_\mathrm{brk}(s) \geq 0$
Energy Limits:	$E_\mathrm{b}(s_\mathrm{f}) \leq \Delta E_{\mathrm{b,max}} + E_\mathrm{b}(s_0)$,

其中$\Delta E_{\mathrm{b},\ \mathrm{max}}$ 是该赛圈的能量预算。该优化问题的哈密顿函数写作

$$\begin{aligned} H(x,u,\lambda) = {} & \frac{1}{\sqrt{2\,E_\mathrm{kin}(s)/m}} + \lambda_\mathrm{kin}\cdot\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{kin}}{\mathrm{d}s} + \lambda_\mathrm{b}\cdot\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{b}}{\mathrm{d}s} \\ & + \mu^{+}_\mathrm{grip}(F_\mathrm{m} - F_\mathrm{brk} - F^{+}_\mathrm{grip}) - \mu^{-}_\mathrm{grip}(F_\mathrm{m} - F_\mathrm{brk} - F^{-}_\mathrm{grip}) \end{aligned}$$

$$+\mu^+_{\mathrm{PT}}(F_\mathrm{m}-F^+_{\mathrm{PT}})-\mu^-_{\mathrm{PT}}(F_\mathrm{m}-F^+_{\mathrm{grip}})-\mu_{\mathrm{brk}}F_{\mathrm{brk}}, \quad (6)$$

其中 $\lambda_{\{\mathrm{kin,b}\}}$ 是协态，$\mu^{\pm}_{\{\text{抓地力，PT，制动}\}}$ 是相应约束的乘子。请注意，为简洁起见，在本方程及本文余下部分中，我们省略了完整的函数记法（对 s， E_{kin}的依赖关系）。接下来，根据庞特里亚金极大值原理，我们将协态动力学推导为哈密顿函数对状态的负偏导数：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\lambda_{\mathrm{kin}}}{\mathrm{d}s} &= -\frac{\partial H}{\partial E_{\mathrm{kin}}} = (2\,E_{\mathrm{kin}}/m)^{-\frac{3}{2}}/m+\lambda_{\mathrm{kin}}\frac{\partial F_\mathrm{d}}{\partial E_{\mathrm{kin}}}\\ &\quad-\mu^+_{\mathrm{grip}}\frac{\partial F^+_{\mathrm{grip}}}{\partial E_{\mathrm{kin}}}-\mu^-_{\mathrm{grip}}\frac{\partial F^-_{\mathrm{grip}}}{\partial E_{\mathrm{kin}}}\\ &\quad-\mu^+_{\mathrm{PT}}\frac{\partial F^+_{\mathrm{PT}}}{\partial E_{\mathrm{kin}}}-\mu^-_{\mathrm{PT}}\frac{\partial F^-_{\mathrm{PT}}}{\partial E_{\mathrm{kin}}},\\ \frac{\mathrm{d}\lambda_\mathrm{b}}{\mathrm{d}s} &= -\frac{\partial H}{\partial E_\mathrm{b}} = 0,\end{aligned} \quad (7)$$

利用终端条件、电池协态为常数这一事实以及约束乘子的对偶可行性（$\mu\geq 0$），我们可以推导出电池协态的符号：

$$\lambda_\mathrm{b}(s_\mathrm{f})=\mu_{\mathrm{b,max}} \implies \lambda_\mathrm{b}(s)=\mu_{\mathrm{b,max}}\geq 0 \quad \forall s. \quad (8)$$

接下来，我们将驻定条件定义如下：

$$\begin{aligned}0\in\tfrac{\partial H}{\partial F_\mathrm{m}} &= \begin{cases}\lambda_{\mathrm{kin}}+\lambda_\mathrm{b}\cdot\left(\eta^+ + F_\mathrm{m}\frac{\partial\eta^+}{\partial F_\mathrm{m}}\right)/\eta^{+2}\\ \quad+\mu^+_{\mathrm{grip}}-\mu^-_{\mathrm{grip}}+\mu^+_{\mathrm{PT}}-\mu^-_{\mathrm{PT}}, & \text{if } F_\mathrm{m}\geq 0,\\ \lambda_{\mathrm{kin}}+\lambda_\mathrm{b}\cdot\left(\eta^- + F_\mathrm{m}\frac{\partial\eta^-}{\partial F_\mathrm{m}}\right)\\ \quad+\mu^+_{\mathrm{grip}}-\mu^-_{\mathrm{grip}}+\mu^+_{\mathrm{PT}}-\mu^-_{\mathrm{PT}}, & \text{if } F_\mathrm{m}<0,\end{cases}\\ 0\in\tfrac{\partial H}{\partial F_{\mathrm{brk}}} &= -\lambda_{\mathrm{kin}}-\mu^+_{\mathrm{grip}}+\mu^-_{\mathrm{grip}}-\mu_{\mathrm{brk}}.\end{aligned} \quad (9)$$

