arXiv:2603.02347v1 [math.AG] 2 Mar 2026

某些极小阿贝尔纤维化的奇异纤维 Kodaira 型分类

YOON-JOO KIM

摘要。设 $X \longrightarrow S$ 是一条相对维数为 n 、底空间为曲线的极小阿贝尔纤维化。我们对所有具有 $(n-1)$ 维“阿贝尔簇部分”的可能奇异纤维 X_s。进行分类。这将 Kodaira 关于椭圆纤维化的工作，以及 Matsushita 和 Hwang–Oguiso 关于拉格朗日纤维化的工作统一到一个框架中。分类分为三部分：半稳定、不稳定和多重。多重纤维又分为三种：类半稳定、混合和类不稳定。

目录

1. 引言 2 1.1. 证明策略 5 致谢 6 2. 模型与 δ-正则性 6 2.1. 极小模型与 t-自同构概形 6 2.2. δ-正则性 8 2.3. 重数与半稳定性 9 2.4. t-自同构概形的对偶 11 2.5. 魏尔斯特拉斯模型 13 3. 中心纤维的不可约分支 15 3.1. 正规化后的不可约分支 15 3.2. 未经正规化的不可约分支 17 3.3. 不可约纤维：不稳定情形 20 3.4. 不可约纤维：半稳定情形 24 4. 剪切与解缠 25 4.1. 阿尔巴尼斯态射与剪切 25 4.2. 解缠 27 5. 非重中心纤维的分类 30 5.1. 半稳定纤维化 30 5.2. 不稳定纤维化 34 5.3. Néron分支群 36 6. 基变换行为 39 6.1. 惯性作用 39 6.2. 不稳定纤维化的半稳定基变换 42 7. 重中心纤维的分类 50 7.1. 非多重基变换 50 7.2. 基变换至光滑纤维化 53 7.3. 基变换至半稳定纤维化 55

日期：2026年3月4日。

7.4. 基变换至不稳定纤维化 628. 例子 69附录A. 辅助结果 72A.1. 代数群与作用 73A.2. 阿尔巴尼斯态射 76A.3. 通过导子子概形研究非正规概形 77参考文献 79

1. 引言

Kodaira 对极小椭圆曲面 f 中可能出现的所有纤维 X_s 进行了分类$X \longrightarrow S$。除了光滑椭圆曲线（I_0）外，还有有节点的有理曲线（I_1）以及由 $\mathbb{P}^1$ 的 $r \geq 2$ 个副本组成的环（I_r），称为半稳定纤维。还有 II、III、IV、$\mathrm{I}^*_{r\geq 0}$、II^*、III^* 和 IV^* 型纤维，称为不稳定纤维。这些纤维虽非半稳定，但因具有光滑点，仍易于处理。最后，处处不光滑的纤维称为多重纤维。它们必定具有$X_s = m \cdot X_{s,\mathrm{red}}$ 的形式，而其约化$X_{s,\mathrm{red}}$ 是上述 I_r 型半稳定纤维。Kodaira 分类在他研究紧复曲面 [的过程中发挥了重要作用 Kod60；Kod63] ，后来 Néron[N64]又在代数框架下重新得到了这一分类。参见 [Bar+04，§V.7] ，其中给出了精美的图示说明和简化的证明。

极小椭圆纤维化的高维类比是极小阿贝尔纤维化，即在光滑曲线 S 上对 n 维阿贝尔簇进行的平坦射影退化 $f\colon X \longrightarrow S$，并且按照极小模型纲领的意义，它是相对极小的。一个自然的问题是，这类纤维化的奇异纤维是否可以分类。一般而言，这个问题难以处理，现有文献大多转而通过允许分歧基变换，研究其半稳定约化性质。这一视角对于极化阿贝尔簇模叠$A_{n,\,d}$ 的紧化问题十分重要。

然而需要指出，Kodaira 最初的意图是理解总体空间 X（在他的研究中是曲面）。换言之，若目标是理解总体空间X，最好直接分析纤维 X_s。这类尝试最初出现在对卡拉比–丘簇的研究中，但据我们所知，最成功的成果是针对代数辛簇取得的。在相对维数2中，Matsushita[Mat01] 对光滑辛四维簇上拉格朗日纤维化的余维1 奇异纤维进行了分类。Hwang–Oguiso [HO09；HO11；HO16]随后将这一结果推广到了高维拉格朗日纤维化。值得注意的是，他们的结果与 Kodaira 分类十分相似，这表明在适当假设下，高维极小阿贝尔纤维化的奇异纤维或许也可以分类。

后来在 [Kim24] （另见即将发表的工作 [CKS26]）中指出，每个拉格朗日纤维化都满足一个称为 δ-正则性的条件。粗略地说，这一条件意味着每个余维 1 纤维都含有一个维数为 $\geq n-1$ 的阿贝尔簇部分。本文建立了一个关于极小且δ-正则阿贝尔纤维化的一般框架，并证明其奇异纤维可以得到完整分类，从而统一了 Kodaira、Matsushita 和 Hwang–Oguiso 的结果。以下是本文的主要定理。

定理 1.0.1。设 S 是一个特征为 0 且剩余域代数闭的戴德金概形，并设 $f\colon X \longrightarrow S$ 是一个相对维数为 $n \geq 2$ 的极小 δ-正则阿贝尔纤维化。记 $X_s = f^{-1}(s)$ 为一个闭纤维。则

(1)（半稳定：定理 *5.1.1*）每个半稳定纤维 X_s 都同构于以下某一种情形。*(I_0)* 维数为 n 的阿贝尔簇。*(I_1)* 一个以维数为 $n-1$ 的阿贝尔簇为底的 $\mathbb{P}^1$-丛 $E \longrightarrow A$，其中两个截面 *0* 和 ∞ 被识别。*(I_r)* 一个由 $r \geq 2$ 个彼此同构的 $\mathbb{P}^1$-丛 $E_i \longrightarrow A$ 构成的环，其中 i =*1*、$\cdots$、r，它们的截面 0_i 和 ∞_i 依次通过 $\infty_i = 0_{i+1}$ 识别。*(2)*（不稳定：定理 *5.2.1*）每个不稳定纤维 X_s 都同构于 *(*$C \times A$*)/*G*,* 其中 C 是 *Kodaira* 分类中的一条不稳定曲线（*II* 型、$\cdots$、*IV**），而 G 是表 *3* 中分类的有限阿贝尔群。*(3)*（多重：定理 *7.2.1*、*7.2.2*、*7.3.1*、*7.3.2* 和 *7.4.1*）每个多重纤维X_s 都具有形式 $X_s = m \cdot \frac{1}{m} X_s$，其中 $\frac{1}{m} X_s$ 同构于以下某一种情形。*(I_0, I_1^1) (1)* 中描述的 I_0 型和 I_1 =I_1^1 型纤维。*(I_R^k)* 一个由 $\mathbb{P}^1$ 个 $E_i \longrightarrow A$- 丛构成的环，其中 $i = 1$、$\cdots$、$R(\geq 2)$，类似于 *(1)* 中的 I_R 型，但当 $i \equiv j$ 模 k 时，E_i 和 $\overline{E}_j$ 同构，其中 $k \mid R$。*(I_0^+)* 维数为 n 的阿贝尔簇在阶为 $d = 2$、*3*、*4* 或 *6* 的自由自同构作用下的 $\mathbb{Z}/d$-商。*($I_R^{\pm}$)* 带有 $2 \mid m \mid 2R$ *(*$R \geq 1$*)* 的 $I_{2R}^{m/2}$ 型或 $I_R^{m/2}$ 型纤维的 $\mathbb{Z}/2$-商，其商映射来自一个自由对合，该对合将 E_i 映至 E_{-i} 或 E_{1-i}；或者当 $G = \mathbb{Z}/2$、$\mathbb{Z}/4$ 或 $(\mathbb{Z}/2)^{\times 2}$ 时，其进一步的 G-商。*(II*、$\cdots$*) (2)* 中除 I_R^* 及其关于 $R \geq 1$ 的商以外的任何不稳定纤维。*(I_R^*)* 类似于 *(2)* 中带有 $m \mid R$ 的 I_R^* 型，但这些 $R+1$ 个非既约 $\mathbb{P}^1$-丛 E_i $(0 \leq i \leq R)$ 仅在 $i \equiv \pm j$ 模 m 时才彼此同构。此外，当 $G = \mathbb{Z}/2$、$\mathbb{Z}/4$ 或 $(\mathbb{Z}/2)^{\times 2}$ 时，还有其 G-商。*(I_0^*-a*、$\cdots$*)* 表 *7* 中列出的六种额外情形。此外，各种情形下可能的重数 m 均在表 *2* 中分类。

读者可在 §2（定义 2.2.1 适用于 δ-正则性以及2.3.5适用于半稳定性）中找到相关定义。为使论述简洁，定理 1.0.1 省略了一些细节和微妙之处。更精确的版本请参见正文。感兴趣的读者可仿照 [Mat01 中的图 1–3]，绘制上述可能的奇异纤维图示。

稳定性	Kodaira 型	限制	性质
半稳定	I_0	-	阿贝尔簇
	I_1	-	整
	I_r	$r \geq 2$	约化，可约
不稳定	II、III/2, IV/3	-	整
	III, IV	-	约化，可约
	I_r^*, $\mathrm{I}_r^*/2$, $\mathrm{I}_r^*/4$, II^*, III^*, $\mathrm{III}^*/2$, IV^*, $\mathrm{IV}^*/3$	$r \geq 0$	非既约，可约

表 1。非重中心纤维的分类 X_s。

稳定性 (多重)	X_s 的 Kodaira 型 ($\times 1/m$)	限制	P_s的 Kodaira 型
类半稳定	I_0	-	I_0
	I_R^k	$k \mid m,\ R = kr$ $k, r \geq 1$	I_r
混合行为	I_0^+	$d \mid m$ $d = 2,3,4,6$	除不稳定类型外的任意类型 I_r^*, $\mathrm{I}_r^*/2$, $\mathrm{I}_r^*/4$ 对于 $r \geq 1$
	I_R^+ ,$\mathrm{I}_R^+/2$, $\mathrm{I}_R^+/4$, I_R^-, $\mathrm{I}_R^-/2$	$m = 2k,\ R = kr$ $k, r \geq 1$	$\mathrm{I}_r^*,\ \mathrm{I}_r^*/2,\ \mathrm{I}_r^*/4$
类不稳定	II, II^*	$m \equiv \pm 1$ 模 6	II, II^*
	III, $\mathrm{III}/2$, III^*, $\mathrm{III}^*/2$	$2 \nmid m$	III, $\mathrm{III}/2$, III^*, $\mathrm{III}^*/2$
	IV,$\mathrm{IV}/3$, IV^*, $\mathrm{IV}^*/3$	$3 \nmid m$	IV, $\mathrm{IV}/3$, IV^*, $\mathrm{IV}^*/3$
	I_0^*, $\mathrm{I}_0^*/2$, $\mathrm{I}_0^*/4$	$2 \nmid m$	I_0^*, $\mathrm{I}_0^*/2$, $\mathrm{I}_0^*/4$
	I_R^*, $\mathrm{I}_R^*/2$, $\mathrm{I}_R^*/4$	$2 \nmid m,\ R = mr$ $r \geq 1$	I_r^*, $\mathrm{I}_r^*/2$, $\mathrm{I}_r^*/4$
	其他型	参见表7	-

表 2。 多重中心纤维的分类 X_s （为简化记号，省略重数 $m > 1$ ）。这里 P_s 是 平移自同构群，见定义 2.1.2和 5.3.1。

定义 1.0.2。 在定理 1.0.1 中，中心纤维的 *Kodaira* 型 X_s 在每种情形下如下所示。

(1) 半稳定纤维 X_s 的 Kodaira 型为 I_r ， 其中 $r \geq 0$。(2) 不稳定纤维 X_s 的 Kodaira 型记为（C的 Kodaira 型）/（ G的阶）。所有可能的不稳定 Kodaira 类型见表 1。(3) 多重纤维 X_s 的 Kodaira 型为 m （重数）乘以定理 1.0.1(3) 中所示的型。我们称型 $m \cdot \mathrm{I}_R^k$ 具有类半稳定性，型 $m \cdot \mathrm{I}_R^+$ 具有混合稳定性，而型 $m \cdot$II,

$\cdots$连同另外的情形具有类不稳定 稳定性。

我们对极小 δ-正则阿贝尔纤维化的研究，与对阿贝尔簇抽象 Néron 模型的研究密切相关。因此，定理1.0.1得出了一些关于阿贝尔簇 Néron 模型的新结果。自 Kodaira 和 Néron 以来，它们的 1 维情形已广为人知。我们着重指出条目 (2a) 和 (3)，它们揭示了 Néron 模型的一些新的高维性质。

定理 1.0.3 (定理 4.1.5 和 5.3.2)。 设 $P \longrightarrow S$ 为其函数域上一个阿贝尔簇的 *Néron* 模型，并记 P_s 为其闭纤维。

(1) 若 P_s 的线性部分为 $\mathbb{G}_m$，则*Néron*分支群 $\pi_0(P_s)$是循环群。*(2)* 若 P_s 的线性部分为 $\mathbb{G}_a$，则下列结论成立。*(a)* 其中性分支的*Chevalley*正合列分裂：$P_s^\circ = \mathbb{G}_a \times A$ ，其中 A 是维数为 $n-1$的阿贝尔簇。*(b) Néron*分支群 $\pi_0(P_s)$ 要么是阶为≤ 4 的循环群，要么是$(\mathbb{Z}/2)^{\times 2}$ （见表*4*）。*(3)* 设$\check{P} \longrightarrow S$ 为函数域上对偶阿贝尔簇的*Néron*模型。若 P_s 的线性部分的维数为 ≤ 1，则 $\pi_0(P_s)$ 与 $\pi_0(\check{P}_s)$同构。

与Matsushita和Hwang–Oguiso的结果相比，我们的结果具有一个优势：它适用于更广泛的阿贝尔纤维化类别，并给出更完整的描述（即使对于拉格朗日纤维化亦然）。不过，我们的工作深受他们的启发。我们还注意到，定理1.0.1 并不能完全恢复 [HO11中的结果，定理 1。1]：在该文中，辛形式对 f 施加了更多约束，并排除了定理1.0.1(3)中的许多情形。辛形式在本文中不起任何作用。

1.1. **证明策略**。 下面概述本文的策略与结构。首先，第2 节回顾研究阿贝尔纤维化时涉及的若干不同对象：极小阿贝尔纤维化 $f\colon X \longrightarrow S$、阿贝尔概形的 Néron 模型 $P \longrightarrow S$ （t-自同构概形）等。

我们的证明分为两个主要阶段：非多重纤维与多重纤维。当X_s 是非多重纤维时，证明的核心归结为交数计算，这与 Kodaira 和 Hwang–Oguiso 的工作类似。然而，要实现这一思路，我们首先需要了解$X_s = \sum_{i=1}^{r} a_i E_i$的每个不可约分支 E_i 的几何性质。粗略地说， E_i 往往是一个 $\mathbb{P}^1$-丛，底空间为一个（$n-1$）维阿贝尔簇，只有少数例外情形。我们将在第 3 节对此作更精确的研究。在接下来的第 4 节中，我们讨论高维阿贝尔纤维化中出现、而椭圆纤维化中未曾出现的两种新现象：剪切与缠结。粗略而言，它们刻画了 X_s同构于 Kodaira 奇异曲线 C 与一个 $n-1$维阿贝尔簇 A的乘积 $C \times A$ 这一性质失效的程度（半稳定情形中的剪切，以及不稳定情形中的缠结）。此外，我们证明了不稳定情形下 t-自同构群P_s° 的分裂（定理 4.1.5），并引入一种解缠不稳定纤维化的技巧（命题 4.2.4）。这里的主要依据是 Conrad 和 Laurent–Schröer 关于阿尔巴尼斯态射存在性的结果 [Con17; LS24]。在第 5 节中，我们汇集第 3–4 节的结果，仿照 Kodaira 的交数计算，对非多重纤维进行分类 X_s。由此，Néron 分支群 $\pi_0(P_s)$ 也得到了分类。

接下来需要对多重纤维进行分类。交数计算不足以揭示多重纤维更为复杂的几何结构。为解决这一问题，我们将开始利用分歧覆盖 $T \longrightarrow S$ 以及一个新的极小阿贝尔纤维化 $g\colon Y \longrightarrow T$它由 f的基变换得到。这将在 §6中完成。为研究 f 与 g 之间的关系，我们首先按照 Edixhoven [Edi92]回顾它们的 t-自同构概形 P 与 Q之间的关系 [。这些讨论还带来了一个副产品：通过半稳定基变换，对不稳定纤维的分类作出另一种解释（命题6.2.1）。

在第 7 节，我们对多重纤维进行分类。这里只强调两个出发点。第一个众所周知的观察是：研究 $\frac{1}{m}X_s$ 比研究 X_s 容易。更准确地说，存在一个优选的基变换 $g\colon Y \longrightarrow T$，其次数为 m，并诱导一个 étaleμ_m-覆盖 $Y_t \longrightarrow \frac{1}{m}X_s$（7.1.4）。这将对 $\frac{1}{m}X_s$ 的研究归结为对一个非多重纤维 Y_t 的研究，且其带有自由的 μ_m-作用。第二个出发点是按照 P 和 Q 的型来划分证明（引理 7.1.5）。当 P 和 Q 都是半阿贝尔的时，我们证明 Y_t 是半稳定的，且其 μ_m-作用循环置换它的分支。当 Q 是半阿贝尔的而 P 不是时， Y_t 仍然是半稳定的，但 μ_m-作用反转其分支的定向。当 P 和 Q 都不是半阿贝尔的时，我们需要进一步作一次半稳定基变换 $h\colon Z \longrightarrow U$，并研究

三个纤维化 X、 Y和 Z。所有这些情形的表现都略有不同，因此我们需要逐一分析。在第8节，我们给出定理 1.0.1 中所述各型纤维的例子。第A 节汇集了本文所用的一些概形论和代数群论知识。

最后，我们简要说明为何类不稳定多重纤维允许额外的可能性（事实上，型I$_{\frac{-}{R}}$ 是对I$_R^{\perp}$ 以同样方式所作的变体）。有两个技术原因：其一是某个伽罗瓦群的非分裂（引理7.3.20与7.4.9）。其二是命题6.2.1 中半稳定基变换的次数与某条椭圆曲线的自同构群的阶之间的差异，该椭圆曲线 E （引理7.4.11）。

致谢。我要感谢Johan de Jong、Daniel Huybrechts、黄俊默、János Kollár、Yuchen Liu、Mirko Mauri和Takumi Murayama与我进行有益的讨论并回答我的问题。我尤其要感谢Johan de Jong解释了导子子概形这一概念，并澄清了我对皮卡空间的困惑，也要感谢Takumi Murayama详细解释了他的结果。

2. 模型与 δ-正则性

在本文中， S 始终是一个连通的戴德金概形，其剩余域 k 代数闭且特征为零。

定义 2.0.1. 在 S 上的一个阿贝尔纤维化 是一个平坦射影态射 $f : X \longrightarrow S$ ，其一般纤维是阿贝尔簇上的一个主齐性空间。

固定一个闭点 $s \in S$ ，并将其补集记为

$$S_0 = S \setminus \{s\}.$$

我们用下标 $-_0$ 表示基变换 $- \times_S S_0$。为简单起见，我们假设本文中的每个阿贝尔纤维化在 S_0 上都是光滑的，并且在 s上至多有一个奇异纤维。限制态射 $f_0 : X_0 \longrightarrow S_0$ 是一个阿贝尔挠子，即一个光滑射影态射，其纤维是阿贝尔簇上的主齐性空间。等价地，我们可以说， X_0 是一个（唯一的）阿贝尔概形上的主齐性空间

$$P_0 = \mathrm{Aut}^{\circ}_{f_0} \longrightarrow S_0. \tag{2.0.2}$$

本节回顾一些定义和基本性质。

2.1. **极小模型与 t-自同构概形**。 遵循 [Kol25b， （16）],我们在极小模型的定义中去掉 $\mathbb{Q}$-阶乘性公理。

定义 2.1.1。 阿贝尔纤维化 f： $X \longrightarrow S$ 称为极小（分别称为*klt*-极小），若 X 具有终端奇点（分别具有对数终端奇点），且 K_X 在数值意义下是 f-平凡的。

根据 Néron–Raynaud 定理 [Né64； Ray66], 每个阿贝尔概形 $P_0 \longrightarrow S_0$都唯一存在一个 *Néron* 模型 $P \longrightarrow S$，它是定义在 S 上的拟射影、光滑且交换的群概形，其在 S_0 上的限制同构于 P_0。关于 Néron 模型的定义，参见 [BLR90]。其中心纤维 P_s 是定义在 k上的一个可能不连通的交换代数群，并处于如下分裂正合列中（引理 A.1.2）

$$0 \longrightarrow P_s^{\circ} \longrightarrow P_s \longrightarrow \pi_0(P_s) \longrightarrow 0,$$

其中 P_s° 是其中性分支，而 $\pi_0(P_s)$ 是其*(Néron)* 分支群。根据[SGA 3_{I}，IV_{B} 定理 3.10]，P 存在唯一的开子群概形 $P^\circ \subset P$，其中心纤维 $P^\circ \times_S \{s\}$ 是上述 P_s° 的中性分支。P_s 我们称P° 为中性分支。P。

定义 2.1.2。设 $f:\ X \longrightarrow S$ 是一个 klt-极小阿贝尔纤维化。其平移自同构群概形 (简称 *t*-自同构概形) f 是阿贝尔概形 $P \longrightarrow S$ 的 Néron 模型 $P_0 \longrightarrow S_0$ （见2.0.2）。

注 2.1.3。我们指出，与 [Kol25a 的定义 24]相比，记号略有不同：其中的平移自同构层 $Aut^\circ_{X/S}$ 对应于我们的P°，按我们的术语，它是平移自同构概形的中性分支。换言之，我们对平移自同构 P的概念包含了更多关于 $\pi_0(P)$ 的数据。当 X 仅为 klt-极小时，额外的数据可能没有用处，因为下文定理 2.1.5 中的 P°-作用未必能延拓到 P。然而，当 X 为极小且 δ-正则时，根据命题 2.2.2，P 将在 X 上作用。我们的定义遵循 [Kim24，定义 4.1]。

我们从两个一般定理的以下特殊情形开始。

定理 2.1.4 ([Kol25b，定理 16。5])。每个阿贝尔纤维化都有一个 $\mathbb{Q}$-阶乘极小模型。

定理 2.1.5 ([Kol25b，定理 47])。设 $f:\ X \longrightarrow S$ 是一个 *klt*-极小阿贝尔纤维化，$P \longrightarrow S$ 是其 *t*-自同构概形。那么存在唯一的P°-作用于 X 之上，S 且该作用在 P_0 上延拓了主齐性空间结构。X_0。

命题 2.1.6。定理 P°*2.1.5* 中的 作用 满足以下性质。

(1) P° 在 X 上的作用是忠实的。(2) P° 在 $X' = X \setminus$ 奇点集(X_s) 上的作用是自由的。(3) P_s° 在 奇点集(X_s) 上的作用具有非平凡的线性稳定子群。

证明。(1) 考虑相对自同构概形 $\mathrm{Aut}_f \longrightarrow S$ 的 f。令 $M \subset \mathrm{Aut}f$ 为其主分支，它是定义在 S 上的光滑、交换闭子群概形（见 [Kim24，定义 2.36，命题 2.42]）。定理2.1.5构造了一个群概形同态 $P^\circ \longrightarrow M \subset \mathrm{Aut}f$。由于 M在 S上光滑，Néron 映射性质构造了一个同态 $M \longrightarrow P$。复合映射

$$P^\circ \longrightarrow M \longrightarrow P$$

根据 Néron 映射性质，它必定是开浸入 $P^\circ \subset P$，因此这说明 $P^\circ \longrightarrow M$ 是开浸入。

(2) 当 $X'_s = \varnothing$ 时无须证明，因此我们假设 $X' \longrightarrow S$ 是满射。由于该命题是局部于 S 的，我们可以在 étale 局部缩小 S，并固定一个截面 $S \longrightarrow X'$。考虑该截面的轨道映射 $P^\circ \longrightarrow X' \subset X$。与上文类似，Néron 映射性质构造了一个态射 $X' \longrightarrow P$，其复合映射 $P^\circ \longrightarrow X' \longrightarrow P$ 必定是开浸入 $P^\circ \subset P$。这迫使 $P^\circ \longrightarrow X'$ 成为开浸入，也就是说，沿着该截面的作用是自由的。改变截面，即可得出 P° 在 X' 上自由作用。

(3) 由于 P_s°在 X_s 上的作用由 (1) 可知是忠实的，因此每个稳定子都是线性的，由引理 A.1.5可知。为证明剩余结论，假设 $x_s \in X_s$ 是一个具有平凡稳定子的闭点。取一个拟有限平坦态射 $T \longrightarrow S$，并取一个

截面 x ：穿过 $T \longrightarrow X$ 。 x_s (例如，取 f-充分除子的一个一般完全交，或使用 [SGA 3_{I}，VI_{B} 引理 5.6。1]该截面通过 $P_T \longrightarrow X_T$ 定义一个轨道映射 $a \longmapsto a \cdot x$，由于截面上不存在稳定子，因此它是一个开浸入 x。特别地，中心纤维 X_s 在x_s处正则。□

注 2.1.7。 的拟射影性 P、命题 2.1.6以及 [AF24，定理 1。2] 使得 P°-作用在 X 上成为一个 弱阿贝尔纤维化。尽管这对研究 $Rf_*\mathbb{Q}_\ell$很重要，但本文不讨论这一主题。

2.2. **δ-正则性**。 按照 δNgô10 的定义， [Ngô10，（7.1.5）], 可在任意底上定义 $P \longrightarrow S$ ，但我们将范围限定在戴德金概形上。给定戴德金概形 S上的光滑交换群概形 $P \longrightarrow S$ ，其纤维 P_s 具有一个 ***Chevalley*** 正合列 [Bri15，定理 4。2]

$$0 \longrightarrow L_s \longrightarrow P_s \longrightarrow \tilde{A}_s \longrightarrow 0, \quad \text{or} \quad 0 \longrightarrow L_s \longrightarrow P_s^\circ \longrightarrow A_s \longrightarrow 0,$$

其中， L_s 是连通线性代数群， A_s 是真代数群，而$\tilde{A}_s = A_s^\circ$ 是阿贝尔簇。我们称 L_s 为线性部分 ，称 A_s 为阿贝尔簇部分 ，它们属于 P_s。

定义 2.2.1. **(1)** 光滑交换群概形 $P \longrightarrow S$ 若其一般纤维是阿贝尔簇，且其闭纤维 P_s 的线性部分 L_s的维数至多为 1，则称其为 δ-正则 。**(2)** 若 klt-极小阿贝尔纤维化 $f\colon X \longrightarrow S$ 的 t-自同构概形 $P \longrightarrow S$ 是 δ-正则的，则称其为 δ-正则 。

换言之， δ-正则性条件意味着 P_s 要么是阿贝尔簇（此时 $L_s = 0$），要么 $L_s = \mathbb{G}_m$ 或 $\mathbb{G}_a$。本文主要关注同时是极小且 δ-正则的阿贝尔纤维化。在这种情况下，定理2.1.5可作如下改进。本小节余下部分将证明这一点。

命题 2.2.2. 设 $f : X \longrightarrow S$ 是一个极小的 δ-正则阿贝尔纤维化，且$P \longrightarrow S$ 是其 *t*-自同构概形。则

(1) 存在唯一的忠实 P-作用于 X ，并延拓 P_0-主齐性空间结构于 X_0。其在 P° 上的限制是定理 *2.1.5*。(2) 若 X_s 具有一个正则点，则 $X' = X \setminus \mathrm{Sing}(X_s)$ 是一个 P-主齐性空间。

引理 2.2.3。 设 $f\colon X \longrightarrow S$ 是一个 *klt*-极小的 δ-正则阿贝尔纤维化， P是其 *t*-自同构概形。则