互补松弛规定：

$$\begin{aligned}\mu^+_{\mathrm{grip}}\left(F_\mathrm{m}-F_{\mathrm{brk}}-F^+_{\mathrm{grip}}\right)&=0,\\ \mu^-_{\mathrm{grip}}\left(-F_\mathrm{m}+F_{\mathrm{brk}}+F^+_{\mathrm{grip}}\right)&=0,\\ \mu^+_{\mathrm{PT}}\left(F_\mathrm{m}-F^+_{\mathrm{PT}}\right)&=0,\\ \mu^-_{\mathrm{PT}}\left(-F_\mathrm{m}+F^+_{\mathrm{PT}}\right)&=0,\\ \mu_{\mathrm{brk}}\left(-F_{\mathrm{brk}}\right)&=0.\end{aligned} \quad (10)$$

由这两个条件可得出控制输入关于协态变量的策略。在赛车应用中，车辆在大部分赛圈内都工作于动力总成限制所对应的固定工作点，即全油门工况或最大再生制动。因此，我们可以假设 $\frac{\partial\eta^\pm}{\partial F_\mathrm{m}}=0$，也就是说，通过在这些工作点附近对损耗模型进行线性化，动力总成效率与力需求无关。基于这一假设，我们得到以下关于协态变量的最优控制策略：

$$\begin{aligned}F_\mathrm{m} &\begin{cases}=\min(F^+_{\mathrm{PT}},F^+_{\mathrm{grip}}), & \text{if } \lambda_{\mathrm{kin}}/\lambda_\mathrm{b}<-1/\eta^+,\\ \in[0,\min(F^+_{\mathrm{PT}},F^+_{\mathrm{grip}})], & \text{if } \lambda_{\mathrm{kin}}/\lambda_\mathrm{b}=-1/\eta^+,\\ =0, & \text{if } -1/\eta^+<\lambda_{\mathrm{kin}}/\lambda_\mathrm{b}<-\eta^-,\\ \in[\max(F^-_{\mathrm{PT}},F^-_{\mathrm{grip}}),0], & \text{if } \lambda_{\mathrm{kin}}/\lambda_\mathrm{b}=-\eta^-,\\ =\max(F^-_{\mathrm{PT}},F^-_{\mathrm{grip}}), & \text{if } -\eta^-<\lambda_{\mathrm{kin}}/\lambda_\mathrm{b},\end{cases}\\ F_{\mathrm{brk}} &\begin{cases}=0, & \text{if } \lambda_{\mathrm{kin}}<0,\\ =\max(F^-_{\mathrm{PT}},F^-_{\mathrm{grip}})-F^-_{\mathrm{grip}}, & \text{if } \lambda_{\mathrm{kin}}>0,\\ \in[0,\max(F^-_{\mathrm{PT}},F^-_{\mathrm{grip}})-F^-_{\mathrm{grip}}], & \text{if } \lambda_{\mathrm{kin}}=0.\end{cases}\end{aligned} \quad (11)$$