(1) 每个 P_s°在 X_s 中的轨道维数均为 $\geq n-1$。(2) 每个 P_s°在 X_s 中维数为 $n-1$ 的轨道都是阿贝尔挠子。

证明。 由于 P_s° 的线性部分维数为 ≤ 1，根据命题 $x \in X$ ，每个点 ≤ 1的稳定子维数为 。若某个轨道维数为 $n-1$，则它同构于 P_s° 被线性稳定子取商所得的商，而根据 Chevalley 序列，该商是一个阿贝尔簇。□

命题 2.2.4. (1) 每个极小 δ-正则阿贝尔纤维化 $f : X \longrightarrow S$具有正则总空间 X。(2) 两个极小 δ-正则阿贝尔纤维化之间的每个双有理映射都唯一地延拓为一个同构。

证明。(1) 奇异轨迹 奇点集(X) 位于 s 之上，且维数为 $\leq n-2$，因为终端概形在余维数 2 处是正则的。由于 奇点集(X) 在 P_s°-作用下不变，且每个轨道的维数为 $\geq n-1$，由引理 2.2.3，我们有 奇点集$(X) = \varnothing$。

(2) 设 X 和 Y 是两个极小的 δ-正则纤维化，且 $\phi\colon X \dashrightarrow Y$ 是一个关于 S 的双有理映射。那么 ϕ 是 P°-等变的，因此其未定义轨迹在 P_s° 作用下封闭。由于 X 和 Y 是极小的，ϕ 在余维 1 的点处是同构 [KM98，推论 3.54]。因此，ϕ 的未定义轨迹 $Z \subset X_s$（分别地，ϕ^{-1} 的未定义轨迹 $W \subset Y_s$）维数为 $\leq n-1$，并且根据引理 2.2.3，它是不交并的阿贝尔挠子。此外，ϕ 诱导了一个同构 $X \setminus Z \longrightarrow Y \setminus W$。取双有理映射 ϕ 的图 $\Gamma \subset X \times_S Y$。那么对每个 $x \in Z$，纤维 $\Gamma_x = \Gamma \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x) \subset Y_s$ 包含于 W 中，而 W 是一个维数为 $n-1$ 的阿贝尔挠子。但 Γ_x 是正维且有理链连通的[Kol96，定理 VI.1.2] [HM07，推论 1.5]，，从而在 W 中产生有理曲线。阿贝尔挠子不含有理曲线，因此这表明 $Z = \varnothing$。于是 ϕ 是一个态射；由于 ϕ^{-1} 也是一个态射，它还是一个同构。□

命题 2.2.2 的证明。(1) 以下策略取自 [Kim24，§5]。按命题 2.1.6 取相对自同构概形及其主分支 $M \subset \mathrm{Aut}_f$。该断言等价于说 M 是一个 Néron 模型。根据 [BLR90，定理 7.1.1]，，只需证明它是 [BLR90，定义 3.5.1 与命题 3.5.6]（或 [Kim24，§3.6]）意义下的弱 Néron 模型。将 S étale 局部缩小后，我们需要证明定义在 S_0 上的每个有理映射 $u : S \dashrightarrow M$ 都是正则的。将 u 视为 S 上的双有理自同构 $\phi_u : X \dashrightarrow X$。命题 2.2.4 表明 ϕ_u 必然是一个自同构，因此 u 唯一延拓为一个截面 $S \longrightarrow M$，并表明 M 的弱 Néron 映射性质。因此 M 是 P_0 的 Néron 模型，并且它与 P 同构。

(2) 注意 $X' = X \setminus$奇点集(X_s) 是 $X_0 \longrightarrow S_0$的 Néron 模型：这是 [BLR90，§1.3] 的推论（参见 [Kim24，例 3。13] 中的总结），或其在 [Kol25b，推论 2]中的推广。当 X_s 有正则点时，X' 是一个P-主齐性空间，这由 [BLR90，推论 6.5。3] 或 [Kim24，命题 3。21]可得。□

2.3. **重数与半稳定性**。中心纤维 X_s 是一个有效卡蒂埃除子

$$X_s = \sum_{i=1}^{r} a_i E_i \qquad \text{for} \quad E_i : \text{prime divisor and } a_i \in \mathbb{Z}_{>0}. \tag{2.3.1}$$

素魏尔除子 E_i 将被视为 X的整子概形。

定义 2.3.2。设 $f : X \longrightarrow S$ 是从正规概形X 出发的阿贝尔纤维化，且 X_s 是其中心纤维。

(1) 分支 $E_i \subset X_s$ 的重数 是 a_i 式（2.3.1）中的正整数。若 E_i 是 的约化分支，则称 X_s 若 $a_i = 1$，而若 的非约化分支，则称 X_s 若 $a_i > 1$。（2）的重数 X_s 是正整数

$$m = \gcd\{a_1, \cdots, a_r\} \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

引理 2.3.3 ([Cam05, 注 1。3])。设 $f\colon X \longrightarrow S$ 是从正则概形 X出发的阿贝尔纤维化。若 X_s 的重数为1，则它有一个约化分支。

证明。以下论证沿用 Campana 的方法，但使用 [Kol25a, §§25–26] 中的技巧。我们可以假设 $S = \operatorname{Spec} R$ 和 $S_0 = \operatorname{Spec} K$ 分别是一个严格亨泽尔离散赋值环及其函数域的 Spec。记 z 为 R 和 $X_s = \sum_{i=1}^{r} a_i E_i$ 的一致化参数。对每个 i，取一个点 $x_i \in E_i$，使其为 $(X_s)_{\mathrm{red}}$ 的正则点。于是点 $x_i \in X_s$ 延拓为一个多截面 $x_i \colon S \longrightarrow X$，属于 f，且复合映射 $f \circ x_i \colon S \longrightarrow X \longrightarrow S$ 是 $z \longmapsto z^{a_i}$。

回忆一下，$X_0 \longrightarrow S_0$ 是一个 P_0主齐性空间。对每个满足 p_m 的 $m \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$，令 $X_0^{(0)} = P_0$ 和 $X_0^{(m)} = X_0 \times_{p_m} S_0$：$S_0 \longrightarrow S_0$ 是一个基变换 $z \longmapsto z^m$。（等价地，若 X_0 是由 $\alpha \in H^1_{\acute{e}t}(S_0, P_0)$定义的 P_0主齐性空间，则 $X_0^{(m)}$ 是由$m\alpha$定义的主齐性空间。）它们的不交并

$$\mathfrak{X}_0 \coloneqq \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}} X_0^{(m)} \longrightarrow S_0$$

构成一个交换群概形。利用假设 $\gcd\{a_i\} = 1$，取 $b_i \in \mathbb{Z}$使得 $\sum_i a_i b_i = 1$。多截面 x_i 定义了 $X^{(a_i)}{}_0 \quad \subset \mathfrak{X}_0$的一个截面，因此我们可以利用交换群结构取它们的和：

$$x = \sum_{i=1}^{r} b_i \cdot x_i : S_0 \longrightarrow \mathfrak{X}_0.$$

这一节归结为 $X_0^{(1)} = X_0$，因为多截面 x 的次数为$\sum_i a_i b_i = 1$。赋值判别准则将其延拓为截面 x：$S \longrightarrow X$。由 X[BLR90命题 3.1 的正则性可知，这样的截面必然经过 $X' = X \setminus$奇点集(X_s)，因此 2] ，从而 $X'_s \neq \varnothing$。这意味着 X_s 有一个约化分支。□

为了讨论半稳定性，回顾一下，δ-正则性意味着以下三种可能性之一：(1) P_s 的线性部分为 0，即 P_s 是阿贝尔簇；(2) P_s 的线性部分为 $\mathbb{G}_m$；或 (3) 它的线性部分为 $\mathbb{G}_a$。第一种情形很容易分析。事实上，在这种情形下，我们可以立即对 X_s 进行分类。

引理 2.3.4。设 $f : X \longrightarrow S$ 是一个 *klt*-极小阿贝尔纤维化。若 P_s 是阿贝尔簇，则 $X_s = m \cdot X_{s,\,\mathrm{red}}$ 其中 X_s是一个阿贝尔挠子$_{,\,\mathrm{red}}$ 其维数为 n，且 $m \geq 1$。

证明。该 P_s作用于$X_{s,\,\mathrm{red}}$ 根据命题2.1.6(2– 3)，只能具有有限稳定子。由于 $X_{s,\,\mathrm{red}}$ 是真连通的，唯一可能性是 $X_{s,\,\mathrm{red}} \cong P_s/K$ 其中 $K \subset P_s$是一个有限子群。因此 $X_{s,\,\mathrm{red}}$ 是一个阿贝尔主齐性空间。□

定义 2.3.5。设 $f\colon X \longrightarrow S$ 是一个极小的 δ-正则阿贝尔纤维化，且m 为其中心纤维的重数 X_s。则称 f（或 X_s）为

- 半稳定（相应地，严格半稳定），如果 $m = 1$，且 P_s 的线性部分为 0 或 $\mathbb{G}_m$（相应地，仅为 $\mathbb{G}_m$）；
- 不稳定，如果 $m = 1$ 且 P_s 的线性部分为 $\mathbb{G}_a$；以及
- 多重，如果 $m > 1$。

注 2.3.6。我们偏离通常的约定，将非半稳定纤维分为两类：不稳定纤维和多重纤维。换言之，本文始终假设不稳定纤维是非多重的 。为说明这一点，我们将在 §7 中看到，多重纤维的表现可能类似于半稳定纤维、不稳定纤维，甚至兼具两者的特征。

我们还注意到，中心纤维的重数 X_s 并非 是 双有理不变量 f。见下面这个简单例子。因此，只有当阿贝尔纤维化 X_s 是 极小 δ- 正则时，我们才称中心纤维 X_s 为多重（或非多重）；根据命题 2.2.4，这样的阿贝尔纤维化在其双有理等价类中唯一。

例 2.3.7。 取一个极小椭圆曲面 $f\colon X \longrightarrow S$ 其中心纤维为 Kodaira 型 IV*

$$X_s = (E_1 + 2F_1) + (E_2 + 2F_2) + (E_3 + 2F_3) + 3G.$$

收缩三个 E_i后得到一个椭圆纤维化 $f\colon X \longrightarrow S$ 它来自一个典范曲面 X，该曲面具有三个 A_1 奇点。其中心纤维 $X_s = 2（F_1+F_2+F_3）+3G$有四个分支，其重数分别为2、 2、 2和3。因此，引理2.3.3在缺少关于 X的正则性假设时不成立。

这次，收缩三个链 $E_i \cup F_i$ 以得到另一个椭圆纤维化 $X \longrightarrow S$ 它来自一个典范曲面 X ，该曲面具有三个 A_2 奇点。其中心纤维 $X_s = 3G$ 不可约，重数为 3。我们不 将其称为多重纤维，因为 f 不是极小的。事实上，原极小模型 f 具有一个非多重纤维 X_s。

半稳定纤维通常比不稳定／多重纤维更容易理解。以下结论是 Kollár 对半稳定纤维的刻画的推论。

定理 2.3.8 ([Kol25b，定理 42])。 设 $f\colon X \longrightarrow S$ 是一个 *klt*-极小阿贝尔纤维化，P 是其 *t*-自同构概形。若 X_s 有一个约化分支且P_s 是半阿贝尔的，那么 X_s 具有半对数典范奇点。特别地，它是约化且半正规的。

2.4. **t-自同构概形的对偶**。 回顾一下，t-自同构概形 P 不过是阿贝尔概形 P_0 在（2.0.2）中的 Néron 模型。

定义 2.4.1。 设 $f\colon X \longrightarrow S$ 是一个 klt-极小阿贝尔纤维化， P 是其 ˇ t-自同构概形。 P 的对偶 是对偶 ˇ 阿贝尔概形 $P_0 \longrightarrow S_0$的 Néron 模型 $P \longrightarrow S$ 。

命题 2.4.2。 设 P_0 是 S_0 上的阿贝尔概形， P_0 是其对偶。令 ˇ P 和 P 为它们在 S 上的 *Néron* 模型，其中心纤维 P_s 和 P_s 满足以下性质。

(1) 它们的线性部分 L_s 和ˇ L_s 同构。特别地，半阿贝尔ˇ性质以及 P 和 P 的 δ-正则性相同。(2) 若 P_s （或等价地，ˇ P_s）是半阿贝尔的，则它们的阿贝尔簇部分 A_sˇ和 A_s 互为对偶。

证明。 (1) 阿贝尔概形 $P_0 \longrightarrow S_0$ 由 [Ray70，定理 XI.14]证明是射影的。ˇ ˇˇ任取满足以下条件的极化 $\lambda_0\colon P_0 \longrightarrow P_0$ 以及 $\lambda_0\colon P_0 \longrightarrow P_0$

$$\lambda_0 \circ \check{\lambda}_0 = [m]_{\check{P}_0}, \qquad \check{\lambda}_0 \circ \lambda_0 = [m]_{P_0}.$$

根据 Néron 映射性质，这些同态和等式可延拓到 S 上。ˇ ˇ 因此， λ 和 λ 在 S 上有准有限核。由此， $\lambda_s\colon P_s^\circ \longrightarrow P_s^\circ$ 是一个同源，故由引理A.1.1即可得证。

(2) 这是 [SGA 7_{I}，IX 定理 5。4] 以及 [FC90，§II。2]。我们注意到，当 P 不是半阿贝尔的时，此陈述不成立。参见注4.1.7。□

根据 [KK25，定理 1]（在我们的情形中即引理 A.0.1），$f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$ 和 $R^1 f_*\mathcal{O}_X$都是局部自由的，且其构造与任意基变换相容。这意味着存在一个局部分离且有限型的群代数空间 $\mathrm{Pic}_f \longrightarrow S$，它沿单位截面光滑（[BLR90，定理 8.3.1 和 8.4.1] 以及 [Stacks，标签 0D2D]）。其严格中性分支 Pic°_f 是 $\mathrm{Pic}f$ 的唯一一个具有连通纤维的开子群空间。其弱中性分支 $\mathrm{Pic}^\bullet_f$ 是 $\mathrm{Pic}f$ 中具有连通总空间 $\mathrm{Pic}^\bullet_f$的最大开子群空间。存在一列开浸入

$$\mathrm{Pic}^\circ_f \subset \mathrm{Pic}^\bullet_f \subsetneq \mathrm{Pic}_f \qquad \text{（第一个包含通常也不等于），}$$

且 Pic°_f 和 $\mathrm{Pic}^\bullet_f$ 是光滑群代数空间。注意到$\mathrm{Pic}f$ 一般并不光滑。更详细的讨论见 [Kim24，§2。2]，其中采用记号 $\mathrm{Pic}^{\circ\circ}_f \subset \mathrm{Pic}^\circ_f \subset \mathrm{Pic}f$。下面的结果是 [BLR90，定理 9.5 的高维推广。4]。

命题 2.4.3. 设 $f: X \longrightarrow S$ 是一个极小的 δ-正则阿贝尔纤维化。则

(1) $\check{}P$ 同构于 $\mathrm{Pic}^\bullet_f$ 的分离化商。(2) $\check{}P^\circ$ 同构于 Pic°_f 的分离化商。(3) 存在一个同源 $\kappa: (\mathrm{Pic}^\circ_f)_s = \mathrm{Pic}^\circ_{X_s} \longrightarrow \check{}P^\circ_s$。若 f是非多重的，则 κ是一个同构。

参见 [Hol19，§1。1]以及 [Kim24，§2。3] 关于分离化商的概念。

证明。(1) 由于 X 依命题 2.2.4 是正则的，Néron 映射性质的存在性部分对 $\mathrm{Pic}f$（因而对 $\mathrm{Pic}^\bullet_f$）成立。由于非分离性，唯一性不成立；因此一旦取其分离化商 $\mathrm{Pic}^\bullet_f/E$，其中 E 为其单位截面的闭包，唯一性也同样成立。参见[Hol19，定理 6.2] 以及 [Kim24，引理 6.12]。这证明 $\mathrm{Pic}^\bullet_f/E$ 是 Néron 模型 $\check{}P$。(2) Néron 映射性质构造了一个同态 $\mathrm{Pic}^\circ_f \longrightarrow \check{}P$，其像为 $\check{}P^\circ$，而其核是 Pic°_f的单位截面的闭包，因为 $\check{}P$ 是分离的。

(3) 回忆一下，$\mathrm{Pic}f$作为 fppf 阿贝尔层，是 fppf 预层 $T \longmapsto \mathrm{Pic}\, X_T/\mathrm{Pic}\, T$的层化（例如，[Kle05，§9。2]）。纤维$(\mathrm{Pic}f)_s$在 $T = \{s\}$上的限制，是将同一 fppf 预层应用于 $X_s \longrightarrow \{s\}$后所得的层化，因此$(\mathrm{Pic}f)_s = \mathrm{Pic}X_s$。因此，(2) 在 s 上的纤维一般给出一个同源$\mathrm{Pic}^\circ_{X_s} \longrightarrow \check{}P^\circ_s$。

现在假设 f 是非多重的。只需证明 Pic°_f 是分离的，或者其单位截面是闭的。缩小 S后，由引理 2.3.3 可假设 f 有一个截面，因此 $\mathrm{Pic}^\circ_f \subset \mathrm{Pic}f$ 的每个 S-截面都可由 X 上的一个线丛表示，见 [Kle05，定理 9.2.5]。为证明单位截面是闭的，取一个线丛L，它在 S_0上是 f-平凡的。记 $X_s = \sum_{i=1}^r a_i E_i$ 为中心纤维，并设 $L = \mathcal{O}_X(D)$，其中 $D = \sum_{i=1}^r b_i E_i$ 是支撑在 X_s中的一个除子。由于 L是 $\mathrm{Pic}^\circ_f \subset \mathrm{Pic}^\tau_f$的截面，它在 S上数值 f-平凡。

令 $Y \subset X$ 是由 $n-1$ 个 X非常 ample 除子完全交所得的正则曲面 Y，其上有一个到 S 的纤维化，中心纤维为 $Y_s = \sum_{i=1}^r a_i F_i$，其中 F_i 是 Y中的素除子。线丛的限制为 $\mathcal{O}_Y(D_Y)$，对应除子$D_Y = \sum_i b_i F_i$。由于它在 S上数值平凡，曲面纤维化的扎里斯基引理（[Bar+04，引理 III.8.2] 或 [Liu02，定理 9.1.23]）适用，并可得

$D_Y = c \cdot Y_s$ 对于 $c \in \mathbb{Q}$。因此 $D = c \cdot X_s$。但请注意， f 是非多重的，因此由引理可假设 $a_1 = 1$ ，其中2.3.3。这意味着 $c = b_1 \in \mathbb{Z}$ ，因此除子 D 是 X_s的整数倍。因此 L 在 f 上是 -平凡的 S。□

结合命题 2.4.2–2.4.3，可通过中心纤维的皮卡德概形 Pic^{X_s} 检验极小 δ-正则阿贝尔纤维化 f 的半稳定性。

˘注 2.4.4。 根据 Néron–Raynaud， $P^\circ \longrightarrow S$ 始终是拟射影群概形。根据 Artin， $\mathrm{Pic}^\circ_f \longrightarrow S$ 始终是有限型的局部分离群代数空间。需要指出一个微妙的事实： Pic°_f 可能不是概形。更确切地说，考虑以下四个条件：

(i) f : $X \longrightarrow S$ 是非多重的。
(ii) $\mathrm{Pic}^\circ_f \longrightarrow S$ 是分离的。(iii)
$\mathrm{Pic}^\circ_f = {}^\vee P^\circ$。(iv) Pic°_f 是一个概形。

我们断言 (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv)。蕴含关系 (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)不过是命题 2.4.3(2–3) 的内容。(iii) $\Longrightarrow$ (iv)显然成立，而 (iv) $\Longrightarrow$(ii)见 SGA 3_{I}， VI_{B} 推论 5.5]。感谢 Johan de Jong 帮助澄清我们最初的困惑。我们将在引理 7.1.9 中证明，若 f 的重数为 m，则同源 $\kappa\colon \mathrm{Pic}^\circ_{X_s} \longrightarrow {}^\vee P^\circ_s$的核为 $\kappa \subset \mathbb{Z}/m$。

例 2.4.5. 在例 8.0.8 中，将构造一个极小 δ正则阿贝尔纤维化 f : $X \longrightarrow S$，其中心纤维为多重纤维 $X_s = m \cdot (A/a)$。它的对偶 t- ˘ ˘ 自同构概形是常阿贝尔概形 $P = A \times S \longrightarrow S$ ，且 $(\mathrm{Pic}^\circ_f)_s = \mathrm{Pic}^\circ_{X_s} = (A/a)^\vee$。命题 2.4.3(3) 中的同态 $(A/a)^\vee \longrightarrow {}^\vee A$ 是同源，但不是同构。事实上，其核由线丛 $L = \mathcal{O}_X(\frac{1}{m}X_s)$ 的限制生成，该线丛在S_0 上平凡，但在 S上仅数值平凡。因此， $\mathrm{Pic}^\circ_f \longrightarrow S$ 是一个非分离群空间，因而不是概形。

2.5. **魏尔斯特拉斯模型**。 极小椭圆曲面 f : $X \longrightarrow S$ 若中心纤维非多重，则存在唯一的 魏尔斯特拉斯模型 $\bar{f}$: $\bar{X} \longrightarrow S$。[1] 它是¯的双有理模型 f ，其中总体空间 X 具有典范奇点，且¯中心纤维 X_s 是整的（例如， [ASD73， §1]）。一种简便的魏尔斯特拉斯模型构造方法是利用 Kodaira 分类： X_s 总是由一个约化分支和一条由光滑有理曲线组成的链构成，其交数矩阵为负定 ADE 型¯。收缩后者，可得一个椭圆纤维化 $X \longrightarrow S^-$，它来自一个典范曲面 X ，具有整中心纤维，即f的魏尔斯特拉斯模型。

我们仍然可以收缩另一组有理曲线，从而得到不同的模型，其总体空间可能具有 klt 奇点。这引出了以下定义。

定义 2.5.1. A δ-正则阿贝尔纤维化 $f\colon X \longrightarrow S$ 若 X 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的，且具有典范奇点（分别地，对数终端奇点），并且中心纤维 X_s 是整的（分别地，不可约），则称其为 魏尔斯特拉斯（分别地，*klt*-魏尔斯特拉斯）。

[1]更标准的术语是极小魏尔斯特拉斯模型。为避免与极小模型混淆，我们省略了“极小”一词。

魏尔斯特拉斯（分别地，klt-魏尔斯特拉斯）模型自动满足 $K_X \sim_f 0$（分别地，$K_X \sim_{f,\mathbb{Q}} 0$），因为中心纤维是整的（分别地，不可约）。特别地，两者都是 klt-极小的。以下是本小节的主要结果。

命题 2.5.2. 每个 δ-正则阿贝尔纤维化都有一个 *klt*-魏尔斯特拉斯模型。

命题 2.5.3. 每个具有非重中心纤维的极小 δ-正则阿贝尔纤维化 $f: X \longrightarrow S$ 都有一个魏尔斯特拉斯模型 $f: X \longrightarrow S$。此外，X 是 X 的压缩，并且在同构意义下唯一（可能需要缩小 S）。

命题 *2.5.2*的证明。从一个 $\mathbb{Q}$-阶乘 klt-极小模型 $f: X \longrightarrow S$（例如，取定理2.1.4中的极小模型）。

如果中心纤维 X_s 不可约，那么 f 就是一个 klt-魏尔斯特拉斯模型。假设 $X_s = \sum_{i=1}^{r} a_i E_i$ 有 $r \geq 2$ 个分支。任取一个不可约分支$E = E_1$。那么存在另一个与 E相交的分支 E'。取一条曲线 C，它包含于 E中，经过 $E \cap E'$中的一个点，但不包含于 $i \geq 2$的任何其他分支 E_i 中。这使得交 $(E \cdot C)$ 为负，因为我们有 $(X_s \cdot C) = 0$ 以及 $(E' \cdot C) > 0$，因此

$$(E \cdot C) = -\frac{1}{a_1} \sum_{i=2}^{r} a_i (E_i \cdot C) < 0. \tag{2.5.4}$$

取一个有理数 $0 < \varepsilon \ll 1$，使得对 $(X, \varepsilon E)$ 是 klt [KM98，推论 2.35]。由 (2.5.4) 可知，$\mathbb{Q}$-除子 $K_X + \varepsilon E$ 不是 f-nef，因此我们可以应用同上引文中的相对锥与压缩定理（定理 3.25）。首先，锥定理保证存在一条 $(K_X + \varepsilon E)$-负有理曲线 R，它在相对莫里锥中定义一个极端射线。这条有理曲线 R 必须包含在 E 中。我们很快将在推论 3.1.3 中证明，在这种情况下，正规化 E 具有一个 $\mathbb{P}^1$-丛 $\tilde{p}: \tilde{E} \longrightarrow A$，其底空间是维数为 $n-1$ 的阿贝尔挠子 A；此外，E 中的每条有理曲线都是 $\tilde{p}$ 的某个纤维的像。因此，只有一条 $(K_X + \varepsilon E)$-极端射线（由 R 定义），其压缩态射

$$\phi : X \longrightarrow \bar{X}$$

将 E 中的每条有理曲线压缩为一个点。这意味着 ϕ 是 E 和 $\phi(E) \cong A$ 的一个除子压缩。由同上引文中的命题 3.36 和 3.43，这给出一个 $\mathbb{Q}$-阶乘 klt 对 $(X, \ \phi_* E = 0)$。最后，取恒等

$$K_X \sim_{f,\mathbb{Q}} \phi^* K_{\bar{X}} + aE \qquad \text{for} \quad a \in \mathbb{Q}.$$

由于 $(K_X \cdot R) = 0$，我们有 $a = 0$，因此 $K_{\bar{X}}$ 也在数值上是 f-平凡的。这意味着 $f: X \longrightarrow S$ 仍然是 klt-极小的，因此我们可以重复相同的过程，直到得到一个不可约中心纤维 X_s。□

命题的证明 *2.5.3*。关于存在性，使用引理 2.3.3 固定 X_s的一个约化分支。使用命题的论证压缩所有其他分支 2.5.2：这给出一个到 klt-魏尔斯特拉斯模型的压缩 $X \longrightarrow X$，其具有一个整中心纤维 $X_s = E$。取一个形式为 $K_{\bar{X}}$ 的典范除子 aE，其中 $a \in \mathbb{Z}$。由于 $E = X_s$ 是卡蒂埃的，$K_{\bar{X}}$ 是卡蒂埃的，因此 X 是典范的。

令 X 为一个魏尔斯特拉斯 δ-正则阿贝尔纤维化，其基底为 S，并且 X 是它的极小模型。我们断言双有理映射 $\phi: X \dashrightarrow X$ 是一个态射。首先，根据定理 X和 X 都具有 P°-作用，而2.1.5 并且 ϕ 是等变的。取一条经过 $S \longrightarrow X$ 的正则点的截面，并将其延拓为截面 X_s，通过 $S \longrightarrow X$ 的赋值判别准则

。这确定了一个对应于 $E_i \subset X_s$ 的约化分支 X_{s°。收缩所有其他分支，得到另一个魏尔斯特拉斯模型 $X \longrightarrow X'$ 以及一个双有理映射 ϕ: $X' \dashrightarrow X$，该映射在一般点处将中心纤维对应起来。 $\bar{\phi}$ 和 $\bar{\phi}^{-1}$ 的不定义点集是不交并的阿贝尔挠子，这是引理 2.2.3的结论。由于它们不包含有理曲线， $\bar{\phi}$ 和 $\bar{\phi}^{-1}$ 都是态射。

最后，设 $\phi : X \dashrightarrow Y$ 是两个魏尔斯特拉斯 δ正则阿贝尔纤维化之间的双有理映射。根据命题 2.2.4，它们的极小模型 $X \longrightarrow X$ 和 $Y \longrightarrow Y$ 必然通过 $\phi : X \longrightarrow Y$ 同构。设 $E \subset X_s$ 和 $F \subset Y_s$ 分别是与 X_s 和 Y_s 对应的约化分支。根据命题 2.2.2，存在一个 Y 的 t-自同构，将 $\phi(E)$ 映到 F （必要时可先缩小 S ）。将 ϕ 替换为其与此 t- 自同构的复合后，可假设 $\phi(E) = F$，也就是说， $\phi : X \dashrightarrow Y$ 在余维 1 上同构。同样，这可以延拓为一个同构。□