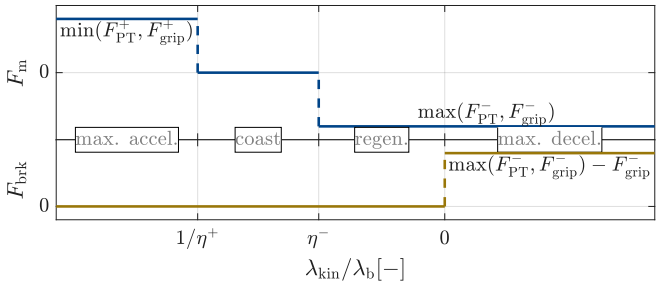

图 2. 最优开关控制策略关于协态比的函数关系。

该策略如图 2 所示。图中表明，对动力总成采用线性损耗模型时，最优控制策略遵循具有明确阶段划分的开关策略：当 $\lambda_{\mathrm{kin}}/\lambda_\mathrm{b}<-1/\eta^+$ 时，驾驶员负责尽可能提高加速性能，并通过调节油门跟随附着极限，或将油门踏板踩到底以触发动力总成限制。当 $-1/\eta^+<\lambda_{\mathrm{kin}}/\lambda_\mathrm{b}<-\eta^-$ 时，驾驶员应让车辆滑行，即松开油门，不进行任何制动。当 $-\eta^-<\lambda_{\mathrm{kin}}/\lambda_\mathrm{b}$ 时，驾驶员应尽可能利用再生制动，并避免使用机械摩擦制动器，直至最晚的制动点——也就是附着极限再次起作用的位置——再减速驶完弯道。这些明确的阶段使车辆能够在有人类驾驶员并行驾驶时安全使用，因为离散信号让驾驶员能够保持控制，无需主动覆盖油门踏板或制动输入。

为完成公式推导，我们利用控制策略（6）和驻定条件（4），推导约束乘子的方程如下

$$\begin{aligned}\mu^+_{\mathrm{grip}} &= \begin{cases}-(\lambda_{\mathrm{kin}}+\lambda_\mathrm{b}/\eta^+), & \text{if } \lambda_{\mathrm{kin}}/\lambda_\mathrm{b}<-1/\eta^+\\ & \text{and } F^+_{\mathrm{grip}}<F^+_{\mathrm{PT}}\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}\\ \mu^-_{\mathrm{grip}} &= \begin{cases}\lambda_{\mathrm{kin}}+\lambda_\mathrm{b}\cdot\eta^-, & \text{if } -\eta^-<\lambda_{\mathrm{kin}}/\lambda_\mathrm{b}\\ & \text{and } F^-_{\mathrm{grip}}>F^-_{\mathrm{PT}},\\ \lambda_{\mathrm{kin}}, & \text{if } 0<\lambda_{\mathrm{kin}}/\lambda_\mathrm{b}\\ & \text{and } F^-_{\mathrm{grip}}<F^-_{\mathrm{PT}},\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}\\ \mu^+_{\mathrm{PT}} &= \begin{cases}-(\lambda_{\mathrm{kin}}+\lambda_\mathrm{b}/\eta^+), & \text{if } \lambda_{\mathrm{kin}}/\lambda_\mathrm{b}<-1/\eta^+\\ & \text{and } F^+_{\mathrm{PT}}<F^+_{\mathrm{grip}},\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}\\ \mu^-_{\mathrm{PT}} &= \begin{cases}-(\lambda_{\mathrm{kin}}+\lambda_\mathrm{b}\cdot\eta^-), & \text{if } -\eta^-<\lambda_{\mathrm{kin}}/\lambda_\mathrm{b}<0\\ & \text{and } F^-_{\mathrm{PT}}>F^-_{\mathrm{grip}},\\ \lambda_\mathrm{b}\cdot\eta^-, & \text{if } 0<\lambda_{\mathrm{kin}}/\lambda_\mathrm{b}\\ & \text{and } F^-_{\mathrm{PT}}>F^-_{\mathrm{grip}},\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}\\ \mu_{\mathrm{brk}} &= \begin{cases}0, & \text{if } 0<\lambda_{\mathrm{kin}}/\lambda_\mathrm{b}\\ & \text{and } F^-_{\mathrm{PT}}>F^-_{\mathrm{grip}},\\ \lambda_\mathrm{b}/\eta^+, & \text{if } \lambda_{\mathrm{kin}}/\lambda_\mathrm{b}<-1/\eta^+\\ & \text{and } F^+_{\mathrm{grip}}<F^+_{\mathrm{PT}},\\ \lambda_\mathrm{b}\cdot\eta^-, & \text{if } \eta^-<\lambda_{\mathrm{kin}}/\lambda_\mathrm{b}<0\\ & \text{or } (0<\lambda_{\mathrm{kin}}/\lambda_\mathrm{b} \text{ and } F^-_{\mathrm{grip}}>F^-_{\mathrm{PT}}),\\ -\lambda_{\mathrm{kin}}, & \text{otherwise.}\end{cases}\end{aligned} \quad (12)$$

A. 奇异点

需要指出的是，在各个不同的切换点 $\lambda_{\text{kin}} = \{-\lambda_{\text{b}}/\eta^{+}, -\lambda_{\text{b}}\eta^{-},\ 0\}$，式（11）中的控制策略并未明确定义。实际中，只有当这些点存在协态平衡点时，才会出现这种不确定性。要形成平衡，$\mathrm{d}\lambda_{\text{kin}}\mathrm{d}s = 0$ 必须成立；求解该式可得尚未明确定义控制策略的奇异速度：

$$E_{\text{kin,sing}} = \frac{m}{2}\left(-\frac{\partial F_{\text{d}}}{\partial E_{\text{kin}}} m\{-\lambda_{\text{b}}/\eta^{+}, -\lambda_{\text{b}}\cdot\eta^{-}, 0\}\right)^{-\frac{2}{3}}. \quad (13)$$

在这些协态平衡点上，最优解会尝试跟踪这一临界动能。这对应着一种不理想的情况：由于能量限制极为严苛，纯粹的滑行-能量回收策略不可行，驾驶员必须调节油门操作，以尽可能缩短单圈时间。实际应用中，我们会通过减少赛圈数、为每圈分配更多能量，或收紧动力系统上限 $F^{+}{}_{\text{PT}}$（即降低全油门功率输出），使其不达到临界速度，从而避免这种情况。因此，在我们的实现中，我们使用定义（13）来检测不可行的能量限制，并发出警告，提示增加能量预算或降低全油门功率输出。另一种方案是让车辆切换到速度控制模式，并像公路汽车的巡航控制系统那样覆盖驾驶员的功率控制；如果对$E_{\text{kin,sing}}$ 的改变较小，这仍可能是一个安全的选择。无论如何，这一考量完善了我们对连续最优解动力学的定义。

B. 跳跃条件

方程（2）、（3）、（7）、（11）和（12）完整定义了连续最优动力学。然而，对于轮胎抓地力而言，某些动能与曲率的组合会导致轮胎纵向力 F_{m}和 F_{brk}不存在可行取值。这一点从附录中的定义显而易见，我们还在附录中推导了达到这些限制时的动能表达式。当车速达到相应值时，这些限制便会生效，此时所有可用的轮胎抓地力都用于提供横向力，对应于 $F^{+}{}_{\text{抓地力}} = F^{-}{}_{\text{抓地力}} = 0$，从而限制汽车通过弯道时的最高速度。由于这些限制是动能状态固有的上限，激活该约束会导致动能协态值 [21]发生不连续跳跃。因此，为确保跳跃点处的轮胎纵向力为零，跳跃条件如下：

$$\lambda_{\text{kin}}(s_i^{-}) \begin{cases} \in [\lambda_{\text{kin}}(s_i^{+}), -\lambda_{\text{b}}\cdot\eta^{-}], & \text{if } F_{\text{m}}(s^{-}) - F_{\text{brk}}(s^{-}) = 0, \\ = -\lambda_{\text{b}}\cdot\eta^{-}, & \text{if } F_{\text{m}}(s^{-}) - F_{\text{brk}}(s^{-}) < 0, \end{cases}$$
$$\lambda_{\text{kin}}(s_i^{+}) \begin{cases} \in [-\lambda_{\text{b}}/\eta^{+}, \lambda_{\text{kin}}(s_i^{-})], & \text{if } F_{\text{m}}(s^{+}) - F_{\text{brk}}(s^{+}) = 0, \\ = -\lambda_{\text{b}}/\eta^{+}, & \text{if } F_{\text{m}}(s^{+}) - F_{\text{brk}}(s^{+}) > 0, \end{cases} \quad (14)$$