3. 中心纤维的不可约分支

设 $f : X \longrightarrow S$ 是一个极小 δ-正则阿贝尔纤维化， P 是其 t-自同构概形。本节着重研究中心纤维 X_s 的每个不可约分支 E 。主要思路是构造一个态射 p: $E \longrightarrow A$ 到维数为 $n-1$ 的阿贝尔挠子 A ，使得 P_s° 在 E 上的作用下降为在 A 上的传递性 P_s°-作用（因此 p 将是一个局部平凡态射）。正如我们将在本节中看到的，这几乎总是可行的。

我们重点介绍四个主要结果。在命题 3.1.2中，我们证明每个不可约分支 $E \subset X_s$ 在正规化后都是一个 $\mathbb{P}^1$-丛 $\tilde{E} \longrightarrow A$，仅有少数例外。在命题 3.2.1中，我们证明 E 要么是一个 $\mathbb{P}^1$-丛，要么是一个 $\mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^1$-丛 $E \longrightarrow A$，且无需正规化，但假设 X_s 是可约的。当 X_s 是整的时，这一结论可能不成立，但我们将在命题 3.3.1和 3.4.1中单独处理这种情况。

3.1. **正规化后的不可约分支**。 我们先研究不可约分支的正规化 E 。本小节中的结果最初由 $E \subset X_s$HO09中的定理 1 证明。3]我们的论证推广了 [Kim24中的命题 514]。

命题 3.1.1。 设 $f : X \longrightarrow S$ 是一个 *klt*-极小的 δ-正则阿贝尔纤维化。那么，每个不可约分支 $E \subset X_s$ 都有光滑正规化 E。

证明。取定理 2.1.5 中 X 上的 P°-作用。 X_s 上的 P_s°-作用可提升到 其正规化 X_s ，并限制在其连通分支 $E \subset X_s$ 上。注意，由正规性可知， E的奇点集 Sing(E) 是一个维数为 $\leq n-2$ 的 P_s°-轨道。另一方面，根据引理 2.2.3， E 的每个 轨道维数都是 $\geq n-1$ 。因此 Sing(E) 必为 $= \varnothing$ ，从而 E 是光滑的。□

命题 3.1.2。 在命题 *3.1.1*中，假设以下条件之一成立。

(i) P_s 不是阿贝尔簇，且 P_s°对 E 的作用具有有限核（例如，当 $E \subset X_s$ 根据命题 *2.1.6*是一个约化分支时）。(ii) E 含有一条有理曲线。

于是存在一个 P_s°-等变的 $\mathbb{P}^1$-丛态射 $\tilde{p} : \tilde{E} \longrightarrow A$ ，映到维数为 $n-1$ 的阿贝尔挠子 A 。此外， P_s° 在 A 上传递作用。

证明。 (i) 设 K 为作用的核，并记作 $P_s = P_s^\circ/K$。则 P_s-在 E 上的作用一般自由，且有唯一的开轨道 $P_s \subset E$。设 $0 \longrightarrow L_s \longrightarrow P_s \longrightarrow A \longrightarrow 0$ 为 Chevalley 正合列，其中 $L_s = \mathbb{G}_m$ 或 $\mathbb{G}_a$，且 A 是一个维数为 $n-1$ 的阿贝尔簇。等变有理映射 $E \supset P_s \longrightarrow A$ 处处有定义，因为 E 光滑，而 A 是阿贝尔挠子。由于 P_s 在 A 上传递作用，其所有纤维彼此同构，并且包含线性部分 $\bar{L}_s$ 作为开子集。一般光滑性表明它是一个 $\mathbb{P}^1$-丛。

(ii) 注意，由引理 2.3.4 可知，P_s 不可能是阿贝尔簇。进一步假设 (i) 不成立，即 E 有一个包含线性部分 $L_s \subset P_s^\circ$ 的 1 维核（命题 2.1.6）。因此，我们可以改为考虑一个 $P_s^\circ/L_s = A_s$-作用。取一个充分大的有限子群 $K \subset A_s$，使其包含 A_s 在 E 上的 $P_s^\circ/L_s = A_s$-作用的所有稳定子。定义商 $F = E/K$ 和 $A = A_s/K$后，由引理 A.1.4，F这个簇具有一个 A-作用；由于我们消去了所有稳定子，这个作用是自由的。按照命题 3.1.1 中的论证，奇点集 Sing(F) $= \varnothing$，故簇 F 光滑。自由商（例如，[Stacks，标签 06PH]）

$$F \longrightarrow C = F/\bar{A}$$

定义了一个以光滑射影曲线 C为底的 A-主齐性空间。此时，利用有理曲线假设可知，C 受一条有理曲线支配。这证明了$C = \mathbb{P}^1$，从而推出 $F = \mathbb{P}^1 \times \bar{A}$，因为 $H^1_{\acute{e}t}(\mathbb{P}^1, \bar{A}) = 0$。

我们有一个等变态射 $E \longrightarrow F \longrightarrow A$ 到一个阿贝尔挠子 A，其维数为 $n-1$，并带有传递的 A_s-作用。取其 Stein分解 $E \longrightarrow A \longrightarrow A$。那么 A 也带有传递的 A_s-作用，因此它是一个维数为 $n-1$ 的阿贝尔挠子（且 $A \longrightarrow A$ 是同源）。此外，$\tilde{p}\colon E \longrightarrow A$ 是光滑的射影且局部平凡。由于根据假设，E 含有一条有理曲线，因此它是一个$\mathbb{P}^1$丛。□

推论 3.1.3。设 $f\colon X \longrightarrow S$ 为一个 *klt*-极小 δ-正则阿贝尔纤维化。那么，$E \subset X_s$ 中的每条有理曲线都是以下纤维的像：$\mathbb{P}^1$丛$\tilde{p}\colon E \longrightarrow A$ 见命题 *3.1.2*。□

注 3.1.4. **(1)** 命题 3.1.1–3.1.3 是在 [HO09, §2–3] 关于拉格朗日纤维化的背景下证明的。其中 X_s 中的有理曲线在该文中称为特征叶，因为它是由辛形式诱导的某个秩为 1 的叶状结构的叶。**(2)** 事后看来，命题 3.1.2中的 (i) 蕴含 (ii)。根据引理 2.2.3，P_s°在 X_s 上的作用的核要么是有限的，要么是 1维的。命题 3.1.2的证明中，这两种情形的表现有所不同。**(3)** 我们将在命题 3.2.1 中看到，一旦 X_s 可约，每个不可约分支 $E \subset X_s$ 都被光滑有理曲线覆盖。

最后，我们给出态射 $\tilde{p}\colon E \longrightarrow A$ 的若干性质，这些性质将在后续论证中使用。

引理 3.1.5. 在命题 *3.1.2*中，假设条件 *(i)* 成立。

(1) 如果 P_s 有线性部分 $\mathbb{G}_m$，那么 E 恰有两个具有非平凡稳定子的 P_s°-轨道。二者都是 $\tilde{p}$的截面，我们将其称为 0 和 ∞。(2) 如果 P_s 有线性部分 $\mathbb{G}_a$，那么 E 恰有一个具有非平凡稳定子的 P_s°-轨道。它是 $\tilde{p}$的一个截面。

证明。 $\mathbb{P}^1$-丛 $\tilde{p}$是作为 Chevalley 态射 $P_s \longrightarrow A$ 的紧化构造的，其中 $P_s \subset E$ 是开轨道。其补集 $Z = E \backslash P_s \longrightarrow A$ 是一个 P_s-等变态射。

(1) $Z \longrightarrow A$ 是次数为 2 的有限 étale 态射，因为 $\bar{L}_s = \mathbb{G}_m \subset \mathbb{P}^1$ 是一个两点紧化。Z 的稳定子包含 L_s，因为 $\dim Z = n-1$。但是，A 的稳定子恰好是 L_s，因此可知 Z 也具有稳定子 L_s。这意味着 Z 是两个截面的不交并。(2) $Z \longrightarrow A$ 是一个同构，因为 $\bar{L}_s = \mathbb{G}_a \subset \mathbb{P}^1$ 是一个单点紧化。□

引理 3.1.6. 在命题 *3.1.2*中，假设 *(ii)* 成立但 *(i)* 不成立。则 $\tilde{p}: E \longrightarrow A$ 允许进行如下有限 *étale* 伽罗瓦基变换，并具有以下性质：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \times A_s & \longrightarrow & \tilde{E} \\ \downarrow \mathrm{pr}_2 & & \downarrow \tilde{p} \\ A_s & \longrightarrow & A \end{array}.$$

(1) 伽罗瓦群 G 对 $\mathbb{P}^1 \times A_s$ 起对角作用。(2) A_s 在 E 上的作用的稳定子群为 $\ker(G \longrightarrow \mathrm{PGL}_2) \subset A_s$，且在的每个点 $x \in E$ 处均如此。

证明。回顾命题 3.1.2 的证明，$L_s \subset P_s^\circ$ 在 E上作用平凡，因此 $\tilde{p}: E \longrightarrow A$ 是一个 A_s-等变态射。由于 A_s在 A上的作用是传递的（设 $G \subset A_s$ 是其稳定子群），存在一个同源 $A_s \longrightarrow A$，其伽罗瓦群为 G。暂且将 $\tilde{p}': E' \longrightarrow A_s$ 记为 $\tilde{p}$的基变换。由于 $\tilde{p}'$ 是 A_s-等变的，且 A_s上的作用是自由的，因此 A_s在 E' 上的作用也是自由的。其自由商 $\tilde{E}' \longrightarrow \tilde{E}'/A_s \cong \mathbb{P}^1$ 是一个 A_s-主齐性空间。它是平凡的，因为 $\tilde{p}$ 的任意一个纤维都给出其截面，从而表明 $\tilde{E}' = \mathbb{P}^1 \times A_s$。

（1）由于 pr_2 是等变的，$g \in G \subset A_s$ 在 $\mathbb{P}^1 \times A_s$ 上的作用为

$$g \cdot (x, y) = (g_y(x), y + g) \qquad \text{for} \quad (x, y) \in \mathbb{P}^1 \times A_s,\ g_y : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1.$$

这定义了一个态射 $A_s \longrightarrow \mathrm{PGL}_2$，将 $y \longmapsto g_y$映到PGL_2，由于 A_s 是真连通的，因此该态射必为常值。这表明 G对 $\mathbb{P}^1 \times A_s$ 的作用是对角线作用。(2) 可直接由 (1) 得出。相同的思路将在命题4.2.4中再次使用。□

3.2. **未正规化的不可约分支。** 为了分析不可约分支 $E \subset X_s$ 在未正规化时的结构，我们还需要两个额外的要素。首先是 §2.5中的对数终端收缩的存在性，其次是关于非正规簇的结构性结果（§A.3）。

以下是本小节的主要结果。

命题 3.2.1. 设 $f: X \longrightarrow S$ 是一个极小的 δ-正则阿贝尔纤维化。假设中心纤维 X_s 可约。那么，每个不可约分支 $E \subset X_s$，无论是否约化，都存在一个 *étale* 局部平凡态射 $p: E \longrightarrow A$ 到某个带有传递 $\bar{A}$ 作用的阿贝尔挠子 P_s°。此外，命题 $\mathbb{P}^1$中的 $\tilde{p}: \tilde{E} \longrightarrow A$ 所述的 *3.1.2* -丛存在，并且与 p 存在以下某种关系：

(i) $E = \tilde{E}$ *is smooth projective and* $p = \tilde{p}$ *is a* $\mathbb{P}^1$*-bundle.*

(ii) E 沿着 p 的一个截面是奇异的，并且存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} & \xrightarrow{\nu} & E \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{p}} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ A & \longrightarrow & \bar{A} \end{array}.$$

这里 ν 是正规化， p 的纤维同构于$(xy = 0) \subset \mathbb{P}^2_{[x,y,z]}$，且 $A \longrightarrow \bar{A}$ 是次数为2的同源。

也就是说，当 X_s 可约时，每个不可约分支 E 都容许一个étale 局部平凡纤维丛

$$p : E \longrightarrow \bar{A} \qquad \text{with a fiber } \mathbb{P}^1 \text{ or } \mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^1 \ (= (xy = 0) \subset \mathbb{P}^2).$$

第二种情形并未出现，当相对维数 n 为 1时，因为 $\mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^1$ 不是不可约的。对于 $n \geq 2$，第二种情形确实出现，并且已在 [Mat01的图 1]中被观察到。我们感谢 Mirko Mauri指出这一点。本节其余部分专门用于证明命题 3.2.1。

由 $\mathbb{P}^1$构成的树是一条具有节点奇点的真、连通且约化的曲线，其不可约分支为 $\mathbb{P}^1$，且对偶图是一棵树。

引理 3.2.2. 在命题 *3.2.1*的设定下，每个不可约分支 $E \subset X_s$ 容许一个等变等平纤维化 $p : E \longrightarrow A$，其中 A 是一个阿贝尔挠子，与 A_s 同源，且其纤维 C 是由 $\mathbb{P}^1$ 构成的树。特别地， E 被光滑有理曲线覆盖，且每条有理曲线在 E 中都是光滑的。

证明。 由于 X_s 是可约的，我们可以将命题 2.5.2 中的论证应用于单个不可约分支 $E \subset X_s$，从而得到一个压缩

$$\phi : X \longrightarrow \bar{X}.$$

被压缩轨迹 A 是一个连通的 P_s°-不变子簇，且维数为 $X_s \leq n-1$。因此它是一个单独的 A_s-轨道，并且是一个 $(n-1)$维阿贝尔挠子（引理2.2.3）。因此，等变态射 $p = \phi_{|E} : E \longrightarrow A$是局部平凡的，例如其纤维为 C。

令 $Z \subset X$ 为由 $n-1$ 个一般的非常 ample 除子构成的完全交，并令 $Z = \phi^{-1}(\bar{Z})$为其原像。根据贝尔蒂尼定理， Z 是正则的（这些除子仍然无基点）；根据 [KM98，引理 5.17]，， Z 是对数终端的，且 $Z \cap A$ 是 0-维的。因此， $\phi : Z \longrightarrow Z$ 是对数终端曲面奇点的消解，所以其纤维 C 必然是由 $\mathbb{P}^1$构成的一棵树，正如所述（参见 [KM98，定理 4.7]中的情形 4–5）。 E 中的每条有理曲线都包含在纤维 C中，因此它同构于 $\mathbb{P}^1$。□

取正规化 $\nu : E \longrightarrow E$ 以及导子子概形交换图（§A.3）

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \hookrightarrow & \tilde{E} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu} \\ Z & \hookrightarrow & E \end{array}. \tag{3.2.3}$$

该交换图是 P_s°-等变的，因为 E自带一个 P_s°-作用。命题 3.2.1 最终将计算出 Z 和 $\tilde{Z}$的完整结构，但此处以下较弱的结论已足够。

引理 3.2.4。 以下结论在交换图 (3.2.3)中成立。

~(1) Z_{red}（分别地，Z_{red}）是若干个$(n-1)$维阿贝尔挠子的不交并，~其中每一个都是 E（分别地，E）中的一个 A_s轨道。~(2) Z_{red} 的每个连通分支都彼此同构。~(3) 满射态射 $Z_{\mathrm{red}} \twoheadrightarrow Z_{\mathrm{red}}$ 在每个连通分支上都是阿贝尔挠子之间的同源。

~ ~证明。（1，3）两者 $Z \subset E$ 与 $Z \subset E$ 均为 P_s°-子概形，维数为 $\leq n-1$，因此~由引理2.2.3，Z_{red} 与 Z_{red} 是维数为~$n-1$的阿贝尔挠子的不交并，其中每一个都是单个 P_s°-轨道。此外，Z 与 Z 是齐次的，并且~因而没有嵌入点。等变态射 $Z_{\mathrm{red}} \longrightarrow Z_{\mathrm{red}}$ 是阿贝尔挠子的不交并之间的有限 étale 态射。

（2）设 E 满足命题3.1.2中的条件（i）。则引理3.1.5~ ~表明 $Z_{\mathrm{red}} \subset E$ 是 $\tilde{p}$ 的一个截面，或者是两个截面的不交并。~无论哪种情形，Z_{red} 都具有同构的连通分支。现在设 E 满足命题3.1.2 中的条件（ii）（由引理3.2.2），但不满足（i）。则引理3.1.6 表明 A_s 作用在 E 上，且具有常稳定子群。也就是说，每个~A_s-轨道彼此同构，因而 Z_{red} 具有同构的分支。□

~**引理 3.2.5**。设 $p: E \longrightarrow A$ 是由引理 *3.2.2* 构造的态射，且$\tilde{p}: \tilde{E} \longrightarrow A$ 是命题 $\mathbb{P}^1$ 中的 -丛。则二者由以下等变交换图关联：*3.1.2*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} & \xrightarrow{\nu} & E \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{p}} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ A & \longrightarrow & \bar{A} \end{array},$$

其中，$A \longrightarrow \bar{A}$ 是一个同源，其次数等于 C中 $\mathbb{P}^1$的个数。

证明。推论 3.1.3 表明，每条有理曲线 $R \subset E$ 必为$\nu(\tilde{R})$ 的形式，其中 $\tilde{R}$ 是等变 $\mathbb{P}^1$ 丛 $\tilde{p}: \tilde{E} \longrightarrow A$ 的一个纤维。我们已在引理 3.2.2 中证明有理曲线 R 是光滑的（并且根据引理 3.2.4(3)，ν 仅沿阿贝尔簇方向~塌缩），因此，对每条有理曲线 $R \subset E$，态射 $\nu_{|\tilde{R}}: R \longrightarrow R$ 都是同构。总之，$\tilde{p}$ 的纤维 R 与 E 中的（光滑）有理曲线 R 之间存在一一对应关系~，且ν 在它们之间的限制是同构。

每个纤维 $\tilde{R}$ 被映到一条有理曲线 $R = \nu(\tilde{R})$，因而被映到中的一个有理曲线。则性引理（见 [Kaw81，引理 14]）构造出所需的交换~图。该图是 P_s°-等变的，并且 A 和 A 都是单个 A_s-轨道。

~这表明 $A \longrightarrow A$ 是一个同源映射。要计算其次数 d，取一个点 $y \in A$，其纤维为 $C = p^{-1}(y)$。一方面，它在 $\tilde{E}$ 中的原像是 $\nu^{-1}(C)$；另一方面，则是 $\tilde{p}$的 $\mathbb{P}^1$-纤维的不交并，其个数为 d。由于 ν 将纤维~R 同构地映到 C中的一条有理曲线上，这表明次数 d 等于 C中的有理曲线数目。□

命题 *3.2.1*。若 $C = \mathbb{P}^1$，则 $p: E \longrightarrow A$ 是一个 $\mathbb{P}^1$-丛，因此我们属于第一种情形。从现在起，假设 C 是一棵至少含有两个 $\mathbb{P}^1$的树。

取两条光滑有理曲线 R_1，$R_2 \subset C$ 它们在一个节点处相交$x_{12} \in C$。记 $R_i = \nu(\tilde{R}_i)$ 为 $i = 1, 2$，其中 $\tilde{R}_i = \tilde{p}^{-1}(t_i)$ 为 $t_i \in A$ 纤维（推论3.1.3）。我们在引理3.2.5 中证明了 ν 诱导出同构

$R_i \longrightarrow R_i$。因此，交 $x_{12} = R_1 \cap R_2$ 提升为两个不同的点 $\tilde{x}_1 \in R_1$ 和 $\tilde{y}_2 \in R_2$。

我们先证明 $\tilde{x}_1$ 和 $\tilde{y}_2$ 属于 P_s°的同一轨道 E，或者属于 A_s轨道，因为它们在 Z_{red} （3.2.3）中属于3.2.4。反设它们不属于同一轨道。于是，引理3.2.4(1–3)指出，这两个不同的轨道 $A_s \cdot \tilde{x}_1$ 和 $A_s \cdot \tilde{y}_2$ 是的连通分支 Z，并且被映到 Z的同一个连通分支中，即这两个轨道在 E中的像相同。任取一点 $\tilde{x}_2 \in (A_s \cdot \tilde{x}_1) \cap R_2$ 并将其写为

$$\tilde{x}_2 = a \cdot \tilde{x}_1 \qquad \text{for} \quad a \in A_s.$$

由于 ν 是等变的，它将 $\tilde{x}_2 = a \cdot \tilde{x}_1$ 和 $\tilde{y}_3 := a \cdot \tilde{y}_2$ 都映到同一个点 $x_{23} := a \cdot x_{12} \in E$。取一个包含 $\tilde{y}_3$ （可能与 R_1相同）的 R_3 纤维，其中 R_3 是 $\tilde{p}$ 的纤维；其像 $R_3 = \nu(R_3)$ 是一条有理曲线，位于 C 中，并在 x_{23}处与 R_2 相交。这个归纳过程在有限步内终止，即对某个 $i < j$，有 $R_i = R_j$。但这构造出 C中的一个有理曲线环，这与 C 是由 $\mathbb{P}^1$构成的树这一事实矛盾。这说明 $\tilde{x}_1$ 和 $\tilde{y}_2$ 属于同一 A_s轨道。

此时，我们有两条光滑有理曲线 $R_1, R_2 \subset C$，它们在$x_{12} \in Z$处相交；其提升 $\tilde{x}_1$ 和 $\tilde{x}_2 := \tilde{y}_2$ 位于同一个 A_s轨道中，或者属于 Z的同一个连通分支。现在我们断言，$A \longrightarrow A$ 的伽罗瓦群是 2-挠。设 $a \in A_s$为 $\tilde{x}_2 = a \cdot \tilde{x}_1$。取 E 中的一点 $\tilde{x}_3 := a \cdot \tilde{x}_2$，以及一条经过该点的纤维 R_3。由引理 3.2.5，该断言等价于 $R_3 = R_1$。反设 $R_3 \neq R_1$。那么有三条有理曲线 R_1、R_2和 $R_3 = \nu(R_3)$经过同一个点 $x_{12} = \nu(\tilde{x}_1) = \nu(\tilde{x}_2) = \nu(\tilde{x}_3)$。这与 C 只有节点相矛盾。因此，$A \longrightarrow A$ 的伽罗瓦群是 2-挠。

只需证明，$A \longrightarrow A$ 的伽罗瓦群是 $\mathbb{Z}/2$。反设伽罗瓦群包含$(\mathbb{Z}/2)^{\times 2}$。那么存在四个纤维 R_{ij}，对应于 $i,\ j = 0,\ 1$ 中像在 A 下相同的四个点 A。利用引理3.2.4–3.2.5 以及上述类似论证，使这一情形成立的唯一可能方式是存在八个点 $\tilde{x}_{ij},\ \tilde{y}_{ij} \in R_{ij}$对应于 $i,\ j = 0,\ 1$，满足

$$\nu(\tilde{x}_{ij}) = \nu(\tilde{x}_{i+1,j}) \quad \text{and} \quad \nu(\tilde{y}_{ij}) = \nu(\tilde{y}_{i,j+1}) \qquad \text{for} \quad i, j = 0, 1$$

其中加法按模 2 计算。但这会产生四条有理曲线 R_{ij}，它们在 C中构成一个环，这仍然不可能。至此，命题得证。□

注 3.2.6。将引理3.2.2 中的论证应用于命题 2.5.2中一个完整的 klt-魏尔斯特拉斯 ϕ 压缩 $X \longrightarrow X$：其约化纤维 再次是由 $C = F_{\mathrm{red}}$ 构成的树 $\mathbb{P}^1$。这已经表明，若 X_s 可约，则对每个不可约分支 $E_j \subset X_s$，其补集 $\bigcup_{i \neq j} E_i$ 没有环，且只有节点奇点。

3.3. **不可约纤维：不稳定情形**。命题 3.2.1讨论了X_s 可约的情形。其出发点是引理3.2.2中存在一个对数终端收缩，这是由（2.5.4）中的交数为负得到的。当 X_s 不可约时，该交数为0，因此这一论证失效。

接下来两个小节的目标是分别讨论 X_s 为整的情形。在本小节中，我们考虑不稳定情形。

命题 3.3.1. 设 $f : X \longrightarrow S$ 是一个魏尔斯特拉斯 δ-正则阿贝尔纤维化，其中心纤维为 $X_s = E$。假设 P_s 有一个线性部分 $\mathbb{G}_a$。那么存在一个等变态射

$$p : E \longrightarrow A,$$

其中， A 是一个维数为 $n-1$ 、带有传递性 P_s°-作用的阿贝尔挠子。

这是以下关于单个簇的陈述的推论，而非关于阿贝尔簇退化的陈述。

命题 3.3.2. 设 P 是一个连通交换代数群，它作用于一个完备整簇 E，二者的维数均为 n ，且定义在特征为0的代数闭域k 上。假设

- P 存在一个切瓦莱分解 $0 \longrightarrow \mathbb{G}_a \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0$ ，其中阿贝尔簇 A 的维数为 $n-1$。
- 该作用一般自由，且每个非平凡稳定子都是 $\mathbb{G}_a$。

于是存在一个扎里斯基局部平凡且 P-等变的态射

$$p : E \longrightarrow A,$$

其纤维 R 是一条射影有理曲线，具有一个可能的奇点 $x \in R$，且带有 $\hat{\mathcal{O}}_{R,x} = k[[t^{\delta+1}, t^{\delta+2}, \cdots]]$ ，其中 $\delta \geq 0$。

由命题 3.3.2 证明命题 3.3.1。由于 $X_s = E$ 是约化的，根据命题 2.1.6， P_s° 在其上一般自由地作用。此外，根据引理 A.1.2， $x \in X_s$ 处的每个非平凡稳定子都具有形式 $\mathbb{G}_a \times K_x$，其中 $K_x \subset P_s^\circ$ 是有限群。取一个足够大的有限群 $K \subset P_s^\circ$，包含所有 K_x，并取商 $\bar{\ }$ 、 $P_s = P_s^\circ/K$ 和 $X_s = X_s/K$。于是 P_s 在 X_s 上（引理 A.1.4）一般自由地作用，且仅有非平凡稳定子 $\mathbb{G}_a$。命题 3.3.2 表明， X_s 是一个R-纤维丛，底空间为 $A = A_s/K$。事实上， R 是一条尖点三次曲线，因为 δ 与 $\mathrm{Pic}^\circ_E = \check{P}_s^\circ$ 的线性部分的维数相同，而在我们的情形中该维数为 1。 $\bar{\ }$ 的复合 $X_s \longrightarrow X_s \longrightarrow A$ 即为所需的态射。

我们排除尖点三次曲线纤维的原因在于，例如之处Ш$/3$ 不稳定纤维化将产生反例（它们的中心纤维都将是整的，见表1）。□

本小节的其余部分用于证明命题3.3.2。

3.3.1. 沿正规化下降。 沿用命题 $\tilde{\ }$ 中的记号和假设 3.3.2。取正规化 ν : $E \longrightarrow E$。该 P作用提升到 E ，并且 ν 是等变的。该 P在 E 上的作用是一般自由的，因此命题3.1.2(i)中的论证表明，Chevalley态射 $P \longrightarrow A$ 可紧化为一个等变的 $\mathbb{P}^1$丛态射

$$\tilde{p} : \tilde{E} \longrightarrow A.$$

我们的目标是证明 $\tilde{p}$ 沿着 ν 下降为一个态射 p : $E \longrightarrow A$。

引理 3.3.3. 正规化 ν 是一个同胚。

证明。 E 和 E 都有开轨道 $j\colon P \hookrightarrow E$ 和 $j\colon P \hookrightarrow E$，它们由 ν 识别。由于 P 是一个 $\mathbb{G}_a$-主齐性空间，j 的补集是 $\tilde{p}$ 的一个截面 $\tilde{e}\colon A \longrightarrow E$。

$$\begin{array}{ccccc} & j\nearrow & E & \nwarrow e & \\ & & \uparrow\nu & & \\ P & \xhookrightarrow{\tilde{j}} & \tilde{E} & \xhookleftarrow{\tilde{e}} & A \\ & \mathbb{G}_a\searrow & \downarrow\tilde{p} & \swarrow \mathrm{id} & \\ & & A & & \end{array} \tag{3.3.4}$$

这一节是一个单独的 P-轨道，其稳定子为 $\mathbb{G}_a$。因此，其像 $e = \nu \circ \tilde{e}\colon A \longrightarrow E$ 仍是一个单独的 P-轨道，其稳定子包含 $\mathbb{G}_a$。根据假设，每个非平凡稳定子都是 $\mathbb{G}_a$，因此可知 $\tilde{e}(A)$ 和 $e(A)$ 经由 ν同构。特别地，正规化 ν 是双射，因此根据 [Stacks，标签 0BRD]，它是（泛）同胚。□

继续使用（3.3.4）中的记号，同时也考虑导子子概形交换图（§A.3）

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \hookrightarrow & \tilde{E} \\ \downarrow\mu & & \downarrow\nu \\ Z & \hookrightarrow & E \end{array} \qquad \tilde{p} \searrow \quad A \,. \tag{3.3.5}$$

引理 3.3.3表明 μ 诱导出 $Z_{\mathrm{red}} = \tilde{e}(A)$与 $Z_{\mathrm{red}} = e(A)$之间的同构。根据 Z 和 Z 的等变性，它们没有嵌入点，因此 P-等变性意味着 $Z \subset E$是 Cartier 除子。

引理 3.3.6。 *Z 是约化的，即 $Z = e(A)$ 在概形意义下。*

证明。这个问题在 E 上是局部的。由于 $P \longrightarrow A$ 是一个扎里斯基 $\mathbb{G}_a$-主齐性空间（例如，参见 [Mil17，命题 16.55]），存在一个开子集 $0 \in U \subset A$，其上有一个分裂 $P_U = \mathbb{G}_a \times U$。尽管 P_U 不再是群，我们仍可以考虑它在 $\tilde{E}$ 和 E 中的轨道。固定一个参考点 $t \in A$、一个纤维 $\tilde{E}_t = \tilde{p}^{-1}(t) = \mathbb{P}^1$ 及其 P_U-轨道 $\tilde{E}_{U\cdot t} = \tilde{p}^{-1}(U\cdot t)$。由引理 3.3.3，其像 $E_{U\cdot t} := \nu(\tilde{E}_{U\cdot t})$ 是 Y 的一个开子概形。以下我们将所有内容限制在 $E_{U\cdot t}$ 上，并为简洁起见省略下标。

固定一个截面 $U \hookrightarrow P$，利用分裂 $P = \mathbb{G}_a \times U$。在 U 上的平移作用于 E 和 E 时没有稳定子，因为每个非平凡稳定子都曾是 $\mathbb{G}_a \subset P$，而它与 $U \subset P$ 的交是平凡的。因此，U平移定义了光滑的等价关系，分别作用于 E 和 E 上。取商后，根据 [Stacks，标签 06PH 和 04S6]，得到一个笛卡尔图：

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} & \xrightarrow{/U} & \mathbb{P}^1 \\ \downarrow\nu & & \downarrow\nu \\ E & \xrightarrow{/U} & R \end{array} .$$

水平箭头都是光滑的，因此 $\nu_*\mathcal{O}_{\tilde{E}}/\mathcal{O}_E$ 是 $\nu_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}/\mathcal{O}_R$ 的拉回，我们可以证明 $\nu_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}/\mathcal{O}_R$ 支撑在 R的一个约化点上。这就将命题归结为 $E = R$ 是一个 $\mathbb{G}_a$-曲线的情形。对于曲线，我们将在命题 3.3.7 中通过显式计算证明这一点。□

命题 *3.3.2* 的证明。考虑交换图（3.3.5）。引理3.3.6 表明复合态射 $Z \hookrightarrow E \longrightarrow A$ 沿着 $Z \longrightarrow A$ 下降为一个同构 μ。根据推出的泛性质，$\tilde{p}$ 下降为 $p\colon E \longrightarrow A$ 沿着 ν。关于有理曲线的其余断言 R 将再次由命题 3.3.7 得到。□

3.3.2. 奇异曲线的显式计算。 下面只需考虑$E = R$ 为一条曲线的情形:

命题 3.3.7。 设 R 是一条具有一般自由$\mathbb{G}_a$作用的射影整曲线，并设 $x \in R$ 是唯一可能的奇点。则

（1）$\hat{\mathcal{O}}_{R,\,x} = k[[t^{\delta+1}, t^{\delta+2}, \cdots]] = k \oplus (t^{\delta+1}) \subset k[[t]]$ 对于 $\delta \geq 0$。（2）导子子概形 $Z \subset R$ 是一个既约点 x。

一般自由的 $\mathbb{G}_a$ 作用具有一个开轨道 $\mathbb{G}_a \subset R$，因此 R 是一条有理曲线。记 $\nu\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow R$ 为正规化，则 $\mathbb{G}_a$ 作用提升到 $\mathbb{P}^1$，且 ν 是等变的。在 $\mathbb{P}^1$ 上选取适当的坐标后，不妨设

$$a \cdot [x, y] = [x,\, ax + y] \qquad \text{for} \quad [x, y] \in \mathbb{P}^1,\ a \in \mathbb{G}_a.$$

在此坐标下，点 $x \in R$ 的提升是 $[0, 1] \in \mathbb{P}^1$。在坐标为 $t = x/y$ 的 $[0, 1]$附近局部地，作用为

$$a \cdot t = \frac{x}{ax + y} = \frac{t}{1 + at} = t(1 - at + a^2t^2 - \cdots) \qquad \text{for} \quad a \in \mathbb{G}_a, \tag{3.3.8}$$

描述每个 $[0, 1]$的增厚上的 $\mathbb{G}_a$ 作用。

引理 3.3.9。 设 $A_i = k[t]/t^{i+1}$ 是一个 $\mathbb{G}_a$-等变代数，由 (3.3.8)定义。那么， $\mathbb{G}_a$-等变子代数 A_i 的任一非零形式均为

$$B = k \oplus (t^{\delta+1}) \subset A_i \qquad \textit{for} \quad \delta = 0, 1, \cdots, i.$$

证明。 设 $B \neq k$ 并令（我们将得到 $d = \delta + 1$）

$$d \coloneqq \max\{d \leq i : t^d \mid f \text{ for every } f \in B \text{ without constant terms}\}.$$

从 $c_d \neq 0$ 的 $f_d = c_d t^d + \cdots + c_i t^i \in B$ 开始。利用 $\operatorname{char} k = 0$ 找到 $a \in \mathbb{G}_a$，使得

$$f_{d+1} \coloneqq a \cdot f_d - f_d = c'_{d+1} t^{d+1} + \cdots + c'_i t^i \in B \qquad \text{with} \quad c'_{d+1} \neq 0.$$

归纳地找出多项式 f_j，其首项次数为 j，对所有 $d \leq j \leq i$ 均成立。它们的线性组合张成 (t^d)，从而完成证明。□

命题 *3.3.7*的证明。 **(1)** 再次从导子子概形图开始

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \nu \\ Z & \hookrightarrow & R \end{array}.$$

˜ ˜一个 Cartier 除子 Z 形如 $Z = \operatorname{Spec} A_i$，对某个 i 带有诱导的 $\mathbb{G}_a$-作用（3.3.8）。于是 $Z = \operatorname{Spec} B$ 对某个子代数 $B \subset A_i$ 的分类见引理3.3.9。围绕 $x \in R$ 的这一推出图是交换环的拉回图

$$\begin{array}{ccc} k[[t]]/t^{i+1} & \twoheadleftarrow & k[[t]] \\ \uparrow & & \uparrow \\ B & \twoheadleftarrow & \hat{\mathcal{O}}_{R,x} \end{array},$$

ˆ计算环$\hat{\mathcal{O}}_{R,\,x}$ 如所断言。

（2）根据定义，导子理想为

$$\mathfrak{c} = \left\{ f \in k[[t^{\delta+1}, \cdots]] : f \cdot k[[t]] \subset k[[t^{\delta+1}, \cdots]] \right\} = (t^{\delta+1}),$$

它在 $k[[t^{\delta+1},\cdots]]$ 中是极大的。因此， $Z = \operatorname{Spec} k$，正如所声称的那样。我们还可以计算 $\tilde{Z} = \operatorname{Spec} k[[t]]/(t^{\delta+1}) = \operatorname{Spec} A_\delta$，因此实际上有 $i = \delta$。□

3.4. **不可约纤维：半稳定情形**。本小节的目标是给出命题 3.3.1 的半稳定版本。

命题 3.4.1. 设 $f : X \longrightarrow S$ 为魏尔斯特拉斯 δ-正则阿贝尔纤维化，其中心纤维为 $X_s = E$。假设 P_s 具有线性部分 $\mathbb{G}_m$，并取$\mathbb{P}^1$-丛 $\tilde{p} : \tilde{E} \longrightarrow A$ （见命题 *3.1.2*）。则 E 是通过将两个截面 0 与 ∞ （即 $\tilde{p}$ 的截面，见引理*3.1.5(1)*）等同而得到的。

该策略与命题 3.3.2 相似，但更为简单。首先， E 的正规化如常容许一个等变 $\mathbb{P}^1$- 丛 $\tilde{p} : \tilde{E} \longrightarrow A$ 。取导子˜ ˜概形交换图（ 3.3.5 ）：理解导子子概形 $Z \subset E$ 与˜$Z \subset E$ 便可确定簇 E。开轨道 $P \subset E$的补集在此情形下是两个截面的并（引理 3.1.5），因此导子子概形˜ ˜$Z \subset E$ 要么是

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}_1 \quad \text{or} \quad \tilde{Z}_1 \sqcup \tilde{Z}_2, \qquad \tilde{Z}_{i,\mathrm{red}} \cong A \text{ are sections of } \tilde{p}.$$

与引理3.2.4类似， Z 是一个或两个阿贝尔挠子的并，且˜$Z \longrightarrow Z$ 是满等变态射。下面的结果是引理3.3.6的对应版本。

˜ ˜ ˜**引理 3.4.2**。 $Z = Z_1 \sqcup Z_2$ 是两个阿贝尔挠子的并， Z 是一个阿贝尔˜主齐性空间，且态射 μ ： $Z \longrightarrow Z$ 是两个同构的不交并˜$Z_i \longrightarrow Z$。

证明。我们将使用关于 $X_s = E$的另外两个条件：它是半正规概形（定理 2.3.8），且具有平凡典范丛。由半正规性可知， E 在余维1 处有节点奇点，因此由等变性可知处处都有节点奇点。˜因此，导子子概形 Z 和 Z 都是约化的，且态射˜μ ： $Z \longrightarrow Z$ 在交换图（3.3.5）中是次数为 2的有限 étale 态射。这便留下三种可能：

- $Z \xrightarrow{\sim} Z$ 是连通阿贝尔挠子之间的次数为 2 的等ogeny。˜ ˜ ˜ ˜
- $Z = Z_1 \sqcup Z_2$ 和 $Z = Z_1 \sqcup Z_2$ 均不连通，且 $Z_i \longrightarrow Z_i$ 是阿贝尔挠子的次数为 2 的等ogeny。˜ ˜ ˜ ˜ ˜
- $Z = Z_1 \sqcup Z_2$ 不连通， Z 连通，且 $Z_1 \cong Z_2 \cong Z$ 是阿贝尔挠子。

为排除前两种情况，我们利用典范除子的平凡性。

˜ ˜ ˜取一条光滑有理曲线 $R \subset E$，它是 $\tilde{p}$的一个纤维，并取其像 $R = \nu(R)$，其中 E。在所有情况下，取 A 的一个充分小的 étale 邻域 U ，并在 R的一个 $\mathbb{G}_m \times U$-轨道上进行讨论。引理 3.3.6 中的光滑商论证将断言归结为如下情形： $E = R$ 是一条曲线，带有一般自由的 $\mathbb{G}_m$-作用，且典范除子平凡。根据 Ser88，§IV.3], 的计算，在第一、第二和第三种情况下， E 的算术亏格分别为 0、0 和 1。因此，只有第三种情况是可能的。□

命题的证明 *3.4.1*。引理 3.4.2 表明， $X_s = E$ 是通过识别˜ ˜两个截面 Z_1 和 Z_2 得到的。□

4. 剪切与解缠

从现在起，我们始终假设 $f\colon X \longrightarrow S$ 是相对维数为 ≥ 2 的极小 δ-正则阿贝尔纤维化。本节的目标是提出 f 的两种不同表现。只有当相对维数 n 至少为 2 时，这两种表现才会出现。

半稳定退化研究中，第一个现象早已为人所知。¯在上一节中，我们在各种情形下为每个不可约分支 $p_i\colon E_i \longrightarrow A_i$ 构造了一个态射 $E_i \subset X_s$。人们希望将它们全部拼接成一个态射 $X_s \longrightarrow A$，映到维数为 A 的阿贝尔挠子 $n-1$。一般而言这是不可能的：存在一个障碍类 $a \in A_s$ 阻碍了这一点，我们称之为剪切（定义 4.1.3）。关于这一点的精彩图示，参见 [Saw22] 的引言。

当 f 不稳定时，我们将证明中心纤维 X_s 总存在一个满射态射 $X_s \longrightarrow A$，映到维数为 $n-1$的阿贝尔挠子；等价地说，其阿尔巴内斯主齐性空间 Alb_s 的维数为 $n-1$。阿尔巴内塞映射 $\mathrm{alb}\colon X_s \longrightarrow \mathrm{Alb}_s$ 将是一个局部平凡态射，但未必是平凡的。其平凡化的障碍可由 G 在 Alb_s上的A_s-作用的稳定子来衡量，我们称之为阿尔巴内塞稳定子（定义 4.2.3）。我们还将说明如何通过一个称为 f的解缠过程来消除这一障碍（命题 4.2.4）；这是我们研究不稳定纤维化的关键技巧。这与 [Kaw81 中 K-平凡簇的阿尔巴尼斯态射的平凡化类似（但并不相同），见定理 15]。

4.1. **阿尔巴内塞态射与剪切。** 中心纤维 X_s 是一个射影概形，其 $h^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = 1$ 由引理 A.0.1得出。阿尔巴尼斯态射的存在性

$$\mathrm{alb}\colon X_s \longrightarrow \mathrm{Alb}_s := \mathrm{Alb}_{X_s}$$

在这种情形下由 [Con17证明；LS24]。其结果总结见定理 A.2.2 。拉回 阿尔巴内塞映射* 在 阿尔巴内塞簇$^\vee_s$ 与 $\mathrm{Pic}^\circ_{X_s}$的极大阿贝尔子簇之间诱导出一个同构。由于 $\mathrm{Pic}^\circ_{X_s}$ 在此情形下的维数为 n，因此 阿尔巴内塞簇$_s$ 的维数至多为 n。

alb： $X_s \longrightarrow$ 阿尔巴内塞簇$_s$ 的泛性质将 P_s-作用下降到 阿尔巴内塞簇$_s$上，从而使阿尔巴尼斯态射成为等变态射 [LS24，推论 10。3]。中性分支 P°_s 通过平移作用于 阿尔巴内塞簇$_s$ 。

引理 4.1.1。 P°_s-作用在 阿尔巴内塞簇$_s$ 上是传递的。特别地，阿尔巴内塞映射 是一个 *étale* 局部平凡态射。

证明。由推论 A.2.3，阿尔巴内塞映射$_{X_{s,\ \mathrm{red}}} \longrightarrow$阿尔巴内塞映射$_s$ 是满射。因此只需证明 P°_s-作用在阿尔巴内塞映射$_{X_{s,\ \mathrm{red}}}$上是可迁的。首先假设 X_s 是可约的。每个不可约分支 $E_i \subset X_s$ 容许一个局部平凡丛 $p_i\colon E_i \longrightarrow A_i$，由命题3.1.2。因此，我们有一个 P°_s-等变交换图

$$\begin{array}{ccccc} E_i & \subset & X_{s,\mathrm{red}} & \subset & X_s \\ \downarrow{\scriptstyle p_i} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{alb}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{alb}}\,. \\ A_i & \longrightarrow & \mathrm{Alb}_{X_{s,\mathrm{red}}} & \twoheadrightarrow & \mathrm{Alb}_s \end{array}$$

由于每个 A_i 都具有传递的 P°_s 作用， $A_i \longrightarrow A := \mathrm{Alb}_{X_{s,\ \mathrm{red}}}$ 的像是单个 P°_s 轨道，即 A 的一个阿贝尔子挠子。因此，$\mathrm{alb}(X_{s,\ \mathrm{red}}) = \bigcup_i \mathrm{alb}(E_i) \subset A$ 是轨道的并集，同时也是连通的，所以它必定是一个阿贝尔子挠子

A。由阿尔巴尼斯态射的泛性质可知，这证明了 alb :$X_{s,\ \mathrm{red}} \longrightarrow A$ 和 $A_i \longrightarrow A$ 都是满射。因此，P_s° 在 A 上的作用是传递的。

现在假设 $X_s = m \cdot E$ 是不可约的。若 P_s 是阿贝尔簇，则 E 根据引理2.3.4，是阿贝尔挠子。因此，P_s 在$X_{s、\ \mathrm{red}}$ =阿尔巴内塞映射X_{s}red 上具有传递作用，结论得证。假设 P_s 不是阿贝尔簇。在（7.1.2）中，我们将构造一个新的 δ-正则极小阿贝尔纤维化 $Y \longrightarrow T$，使其中心˜纤维 Y_t 是整的，且 $E = Y_t/\varphi$ 是其自由商。根据命题3.1.2(i)，Y_t 是一个 $\mathbb{P}^1$-丛。根据命题3.1.2(ii)，$\tilde{E} = \tilde{Y}_t/\varphi$ 也同样是一个 $\mathbb{P}^1$-丛。因此，我们可以使用上方类似的交换图，但将其替换为正规化$E \longrightarrow X_{s,\ \mathrm{red}}$ 从而得出结论。□

˘假设 P_s 有线性部分 $\mathbb{G}_m$ 和阿贝尔簇部分 A_s。那么 P_s 根据命题˘有线性部分 $\mathbb{G}_m$ 和阿贝尔簇部分 A_s，命题2.4.2给出 Chevalley˘ ˘序列 $0 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow P_s^\circ \longrightarrow A_s \longrightarrow 0$ 产生一个扩张类

$$[\check{P}_s^\circ] \in \mathrm{Ext}^1(\check{A}_s, \mathbb{G}_m) = A_s(k), \tag{4.1.2}$$

其中 Ext 群的计算来自 [Ser88，§VII.3。16]。

定义 4.1.3。假设 P_s 具有线性部分 $\mathbb{G}_m$。

(1) 剪切：f（或 X_s）即扩张类 $a \in A_s$，属于对偶 t-自同构群 ˘ P_s°（见 4.1.2）。(2) 我们称 f（或 X_s）具有挠剪切，如果剪切 $a \in A_s$ 是挠元。

注 4.1.4。原始 t-自同构群的 Chevalley 序列 $0 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow P_s^\circ \longrightarrow A_s \longrightarrow 0$ 度量了命题 3.1.2 中 $\mathbb{P}^1$-丛 $\tilde{E} \longrightarrow A_s$的非平凡性。因此我们称其扩张类$\check{a} \in \mathrm{Ext}^1(A_s, \mathbb{G}_m) = {}\check{}A_s$ 为 f（或 X_s）的斜率。注意，剪切与斜率在下述 ˘ ˘ 意义下起对偶作用：假设 $f\colon X \longrightarrow S$ 与 $f\colon X \longrightarrow S$ 分别是 P 与 ˘P的半稳定极小紧化（利用定理 2.1.4 与命题 2.2.2）。则 ˘ ˘ f 的剪切是 f的斜率，而 f 的斜率是 f 的剪切，此由命题 2.4.2 得到。剪切 $a \in A_s$ 是挠元当且仅当斜率$\check{a} \in A_s$ 是挠元 ˘，因为 P_s°与 P_s°同源。

这一术语将在定理5.1.1中得到论证，更准确地说，是在命题 5.1.10中。当 P_s 有线性部分 $\mathbb{G}_a$时，也可以考虑类似的定义，但事实证明这是多余的。让我们在下面这个更一般的背景下阐述这一现象。

定理 4.1.5。设 $P \longrightarrow S$ 是阿贝尔概形 P_0 在S_0上的 *Néron* 模型。若其中性纤维 P_s 有线性部分 $\mathbb{G}_a$，则其中性分支的 *Chevalley* 正合列唯一分裂。换言之，

$$P_s^\circ = \mathbb{G}_a \times A_s.$$

˘ ˘ 证明。先考虑对偶阿贝尔概形 $P_0 \longrightarrow S_0$ 及其 Néron 模型 $P \longrightarrow S$。˘ 利用定理 2.1.4 和命题 2.2.2，将 P 紧化为极小阿贝尔纤维化 $f\colon X \longrightarrow S$。由于 P 是 δ-正则的，根据命题 2.4.2，P 也如此，˘ ˘ ˘ ˘ ˘ 因而 f也是如此。中心纤维 X_s 是非多重的，因为它包含 P_s，所以 f 是一个不稳定的极小 δ-正则阿贝尔纤维化。根据命题 2.4.3，原群P_s° 同构于中性皮卡群 $\mathrm{Pic}^\circ_{\check{X}_s}$。

˘ ¯利用命题 $X \longrightarrow X \longrightarrow S$ 2.5.3。命¯题 3.3.1 构造了一个满射态射 $X_s \longrightarrow A$ 到一个阿贝尔挠子

维数 $n-1$，因此我们有一个满射态射

$$\check{X}_s \longrightarrow \bar{X}_s \longrightarrow A.$$

这表明 $\check{}X_s$ 的阿尔巴内斯主齐性空间的维数为 $\geq n-1$。回忆一下，$\mathrm{Alb}^{\vee}_{\check{X}_s}$ 是 $\mathrm{Pic}^{\circ}_{\check{X}_s} = P^{\circ}_s$ 中的极大阿贝尔子簇，而 $\mathrm{Pic}^{\circ}_{\check{X}_s} = P^{\circ}_s$ 是 A_s 的一个 $\mathbb{G}_a$-扩张。因此，$\mathrm{Alb}\,{}^{\check{}}X_s$ 的维数为 $n-1$，且 P°_s 含有一个维数为 $n-1$ 的阿贝尔子簇。由此，根据 [MM66, 引理 1(b)]，扩张类 $[P^{\circ}_s] \in \mathrm{Ext}^1(A_s, \mathbb{G}_a)$ 必为挠元。然而，根据 [Ser88, §VII.317], ，$\mathrm{Ext}^1(A_s, \mathbb{G}_a) = H^1(A_s, \mathcal{O}_{A_s}) = k^n$ 无挠，因此 $[P^{\circ}_s]$ 消失，Chevalley 序列分裂。由于 $\mathrm{Hom}(A_s, \mathbb{G}_a) = 0$，该分裂是唯一的。□

命题 4.1.6. 设 $f: X \longrightarrow S$ 是一个极小的 δ-正则阿贝尔纤维化，且P 是其 t-自同构概形。假设 P_s 有一个线性部分 $\mathbb{G}_a$。那么

(1) 代数群存在唯一分裂

$$P^{\circ}_s = \mathbb{G}_a \times A_s, \qquad \check{P}^{\circ}_s = \mathbb{G}_a \times A^*_s, \qquad \mathrm{Pic}^{\circ}_{X_s} = \mathbb{G}_a \times \mathrm{Alb}^{\vee}_s,$$

其中，A_s、A^*_s和Alb_s是维数为 $n-1$的同源阿贝尔簇。

(2) $\mathbb{G}_a$在 X_s 上的作用沿$\mathrm{alb}\colon X_s \longrightarrow \mathrm{Alb}_s$的纤维进行。

证明。 (1) 对Néron 模型 P 和 $\check{}P$应用定理 $\mathrm{Pic}^{\circ}_{X_s}$的分裂同源于 $\check{}\,P^{\circ}_s$（命题 2.4.3），并且 Alb_s 是其极大阿贝尔子簇的对偶（定理 A.2.2）。(2) P_s上的作用下降到Alb_s，而 alb 由泛性质可知是等变的。 $\mathbb{G}_a$在 Alb_s 上的作用必然是平凡的。□

注 4.1.7。 若 f 是非多重的，则由命题 $\mathrm{Pic}^{\circ}_{X_s} = \check{}P^{\circ}_s$ 可知 2.4.3，因此 $A^*_s = \mathrm{Alb}^{\vee}_s$。若 f 是多重的，则未必如此。

此外，我们提醒读者，阿贝尔簇部分 A_s 的 P_s 和 A^*_s 的$\check{}P_s$ 可能并不互为对偶，这与命题2.4.2（2）相反。定理5.2.1将构造反例：当 f 不稳定且具有非平凡的阿尔巴内塞稳定子 G （见定义 4.2.3）时，阿贝尔簇 $A^*_s = \mathrm{Alb}^{\vee}_s = (A_s/G)^{\vee}$ 和 A_s一般而言并不互为对偶。

C推论 4.1.8。 （1）若 P_s 是阿贝尔簇，则阿尔巴内塞映射$_s$ 的维数为 n。（2）若 P_s 具有线性部分 $\mathbb{G}_m$，则阿尔巴内塞映射$_s$ 的维数为 $\leq n-1$。此外，当且仅当 f 具有挠剪切时，等号成立。（3）若 P_s 具有线性部分 $\mathbb{G}_a$，则阿尔巴内塞映射$_s$ 的维数为 $n-1$。

证明。（1）若 P_s 是阿贝尔的，则 $\check{}\,P_s$ 也是如此，因此根据命题 2.4.3，$\mathrm{Pic}^{\circ}_{X_s}$ 也是如此。（2）类似地，若 P_s 具有线性部分 $\mathbb{G}_m$，则 $\mathrm{Pic}^{\circ}_{X_s}$也是如此。因此，$\mathrm{Alb}^{\vee}_s \subset \mathrm{Pic}^{\circ}_{X_s}$ 的维数至多为 $n-1$。还要注意，$\mathrm{Pic}^{\circ}_{X_s}$有一个维数为 $n-1 \iff P^{\circ}_s$ 的极大阿贝尔子簇；根据命题 2.4.3 $\iff [\,\check{}P^{\circ}_s] \in \mathrm{Ext}^1(\,\check{}A_s, \mathbb{G}_m)$ 是挠的，见 [MM66，引理 1(b)]。（3）这由命题 4.1.6 得出。□

4.2. **解缠**。 解缠过程将是我们研究不稳定纤维化的关键。我们将介绍它的三个版本。首先，引理 4.2.1是一个原始版本，适用于稍广泛的情形。接下来，它的特例命题 4.2.4是最实用的版本，适用于不稳定纤维化。最后，引理 7.1.8是引理 4.2.1针对多重纤维化的推广。最后这个版本的表述稍具技术性，因此我们将推迟到 §7再讨论。

引理 4.2.1。 设 $f: X \longrightarrow S$ 是一个极小 δ-正则阿贝尔纤维化。假设 f 是非多重的，且阿尔巴内塞映射的维数$_s = n-1$。那么，对于每个阿贝尔挠子的同源 $u: A \longrightarrow$阿尔巴内塞映射$_s$，以下结论成立。

(1) 缩小范围后，在 S *étale* 局部存在唯一的极小 δ-正则阿贝尔的˜ ˜纤维化 $f: X \longrightarrow S$，并带有一个笛卡尔图

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d, "u"] \arrow[dd, bend right, "\tilde{f}"'] & \tilde{X}_s \arrow[l, hook'] \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ X \arrow[d, "f"] & X_s \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\mathrm{alb}"] \arrow[d] & \mathrm{Alb}_s \\ S & \{s\} \arrow[l, hook'] & \end{tikzcd}.$$

˜ ˜(2) 设 G 为 u 的伽罗瓦群， P 为 f的 *t*-自同构概形。˜那么存在一个左正合列 $0 \longrightarrow G \longrightarrow P \longrightarrow P$。

证明。 (1) 设 G 为 u 的伽罗瓦群，且 $\hat{}G = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_m)$ 为其特征群。我们可以将同源 u表示为

$$u: A = \mathrm{Spec}_{\mathrm{Alb}_s}\Big(\bigoplus_{\chi \in \hat{G}} L_\chi\Big) \longrightarrow \mathrm{Alb}_s, \qquad \text{where} \quad \hat{G} \subset \mathrm{Alb}_s^\vee \quad \text{by} \quad \chi \longmapsto [L_\chi].$$