其中，$s_i^{\pm}$ 分别表示跳跃点前后无限接近该点的位置。利用连续动力学，我们可以模拟并预测两个相邻跳跃点之间的最优解，如图 3 所示。

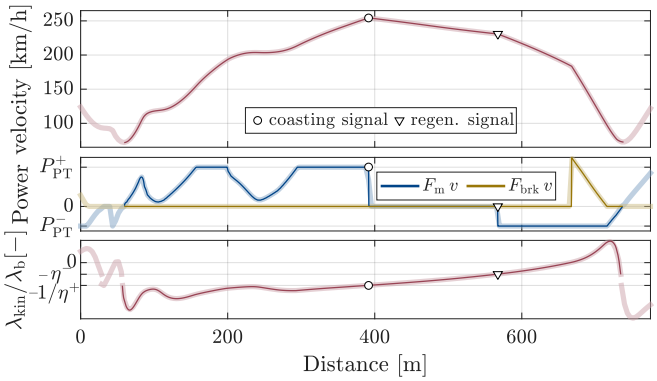

图3. 通过积分最优解动力学，得到位于连续弯道弯道顶点处两个协态跳跃点之间的单一直道的最优轨迹。只需两个离散信号即可指导驾驶员管理能量，从而最大限度地减少认知负荷和注意力分散。以较浅颜色显示了该问题的直接求解法（非线性规划）结果，与协态动力学的推导相符并验证了该推导。

算法1 给定 λ_{b}时问题1的求解过程

忽略能量限制
将 s_0 设为曲率最高的弯道顶点
$E_{\text{kin}}(s_0) = \arg\min_{E_{\text{kin}}} |F^{+}{}_{\text{抓地力}}(s_0) - F^{-}{}_{\text{抓地力}}(s_0)|$
$i \leftarrow 0$
当 $s_i \le s_{\text{f}}$ **时执行**
通过对 $s \in [s_i, s_{\text{f}}]$ 反复积分来最小化 $\lambda_{\text{kin}}(s_i^{+})$
直到弯道顶点抓地力限制被违反 ▷二分法
$s_{i+1} = $极小化自变量$_{s\in[s_i\,s_{\text{f}}]} |F^{+}{}_{\text{抓地力}} - F^{-}{}_{\text{抓地力}}|$ ▷下一个弯道顶点
将 $\{x^{\star}, u^{\star}, \lambda^{\star}_{\text{kin}} | s \in [s_i, s_{i+1}]\}$ 追加到最优解
$i \leftarrow i + 1$
end

C. 求解算法

通过推导连续最优解动力学方程，我们将最优控制问题简化为求解能量限制的取值，即能量限制约束乘子 $\lambda_{\text{b}} = \mu_{\text{b,max}}$，以及在少数弯道顶点处动能协态瞬时跳变的幅值，从而显著降低计算复杂度。这将问题简化为一组序贯边值问题，可用单重打靶法 [21]求解。此外，我们可以利用单调性并采用高效的求根方法，快速得到最优解。增大跳变幅值会导致更晚滑行和更晚制动，反之亦然。直观上，这类似于驾驶员在弯道前制动过早或过晚，因此通过检查车辆是否违反了顶点最高速度，即可判断应增大还是减小跳变幅值。我们提出的求解方法如算法1所示，采用二分法对跳变后的动能协态值进行最小化。算法1可嵌套于另一个二分算法中，该算法最大化 λ_{b}，直至 $E_{\text{b}}(s_{\text{f}}) \le \Delta E_{\text{b,max}} + E_{\text{b}}(s_0)$约束被违反 [21]，从而确定 λ_{b} 并完整求解该问题。