注意，$\hat{}G$ 映射到 阿尔巴内塞映射$_s^\vee = \mathrm{Pic}^\circ_{\mathrm{Alb}_s}$，因为 阿尔巴内塞映射$_s$的 Néron–Severi 群无挠，且该映射是单射，因为 A 是连通的。因此，基变换$\tilde{X}_s := X_s \times_{\mathrm{Alb}_s} A \longrightarrow X_s$ 由像 阿尔巴内塞映射$^*(\hat{}G) \subset \mathrm{Pic}^\circ_{X_s}$ 所定义，其中 $\hat{}G$经由一个单射 同态（定理 A.2.2）

$$\mathrm{Alb}_s^\vee \xhookrightarrow{\mathrm{alb}^*} \mathrm{Pic}^\circ_{X_s}.$$

由于 Pic°_f 是光滑的，必要时缩小 S，我们可以将其唯一延拓为 ˆ 挠截面 $G \subset \mathrm{Pic}^\circ_f(S)$。

取自 Leray 谱序列的四项正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}_f(S) \longrightarrow \mathrm{Br}(S) = H^2(S, \mathbb{G}_m).$$

严格亨泽尔离散赋值环的 Picard 群和 Brauer 群是平凡的 [Stacks，标签 03QO]。因此，在 étale 局部缩小 S 之后，我们可以将 $\hat{}G \subset \mathrm{Pic}^\circ_f(S)$ 唯一提升为 $\hat{}G \subset \mathrm{Pic}(X)$ [CTS21，§2.2.2]。换言之，对于每个 $\chi \in \hat{}G$，我们在 X上得到挠线丛 M_χ。伽罗瓦覆盖 u： $\tilde{X} = \mathrm{Spec}_X\big(\bigoplus_{\chi \in \hat{}G} M_\chi\big) \longrightarrow X$ 位于所需的交换图中。

˜此时，我们需要使用非多重纤维假设来证明 f是一个阿贝尔纤维化。关于 f 的非重数纤维假设意味着 Pic°_f 是分离的（命题 2.4.3）。因此 $\hat{}G \subset \mathrm{Pic}^\circ_f$ 在 S_0上是非平凡的，这表明˜ ˜ ˜的纤维 $X_0 \longrightarrow S_0$ 是（连通的）阿贝尔挠子。这意味着 f： $X \longrightarrow S$ 是一个极小阿贝尔纤维化。其 δ-正则性将由（2）推出。

˜ ˜(2) 同源 $P_0 \longrightarrow P_0$ 在 S_0 上延拓为同源 $P \longrightarrow P$ 在 S 上，依据[BLR90，命题 7.3。6]。更准确地说，短正合列 $0 \longrightarrow G \longrightarrow$ ˜ ˜$P_0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$ 在 S_0 上延拓为左正合列 $0 \longrightarrow G \longrightarrow P \longrightarrow P$（例如， [Kim24，命题 3。29]）。□

注 4.2.2. 引理4.2.1中的非倍数假设仅在最后用于保证 Pic°_f 的分离性。如果 f 是多重的，那么 Pic°_f 可能是非分离的

(命题 2.4.3–2.4.4)，因此某些挠截面 $\hat{}G \subset \mathrm{Pic}^{\circ}_{f}$ 可能~ ~在 S_0 上是平凡的。如果是这种情况，那么 $f\colon\ X \longrightarrow S$ 在 S_0 上有不连通的纤维，因此不是阿贝尔纤维化。谨慎地避免这一问题，就能得到适用于多重纤维化的引理推广（引理 7.1.8）。

专门考虑不稳定纤维化时，我们有一个优选的同源 y
u： 引理中的 $A \longrightarrow$阿尔巴内塞$_s$。

定义 4.2.3。 设 $f\colon\ X \longrightarrow S$ 是一个极小的 δ-正则阿贝尔纤维化。假设 f 是不稳定的。那么其阿尔巴内塞稳定子是稳定子群 $G \subset A_s$，即 A_s-作用在阿尔巴内塞$_s$ 上的命题4.1.6中的稳定子群。其解缠等源 f 是伽罗瓦群为 G的阿贝尔挠子之间的同源:

$$u : A_s \longrightarrow \mathrm{Alb}_s\,.$$

命题 4.2.4。 在引理 *4.2.1*中，进一步假设 f 是不稳定的，并取u: $A_s \longrightarrow$阿尔巴内塞$_s$ 为定义 *4.2.3*中的解缠等源。则有以下结论。

~ (1) $X_s = C \times A_s$ 对于完备曲线 C，阿尔巴内塞~态射的基变换是一个投影映射 $X_s \longrightarrow A_s$。 (2) 令 G 为阿尔巴内塞稳定子。则存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow \tilde{P} \longrightarrow P \longrightarrow 0 \quad \textit{such that} \quad G \cap \tilde{P}^{\circ} = 0.$$

特别地，在 $s \in S$ 上存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow \pi_0(\tilde{P}_s) \longrightarrow \pi_0(P_s) \longrightarrow 0 \quad \textit{and an isomorphism} \quad \tilde{P}^{\circ}_s = P^{\circ}_s.$$

定义 4.2.5。 设 $f\colon\ X \longrightarrow S$ 是一个不稳定的极小 δ-正则阿贝尔的~ ~纤维化。不稳定的极小 δ-正则阿贝尔纤维化 $f : X \longrightarrow S$ 在命题 4.2.4 中称为 解缠： f。

命题 4.2.4 的证明。(1) 回忆命题 4.1.6， X_s 具有一个 A_s 作用，且 alb$\colon\ X_s \longrightarrow$ Alb$_s$ 是一个 A_s-等变的局部平凡态射。设~ 的纤维是完备曲线 C。基变换 $X_s \longrightarrow A_s$ 仍然是 A_s-等变的，~ ~因此 X_s 上的 A_s 作用是自由的。 X_s 的自由 A_s 商是一个 A_s 主齐性空间 [Stacks，标签 06PH]

$$\tilde{X}_s \longrightarrow C \cong \tilde{X}_s/A_s.$$

~由于 $C \subset X_s$ 是一个纤维，这个 A_s 主齐性空间有一个截面，因此是平凡的。

(2) 序列的左正合性在引理 4.2.1 中得到证明。为证明其右正合性，取

$$\tilde{X}' = \tilde{X} \setminus \mathrm{Sing}(\tilde{X}_s) \quad \text{and} \quad X' = X \setminus \mathrm{Sing}(X_s)$$

~ ~如常规做法，并利用非多重纤维假设 $P = X'$ 和 $P = X'$ 将其识别
~ ~以及命题2.2.2。由于 $X' \longrightarrow X'$ 是满射， $P \longrightarrow P$ 因此如所声称，

~还需证明 $G \cap P^{\circ}_s = 0$。 alb$\colon\ X_s \longrightarrow$ Alb$_s$ 和 $u\colon\ A_s \longrightarrow$ Alb$_s$~均为 P_s-等变，因此它们的纤维积 $X_s = C \times A_s$ 具有一个 P_s-作用，且~$X_s \longrightarrow X_s$ 是等变的。这给出一个 P_s-等变、伽罗瓦、有限且 étale 的态射

$$\tilde{X}'_s \longrightarrow X'_s$$

伽罗瓦群为 G。但是， X'_s 上的 P_s 作用已经是自由的，因此这不仅意味着
~ ~P_s 在 X'_s 上自由作用，而且覆盖 $X'_s \longrightarrow X'_s$ 是若干同构的

~ ~ ~个 X'_s的不交并。对 $P_s = X'_s$ 和 $P_s = X'_s$ 进行识别可得 $|\pi_0(P_s)| = |\pi_0(P_s)| \cdot |G|$。~ ~ ~因此，复合映射 $G \hookrightarrow P_s \twoheadrightarrow \pi_0(P_s)$ 是单射，或者等价地， $G \cap P_s^\circ = 0$。□

5. 非重中心纤维的分类

本节对具有非多重纤维的极小 δ-正则阿贝尔纤维化进行分类。定理 5.1.1、5.2.1和5.3.2 是三个主要结果。前两个结果对半稳定和不稳定奇异纤维进行分类，最后一个结果对分支群进行分类 $\pi_0(P_s)$。

5.1. **半稳定纤维化**。本小节对半稳定中心纤维进行分类。关于两个子概形的识别这一概念，参见 §A.3。

定理 5.1.1。 设 $f : X \longrightarrow S$ 是一个极小 δ-正则阿贝尔纤维化。假设f 是半稳定的。那么， X_s 同构于以下对象之一。

(I_0) 维数为 n 的阿贝尔挠子。*(I_1)* 一个 $\mathbb{P}^1$-丛，其底空间为 A_s，有两个截面 *0* 和 ∞，它们由定义 ***4.1.3*** 中的剪切 $a \in A_s$ 所产生的平移识别。*(I_r)* 一个由 r 个（≥ 2）同构的 $\mathbb{P}^1$-丛组成的环 $E_i \longrightarrow A_s$；这些丛的截面 0_i 和 ∞_i（见引理 ***3.1.5***）依次由 $\infty_i = 0_{i+1}$ 识别，并整体施以剪切 $a \in A_s$ 所产生的平移。

定义 5.1.2. 定理 *Kodaira* 型半稳定纤维的 X_s 在定理 5.1.1中如所示。

~注 5.1.3。 我们的型 I_r 对应于 Matsushita 在定理 1.2(2) 和图 2（左图）中的型 A_r，见 [Mat01]。我们的型 I_r 对应于 Hwang–Oguiso 的[HO09] 型 I_{er} 或 I_∞，并且与 [Eng+25第 6 节一致。2]。前一种情形出现在剪切 $a \in A_s$ 是阶为 e的挠元时，后一种情形则出现在它不是挠元时。

注 5.1.4。 由定理 5.1.1可知，斜率 和 剪切

$$\check{a} = [P_s^\circ] \in \check{A}_s = \mathrm{Ext}^1(A_s, \mathbb{G}_m), \qquad a = [\check{P}_s^\circ] \in A_s = \mathrm{Ext}^1(\check{A}_s, \mathbb{G}_m)$$

分别确定 $\mathbb{P}^1$-丛 $E_i \longrightarrow A_s$ 和 E_i 的粘合数据。我们注意到这两者彼此相关，因为它们是对偶阿贝尔概形 P_0 和 P_0的 Néron 模型的不变量。例如，如果阿贝尔概形 $P_0 \longrightarrow S_0$ 是主极化的，那么我们有同构 $P_s \cong P_s$，由此两个扩张类相等。也就是说，对于每一种 $\mathbb{P}^1$-丛 E_i的选择，都存在一种唯一的方式将它们粘合成一个环（当 P 是主极化的时）。

本小节余下部分将证明定理 5.1.1。

引理 5.1.5。 设 $f : X \longrightarrow S$ 是任意一个极小的 δ-正则阿贝尔纤维化。假设 X_s 是可约的。

(1) 设 $E \subset X_s$ 为不可约分支， R （$= \mathbb{P}^1$ 或 $\mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^1$）为 p 的纤维~：命题 ***3.2.1*** 中的 $E \longrightarrow A$。则 $(E \cdot R) = -2$。*(2)* 设 E、$E' \subset X_s$ 为两个不同的不可约分支，且 $R \subset E$ 和 $R' \subset E'$ 分别为 p 和 p' 的纤维。*(a)* 若 $E \cap E' = \varnothing$，则 $(E \cdot R') = (E' \cdot R) = 0$。*(b)* 若 $E \cap E' \neq \varnothing$，则 $(E \cdot R')$ 和 $(E' \cdot R)$ 均为正。

证明。 (1) 这遵循 [HO09，命题 4。9]。交数$(E\cdot R)$ 是线丛 $\mathcal{O}_R(E)$的次数，根据伴随公式，它数值等价于

$$\mathcal{O}_R(E)\equiv\mathcal{O}_R(K_X+E)=\mathcal{O}_R(K_E).$$

注意，由于 p 局部平凡， $R\subset E$ 具有平凡的法丛，因此再次由伴随公式可得

$$\mathcal{O}_R(K_E)=\mathcal{O}_R(K_R)\otimes\det N_{R/E}^{\vee}=\mathcal{O}_R(K_R).$$

两种情形 $R=\mathbb{P}^1$ 和 $\mathbb{P}^1\cup\mathbb{P}^1$ 都有 $\deg K_R=-2$。

（2a）显然。（2b）交 $E\cap E'$ 根据引理 2.2.3 是维数为 $n-1$ 的阿贝尔挠子的一个不交并，因此它与 R 和 R' 分别在点处相交。因此（$E\cdot R'$） 和 （$E'\cdot R$） 均为正。 □

定理 *5.1.1* （不包含关于剪切的断言）的证明。由定理2.3.8， $X_s=\sum_{i=1}^r E_i$ 是约化的。若 P_s 是阿贝尔簇，则根据命题 X_s 是一个 P_s-主齐性空间（命题 2.2.2 （型 I_0）。以下设 P_s 具有线性的部分 $\mathbb{G}_m$。若 $X_s=E$ 是整的，则 f是一个魏尔斯特拉斯模型，因而它属于 I_1 型，这由命题 3.4.1 得到。

假设$X_s=\sum_{i=1}^r E_i$ 满足 $r\geq 2$。每个不可约分支 E_i 都容许一个 R_i-纤维丛态射 $p_i:\ E_i\longrightarrow\bar{A}_i$，其纤维为 $R_i=\mathbb{P}^1$ 或 $\mathbb{P}^1\cup\mathbb{P}^1$，这由命题3.2.1得出。对每个 $j=1,\ \cdots,\ n$，引理5.1.5（1）给出一个恒等式

$$\sum_{i\neq j}(E_i\cdot R_j)=2, \tag{5.1.6}$$

这是 Kodaira 原始证明的主要依据，见于 [Kod63，定理 6.2，（6.5）]，其推广见于 [HO09，命题 4.10–4.12]。Hwang–Oguiso 称之为关键公式。令 $j=1$ 代入（5.1.6）。仅有两种数值可能性：

(i) $(E_r\cdot R_1)=(E_2\cdot R_1)=1$, and $E_i\cap E_1=\varnothing$ for $i\neq 1,2,r(\geq 3)$.
(ii) $(E_2\cdot R_1)=2$, and $E_i\cap E_1=\varnothing$ for $i>2$.

在分析这些情形之前，请注意每个不可约分支 E_i 彼此同构。这是因为 X_s 是约化的：由命题2.2.2， P_s-作用在 X_s 上传递地作用于 X_s的不可约分支集合。因此，要么每个 E_i 是 $\mathbb{P}^1$-丛，底为 A_s，要么每个 E_i 是 $\mathbb{P}^1\cup\mathbb{P}^1$-丛，底为 $\bar{A}$，即一个次数为2的商，其被商对象为 A_s。

(i) 假设每个 E_i 都是 A_s 上的 $\mathbb{P}^1$ 束。注意，根据引理 2.2.3， $E_r\cap E_1$ 和 $E_1\cap E_2$ 都是 $(n-1)$ 维轨道。根据引理 3.1.5， $E_1=E_1$ 恰有两个维数为 $n-1$ 的轨道，即 p_1：$E_1\longrightarrow A_s$ 的两个截面 0 和 ∞。若 $E_r\cap E_1=E_1\cap E_2=0$ （或 ∞），则 E_r、 E_1 和 E_2 会在 0 周围形成三个分支，这与定理 2.3.8 中的半正规性相矛盾。这说明 $E_r\cap E_1=0$ 和 $E_1\cap E_2=\infty$。对每个分支也可作同样的讨论，这意味着 $X_s=\sum E_i$ 是由 A_s 上同构的 $\mathbb{P}^1$ 束构成的一个环。这是 $r\geq 3$ 的 I_r 型。

假设每个 E_i 都是 $\bar{A}$上的 $\mathbb{P}^1\cup\mathbb{P}^1$丛。两个交 $E_r\cap E_1$和 $E_1\cap E_2$ 仍是 E_1中的（$n-1$）维轨道，由于 X_s的半正规性，它们彼此不同。根据引理 3.1.5以及 $\mathbb{P}^1\cup\mathbb{P}^1$丛的描述， E_1 有两个维数为 $n-1$的轨道：一个同构于 A_s，另一个同构于 $\bar{A}$，即 E_1 的奇异轨迹，也是 p_1 的唯一截面： $E_1\longrightarrow A$。 E_r、 E_1和 E_2 的所有可能构型都无法使 X_s 半正规。因此，这种情形不可能成立。

（ii）首先假设每个 E_i 都是 A_s上的 $\mathbb{P}^1$丛。类似的论证表明， E_1 和 E_2 沿引理 3.1.5中的两个（$n-1$）维轨道相交两次。这是 I 型$_2$。假设每个 E_i 都是 $\bar{A}$上的 $\mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^1$丛。同样，类似的论证只留下一个可能情形： $X_s = E_1 + E_2$，其中 E_1 和E_2 沿（$n-1$）维轨道 $A_s \subset E_1$ 和 $A_s \subset E_2$相交。注意，等式（$E_2 \cdot R_1$） $= 2$ 成立，因为 $R_1 = \mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^1$ 与 A_s 相交两次。接下来只需排除此种可能。

由于交 $E_1 \cap E_2$同构于 A_s，两个 $\mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^1$-丛 p_1与$_- p_2$ 拼合在一起，并给出一个态射阿尔巴内塞映射： $X_s \longrightarrow A$，即 X_s 的阿尔巴尼斯态射（使用命题 3.2.1 与 §A.3 中的交换图）。将引理 4.2.1¯应用于次数为 2 的等ogeny $A_s \longrightarrow A$，我们得到一个新的半稳定、极小且 δ-˜ ˜ ˜正则阿贝尔纤维化 $f : X \longrightarrow S$，其中心纤维 X_s 有四个不可约分支。因此，由上述讨论，它必为 Kodaira 型 I_4。覆盖 $\tilde{X}_s \longrightarrow X_s$ 具有伽罗瓦群 $G = \mathbb{Z}/2 \subset \tilde{P}_s$。由于奇点集($\tilde{X}_s$) $= \bigsqcup^4 A_s$ 与¯ ¯ ¯ ˜奇点集(X_s) $= A_s \sqcup A \sqcup A$ 对 $A = A_s/a$ 成立，$\mathbb{Z}/2$在奇点集(X_s)上的作用交换两个 A_s 并保持两个 A_s。这与下述引理矛盾（由命题 4.2.4 可知 $G \cap P_s^\circ = 0$），从而排除最后一种情形。□

引理 5.1.7。 假设 f： $X \longrightarrow S$ 为I_r 型，且满足 $r \geq 1$。那么， P_s在 X_s 上的作用的每个非平凡稳定子都是 $\mathbb{G}_m$。

证明。记 $Z = \mathrm{Sing}(X_s) = \bigsqcup_{i=1}^r (E_i \cap E_{i+1}) \cong A_s^{\sqcup r}$（指标模 r 取值）。群 P_s 在 $X_s' = X_s \setminus Z$ 上自由作用，在 Z 上则有非平凡稳定子（命题 2.1.6 和 2.2.2）。我们先证明 Z 的稳定子都是 P_s°的子群。反设 $f \in P_s \setminus P_s^\circ$保持一个分支 $E_r \cap E_1$不变。那么， X_s 的循环构型迫使 r 为偶数，且对所有i都有 $f(E_i) = E_{r+1-i}$。因此， $f^2 \in P_s$保持所有 E_i不变，或者 $f^2 \in P_s^\circ$。任取满足 $g^2 = f^2$的 $g \in P_s^\circ$（因为 P_s° 可被整除），并将 f调整 $f - g$，可不妨设 $f^2 = \mathrm{id}$。在这种情况下， f有一个不动点集 $E_r \cap E_1$ 和 $E_{r/2} \cap E_{r/2+1}$。

现在取¯ ¯ ¯

单条纤维 X_s，而非一个退化 f，因此为简化记号，我们在如下设定中证明这一点。

设 X 是型I_r 簇，对应 $r \geq 1$ 定理5.1.1中的一个约化射影概形，其定义在 k 上，由粘合截面 ∞_i 和 0_{i+1} 得到，它们位于 r 同构的 $\mathbb{P}^1$丛中 $p\colon\ E_i \longrightarrow A$ 该丛定义在一个维数为 A的阿贝尔挠子上 $n-1$。沿着节点 X 对 $E_r \cap E_1$ 作正规化，但不再进行其他处理。这样的部分˜消解 $\nu\colon\ X \longrightarrow X$ 具有一个局部平凡且等变的阿尔巴尼斯态射

$$\mathrm{alb} : \tilde{X} \longrightarrow A,$$

其纤维 C 是由链构成的 r 个 $\mathbb{P}^1$。原来的 X 可通过粘合两个截面重新得到（参见§A.3）

$$0 = 0_1,\ \infty = \infty_r : A \longrightarrow \tilde{X}, \qquad 0_A = 0(A),\quad \infty_A = \infty(A) \subset \tilde{X}.$$

更确切地说，该粘合由一个态射确定

$$0_A \sqcup \infty_A \longrightarrow A \quad \text{combining} \quad \mathrm{alb} : 0_A \longrightarrow A, \quad t_a \circ \mathrm{alb} : \infty_A \longrightarrow A, \qquad (5.1.9)$$

其中 $t_a\colon\ A \longrightarrow A$ 是由某个元素 $a \in A$作出的平移。结合命题2.4.3，以下命题完成了定理5.1.1的证明。

命题 5.1.10. 设 X 是如上所述的 I_r 型簇，使用由 (5.1.9) 确定的压缩态射 $a \in A$。则在态射$\nu\colon\ X \longrightarrow X$ 下的拉回定义了一个短正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{Pic}^\circ_X \xrightarrow{\nu^*} \mathrm{Pic}^\circ_{\tilde{X}} = \check{A} \longrightarrow 0,$$

其扩张类恰为 $a \in \mathrm{Ext}^1(\check{A}, \mathbb{G}_m) = A$。

证明. 我们写作 $X_a = X$，以强调其构造取决于 $a \in A$ 的选择。考虑沿 $\{0\} \times A$ 和 $\check{} A \times \{0\}$ 刚化的 $\check{}A \times A$ 上的庞加莱线丛。这样的线丛定义了一个普适的 $\mathbb{G}_m$-主齐性空间 $B \longrightarrow \check{}A \times A$ ($\mathbb{G}_m$- 双扩张)，其在 $\check{} A_a \coloneqq \check{}A \times \{a\}$ 上的限制是一个 $\mathbb{G}_m$-主齐性空间 $0 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow \check{}B_a \longrightarrow A_a \longrightarrow 0$，其扩张类为 $a \in A$。我们断言，$\check{} A_a$ 上的两个 $\mathbb{G}_m$-主齐性空间 $\mathrm{Pic}^\circ_{X_a}$ 和 B_a 同构。

首先假设 $a \in A$ 是一个阶为 e的挠点。利用推出的泛性质（命题 A.3.3）构造一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} 0_A \sqcup \infty_A & \subset & \tilde{X}_a & \xrightarrow{\mathrm{alb}} & A \\ \downarrow & & \downarrow\nu & & \downarrow \\ A & \subset & X_a & \xrightarrow{\alpha} & A/a \end{array}.$$

˜这里 $\alpha\colon\ X_a \longrightarrow A/a$ 是一个局部平凡态射，其纤维为 C，是一个 I_{er} 型 Kodaira 奇异曲线。因此，$\alpha^*\colon\ (A/a)^\vee \longrightarrow \mathrm{Pic}^\circ_{X_a}$ 是一个单同态。由于 $\mathrm{alb}^*\colon\ \check{}A \longrightarrow \mathrm{Pic}^\circ_{\tilde{X}_a}$ 是一个同构，复合映射 $\alpha^* \circ \nu^*$ 是一个同源（A/a）$^\vee \hookrightarrow \mathrm{Pic}^\circ_{X_a} \twoheadrightarrow \check{}A$。这意味着 $\mathbb{G}_m$-主齐性空间 $\mathrm{Pic}^\circ_{X_a} \longrightarrow \check{}A$ 有一个（A/a）$^\vee$-截面，或者等价地，短正合列 $0 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{Pic}^\circ_{X_a} \longrightarrow \check{}A \longrightarrow 0$由扩张类 $a \in A$定义。

为证明任意 $a \in A$ 的情形，首先注意到，我们对每个 $a \in A$ 构造的 $X = X_a$ 构成如下的一个万有族。从一个平凡的

C的小平类型	II	III	IV	I_r^* （偶数 r）
代数稳定性 G	0	0, $\mathbb{Z}/2$	0, $\mathbb{Z}/3$	0, $\mathbb{Z}/2$, $(\mathbb{Z}/2)^{\times 2}$
C的小平类型	II^*	III^*	IV^*	I_r^* (奇数 r)
代数稳定性 G	0	0, $\mathbb{Z}/2$	0, $\mathbb{Z}/3$	0, $\mathbb{Z}/2$, $\mathbb{Z}/4$

表 3. 每种不稳定 Kodaira 型曲线 C 对应的阿尔巴内塞稳定子 G 的分类。不稳定纤维 $X_s = (C \times A_s)/G$ 的 Kodaira 型为（ C 的 Kodaira 型）/（ G 的阶）。

˜由两个截面 0 和 ∞构成的 X 族，定义在 A上：

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} \times A & \xrightarrow{\mathrm{alb} \times \mathrm{id}} & A \times A \\ & \searrow^{\mathrm{pr}_2} & \downarrow \mathrm{pr}_2 \\ & & A \end{array}, \qquad 0, \infty : A \times A \longrightarrow \tilde{X} \times A.$$

将两个截面$(x、\ a) \sim (x+a、\ a)$ 按照 (5.1.9) 中的方式识别后，我们得到一个收缩˜ ν : $X \times A \longrightarrow \mathfrak{X}$ 定义在 A 上，其在 $a \in A$ 上的纤维构造出 X_a:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} \times A & \xrightarrow{\mathrm{alb} \times \mathrm{id}} & A \times A \\ \downarrow \nu & & \downarrow \mathrm{pr}_2 \\ \mathfrak{X} & \longrightarrow & A \end{array}.$$

相对中性皮卡概形 $\mathfrak{X} \longrightarrow A$ 是一个 $\mathbb{G}_m$-主齐性空间 ν^*： $\mathrm{Pic}^{\circ}_{\mathfrak{X}/A} \longrightarrow$ ˇ$A \times A$。ˇ将其与庞加莱 $\mathbb{G}_m$-主齐性空间 $B \longrightarrow A \times A$相比较，可知二者在ˇ $A_s =$ ˇ $A \times \{a\}$ 上对每个挠点 $a \in A$ 均同构，这由上一段可知。跷跷板原理（例如，见 [Mum70，§10]）得出，对每个 $a \in A$均同构。 □

5.2. **不稳定纤维化**。 下面给出不稳定纤维的分类。

定理 5.2.1. 设 $f : X \longrightarrow S$ 是一个极小的 δ-正则阿贝尔纤维化。假设f 是不稳定的。那么，阿尔巴内塞映射： $X_s \longrightarrow$ 阿尔巴内塞$_s$ 等变同构于

$$(C \times A_s)/G \longrightarrow A_s/G,$$

其中， C、 G及其作用分类如下。

- C 是不稳定 *Kodaira* 奇异曲线：其类型为 II、III、IV、I_r^* （当$r \geq 0$时）、II^*、III^*或IV^*。
- 阿尔巴内塞稳定子 G 的分类见表*3*。
- G 在 $C \times A_s$ 上对角地作用：它通过平移在 A_s 上自由作用，并以唯一的方式作用于 C 。

定义 5.2.2。 定理 *Kodaira* 型不稳定纤维的 X_s 定理 5.2.1中记为

$$(\text{Kodaira type of the curve } C)/(\text{order of } G).$$

例如，当 C 的类型为 IV 且 $G = 0$时，我们称其为 IV 型纤维。当 C的类型为 IV 且 $G = \mathbb{Z}/3$时，我们称其为 IV 型/3 纤维。当 C 的类型为 I_0^* 且$G = (\mathbb{Z}/2)^{\times 2}$时，我们称其为 $\mathrm{I}_0^*/4$ 型纤维。

注 5.2.3。 阿尔巴尼斯态射 阿尔巴内塞映射： $X_s \longrightarrow \mathrm{Alb}_s$ 是纤维为 C 的局部平凡纤维丛。其纤维称为 特征循环（在 [HO09] 中）。定理 5.2.1 的证明见于 [KLM26，推论 4.18–19] ，其假设为 f