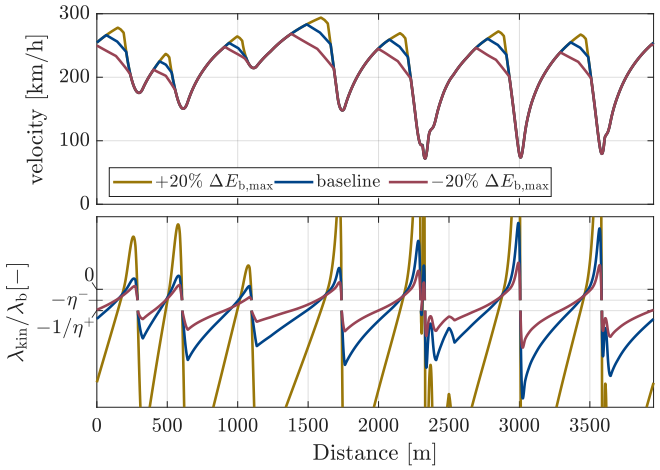

图4. 三种不同能量预算下，佐尔德赛道完整一圈中的速度和协态比轨迹。随着协态比越过阈值，将触发单圈时间最优滑行和再生制动阶段。

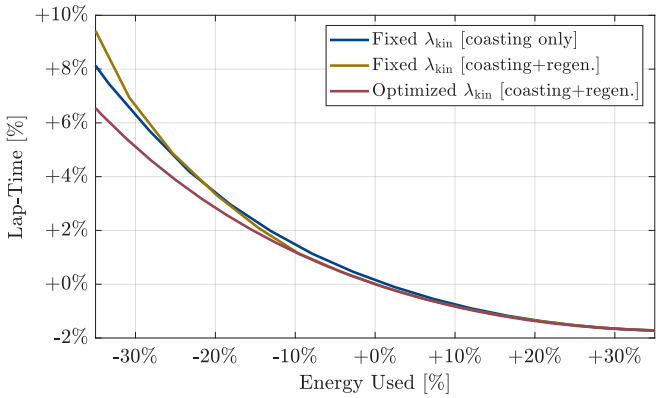

图5. 不同方法在能量预算方面的单圈时间收益。自适应协态轨迹具有显著优势，并且能量限制越严苛，其收益越大。对于固定协态轨迹和严苛能量限制，再生制动阶段可能会带来不利影响，因为在某些弯道中，赛车可能过早且过快地减速。

III. 结果

在本节中，我们评估所提出方法的性能。我们将该方法与通过非线性规划求解器得到的数值解进行比较，比较指标为求解时间和精度。接下来，我们探讨自适应动能协态轨迹在能量限制差异较大时的潜在优势。首先，我们考察佐尔德赛道完整一圈在三种不同能量预算下的结果，如图4所示。由协态比轨迹决定，可识别出最优滑行与再生制动阶段；对于完整一圈，每圈只需向驾驶员传递七次瞬时滑行提示，随后是能量回收提示，即可实现单圈时间最优的能量管理。图1给出了最优滑行点与能量回收点的另一种可视化，表明最优滑行点与能量回收点始终位于直道末端附近，此处单圈时间对能量部署变化的敏感度较小。这意味着这些信号是在车辆处于车辆动力学稳定状态、且驾驶员并未忙于在车辆极限下过弯时传递给驾驶员的，而在极限过弯时此类信号可能构成不必要的干扰。

A. 与直接法的比较

先前的研究使用非线性规划等直接法求解能量管理最优控制问题。如图3所示，通过我们的间接法可以获得相同的解，从而验证了我们对协态动力学的推导。我们的间接求解方法论具有双重优势：首先，它无需依赖第三方求解器。其次，求解算法的简洁性使其轻量且高效，将求解时间从秒级 [3], [18]缩短至毫秒级，为在比赛过程中针对变化条件进行实时调整铺平了道路。

B. 最优协态轨迹的优势

在以往的赛车实现中 [16], [18],，为实现简单且轻量的积分并避免依赖第三方求解器，协态轨迹被假设为固定不变。在这些实现中，通过反馈回路调整协态阈值，以应对模型误差和其他扰动。正如本文所展示的，协态动力学会受到约束激活时机和位置的影响，并取决于 λ_b，即能量限制的严重程度。因此，对于不断变化的 λ_b，假设 λ_{kin}轨迹保持不变会导致次优结果。图5直观展示了这一点：我们将优化后的λ_{kin} 方法与一种采用基于标称情况的固定 λ_{kin} 轨迹但调整了阈值的方法，以及 [18],提出的仅考虑滑行阶段的方法进行了比较。优化后的 λ_{kin} 方法是全局最优的，可作为另外两种方法的基准。仅考虑滑行阶段的方法在整个能量预算范围内都表现不如另一种方法，但在能量限制更强时，其表现优于同时包含能量回收阶段的方法。这是因为固定的协态轨迹可能导致过早的能量回收信号，使驾驶员在进入弯道前过快且过早地减速，从而造成不必要的额外单圈时间。

IV. 结论

本文提出了一种可证明最优且具备实时处理能力的赛车能量管理方法。通过推导最优控制策略和协态动力学，我们将能量管理问题转化为一组边值问题，并利用简单算法高效求解。此外，我们明确确定了最优控制解遵循人类可执行的邦邦轨迹所需的条件：当协态轨迹越过取决于动力总成的阈值时，控制提示便会触发。我们将该方法与非线性规划方法进行了比较，结果表明，尽管两者得到的解完全相同，我们提出的方法求解速度却快了数个数量级，

为自适应车载实现铺平了道路。此外，我们还表明，与先前提出的固定协态方法相比，最优动能协态轨迹能够显著改善单圈时间。未来，我们计划通过赛道测试验证人在回路中的方法实现，并研究自适应控制方案，以应对扰动和条件变化。此外，该方法并不限于我们的纯电动案例研究，还可轻松扩展并应用于混合动力单元。

附录

车辆动力学模型与约束

本节包含我们在本文中所使用的车辆动力学模型参数化与公式表述。更一般而言，所提出的方法论也可应用于其他公式表述。

首先，我们将作用于车辆的总阻力定义为

$$F_{\mathrm{d}}(s,\kappa,E_{\mathrm{kin}}) = c_{\mathrm{d}}\,A\,\rho\,E_{\mathrm{kin}}(s)/m + c_{\kappa}|\kappa(s)|E_{\mathrm{kin}}(s) + c_{\mathrm{r}}\,F_{\mathrm{z}}(s,E_{\mathrm{kin}}), \quad (15)$$

其中 c_{d} 描述空气阻力系数， A为气动参考面积， ρ为空气密度， c_{κ} 为描述转弯阻力的系数， c_{r} 描述滚动阻力， F_{z}为垂直力 [6], [25]。垂直力定义为

$$F_{\mathrm{z}}(s,E_{\mathrm{kin}}) = c_{\mathrm{l}}\,A\,\rho\,E_{\mathrm{kin}}(s)/m + m\,g, \quad (16)$$

其中 c_{l} 为下压力系数， g 为重力加速度。

动力总成限制被定义为功率限制：

$$F^{\pm}_{\mathrm{PT}}(s,E_{\mathrm{kin}}) = P^{\pm}_{\mathrm{PT}}/\sqrt{2\,E_{\mathrm{kin}}(s)/m}, \quad (17)$$

其中 $P^{\pm}{}_{\mathrm{PT}}$ 分别为电机功率的上限和下限。

最后，抓地力限制被定义为摩擦椭圆，并考虑下压力：

$$F^{\pm}_{\mathrm{grip}}(s,\kappa,E_{\mathrm{kin}}) = \pm\mu_{\mathrm{x}}\sqrt{F_{\mathrm{z}}(s,E_{\mathrm{kin}})^2 - (F_{\mathrm{y}}(s,\kappa,E_{\mathrm{kin}})/\mu_{\mathrm{y}})^2}, \quad (18)$$

其中$\mu_{\{\mathrm{x,y}\}}$ 分别为纵向和横向抓地力系数， F_{y} 为作用在车辆上的横向（离心）力，该力通过曲率和动能求得，如下所示

$$F_{\mathrm{y}}(s,\kappa,E_{\mathrm{kin}}) = 2\,\kappa(s)\,E_{\mathrm{kin}}(s). \quad (19)$$

通过这些公式，我们还可以推导出在不违反抓地力限制的情况下可能达到的绝对最高动能，即发生协态跳跃时的动能限制：

$$E_{\mathrm{kin,jump}}(s,\kappa) = \begin{cases} \dfrac{mg}{\dfrac{2|\kappa(s)|}{\mu_y} - \dfrac{c_l A\rho}{m}}, & \text{if } \dfrac{2|\kappa(s)|}{\mu_y} - \dfrac{c_l A\rho}{m} > 0, \\ +\infty, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (20)$$