是等变的。将其与 Matsushita 的结果相比较，我们注意到[Mat01，表4–5] 中的某些型（例如 I_0^*-1、I_0^*-3、IV-1 以及 IV*-1）仅作为多重纤维出现，因此不出现在定理 5.2.1 中，而只出现在定理 7.4.1 中。最后，当C 具有 I_r^* 型且 $r \geq 2$ 为偶数时，表4中的 Néron 分支群 $\pi_0(\tilde{P}_s) = (\mathbb{Z}/2)^{\times 2}$ 有三个不同的子群 $\mathbb{Z}/2$，但我们的记号并不区分它们。

定理的证明 *5.2.1* (不涉及阿尔巴尼斯稳定子的分类)。取一个解缠 $X \longrightarrow X$，使其满足命题 4.2.4中的条件，即 $f : X \longrightarrow S$ 具有一个中心纤维 $X_s = C \times A_s$。根据定义 $X_s \cong X_s/G$，我们有阿尔巴内塞稳定子 G 中的条件 4.2.3。记 P 为 f的 t-自同构概形。

我们首先对曲线 C进行分类。若 C是整的，则 $P_s^\circ = \mathbb{G}_a \times A_s$ 在整簇 $X_s = C \times A_s$ 上一般自由地作用，且具有非平凡稳定子 $\mathbb{G}_a$。因此，命题 3.3.2确定了 C：其唯一的奇点 x局部由 $\hat{\mathcal{O}}_{C,\,x} = k[[t^{\delta+1}, \cdots]]$定义。常数 δ由 Pic°_C线性部分的维数确定；根据 δ-正则性假设，该维数为 1。由此可知， C 同构于尖点三次曲线。

现在假设 C 是可约的，并记为$\tilde{X}_s = C \times A_s = \sum_{i=1}^r a_i E_i$。注意，每个不可约分支 E_i 都与 $\mathbb{P}^1 \times A_s$同构。固定一条曲线 $C \subset \tilde{X}_s$，并令 $R_i = C \cap E_i$为 E_i 中的一条有理曲线。我们断言，对每个 $1 \leq i, j \leq r$，都有 $(E_i \cdot R_j) = (E_j \cdot R_i)$。簇 $X_s = C \times A_s$ 处处具有嵌入维数 $n+1$，因此 C 的嵌入维数为 2。对于每个点 $p \in R_i \cap R_j \subset C$，我们可以假设 $(C, p) \subset (\mathbb{A}^2, 0)$，因此 p 处的局部交数为

$$(E_i \cdot R_j)_{(\tilde{X},p)} = (R_i \cdot R_j)_{(\mathbb{A}^2,0)} = (E_j \cdot R_i)_{(\tilde{X},p)},$$

从而证明所需的等式$(E_i \cdot R_j) = (E_j \cdot R_i)$。（注意，这在 X中完全不成立。也就是说，不可约分支 $\bar{E} \subset X_s$ 可能是 $\mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^1$在命题3.2.1(ii) 中的 E_i-丛，且上述数值等式对 $E_j \subset X_s$可能不成立。）

由于我们有等式 $(E_i \cdot R_j) = (E_j \cdot R_i)$，因此可以将 $q(E_i, E_j) = (E_i \cdot R_j)$ 视为对称双线性形式，并使用数值等式

$$\sum_{i \neq j} a_i \cdot q(E_i, E_j) = 2 \qquad \text{for} \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

如引理 5.1.5 和（5.1.6）中所示。现在，Kodaira 的原始证明 [Kod63，定理 6.2，（6.5）] 适用，并计算出所需的重数 a_i 以及 E_i的构型，如所述。请注意，Kodaira 的论证纯粹是数值性的，但有以下例外，正如 [HO09，第 1003]页所指出的：

- Kodaira 的引理 6.1 给出了判定 X_s 是否为非多重的几何判据。我们在本定理中仅假设 X_s 是非多重的。
- Kodaira 的方程（6.4）用于计算不可约分支 $E \subset \tilde{X}_s$ 的算术亏格。我们已经证明了 $E = \mathbb{P}^1 \times A_s$。

这就按所述对曲线 C A_s 进行了分类。

剩下的任务是对 G 及其在 $X_s = C \times A_s$上的作用进行分类。该作用是由包含映射 $G \subset P_s$ 在命题4.2.4中给出的 t-自同构所定义的。根据引理4.2.1中的构造，在第二个因子 A_s 上的作用是平移 $G \subset A_s$，因此G在 $C \times A_s$ 上的作用具有如下形式

$$g \cdot (x, y) = (g_y(x), y + g) \qquad \text{for} \quad (x, y) \in C \times A_s, \quad g_y : C \longrightarrow C.$$

X_s的型	I_r	II	III	III$/2$	IV	IV$/3$
$\pi_0(P_s)$	$\mathbb{Z}/r$	0	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}/3$	0
X_s的型	-	II^*	III^*	$\mathrm{III}^*/2$	IV^*	$\mathrm{IV}^*/3$
$\pi_0(P_s)$		0	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}/3$	0

X_s的型	$\mathrm{I}^*_{\mathrm{ev}}$	$\mathrm{I}^*_{\mathrm{ev}}/2$	$\mathrm{I}^*_{\mathrm{ev}}/4$	$\mathrm{I}^*_{\mathrm{odd}}$	$\mathrm{I}^*_{\mathrm{odd}}/2$	$\mathrm{I}^*_{\mathrm{odd}}/4$
$\pi_0(P_s)$	$(\mathbb{Z}/2)^{\times 2}$	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}/4$	$\mathbb{Z}/2$	0

表4. 对于 X_s 的每种 Kodaira 型，Néron 分支群 $\pi_0(P_s)$ 的分类。这里，X 是 P 作为极小阿贝尔纤维化的紧化。

这给出了一个同态 $A_s \longrightarrow \mathrm{Aut}_C$，其定义为 $y \longmapsto g_y$。根据引理3.1.6，该同态必为常值，因为 C 的所有不可约分支都是有理曲线（引理A.1.6）。因此，G作用是对角的。

˜最后，回顾命题 4.2.4(2) 中的包含关系 $G \subset \pi_0(P_s)$。因此，只˜需计算 $\pi_0(P_s)$。这将在定理 5.3.2(2) 和 §6.2.3 中完成。注意˜，由于同构

˜ ˜ ˜ ˜ ˜$X'_s = X_s \setminus \mathrm{Sing}(X_s) \cong P_s$(命题 2.2.2)，$|\pi_0(P_s)|$是 C 的约化分支数。因此，我们已经知道 $|\pi_0(P_s)| = 1$ 为˜2、3 或 4，而唯一的不确定性出现在最后一种情形，此时 $\pi_0(P_s)$ 可以是$\mathbb{Z}/4$或 $(\mathbb{Z}/2)^{\times 2}$。□

5.3.**Néron 分支群**。如果极小的 δ-正则阿贝尔纤维化 $f : X \longrightarrow S$ 有一个截面，那么 $X' = X \setminus$奇点集(X_s) 同构于 t-自同构概形 P，由命题2.2.2可知。反过来，设 $P \longrightarrow S$ 是一个 δ-正则阿贝尔概形在 S_0上的 Néron 模型。那么它有唯一的极小模型 $f : X \longrightarrow S$由定理 2.1.4 和命题 2.2.4 可知，且存在同构 $X' \cong P$。

定义 5.3.1。设 $P \longrightarrow S$ 是阿贝尔概形在 S_0 上的 δ-正则 Néron 模型。

(1) P 的极小紧化是唯一的极小 δ-正则阿贝尔纤维化 $f : X \longrightarrow S$，且 $X' = X \setminus$ 奇点集$(X_s) \cong P$。(2) P 的*Kodaira* 型是其极小紧化的 Kodaira 型。

本小节的主要结果是计算 P的 Néron 分支群，从而将 Kodaira [Kod63，第604] 页的表 1，以及 Néron [Né64，第124–125] 页的表推广到更高维情形。

定理 5.3.2。设 $P \longrightarrow S$ 是阿贝尔概形 S_0 上的一个 δ-正则 *Néron* 模型。

(1) 如果 P 是 I_r 型的半稳定对象，则 $\pi_0(P_s)$ 同构于 $\mathbb{Z}/r$。*(2)* 如果 P 不稳定，则 $\pi_0(P_s)$ 按表*4*分类。特别地，它或者是一个阶为 ≤ 4 的循环群，或者是 $(\mathbb{Z}/2)^{\times 2}$*(3)* 如果 ˇ$P \longrightarrow S$ 是对偶阿贝尔概形 ˇ P_0 的 *Néron* 模型，则 $\pi_0($ $P_s)$ 与 $\pi_0($ ˇ$P_s)$ 同构。

注5.3.3。 Albanese 稳定子在定理 5.2.1中的分类目前尚未完成。如果我们分类 π_0（P_s），当极小紧化X 没有 Albanese 稳定子时，则这将同时完成定理 5.3.2（2）以及定理 5.2.1的其余结论。

如果 P 是半稳定的，或是具有平凡阿尔巴尼斯稳定子的不稳定的，则 $\pi_0(P_s)$ 同构于ADE仿射Dynkin图的Cartan 矩阵的判别群。该Cartan 矩阵是对偶 Néron模型 P的极小紧化 $f\colon\ X \longrightarrow S$ 的交数矩阵。

˘尽管 P和 P 的 Néron 分支群同构，但它们未必具有相同的 Kodaira 型。例如，我们将看到，当 r 为奇数时，$\mathrm{I}_r^*/2$ 型与 $\mathrm{I}_{2r}^*/2$ 型互为对偶。

˘本小节余下部分将证明定理 5.3.2 在 P和 P均为半稳定时的情形。我们将沿用 [BLR90，定理 9.6 的思路。1] 以及 [Liu02，§10.4。2], 但请注意，在我们的情形中， P 和 ˘P 并不同构（它们不再是某个曲线族的雅可比簇）。定理 5.3.2 的不稳定情形的证明将推迟到下一节，届时我们会讨论命题6.2.1 及其推论。

5.3.1. 半稳定情形。 定理5.3.2在 P 是阿贝尔概形时显然成立，因此我们假设 P 是严格半稳定的。令 $f\colon\ X \longrightarrow S$ 为其极小紧化，其中心纤维 $X_s = \sum_{i=1}^r E_i$ 是型为 I_r的严格半稳定纤维 $r \geq 1$。

引理 5.3.4. 对于型I_r 纤维 X_s，我们有一个同构

$$\mathrm{NS}(X_s) = \mathbb{Z}^r \times \mathrm{NS}(A_s).$$

特别地，$\mathrm{NS}(X_s)$ 是无挠的。

证明. 奇异轨迹 $Z =$ 奇点集(X_s)是 r 个A_s的同构副本的不交并，且正规化 ν：$X_s \longrightarrow X_s$ 是 A_s上一个*Zariski*局部平凡 $\mathbb{P}^1$-丛的 r 个同构副本的不交并。 X_s 上的 fppf 阿贝尔层的正合序列$0 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,X_s} \longrightarrow \nu_*\mathbb{G}_{m,\tilde{X}_s} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,Z} \longrightarrow 0$ 诱导

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{Pic}_{X_s} \xrightarrow{\nu^*} \mathrm{Pic}_{\tilde{X}_s} = (\mathbb{Z} \times \mathrm{Pic}_{A_s})^{\times r} \longrightarrow \mathrm{Pic}_Z = \mathrm{Pic}_{A_s}^{\times r},$$

其中最后一个同态将 (L_i) $\in \mathrm{Pic}_{A_s}^{\times r}$映到 $(L_i - L_{i+1})$ $\in \mathrm{Pic}_{A_s}^{\times r}$。其核同构于 Pic_{A_s}，由此完成该引理。□

因此，对于 X_s上的每个线丛 L，我们可以定义

$$c_1(L) = (\deg L,\ [L]) \quad \in \quad \mathrm{NS}(X_s) = \mathbb{Z}^r \times \mathrm{NS}(A_s).$$

$\deg L \in \mathbb{Z}^r$ 这一部分常被称为 L的多重次数 。它是其E_i-次数 的一个集合，对应于 $i = 1, \cdots, r$，以及 $\mathbb{P}^1$-丛E_i中一条有理曲线 R_i 的一个整数 $(L \cdot R_i)$。 L 的总次数是所有 E_i-次数之和。若 $c_1(L) = c_1(L')$，则两个线丛 L与 L'数值等价 。

定义 5.3.5。 交数矩阵 X_s是一个 $r \times r$定义在$\mathbb{Z}$ 上的对称矩阵，其各行是 $\mathcal{O}_{X_s}(E_i)$ 的多重次数。换言之，其$(i,\ j)$项是交数 $q(E_i,\ E_j)\colon = (E_i \cdot R_j)$，根据定理˜ A_{r-1}，它是型仿射 Dynkin 图的 Cartan 矩阵5.1.1。

固定一个特殊的线丛 M 在 X_s上很方便。当 $r \geq 2$时，使用引理5.3.4 来固定一个线丛 M，使得

$$\deg M = (0, \cdots, 0, -1, 1) \in \mathbb{Z}^r \quad \text{and} \quad [M] = 0 \in \mathrm{NS}(A_s).$$

当 $r = 1$时，直接取 $M = \mathcal{O}_{X_s}$。

引理 5.3.6. $M^{\otimes r}$ 数值等价于 $\mathcal{O}_{X_s}(E_1 + 2E_2 + \cdots + (r-1)E_{r-1})$。

证明. 每个 $\mathcal{O}_{X_s}(E_i)$都具有多重次数$(0,\cdots,0,1,-2,1,0,\cdots 0)\in\mathbb{Z}^r$（其中 -2位于第 i项），并且具有平凡的NS(A_s)。□

引理 5.3.7. 设 L 是 X_s 上总次数为 0 且 $[L]=0\in\mathrm{NS}(A_s)$ 的线丛。那么存在唯一的整数 $0\le i<r$，使得 $L\otimes M^{\otimes -i}$ 数值等价于 $\mathcal{O}_{X_s}(E_i)$ 的线性组合。

证明. X_s 的交数矩阵在 $\mathbb{Z}^r=\mathbb{Z}\{E_i$ 上定义了一个半负定对称双线性型：$i=1,\cdots,r\}$; 或者等价地，定义了一个秩为 $r-1$ 的线性映射:

$$\deg:\mathbb{Z}^r=\mathbb{Z}\{E_i\}\longrightarrow\mathbb{Z}^r=\mathbb{Z}\{E_i^\vee\},\qquad E_i\longmapsto q(E_i,-).$$

由于 $\mathcal{O}_{X_s}(E_i)$ 的总次数为 0，这个同态的像包含于求和映射 $\mathbb{Z}^r\longrightarrow\mathbb{Z}$ 的核中。˜复形 $\mathbb{Z}^r\longrightarrow\mathbb{Z}^r\longrightarrow\mathbb{Z}$ 的上同调群是 A_r Cartan 矩阵的判别群

$$D(\tilde{A}_r)\cong\mathbb{Z}/r=\langle -E_{r-1}^\vee+E_r^\vee\rangle.$$

这就证明了所要证明的结论。 □

引理 5.3.8. 设 L 是 X上的一个线丛。那么 $L_s=L_{|X_s}$ 的总次数为 0且 $[L_s]=0\in\mathrm{NS}(A_s)$，当且仅当 L 定义了 $\mathrm{Pic}^\bullet_f$的一个截面。

证明. ($\Longleftarrow$) 回忆命题 2.4.3 中的同构 $\check{}P=\mathrm{Pic}^\bullet_f/E$，其中 $E\subset\mathrm{Pic}^\bullet_f$ 是单位截面的闭包。由于 Néron 模型 $\check{}P$ 是准射影的，L 的某个充分高次幂数值等价于一个包含在 E中的线丛。包含在 E 中的线丛在 S_0上是平凡的，因此必定是 $\mathcal{O}_X(E_i)$ 的线性组合。每个 $\mathcal{O}_{X_s}(E_i)$ 在 NS(A_s) 中的类都是平凡的，且总次数为 0。因此，L 的该次幂也如此。现在利用 NS(X_s) $=\mathbb{Z}^r\times$NS(A_s) 无挠这一事实。

($\Longrightarrow$) 根据引理 5.3.6–5.3.7，$L_s^{\otimes r}$在数值上等价于 $\mathcal{O}_{X_s}(E_i)$ 的一个线性组合。后者是 $E\subset\mathrm{Pic}^\bullet_f$ 的一个截面，因此 $L^{\otimes r}$ 定义了 $\mathrm{Pic}^\bullet_f$ 的一个截面。由于对于泛点 η，$\pi_0(\mathrm{Pic}^{X_\eta})$ $=$NS(X_η) 是无挠的（因为X_η 是一个阿贝尔挠子），L 定义了 $\mathrm{Pic}^\bullet_f$ 的一个截面。□

定理 5.3.2 的证明：半稳定情形。假设 $X_s=\sum_{i=1}^r E_i$ 对 $r\ge 1$ 严格半稳定，型为 I_r。引理 5.3.7–5.3.8 和命题 2.4.3 表明，同构 $\pi_0(\check{}P_s)\cong\mathbb{Z}/r$（由 M 生成）。为计算 π_0 (P_s)，我们来考察对偶Néron模型 $P\longrightarrow S$ 及其紧化 $f:\ X\longrightarrow S$。这是严格半稳定的，因此必定属于某个 $\mathrm{I}_{r'}$ 型，其中 $r'\ge 1$。反过来，对 $\check{}P$ 和 $\check{}f$ 应用引理 5.3.7–5.3.8，我们得出 $\pi_0(P_s)\cong\mathbb{Z}/r'$。但请回想命题 2.2.2，$X_s'=X_s\setminus\mathrm{Sing}(X_s)$ 是一个 P_s-主齐性空间。这表明 P_s 恰有 r 个连通分支，并表明 $r=r'$。□

推论 5.3.9。假设 f 是 I_r 型的严格半稳定。则 $\pi_0(P_s)\cong\mathbb{Z}/r$通过轮换分支 E_i的方式作用于 $X_s=\sum_{i=1}^r E_i$。

证明。任取 $f\in P_s$ 使其生成分支群 $\pi_0(P_s)\cong\mathbb{Z}/r$。则 f会置换 E_i，且不会固定其中任何一个，因为 X_s' 是一个 P_s-主齐性空间。此外，由引理5.1.7，f 会置换奇点集$(X_s)=\bigsqcup_{i=1}^r(E_i\cap E_{i+1})$的连通分支，且不会固定其中任何一个。唯一的可能性是 $f(E_i)=E_{i+1}$ 对所有 i均成立。□

5.3.2. 不稳定情形。 类似的思路也适用于不稳定情形，但（1）它无法比较 P 与 $\check{}P$的阿尔巴内塞稳定子；（2）它无法区分奇数和偶数 I_r^* 型 r。我们将在 §6.2.3 中完成定理 5.3.2（不稳定情形）的证明；此前将讨论命题 6.2.1中的半稳定约化定理。

6. 基变换行为

设 $f\colon X \longrightarrow S$ 是任意的极小 δ-正则阿贝尔纤维化，且可能是多重的。考虑次数为 d 的有限伽罗瓦态射 $p\colon T \longrightarrow S$，它在 $s \in S$ 上方的 $t \in T$ 处全分歧。态射 $T_0 = T \setminus \{t\} \longrightarrow S_0$ 是有限 étale 的，且基变换 $Y_0 = X_0 \times_{S_0} T_0 \longrightarrow T_0$ 是一个阿贝尔挠子。取其相对最小模型 $g\colon Y \longrightarrow T$，得到交换图

$$\begin{array}{ccc} Y & \dashrightarrow & X \\ \downarrow g & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{p} & S \end{array}.$$

我们称这样的 Y 为 X 的 最小基变换：它是基变换 $f_T\colon X_T \longrightarrow T$ 的极小模型。本节旨在研究 X 与 Y 之间的关系。与往常一样，t-自同构概形将发挥关键作用。我们分别用 $P \longrightarrow S$ 和 $Q \longrightarrow T$ 表示 f 和 g 的 t-自同构概形。

因此，我们证明定理5.3.2 中的其余断言，并得出定理 5.2.1中阿尔巴内塞稳定子分类的结论。

6.1. 惯性作用。 由于 $Y_0 \longrightarrow X_0$ 和 $Q_0 \longrightarrow P_0$ 是伽罗瓦覆盖， Y_0 和 Q_0 都带有自由的 μ_d-作用。根据极小模型和 Néron 映射性质，这些作用分别延拓到 Y 和 Q 。我们首先研究这些 μ_d- 作用。

6.1.1. 惯性在 *t*-自同构群上的作用。 本小节沿用 Edixhoven [Edi92]的结果。

命题 6.1.1。 (1) 存在一个在Q 上的自然自同构 ψ，其阶为 d，使 $Q \longrightarrow T$ 成为等变的。

(2) 诱导的 $\langle\psi\rangle$-作用在 Q_t 上由群自同构给出：

$$\psi(a \cdot b) = \psi(a) \cdot \psi(b) \qquad for \quad a, b \in Q_t.$$

证明。 **(1)** 设 $\zeta\colon T \longrightarrow T$ 是 T上的伽罗瓦 μ_d-作用。则 Q_0 上的等变$\mu_d = \langle\psi_0\rangle$-作用由同构 $\Psi_0\colon Q_0 \longrightarrow \zeta^*Q_0 := Q_0 \times_\zeta T_0$ （定义在 T_0 上）给出，并满足余循环条件

$$(\zeta^*)^{d-1}\Psi_0 \circ \cdots \circ \zeta^*\Psi_0 \circ \Psi_0 = \mathrm{id}_{Q_0}.$$

Q 和 ζ^*Q 都是 T上的 Néron 模型，因此 Ψ_0 唯一地延拓为一个同构态射 $\Psi\colon Q \longrightarrow \zeta^*Q$，其定义在 T 上且满足相同的余循环条件。也就是说，$\langle\psi\rangle$-作用唯一地等变延拓到 T上的 Q 。

(2) 群运算 $Q_0 \times_{T_0} Q_0 \longrightarrow Q_0$ 在 T_0上是 $\langle\psi_0\rangle$-等变的，或者说，交换图

$$\begin{array}{ccccc} Q \times_T Q & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & T \\ \downarrow \psi\times\psi & & \downarrow \psi & & \downarrow \zeta \\ Q \times_T Q & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & T \end{array}$$

在 T_0 上可交换。由于 Q 是分离的（或 Q 是 Néron），该交换图在 T 上自动可交换。将其限制到 $t \in T$ 上即可得到结论。□

为避免混淆，我们用 $\langle\psi\rangle$ 作用来表示 Q 上的 μ_d 作用。注意，诱导出的 $\langle\psi\rangle$ 作用在 Q_t 上可能并不忠实，即自同构 $\psi: Q_t \longrightarrow Q_t$ 的阶可能严格小于 d。

定义 6.1.2. 中心纤维 Q_t 上的 $\langle\psi\rangle$-作用称为惯性作用。

Q_t 上的惯性作用与原来的 P_s 有如下关系。利用 Néron 映射性质，将 $P_{T_0} = Q_0$ 上的同构延拓为 T上的同态:

$$p^*: P_T = P \times_S T \longrightarrow Q$$

其在 $t \in T$ 上的限制给出中心纤维之间的拉回 同态

$$p^*: P_s \longrightarrow Q_t. \tag{6.1.3}$$

定理 6.1.4 ([Edi92，定理 5.3])。令 $p^*: P_s \longrightarrow Q_t$ 为拉回同态(6.1.3)。则

(1) 像p^* 是惯性不变子群 $Q_t^{\psi} \subset Q_t$。(2) 核p^* 是幺幂的。

特别地， Q_t 的阿贝尔簇部分总是大于 P_s的阿贝尔簇部分。这对 δ-正则 Néron 模型中 p^* 的行为施加了重要限制。

推论 6.1.5。设 $P \longrightarrow S$ 是 δ-正则的。

(1) 如果 P_s 是阿贝尔簇，则 p^* 是同构。(2) 如果 P_s 具有线性部分 $\mathbb{G}_m$，那么 Q_t 也具有线性部分，且 p^* 是开浸入。此外，存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow \pi_0(P_s) \xrightarrow{p^*} \pi_0(Q_t) \longrightarrow \mathbb{Z}/d \longrightarrow 0.$$

(3) 如果 P_s 具有线性部分 $\mathbb{G}_a$，则 Q_t 具有挠剪切。

证明。 除(2)中的短正合列断言外，一切都直接由定理6.1.4推出。

假设 P_s 具有线性部分 $\mathbb{G}_m$ 且 $\pi_0(P_s) = \mathbb{Z}/r$ (定理5.3.2的半稳定部分)。极小紧化 $f:\ X \longrightarrow S$ 的 P具有严格半稳定中心纤维 $X_s = \sum_{i=1}^{r} E_i$，其型为 I_r。记 $Z =$ 奇点集$(X_s) = \bigsqcup_{i=1}^{r} A_s$。通常的基变换

$$\bar{g}: \bar{Y} = X_T \longrightarrow T$$

沿着 Z的原像是奇异的，其局部可由方程$X_T = (t^d = xy) \subset \mathrm{Spec}\ k[[x, y, t, z_1, \cdots, z_{n-1}]]$描述。它具有典范奇点（杜瓦尔 A_{d-1} 型），并可通过沿 A_s逐次爆破得到保正则解消。所得例外除子是由 $d-1$ 个 $\mathbb{P}^1$丛组成的链，它们以A_s为底。因此，极小模型 $g: Y \longrightarrow T$ 的中心纤维由一个 $r + (d-1)r = dr$ 个 $\mathbb{P}^1$丛构成的环组成，从而再次由定理 5.3.2 证明了 $\pi_0(Q_t)$。□

6.1.2. 极小模型上的惯性作用。同样的论证给出了 Y_t上的惯性作用。同样，为避免可能的混淆，我们将这种 μ_d作用写在 Y 上，即 $\langle\varphi\rangle$作用。

命题 6.1.6. (1) 存在一个作用于Y 的阶为 d 的自然自同构 φ，使 $g:\ Y \longrightarrow T$ 成为等变态射。

(2) Y_t 上的 Q_t作用与 $\langle\varphi\rangle$作用之间的关系为

$$\varphi(a\cdot y)=\psi(a)\cdot\varphi(y)\qquad for\quad a\in Q_t,\ y\in Y_t.$$

证明。 (1) 6.1.1命题的论证相同，但使用命题 2.2.4 将自同构 $\varphi_0:\ Y_0\longrightarrow Y_0$ 延拓到 $\varphi:\ Y\longrightarrow Y$。(2) 与上述引理相同。□

注 6.1.7。 请注意，第二项意味着，通常 Q_t作用与 $\langle\varphi\rangle$作用在Y_t 并不交换。然而，Q_t^{ψ} 作用与 $\langle\varphi\rangle$作用是交换的。另请注意，惯性群 $\langle\varphi\rangle$对 Y_t 的作用通常可能不忠实。

因此，我们可以考虑商 $X=Y/\varphi$ 以及交换图

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{q} & \bar{X} & \xrightarrow{\mathrm{bir}} & X \\ \downarrow g & & \downarrow\bar{f} & \swarrow_{f} & \\ T & \xrightarrow{p} & S & & \end{array}\ . \tag{6.1.8}$$

由于 $f:\ X\longrightarrow S$ 是 klt-极小的，定理 2.1.5 适用，并赋予其P°作用。以下将其扩展为 P作用。

命题 6.1.9。 存在唯一的 P-作用作用于 X，并将 $X_0=X_0$上的 P_0-主齐性空间结构延拓。因此，双有理映射 $X\dashrightarrow X$ 是 P-等变的。

证明。 基变换 $P_T\longrightarrow T$ 是一个带有等变 μ_d-作用的光滑群概形，该作用由 ζ 生成: $P_T\longrightarrow P_T$ （从 ζ 拉回: $T\longrightarrow T$）。t-自同构概形的拉回同态 $p^*:\ P_T\longrightarrow Q$ 赋予 Y一个 P_T-作用，其交换图如下:

$$\begin{array}{ccccccc} P\times_S Y & = & P_T\times_T Y & \xrightarrow{p^*\times\mathrm{id}} & Q\times_T Y & \longrightarrow & Y \\ \downarrow\mathrm{id}\times\varphi & & \downarrow\zeta\times\varphi & & \downarrow\psi\times\varphi & & \downarrow\varphi\ . \\ P\times_S Y & = & P_T\times_T Y & \xrightarrow{p^*\times\mathrm{id}} & Q\times_T Y & \longrightarrow & Y \end{array}$$