参考文献

[1] F 1国际汽车联合会（FIA），《2026年一级方程式规则——C部分：[技术] ——第15版》，2026年12月。[2] ——，《国际汽联电动方程式世界锦标赛——2025—2026年技术规则》，2025年6月。[3] J. van Kampen、T. Herrmann、T. Hofman 和 M. Salazar，《热约束下全电动赛车的最优耐力赛策略》，IEEE控制系统技术汇刊，2024年。[4] (2023) InMotion全电动LMP3赛车。InMotion。网址：https://www.inmotion.tue.nl/en/about-us/cars/revolution。[5] O. Borsboom、M. Salazar 和 T. Van Keulen，《混合动力汽车速度与功率分配的联合燃油最优控制》，IEEE智能车辆汇刊，第6卷，2024年，第2776—2788页。[6] S. Ebbesen、M. Salazar、P. Elbert、C. Bussi 和 C. H. Onder，《混合动力赛车的最短时间控制策略》，IEEE控制系统技术汇刊，第26卷第1期，第233—247页，2018年。[7] S. Boyd 和 L. Vandenberghe，《凸优化》。剑桥大学出版社，2004年。[8] O. Borsboom、C. A. Fahdzyana、T. Hofman 和 M. Salazar，《电动赛车最短圈速设计与控制的凸优化框架》，IEEE车辆技术汇刊，第70卷第9期，第8478—8489页，2021年。[9] X. Liu、A. Fotouhi 和 D. Auger，《具有法规限制和热约束的电动方程式赛车最优能量管理》，《应用能源》，第279卷，2020年。[10] D. Limebeer、G. Perantoni 和 A. Rao，《一级方程式赛车能量回收系统的最优控制》，《国际控制杂志》，第87卷第10期，第2065—2080页，2014年。[11] P. Duhr、D. Buccheri、C. Balerna、A. Cerofolini 和 C. H. Onder，《混合动力一级方程式动力单元的最短比赛时间能量分配策略》，IEEE车辆技术汇刊，2023年。[12] T. Herrmann、F. Sauerbeck、M. Bayerlein、M. Betz、J. an Lienka mp，《面向自动驾驶电动赛车的基于优化且可实时运行的能量策略》，SAE国际互联与自动驾驶车辆期刊，2021年，即将刊出。[13] E. van den Eshof、J. van Kampen 和 M. Salazar，《用于赛车自由轨迹最短圈速优化的高效计算框架》，载于《欧洲控制会议》，2026年，审稿中。arXiv预印本 arXiv:2511.13522。[14] M. Salazar、P. Elbert、S. Ebbesen、C. Bussi 和 C. H. Onder，《混合动力赛车的最短时间控制策略》，IEEE控制系统技术汇刊，第25卷第6期，第1921—1934页，2017年。[15] M. Salazar、C. Balerna、P. Elbert、F. P. Grando 和 C. H. Onder，《采用两级模型预测控制方案的混合动力赛车实时控制算法》，IEEE车辆技术汇刊，第66卷第12期，第10 911—10 922页，2017年。[16] M. Salazar、C. Balerna、E. Chisari、C. Bussi 和 C. H. Onder，《混合动力赛车的等效单圈时间最小化策略》，载于《IEEE决策与控制会议论文集》，2018年。[17] M.-P. Neumann、G. Fieni、C. Balerna、P. Duhr、A. Cerofolini 和 C. H. Onder，《采用前馈气缸停用的一级方程式动力单元底层在线控制》，IEEE车辆技术汇刊，第72卷第7期，第8382—8397页，2023年。[18] E. van den Eshof、J. van Kampen 和 M. Salazar，《通过基于优化的控制实现电动赛车的人机协同能量与热管理》，《欧洲控制杂志》，第86卷，页码101293，2025年。[19] P. Y. Papalambros 和 D. J. Wilde，《最优设计原理：建模与计算》，第3版。剑桥大学出版社，2017年。[20] D. Bertsekas，《动态规划与最优控制》，第4版。Athena Scientific，1995年。[21] T. van Keulen、J. Gillot、B. de Jager 和 M. Steinbuch，《状态约束最优控制问题的求解及其在混合动力汽车功率分配控制中的应用》，《自动化》，第50卷，2014年，第187—192页。[22] P. Duhr、A. Sandeep、A. Cerofolini 和 C. H. Onder，《赛车最短圈速能量管理的凸性能包络》，IEEE车辆技术汇刊，2022年。[23] M. Piccinini、S. Taddei、M. Piazza 和 F. Biral，《g-g-v约束公式对在线车辆最短时间轨迹规划的影响》，IFAC-PapersOnLine，第58卷第10期，第87—93页，2024年。[24] W. F. Milliken 和 D. L. Milliken，《赛车车辆动力学》，第1版。SAE国际，1995年。[25] L. Guzzella 和 A. Sciarretta，《车辆推进系统：建模与优化导论》，第2版。施普林格·柏林·海德堡，2007年。