最右边的交换图不过是命题 6.1.6，前两个交换图则是因为它们在 T_0上交换。于是 $P\times_S Y\longrightarrow Y$ 是 $\langle\varphi\rangle$-等变的，其商即为所需的群作用态射 $P\times_S X\longrightarrow X$。□

为简洁起见，在以下两个引理中，假设 X_s 上的 $\langle\varphi\rangle$-作用是忠实的（否则，将 $T\longrightarrow S$ 分解为两个步骤）。定义一个闭子概形$\frac{1}{d}\bar{X}_s\subset\bar{X}$ 如下:

$$\tfrac{1}{d}\bar{X}_s:=Y_t/\varphi\ \subset\ \bar{X}=Y/\varphi.$$

它是纯余维 1 的，没有嵌入点，并且是X_s的闭子概形。

引理 6.1.10. 假设 X_s 上的 $\langle\varphi\rangle$-作用是忠实的。那么，在 $\bar{X}$上存在魏尔除子等式 $\bar{X}_s=d\cdot\frac{1}{d}\bar{X}_s$ 。特别地，X_s 的重数可被 d整除。

证明。 注意到一个概形同构

$$\bar{X}_s=\big(q^{-1}(\bar{X}_s)\big)/\varphi=Y_d/\varphi\qquad\text{for}\quad Y_d=g^{-1}(\operatorname{Spec}k[\epsilon]/\epsilon^d).$$

由于闭浸入 $Y_t\subset Y_d$ 在集合意义上相等，且它们的重数相差因子 d，对 $\frac{1}{d}\bar{X}_s\subset\bar{X}_s$ 也同样成立。□

引理 6.1.11. P_s 在 $\bar{X}_s$ 上的作用限制为其在 $\frac{1}{d}\bar{X}_s$ 上的作用。

证明. 由于 Q_t^ψ - 和 $\langle\varphi\rangle$-作用在 Y_t 上由命题 6.1.6可交换， Q_t^ψ -作用在 Y_t 上下降到 ${}^1_dX_s = Y_t/\varphi$。这意味着我们可以赋予 ${}^1_dX_s$ 一个P_s-作用，通过 p^*： $P_s \longrightarrow Q_t^\psi$ （因此它可能不是忠实作用）。为了证明此作用与 P_s-作用在 X_s 上相容，取一个 μ_d-等变交换图

$$\begin{array}{ccccc} P_T \times_T Y & \xrightarrow{p^*\times \mathrm{id}} & Q \times_T Y & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ P_T \times_T \bar{X}_T & & \longrightarrow & & \bar{X}_T \end{array} .$$

¯下面的竖直箭头是命题6.1.9， $Y \longrightarrow X_T$ 由纤维积的泛性质得到。在 $t \in T$ 上限制交换图，用 Q_t 替换 Q_t^ψ （根据定理6.1.4），然后取 $\langle\varphi\rangle$-商，即可得出两个作用一致。□

6.2. **不稳定纤维化的半稳定基变换**。本小节中，我们讨论定理5.2.1 的一种替代解释，即通过对半稳定纤维化作基变换来解释。这样便完成了定理5.3.2的预告证明，此外，这一方法还将在后续的定理7.3.2 和7.4.1中得到广泛应用。

根据半稳定约化定理（例如， [BLR90，定理 7.4。1]），每个不稳定阿贝尔纤维化 f： $X \longrightarrow S$ 都存在一个半稳定基变换g： $Y \longrightarrow T$，即一个有限（全分歧）基变换 $T \longrightarrow S$，使得 f_T 拥有一个半稳定极小模型 g。我们将如下具体说明极小 δ-正则阿贝尔纤维化的情形。首先考虑不存在阿尔巴内塞稳定子的情况。

命题 6.2.1. 设 f： $X \longrightarrow S$ 是一个不稳定的极小 δ 正则阿贝尔纤维化，且具有平凡阿尔巴内塞稳定子；设 g： $Y \longrightarrow T$ 是其次数为 d 的半稳定基变换。

(1) 若 f 的型为 I_0^*、II、 $\cdots$ 或 IV^*，则 g 光滑，且其中心纤维为

$$Y_t \cong Q_t \cong E \times A_s \quad \textit{for an elliptic curve } E,$$

其惯性作用为 $\varphi(x,y) = \psi(x,y) = (\omega^{\pm 1}x, y)$，对应于 $(x,y) \in E \times A_s$。这里 ω 是 $d' \mid d$ 的本原 d' 次单位根，其分类如下：

(a) 若 f 的型为 II 或 II^*，则 $j(E) = 0$ 且 $d' = 6$。(b) 若 f 的型为 III 或 III^*，则 $j(E) = 1728$ 且 $d' = 4$。(c) 若 f 的型为 IV 或 IV^*，则 $j(E) = 0$ 且 $d' = 3$。(d) 若 f 的型为 I_0^*，则 $d' = 2$。

(2) 若 f 对 $r \geq 1$具有I_r^* 型，则 $d = 2k$ 为偶数，而 g 是I_{2kr} 型的严格半稳定纤维，其中心纤维为

$$Y_t \cong C \times A_s \quad \supset \quad Q_t \cong \mathbb{Z}/2kr \times \mathbb{G}_m \times A_s.$$

将 C视为带有如下识别的 $C^\nu = \mathbb{Z}/2kr \times \mathbb{P}^1$： $(i,\infty) = (i+1, 0)$，惯性对合为 $\varphi(i,z,y) = \psi(i,z,y) = (-i, \frac{\zeta^i}{z}, y)$，对应于 $(i,z,y) \in C \times A_s$ 或 $\mathbb{Z}/2kr \times \mathbb{G}_m \times A_s$。此处 ζ 是一个本原 $2k$次单位根。

下面讨论 f 具有非平凡阿尔巴内塞稳定子的情形。

命题 6.2.2。设 f： $X \longrightarrow S$ 是一个不稳定的极小 δ-正则阿贝尔˜纤维化，其阿尔巴内塞稳定子 G 非平凡，且 $X \longrightarrow X$ 是它在

命题 4.2.4。那么每个半稳定基变换 $g\colon\ Y \longrightarrow T$ f 都存在一个笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \dashrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \dashrightarrow & X \end{array},$$

使得 $\tilde{g}\colon\ Y \longrightarrow T$ 具有命题 6.2.1 中所述的平凡化的中心纤维。令 Q 和 Q 分别为 t-自同构概形 g 和 $\tilde{g}$，则有如下结论。

(1) 存在一个短正合列 $0 \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow Q \longrightarrow 0$。特别是，$Q_t = Q_t/G$ 和 $Q_t^\circ = Q_t^\circ/(G \cap Q_t^\circ)$。

(2) 假设 f 的型为 I_0^*、$\cdots$ 或 IV^*。则 $G \hookrightarrow Q_t = E \times A_s$ 分解为两个嵌入 $\tau\colon\ G \hookrightarrow E^\omega \subset E$ 和 $\sigma\colon\ G \hookrightarrow A_s$。

(3) 假设对于 $r \geq 1$，f 的型为 I_r^*。那么，回顾唯一分裂 $Q_t^\circ = \mathbb{G}_m \times A_s$，我们有

$$G \cap \tilde{Q}_t^\circ = \begin{cases} \langle(-1, a)\rangle & \text{for odd } r \\ \langle(-1, a)\rangle \quad or \quad 0 & \text{for even } r \end{cases}.$$

这里 $a \in A_s$ 是一个非零2-挠点。此外，阿尔巴尼斯态射 $\tilde{\mathrm{alb}}\colon\ Y_t \longrightarrow \mathrm{Alb}_t$ 始终是 $\mathrm{pr}_2\colon\ Y_t = C \times A_s \longrightarrow A_s$ 的自由 G-商。

定义 6.2.3. Kodaira 型 T $=\mathrm{II}$、$\cdots$、$\mathrm{IV}^*/3$ 的共轭为 T^*。两个 Kodaira 类型若在不计 Albanese 稳定子时相同，则称它们同源。

例如，$\mathrm{III}^*/2$ 的共轭是 $\mathrm{III}/2$，且 $\mathrm{I}_r^*/2$ 与 $\mathrm{I}_r^*/4$ 是同源的 Kodaira 类型。

推论 6.2.4. 设 $f\colon\ X \longrightarrow S$ 为不稳定的极小 δ-正则阿贝尔纤维化，且 $g : Y \longrightarrow T$ 为其次数为 d 的任意半稳定基变换。则

(1) 在不计同源与共轭的意义下，f 的 *Kodaira* 型由 g 的型以及惯性自同构 ψ 在 Q_t 上的阶决定，如表 *5* 所示。*(2)* 假设 g 光滑，且 $d = d'$ 在命题 *6.2.1(1)*中是极小的。假设 μ_d 的生成元通过 ω作用于 T。则 f 具有 $*$-型当且仅当 ψ 通过 ω^{-1}作用于椭圆曲线 $E \subset Q_t$。*(3)* f 的阿尔巴内塞稳定子 G 由 g的中心纤维 Y_t 的非平凡性所刻画。

型 $\tilde{X}$	II, II^*	III, III^*	IV, IV^*	I_0^*	I_r^* $(r \geq 1)$
型 $\tilde{Y}$	I_0	I_0	I_0	I_0	I_{2kr}
阶 ψ	6	4	3	2	$d = 2k$

表 5. 不稳定纤维化 X（除阿尔巴内塞稳定子外）由任意半稳定基变换 Y 下的阶 ψ 确定。

本小节的其余部分致力于证明这些结果。我们将继续使用上一小节中的记号和结果，并假设 f 具有平凡阿尔巴内塞稳定子，直到最后证明命题 6.2.2和推论 6.2.4。

引理 6.2.5. 考虑惯性群 $\langle\varphi\rangle$ 在 Y_t上的作用。则

(1) 若惯性群 $\mu_d = \langle\varphi\rangle$ 在 Y_t 上的作用不忠实，则 g 光滑，且存在唯一的分解

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longrightarrow & Y^- & \longrightarrow & X \\ \downarrow g & & \downarrow g^- & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{\mu_{d/d'}} & T^- & \xrightarrow{\mu_{d'}} & S \end{array},$$

其中 $d' \mid d$, g^- 光滑，且惯性群 $\mu_{d'}$ 在 Y_t^- 上的作用是忠实的。(2) $\varphi^i : Y_t \longrightarrow Y_t$ 对每个 $i \in \mathbb{Z}$ 都有一个不动点。

证明。(1) 假设对于 $d = kd'$， φ^k 在 Y_t 上作用为恒等。则 $\varphi^k : Y \longrightarrow Y$ 的不动点集在集合论意义下为 Y_t，从而迫使 $Y_{t,\,\mathrm{red}}$ 为正则（正则概形上的有限阶自同构的不动点集仍然是正则的）。由于 Y 不是多重的，这意味着 Y_t 是正则的，因而 $Y \longrightarrow T$ 是光滑的。中间商 g^-: $Y^- = Y/\varphi^k \longrightarrow T^- = T/\mu_k$ 又是一个阿贝尔主齐性空间。

(2) 假设我们有 $d = ij$，其中整数 $1 < i$， $j < d$ 并考虑 $\mu_j = \langle\varphi^i\rangle$-作用于 Z。由于 $f : X \longrightarrow S$ 有一个截面（在缩小 S之后），所以 $Y/\varphi^i \longrightarrow T/\mu_j$ 也有一个截面。但它的中心纤维重数为 j，根据引理 6.1.10，总体空间 Y/φ^i 不可能是正则的。因此， $\langle\varphi^i\rangle$-作用于 Y_t 不可能是自由的。□

根据引理 6.2.5(1)，在将 Y 替换为 Y^- 之后，我们可以假设 $d = d'$且惯性群 $\langle\varphi\rangle$- 作用是忠实的。(6.1.3) 中的拉回同态为

$$p^* : P_s \cong \pi_0(P_s) \times \mathbb{G}_a \times A_s \longrightarrow Q_t, \tag{6.2.6}$$

并且必有 核 $p^* = \mathbb{G}_a$ 以及 像 $p^* = Q_t^{\psi} = \pi_0(P_s) \times A_s \subset Q_t$，根据定理 6.1.4。

引理 6.2.7。 (1) $\bar{X}_s \cong d \cdot \bar{C} \times A_s$ 和 $\frac{1}{d}\bar{X}_s \cong \bar{C} \times A_s$，其中 $\bar{C}$是一条真曲线。(2) 取 $A_s \subset P_s$，则 A_s对 $\frac{1}{d}\bar{X}_s = \bar{C} \times A_s$ 的作用仅通过平移作用于第二个因子。

证明。由命题 6.1.9，双有理映射 $X \dashrightarrow X$ 是 P-等变的。因此，其未定义轨迹是 X和 X中维数为 $\leq n-1$的 P_s-不变闭子集。由 $P_s^\circ = \mathbb{G}_a \times A_s$ 和引理 2.2.3，它们是具有有限稳定子的 A_s-轨道。这意味着 X 和 X 可以通过沿 A_s-轨道进行一系列爆破和爆缩而连通。由于 X 是已解缠的， $X_s = C \times A_s$ 上的 A_s-作用是自由的，且仅通过平移作用于第二个因子。因此，所有连接 X和 X的中间双有理模型，其中心纤维都具有 $C_i \times A_s$的形式，且在第二个因子上带有平移 A_s-作用。特别地， X_s 也如此，因此$\frac{1}{d}\bar{X}_s$也如此。□

6.2.1. 当 g 光滑时。阿贝尔纤维化 g要么光滑，要么严格半稳定。我们先考虑 g 光滑的情形。此时 Q_t 是一个阿贝尔簇，而Y_t 是一个 Q_t-主齐性空间。利用引理 φ-不动点 $0 \in Y_t$ 作为参考点，将它们对应起来。根据命题 6.2.5(2)，两个惯性作用 ψ 在 Q_t 上的作用和 φ 在 Y_t 上的作用也可以对应起来。6.1.6

$$\varphi(a \cdot 0) = \psi(a) \cdot \varphi(0) = \psi(a) \cdot 0 \qquad \text{for} \quad a \in Q_t.$$

因此，我们无需区分 Q_t 和 Y_t （以及它们的惯性作用）。

引理 6.2.8。 $Q_t = Y_t \cong E \times A_s$ 对于椭圆曲线 E。

证明。 我们已有 $\frac{1}{d}\bar{X}_s \cong \bar{C} \times A_s$ 根据引理 6.2.7。复合映射 $Y_t \longrightarrow Y_t/\varphi = \frac{1}{d}\bar{X}_s \longrightarrow A_s$ 是 A_s-等变的，因此是局部平凡的。任何 A_s-轨道在 Y_t 中构造其截面，所以 $Y_t \cong E \times A_s$ 对于椭圆曲线 E。 □

引理 6.2.9. 选取一个适当的同构 $Q_t = Y_t \cong E \times A_s$，惯性作用具有如下形式

$$\psi(x,y) = \varphi(x,y) = (\omega^{\pm 1}x, y) \qquad for \quad (x,y) \in E \times A_s.$$

证明。 从引理 $Q_t \cong E \times A_s$ 中的一个同构6.2.8开始。由（6.2.6）可知， $\{0\} \times A_s \subset Q_t$ 在 ψ作用下不变。因此，阿贝尔簇 ψ 上的群自同构 $E \times A_s$ 必定具有如下形式

$$\psi(x,y) = (\alpha x, y + \xi(x)) \qquad \text{for} \quad \alpha \in \mathrm{Aut}_0(E), \quad \xi : E \longrightarrow A_s \text{ homomorphism.}$$

若 $x \in E^\alpha$，则 $\varphi = \psi$ 通过平移 $\{x\} \times A_s$ 作用于 $\xi(x) \in A_s$。若这是一个非平凡平移，则商 $\frac{1}{d}\bar{X}_s = (E \times A_s)/\varphi$ 不可能具有引理 $\bar{C} \times A_s$ 中的形式6.2.7。这证明了 $\xi(x) = 0$ 对每个 $x \in E^\alpha$都成立。该同源$1-\alpha$： $E \longrightarrow E$ 的核为 E^α，因此它可分解 ξ 为

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\xi} & A_s \\ & {\scriptstyle 1-\alpha}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \eta} & \\ & E & \end{array}, \qquad \text{where } \eta : E \longrightarrow A_s \text{ is a homomorphism.}$$

定义自同构 u on $E \times A_s$ by $u(x, y) = (x, y + \eta(x))$。直接计算可得， $u \circ \psi \circ u^{-1}$ is an automorphism on $E \times A_s$ by $(x, y) \longmapsto (\alpha x, y)$。

为证明 $\alpha = \omega^{\pm 1}$，考虑 $\pi_0(P_s) = \pi_0(Q_t^\psi) = \pi_0(E^\alpha)$。 $\pi_0(P_s)$ 的阶已在定理 5.2.1 证明的末尾确定：它只能是 1、2、3 或 4。对于每一种可能性，都存在唯一的 $\alpha \in \mathrm{Aut}_0(E)$，满足 $|E^\alpha| = |\pi_0(P_s)|$。由此可得所需的 $\alpha = \omega^{\pm 1}$ 和 $j(E)$，如命题 6.2.1 所述。□

至此，命题 6.2.1(1) 的证明完成。事实上，我们可以描述每种型中 $X = Y/\varphi$ 的奇点集 $\bar{}$，进而明确写出双有理映射 $X \dashrightarrow X$ 的爆破与爆缩序列分解 $\bar{}$，仿照 [Bar+04，§V.10，第 209] 页中的过程。我们还注意到以下等价条件，它们推广了 [KLM26，命题 4.24–25]： ψ 在 E 上作用为 $\zeta^{-1} \iff \bar{Y}$，当且仅当它具有典范奇点 $\bar{}$； $\iff Y \longrightarrow Y$ 是双有理态射 $\iff f$； $*$具有 I 型、II 型、III 型或 IV 型 $_0^{***}$。若 $d \neq 2$ 且 ψ 在 E 上作用为 ζ，则 f 具有非 $*$的 II 型、III 型或 IV 型。

6.2.2. 当 g 严格半稳定时。现在假设 g 是 $R \geq 1$上 I_R 型的严格半稳定簇。在前一小节中，我们已经证明， g 光滑当且仅当 X_s 具有 I_0^*、II、 $\cdots$ 或 IV^*型。因此，在这种情况下， X_s 必然具有 $r \geq 1$上 I_r^* 型。再次，由定理 6.1.4，拉回同态 (6.2.6) 必须满足 $\ker p^* = \mathbb{G}_a$ 和 $\mathrm{im}\ p^* = Q_t^\psi = \pi_0(P_s) \times A_s \subset Q_t$。这意味着 Q_t 包含一个维数为 $n-1$ 的阿贝尔子簇，因此由推论 4.1.8， Q_t 有一个挠剪切。但实际情况还不止于此：

引理 6.2.10. $Q_t^\circ = \mathbb{G}_m \times A_s$.

证明。 如上所示， p^* 诱导出一个包含 $A_s \hookrightarrow Q_t^\circ$。取 Chevalley 态射 $Q_t^\circ \longrightarrow B_t$，将其映到维数为 $n-1$的阿贝尔簇 B_t。我们断言复合映射 $A_s \hookrightarrow Q_t^\circ \twoheadrightarrow B_t$ 是同构。这将证明所需的分裂；由于 $\mathrm{Hom}(A_s, \mathbb{G}_m) = 0$，该分裂是唯一的。

根据定理 5.1.1 中的分类，Sing(Y_t) 是 B_t 的若干个同构副本的不交并。回忆一下，$A_s \subset \operatorname{im} p^* = Q_t^{\psi} \subset Q_t$ 作用于 Sing(Y_t)，并且根据命题 6.1.6，它与 φ 交换。由于 A_s 在 Sing(Y_t) 上的作用是平移，如果 φ 固定了 Sing(Y_t) 的一个连通分支 $B_t \subset$，那么它在该分支上通过平移作用（因为它与所有平移交换）。因此，Sing(Y_t)/φ 是 B_t 的若干商的不交并。但根据引理 6.2.7，这样的商具有自由的 A_s作用，因为$\frac{1}{d}\bar{X}_s$ 具有自由的 A_s作用。这就迫使 A_s在B_t 上的平移作用是自由的，或者 $A_s = B_t$ ，如所声称。□

推论 6.2.11. (1) R 是偶数。

(2) $\langle\psi\rangle$ 上的惯性群作用满足

$$\psi(0,z,a) = (0,\tfrac{1}{z},a), \quad \psi(\tfrac{R}{2},z,a) = (\tfrac{R}{2},\pm\tfrac{1}{z},a) \qquad for \quad (z,a) \in \mathbb{G}_m \times A_s.$$

证明。固定一个同构 $Q_t \cong \mathbb{Z}/R \times \mathbb{G}_m \times A_s$。回想 $Q_t^{\psi} \cong \pi_0(P_s) \times A_s$有一个中性分支 A_s。因此 ψ 必须通过 $\psi(0,z,a) = (0,z^{-1},a)$ 作用于 Q_t°。由此可推出 $(Q_t^{\circ})^{\psi} \cong \mu_2 \times A_s$ 以及 $|\pi_0(Q_t^{\circ})^{\psi}| = 2$。由于 X_s 的型为 I_r^*，根据定理 5.2.1，我们有 $|\pi_0(P_s)| = |\pi_0(Q_t^{\psi})| = 4$ （同样，我们尚未计算$\pi_0(P_s)$，但知道其阶为 4）。因此， Q_t^{ψ} 恰好包含在另一个分支 $\frac{R}{2} \in \pi_0(Q_t) = \mathbb{Z}/R$ 中（见 [Edi92，注 5.4.1]），且 R 是偶数。

记 $\psi_i\colon \mathbb{G}_m \times A_s \longrightarrow \mathbb{G}_m \times A_s$ 为 ψ 在 Q_t 的第 $R/2$ 个分支上的限制。又有 $Q_t^{\psi} = \pi_0(P_s) \times A_s$，因此 $(\mathbb{G}_m \times A_s)^{\psi_i}$ 由两份 A_s 组成。这意味着 ψ_i 在 A_s 因子上的作用是平凡的，并且在 $\mathbb{G}_m$ 上固定两个点。最后，由于 ψ 保持群运算，我们有恒等式 $\psi(R/2,\ z,\ a)^2 = \psi(0,\ z^2,\ 2a) = (0,\ z^{-2},\ 2a)$。这使得对所有 $z \in \mathbb{G}_m$，都有 $\psi_i(z)^2 = z^{-2}$，或者说 $\psi_i(z) = \pm z^{-1}$。□

引理 6.2.12。 对于 *Kodaira* 型 I_R 半稳定曲线 C，存在一个同构 $Y_t \cong C \times A_s$ 。这给出了 Q_t 与 $Y_t' = Y_t \setminus$ 奇点集(Y_t) 的对应，并且保持惯性 $\langle\psi\rangle$ 作用和 $\langle\varphi\rangle$ 作用。

证明。 由于 R 由推论 6.2.11可知是偶数，暂且记 $R = 2u$。记$Y_t = \sum_{i=0}^{2u-1} E_i$，其中每个不可约分支 E_i 都同构于 $\mathbb{P}^1 \times A_s$ 作为 $Q_t^{\circ} = \mathbb{G}_m \times A_s$的紧化。由引理 6.2.5(2)， $\varphi\colon\ Y_t \longrightarrow Y_t$ 至少有一个不动点 y。

我们首先断言，每个不动点都包含在 $Y_t' = Y_t \setminus$ Sing(Y_t) 中。这与引理 5.1.7 的证明类似。反设 φ 固定了一个点$y \in E_0 \cap E_1 \subset$Sing($Y_t$)（事实上，由命题 6.1.6 可知， φ固定了整个 $E_0 \cap E_1$）。若 φ保持 E_1不变，则推论 6.2.11 表明 φ 交换 0_1 和 ∞_1，矛盾。因此 φ交换 E_0 和 E_1，从而对所有 i， $\varphi(E_i) = E_{2u+1-i}$。$\varphi$的不动点集恰为 $(E_0 \cap E_1) \sqcup (E_u \cap E_{u+1}) = A_s \sqcup A_s$。然而，对每个点 $y \in E_0 \cap E_1$，φ 在 y 附近沿着 A_s 的方向平凡作用，并交换两个不可约分支 E_0 和 E_1。这意味着 φ 在切空间 $T_yY \cong k^{n+1}$ 上以¯作用，并固定一个 n维子空间。因此，根据 Chevalley–Shephard–Todd 定理，商 $Y/\varphi = X$ 是正则的。这由极小阿贝尔纤维化的唯一性推出 $X \cong X$ ，矛盾。

因此我们可以假设 $\varphi(y) = y$对于点 $y \in Y_t'$。不失一般性，假设 $y \in E_0$。于是，类似于上面的论证可将 Q_t-主齐性空间 Y_t'平凡化，从而识别它们的惯性作用。回顾推论 6.2.11 ， ψ 在 $Q_t^{\circ} = \mathbb{G}_m \times A_s$的第二个因子上作用平凡。由于 φ 保持分支 E_0，

这证明 φ 在 A_s方向上的作用平凡。该性质沿着交 $E_0 = \mathbb{P}^1 \times A_s$归纳地传递到每个分支 E_i。注意，φ 至少固定两个分支 E_0，且 E_u 根据推论 6.2.11。因此，φ 保持 E_0 中的每条有理曲线以及 E_u。

从一条唯一的有理曲线 $C_0 \subset E_0$ 开始，它包含 y。然后，φ 交换这两点 $p_1 = C_0 \cap E_1$ 和 $p_u = C_0 \cap E_{2u-1}$。取经过 p_1 的有理曲线 $C_1 \subset E_1$，以及经过 p_{2u} 的有理曲线 $C_{2u-1} \subset E_{2u-1}$。令 $p_2 = C_1 \cap E_2$ 和 $p_{2u-1} = C_{2u-1} \cap E_{2u-2}$。然后，$\varphi$ 交换 p_2 和 p_{2u-1}。这个归纳过程定义了 $p_u \in E_{u-1} \cap E_u$ 和 $p_{u+1} \in E_{u+1} \cap E_u$，它们被 φ 交换。现在取分别经过 p_u 和 p_{u+1} 的唯一有理曲线 C_u、$C'_u \subset E_u$。于是，φ 交换这两条有理曲线。但根据推论 6.2.11(2)，φ 保持 E_u 中的每一条有理曲线不变，因此这就得到 $C_u = C'_u$。也就是说，Y_t 没有剪切。□

推论 6.2.13。(1) d 为偶数，且 R 可被 d整除。记 $d = 2k$ 和$R = 2kr$ 分别为正整数 k 和 r。

(2) 存在一个本原 $2k$ 次单位根 $\zeta \in \mathbb{G}_m$，使得惯性群$\langle\psi\rangle$在 $Q_t \cong \mathbb{Z}/2kr \times \mathbb{G}_m \times A_s$ 上的作用为

$$\psi(i, z, a) = (-i, \tfrac{\zeta^i}{z}, a) \qquad for \quad (i, z, a) \in \mathbb{Z}/2kr \times \mathbb{G}_m \times A_s.$$

证明。由引理 $\langle\varphi\rangle$-作用与 $\langle\psi\rangle$-作用相同6.2.12。现在可以说 ψ 的阶为 d，因为 φ 的阶为 d，根据引理 6.2.5(1)。由此可得 d 为偶数（由推论 6.2.11），因此记 $d = 2k$。

注意，φ 要么保持、要么反转定向 $C = \sum_{i=0}^{R-1} C_i$。由于$\psi(0, z, a)$ (0, z^{-1}, a) 由推论 6.2.11，φ必定反转定向。适当平移指标 i 后，可假设 $\varphi(E_i) = E_{-i}$。于是 ψ 具有如下形式

$$\psi(i, z, a) = (-i, \psi_i(z, a)) \qquad \text{for} \quad \psi_i : \mathbb{G}_m \times A_s \longrightarrow \mathbb{G}_m \times A_s.$$

由于 ψ 保持群运算，我们得到一列恒等式

$$\psi(i, z, a) = \psi(i, 1, 0) \cdot \psi(0, z, a) = (-i, \psi_i(1, 0)) \cdot (0, z^{-1}, a) = (-i, \psi_i(1, 0) \cdot (z^{-1}, a)).$$

因此，对于 $\zeta_i \in \mathbb{G}_m \times A_s$，有 $\psi_i(z, a) = \zeta_i \cdot (z^{-1}, a)$。由于 $\psi(i, z^i, ia) = \psi(1, z, a)^i = (1, \zeta_1 \cdot (z^{-1}, a))^i = (i, \zeta_1^i \cdot (z^{-i}, ia))$，故对于某个单一的 $\zeta \in \mathbb{G}_m \times A_s$，有 $\zeta_i = \zeta^i$。由于 φ 通过平移作用于 A_s 方向，故 $\zeta \in \mathbb{G}_m$。由于 ψ 的阶为 $2k$，ζ 是一个本原 $2k$ 次单位根。最后，$\zeta_R = \zeta^R = 1$ 表明 R 可被 $2k$ 整除。□

注意，$\varphi^2(i, z, a) = (i, \zeta^{-2i} z, a)$ 在 Y_t 上自由作用。因此，以中间商 g^-：$Y^- = Y/\varphi^2 \longrightarrow T^- = T/\mu_k$ 替换 Y 后，我们可以假设 $k = 2$，且 φ 是一个对合。对合 φ 的不动点集由 $A_s \sqcup A_s \subset C_0 \times A_s$ 和 $A_s \sqcup A_s \subset C_r \times A_s$ 组成。这些反映在奇异轨迹 $\sqcup^4 A_s \subset \bar{X} = Y/\varphi$ 上，随后经吹起变为四个 $\mathbb{P}^1 \times A_s$，从而得到 X_s 的 I_r^* 型。这就完成了命题 6.2.1(2) 的证明。

6.2.3. *Néron* 分支群与 *Albanese* 稳定子。我们终于可以完成先前承诺的定理不稳定情形的证明 5.3.2，以及定理中阿尔巴尼斯稳定子的分类 5.2.1。

定理 5.3.2(2) 和定理 5.2.1 的证明。当 P 没有阿尔巴内塞稳定子时，我们需要计算 $\pi_0(P_s)$。在这种情况下，根据命题 6.2.1，P 经由 $Q_t = E \times A_s$ 或 $\mathbb{Z}/2r \times \mathbb{G}_m \times A_s$ 对 $Q \longrightarrow T$ 作半稳定基变换。分支群 $\pi_0(P_s)$ 可通过 $\pi_0(Q_t^\psi)$ 计算。在前一种情况下，惯性作用为 $\psi(x, y) = (\omega^{\pm 1} x, y)$，因此 $Q_t^\psi = E^\omega \times A_s$ 具有所需的分支群。

在后一种情况下，惯性作用为 $\psi(i,\ z,\ y)=(-i,\ (-1)^i z^{-1},\ y)$，因此当 r 为偶数时，Q_t^{ψ} 仍与 $(\mathbb{Z}/2)^{\times 2}\times A_s$ 同构；当 r 为奇数时，则与 $\mathbb{Z}/4\times A_s$ 同构。□

现在假设阿尔巴内塞稳定子是非平凡的。推论 6.2.4 由上述讨论以及命题 6.2.2的以下证明可得，故略去。

命题 6.2.2 的证明。考虑 $f:\ X\longrightarrow S$ 的解缠 X，并利用命题 6.2.1 取其半稳定基变换 $\tilde{g}:\ Y\longrightarrow T$。设 $G\subset P_s=\pi_0(P_s)\times\mathbb{G}_a\times A_s$ 为 X的阿尔巴内塞稳定子。根据定理 6.1.4，拉回 $p^*:\ P_s\longrightarrow Q_t$ 具有一个核 $\mathbb{G}_a$，因此它将 G 同构地映到一个子群 $p^*G\subset Q_t$。于是我们得到一个截面 $p^*G\subset Q$ 以及 Y上的一个 p^*G-作用。我们断言此作用是自由的。若确实如此，则商 $g:\ Y=Y/p^*G\longrightarrow S$ 是一个极小阿贝尔纤维化，因而是原始 f的半稳定基变换。

如果 Y_t 自由地，因此 p^*G 作用是自由的。假设 $\tilde{g}$ 是严格半稳定的，即 f 具有型I_r^* 且 $\tilde{g}$ 具有型I_{2r}，对于 $r\geq 1$。唯一的非平凡稳定子（关于 Y_t）是 $\mathbb{G}_m\subset Q_t$，由引理5.1.7。根据命题6.2.1（2）的描述，我们有

$$\operatorname{im} p^*\cap\mathbb{G}_m=\tilde{Q}_t^{\tilde{\psi}}\cap\mathbb{G}_m=\{\pm 1\}.$$

因此，如果 p^*G 在 Y_t上的作用不是自由的，则 $G\subset P_s=\pi_0(P_s)\times\mathbb{G}_a\times A_s$ 包含一个元素 $f=(\alpha,\ 0,\ 0)$，它交换两臂 E_1 与 E_2，以及 E_3 与 E_4，它们属于型I_r^* 曲线 $C=E_1+E_2+2(\sum_{i=0}^r F_i)+E_3+E_4$。然而，这样的 f 并不自由地作用在 X 上，因为它在 A_s方向上没有任何平移，这与 $X\longrightarrow X$ 是自由 G-商这一事实相矛盾。这表明 p^*G 自由地作用在 Y 上。

(1) 由于 $Y\longrightarrow Y$ 是一个自由的 p^*G-非多重阿贝尔纤维化的商，我们可以仿照命题 4.2.4(2) 的证明。我们提醒读者，该证明的第二部分在此情形下不适用。或者 p^*G可能具有非平凡的交于 Q_t°。这是因为该证明基于如下观察 $Q_t^{\circ}=Q_t^{\circ}$，而该观察在此情形下并不成立。

(2) 由命题 6.2.1 可知有同构 $Q_t=E\times A_s$。对 $\tau:\ G\longrightarrow E$ 与 $\sigma:\ G\longrightarrow A_s$，将 $p^*:G\hookrightarrow E\times A_s$ 记为 $p^*(g)=(\tau(g)\ \sigma(g))$。由命题 4.2.4，我们有 $G\cap P_s^{\circ}=0$，从而 $p^*G\cap(\{0\}\times A_s)=0$。这意味着 $\tau:\ G\longrightarrow E$ 是单射。若对某个非平凡的 $g\in G$ 有 $\sigma(g)=0$，则商 $Y=Y/p^*(g)$ 本应具有中心纤维 $Y_t=E/p^*(g)\times A_s$。这将意味着 $X=X/g$ 具有平凡阿尔巴尼斯稳定子，矛盾。因此$\tau:\ E\longrightarrow A_s$ 也是单射。最后，由于 $E\times A_s$ 上的 p^*G-作用与 $\tilde{\varphi}(x,y)=(\omega^{\pm 1}x,y)$ 交换，我们有 $\tau(g)\in E^{\omega}$。

（3）我们有一个同构 $Q_t=\mathbb{Z}/2r\times\mathbb{G}_m\times A_s$ 以及对阿尔巴内塞稳定子 G 的分类，见定理5.2.1。与上文类似，注意$\operatorname{im} p^*\cap Q_t^{\circ}=\{\pm 1\}\times A_s$。这表明 $p^*G\cap Q_t^{\circ}=0$ 或 $\langle(-1,\ a)\rangle$ 对于一个2-挠点 $a\in A_s$。由于我们已经在 $p^*G\cap\mathbb{G}_m=0$ 上文证明了 $a\neq 0$。

在 $Y_t=C\times A_s$ 上的 p^*G 作用是对角的。若 r 为奇数，则 $1\in\mathbb{Z}/4=\pi_0(P_s)$ 是一个 $\in\tilde{Q}_t$（$r,\ \sqrt{-1},\ a$），对应一个阶为 4 的挠点 $a\in A_s$。这证明了该断言。若 r 为偶数，则 $G\subset(\mathbb{Z}/2)^{\times 2}=\pi_0(P_s)$ 由 $(0,\ 1,\ a)$ 和 $(r,\ 1,\ b)$ 生成，其中 $a,\ b\in A_s$ 的阶为 2。反设 $a=b$。那么 $g=(r,\ 1,\ 0)\in\pi_0(P_s)$

在 A_s因子上 Y_t 的作用是平凡的。由于 $\mathbb{Z}/2=\langle g\rangle$ 在 C 上的作用保持阶且没有不动点，$C=C/g$ 是一条 Kodaira 奇异曲线，型为 I_r。但是，$Y=Y/g\longrightarrow T$有一个中心纤维 $Y_t=C\times A_s$，且它是一个半稳定底变换的 $X=X/g\longrightarrow S$，因此命题 6.2.1 表明，这样的 X 型为I_r^*。矛盾。□

引理 6.2.14。 *$\langle\psi\rangle$在 Q_t 上的作用的对偶，是$\check{}\psi^{-1}\rangle$在$\check{}$ Q_t上的 $\langle$作用。*

证明。 回顾命题 6.1.1 中惯性群 $\langle\psi\rangle$在 Q_t 上的作用的定义。取底的伽罗瓦作用 $\zeta:T\longrightarrow T$，并考虑一个 $\Psi:\ Q\longrightarrow\zeta^*Q$，它是 T 上满足余循环条件的阿贝尔概形之间的同构。其对偶是一个$\check{}\check{}$对偶阿贝尔概形之间的同构 $\Psi:\zeta^*Q\longrightarrow Q$，其逆是一个同构 $(\check{}\Psi)^{-1}:\ \check{}\,Q\longrightarrow\zeta^*\check{}Q$，按定义，它描述了 $\langle\check{}\psi\rangle$-作用。比较这两种描述的中心纤维，即得引理。□

定理 5.3.2(3) 的证明：不稳定情形。设 P 具有一个阿尔巴内塞稳定子 G。则命题 6.2.2 表明 $Q_t=(E\times A_s)/G$ 或 $(\mathbb{Z}/2r\times\mathbb{G}_m\times A_s)/G$。先设 $Q_t=(E\times A_s)/G$。那么对偶 t-自同构群 $\check{}P$ 具有一个半稳定基变换 $\check{}\,Q\longrightarrow T$，从而中心纤维 $\check{}\,Q_t=((E\times A_s)/G)^\vee$。根据引理 6.2.14，其惯性作用为 $\check{}\,\psi^{-1}$。为计算其不变群，注意到我们还有一个进一步的 G-商 $Q_t\longrightarrow E/G\times A_s/G$。其对偶是一个 $\hat{}G$-商

$$(E/G)^\vee\times(A_s/G)^\vee\longrightarrow\check{Q}_t=((E\times A_s)/G)^\vee.$$

由于 $\check{}\,\psi^{-1}$ 通过 $\check{}\,\psi(\check{}x,\ \check{}y)=(\omega^{\pm1}\check{}x,\ \check{}y)$ 作用于 $(E/G)^\vee\times(A_s/G)^\vee$，计算 $\check{}\hat{}\psi$-不变部分可知，其阿尔巴内塞稳定子为 G，它同构于 G。

假设 P 对奇数 r 具有 I_r^*/G 型（因此 $Q_t=(\mathbb{Z}/2r\times\mathbb{G}_m\times A_s)/G$）。在这种情况下，$G=0$、$\mathbb{Z}/2$ 或 $\mathbb{Z}/4$。对于每个 G，我们可以如下计算 $\pi_0(Q_t)$ 和 Q_t°。

P 的型	G	$\pi_0(Q_t)$	Q_t°	$\pi_0(\check{Q}_t)$	$\check{Q}_t^\circ$
I_r^*	0	$\mathbb{Z}/2r$	$\mathbb{G}_m\times A_s$	$\mathbb{Z}/2r$	$\mathbb{G}_m\times\check{A}_s$
$\mathrm{I}_r^*/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2r$	$(\mathbb{G}_m\times A_s)/2$	$\mathbb{Z}/2r$	$\mathbb{G}_m\times(A_s/2)^\vee$
$\mathrm{I}_r^*/4$	$\mathbb{Z}/4$	$\mathbb{Z}/r$	$(\mathbb{G}_m\times A_s)/2$	$\mathbb{Z}/r$	$(\mathbb{G}_m\times(A_s/4)^\vee)/2$

要计算 Q_t，注意到根据定理的半稳定版本，它与 Q_t 属于同一型，因此 $\pi_0(\check{}\,Q_t)\cong\pi_0(Q_t)$。根据命题 2.4.2，$Q_t$ 和 $\check{}\,Q_t$ 的阿贝尔簇部分互为对偶；根据命题 6.2.2(3)，$(A_s/G)^\vee\subset\check{}\,Q_t^\circ$。由此可计算出 $\check{}\,Q_t^\circ$。例如，当 $G=\mathbb{Z}/4$ 时，$\check{}\,Q_t^\circ$ 有一个阿贝尔簇部分 $(A_s/2)^\vee$，并且包含 $(A_s/4)^\vee$。对偶数 r 进行同样的计算，并收集 P 的每种型所对应的所有可能的对 $(Q_t,\check{}\,Q_t)$。直接比较可知，$(Q_t,\check{}\,Q_t)\cong(\check{}\,Q_t',Q_t')$ 蕴含 $G\cong G'$。定理得证。例如，当 r 为奇数时，型 $\mathrm{I}_r^*/2$ 和 $\mathrm{I}_{2r}^*/2$ 互为对偶，但它们的 π_0-群相同。□

注 6.2.15。 不稳定纤维化的阿尔巴内塞稳定子 G 包含于短正合列 $0\longrightarrow G\longrightarrow A_s\longrightarrow\mathrm{Alb}_s\longrightarrow0$ 中。取对偶后，我们得到$0\longrightarrow\hat{}G\longrightarrow\mathrm{Alb}_s^\vee=A_s^*\longrightarrow\check{}A_s=\mathrm{Alb}_{\check{X}_s}\longrightarrow0$。这表明，$P$ 与 $\check{}P$ 的阿尔巴内塞稳定子（更确切地说）互为卡蒂埃对偶。

7. 多重中心纤维的分类

在本节中，设 $f\colon X \longrightarrow S$ 是一个极小 δ-正则阿贝尔纤维化，其中心纤维 X_s 的重数为 $m > 1$。照例， $P \longrightarrow S$ 是其 t- 自同构概形。我们马上将看到，存在一个优选的基变换 $g\colon Y \longrightarrow T$，其对应的 t-自同构概形为 $Q \longrightarrow T$。

现在，分类将分为三个部分。当 P 是半阿贝尔时，我们在定理 7.2.1 和 7.3.1 中对 X_s 进行分类，并将它们称为 $r \geq 0$的 $m \cdot \mathrm{I}_r$ 型。当 P 不是半阿贝尔时（因此 P_s 具有线性部分 $\mathbb{G}_a$），我们根据 Q的行为将该情形分为两类。当 Q仍是半阿贝尔时，我们在定理 7.2.2 和 7.3.2 中对 X_s 进行分类，并将它们称为 $r \geq 0$的 $m \cdot \mathrm{I}_r^{\pm}$型。最后，当 P 和 Q都不是半阿贝尔时，我们在定理 7.4.1 中对 X_s 进行分类。在每种情形中，我们都必须耐心地分析所有数值上的可能性。

7.1. 非多重基变换。 取一个次数为 m的有限全分歧伽罗瓦态射$p\colon T \longrightarrow S$，其恰好是 X_s的重数。在这一特殊情形中，极小模型 $g : Y \longrightarrow T$ 可以显式地构造为一个正规化基变换

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{q} & X \\ \downarrow g & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{p} & S \end{array} \qquad \text{for} \quad Y = (X \times_S T)^{\nu}. \tag{7.1.1}$$

引理 7.1.2. 设 $T \longrightarrow S$ 是次数为 m 的全分歧基变换， Y是 X的正规化基变换。那么

(1) q 是 ***étale*** 的。(2) g 是极小 δ-正则阿贝尔纤维化，且为非多重纤维化。

证明。 这基本上是 [Bar+04，命题 III.9。1] 以及 [HO11，命题 3。1]。(1) 该陈述是关于 X的局部性质，因此进行局部计算。(2) 总体空间 Y是正则的，且 K_Y 在数值上 g-平凡，因此 g 是极小阿贝尔纤维化。根据推论 6.1.5，它是-正则的。根据引理 6.1.10，中心纤维 Y_t 的重数为 1：正规化消除了其重数。□

¯这将交换图（6.1.8）与 $X = X$简化，因此 §6.1 中的结果可直接应用于 X:

推论 7.1.3. (1) 惯性群 $\langle\varphi\rangle$ 在 Y_t 上的作用是自由的，阶为 m。
(2) 商 $\bar{X} = Y/\varphi$ 在 (6.1.8) 中与 X重合。 □

如同§6.1，定义一个闭子概形 $\frac{1}{m}X_s \subset \frac{}{}X_s \subset X$ ，既可作为商$\frac{1}{m}X_s = Y_t/\varphi$ ，也可作为与 Cartier 除子相关联的概形（引理 6.1.10）：

$$\tfrac{1}{m}X_s = \sum_{i=1}^{r} \tfrac{a_i}{m} \cdot E_i.$$

由此构造一个态射序列

$$Y_t \xrightarrow{q} \tfrac{1}{m}X_s \xhookrightarrow{i} X_s \tag{7.1.4}$$

其中前者是自由的 $\langle\varphi\rangle$-商，而后者是无穷小增厚。以下内容只是定理6.1.4–6.1.5，但为清晰起见，我们再次更明确地陈述。

引理 7.1.5。 *t*-自同构的拉回 $p^*:\ P_s \longrightarrow Q_t$ 是以下情形之一。以下， A_s 和 B_t 均为维数为 $n-1$的阿贝尔簇。

(i) 维数为 n 的阿贝尔簇之间的同构。(ii) 同态 $P_s = \pi_0(P_s) \times \mathbb{G}_a \times A_s \twoheadrightarrow \pi_0(P_s) \times A_s \hookrightarrow Q_t$，其中 Q_t 是维数为 n 的阿贝尔簇。(iii) 一个开浸入，使得：

- $p^*:\ P_s^\circ \longrightarrow Q_t^\circ$ 是 A_s 的 $\mathbb{G}_m$-扩张与 B_t 的 $\mathbb{G}_m$-扩张之间的同构。

- 余核 $p^* = \mathbb{Z}/m$。(iv) 同态 $P_s = \pi_0(P_s) \times \mathbb{G}_a \times A_s \twoheadrightarrow \pi_0(P_s) \times A_s \hookrightarrow Q_t$，其中 Q_t° 是 B_t 的 $\mathbb{G}_m$-扩张，且 $A_s \hookrightarrow Q_t^\circ \twoheadrightarrow B_t$ 是一个同源。(v) 一个同态，其在中性分支上诱导的映射为 $\mathbb{G}_a \times A_s \longrightarrow \mathbb{G}_a \times B_t$，其中 $\mathbb{G}_a \longrightarrow \mathbb{G}_a$ 或为同构，或为 0，而 $A_s \longrightarrow B_t$ 是同构。□

	0	$\mathbb{G}_m$	$\mathbb{G}_a$
0	(i)	-	-
$\mathbb{G}_m$	-	(iii)	-
$\mathbb{G}_a$	(ii)	(iv)	(v)

表 6. 的五种可能型 $p^*:\ P_s \longrightarrow Q_t$ 引理 7.1.5。行表示 P_s 的线性部分，列表示 Q_t的线性部分。

情形 (i) 和 (iii) 将变为 Kodaira 类型 $m \cdot \mathrm{I}_r$，对应于 $r \geq 0$；情形 (ii) 和 (iv) 将变为 Kodaira 类型 $m \cdot \mathrm{I}_r^{\pm}$，对应于 $r \geq 0$；最后一种情形 (v) 将变为 Kodaira 类型 $m \cdot \mathrm{I}_r^*$，对应于 $r \geq 0$、$m \cdot \mathrm{II}$、$\cdots$。

7.1.1. 阿尔巴尼斯态射与多重纤维的解缠。 以下两个结果将对 X_s 的研究归约为对 $\frac{1}{m}X_s$的研究。第一个引理不过是引理 6.1.11。

引理7.1.6。 $\frac{1}{m}X_s$ 具有一个 P_s-作用（该作用可能不忠实）。 □

命题 7.1.7. $\frac{1}{m}X_s$ 与 X_s 的 *Albanese* 扭子是同构的，并且它们的 *Albanese* 态射由交换图相关联

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{m}X_s & \xhookrightarrow{i} & X_s \\ {\scriptstyle \mathrm{alb}}\downarrow & \swarrow_{\mathrm{alb}} & \\ \mathrm{Alb}_s & & \end{array}.$$

证明。由于 $h^0(\frac{1}{m}X_s, \mathcal{O}) \leq h^0(Y_t, \mathcal{O}) = 1$，我们可以应用定理A.2.2–A.2.3。注意，在这种情况下，我们可以对拉回 $i^*:\ \mathrm{Pic}^\circ_{X_s} \longrightarrow \mathrm{Pic}^\circ_{\frac{1}{m}X_s}$ 作进一步说明：当 $\mathrm{Pic}^\circ_{X_s}$ 具有线性部分 $\mathbb{G}_a$ 时，由命题 4.1.6，它分裂为 $\mathrm{Pic}^\circ_{X_s} = \mathbb{G}_a \times \mathrm{Alb}_s^\vee$。这意味着 i^* 诱导一个包含 $\mathrm{Alb}_s^\vee \hookrightarrow \mathrm{Pic}^\circ_{\frac{1}{m}X_s}$，由引理 A.1.8，其余核是一个幺幂群。□

我们以关于多重纤维的引理 4.2.1 的一个变体作为本小节的结尾。稍后将在定理 7.3.2和 7.4.1中用它将 Y 的解缠下降到 X。遗憾的是，这个陈述有些技术性。

引理 7.1.8（引理4.2.1的改进）。设 $f\colon X \longrightarrow S$ 是一个极小的δ-正则阿贝尔纤维化，且 P_s 具有线性部分 $\mathbb{G}_a$。假设

- 命题 $\frac{1}{m}X_s \longrightarrow \mathrm{Alb}_s$ 是命题 *7.1.7* 中阿尔巴内塞态射 φ 的一个自由 $Y_t \longrightarrow \mathrm{Alb}_t$ 的商。

设 $u\colon A \longrightarrow \mathrm{Alb}_s$ 是阿贝尔挠子之间的一个同源，且 $A \times_{\mathrm{Alb}_s} \mathrm{Alb}_t$ 连通。则引理 *4.2.1* 的结论对 u 也成立。

当 f 是非多重时，引理中的子弹假设成立（因为 $m=1$ 和 $Y=X$），且 u 可以任意选取。因此，当 7.1.8 具有线性部分 P_s 时，引理 $\mathbb{G}_a$恢复其原始版本。当 f 为多重时，对于引理 7.1.5 的情形 (iv) 和 (v)，引理中的假设将得到验证（见引理 7.3.18 和7.4.5）。

引理 7.1.9。存在代数群的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}^\circ_{X_s} & \xrightarrow{i^*} & \mathrm{Pic}^\circ_{\frac{1}{m}X_s} \\ \downarrow\kappa & & \downarrow q^* \\ \check{P}^\circ_s & \xrightarrow{p^*} & \check{Q}^\circ_t \end{array},$$

其中 p^* 是由 (6.1.3) 中构造的拉回，i^* 和 q^* 是由 (7.1.4)得到的拉回，而 κ是命题 *2.4.3*中构造的同源。此外，还有以下结论。

(1) 存在同构 $\kappa\colon$核 $i^* \longrightarrow$核 p^*和 $i^*\colon$核 $\kappa \longrightarrow$核q^*.(2) 核 $i^*=0$或 $\mathbb{G}_a$，且 核$\kappa \subset \mathbb{Z}/m$。

证明。从一个定义在 T 上的群概形交换图开始:

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Pic}^\circ_f)_T & \xrightarrow{q^*} & \mathrm{Pic}^\circ_g \\ \downarrow\kappa & & \| \\ \check{P}^\circ_T & \xrightarrow{p^*} & \check{Q}^\circ \end{array}.$$

它在 T_0 上交换，因而在 T 上也交换，右侧的等式来自命题 2.4.3。将此图限制在 $t \in T$ 上，并将 $\mathrm{Pic}^\circ_{X_s} \longrightarrow \mathrm{Pic}^\circ_{Y_t} = \check{}Q^\circ_t$ 分解为 $q^* \circ i^*$，即可构造所需的交换图。为证明 (1)，注意到根据引理 A.1.7，核$q^* \subset \mathbb{Z}/m$是有限的；根据命题 2.4.3，核 κ是有限的；根据引理 A.1.8，核i^*是幺幂的（事实上，它要么是 0，要么是 $\mathbb{G}_a$）；最后，根据定理 6.1.4，核p^*是幺幂的。这些结论推出 (1) 成立。现在由核 $\kappa =$核$q^* \subset \mathbb{Z}/m$可得 (2)。□

引理 7.1.8 的证明。回顾引理 4.2.1 的证明，同源$u\colon A \longrightarrow \mathrm{Alb}_s$ (伽罗瓦群为 G) 定义了一个子群 $\hat{}G \subset \mathrm{Alb}^\vee_s$。阿尔巴内塞映射 $\mathrm{alb}\colon X_s \longrightarrow \mathrm{Alb}_s$ 根据定理 A.2.2 定义了一个嵌入 $\mathrm{alb}^*\colon \mathrm{Alb}^\vee_s \hookrightarrow \mathrm{Pic}^\circ_{X_s}$。正如注记 4.2.2 所指出的，原引理中唯一用到非重数纤维假设的地方，是为了证明 $\mathrm{alb}^*(\hat{}G) \subset \mathrm{Pic}^\circ_f$ 在 S_0上非平凡。根据命题 2.4.3，Pic°_f 有一个分离化商$\kappa\colon \mathrm{Pic}^\circ_f \longrightarrow \check{}P^\circ$。$\mathrm{Pic}^\circ_f$ 中在 S_0 上平凡的截面经过中心纤维 $\mathrm{Pic}^\circ_{X_s}$的挠点 $\ker(\kappa\colon \mathrm{Pic}^\circ_{X_s} \longrightarrow \check{}P^\circ_s)$。因此，只需证明 $\mathrm{alb}^*(\hat{}G) \subset \mathrm{Pic}^\circ_{X_s}$ 与 $\ker\kappa \subset \mathrm{Pic}^\circ_{X_s}$的交是平凡的。

取引理 7.1.9中的交换图。断言 阿尔巴内塞映射$^*(\hat{}G) \cap$核$\kappa = 0$ 在 $\mathrm{Pic}^\circ_{X_s}$ 中等价于 阿尔巴内塞映射$^*(\hat{}G)\cap$核 $q^*=0$ 在 $\mathrm{Pic}^\circ_{\frac{1}{m}X_s}$，由命题 7.1.7和引理 7.1.9可得。

给定的子弹假设等价于如下笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} Y_t & \xrightarrow{q} & \frac{1}{m}X_s \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{alb}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{alb}} \\ \mathrm{Alb}_t & \xrightarrow{r} & \mathrm{Alb}_s \end{array},$$

因此我们有 $\ker q^* = \ker r^*$，并且再次有 $\mathrm{alb}^*(\hat{}G) \cap \ker q^* = 0$ 等价于 $\hat{}G \cap \ker r^* = \hat{}0$ in Alb_s。由于 G 与 $u\colon A \longrightarrow \mathrm{Alb}_s$ 相关联，而 $\ker r^*$ 与 $\mathrm{Alb}_t \longrightarrow \mathrm{Alb}_s$相关联，这等价于说纤维积 $A \times_{\mathrm{Alb}_s} \mathrm{Alb}_t$ 是连通的（阿贝尔挠子），这是我们的假设。□

7.2. **基变换到光滑纤维化**。新的极小 δ-正则阿贝尔纤维化 $g\colon Y \longrightarrow T$ 可能是光滑的、严格半稳定的或不稳定的。从现在起，我们将在余下各节中分别分析这些情况。

第一种情况是 g 光滑，或者是引理 7.1.5 和表 6中的情况 (i) 和 (ii)。在这种情况下，中心纤维 Y_t 根据引理 2.3.4，是一个维数为 n 的阿贝尔挠子。

定理 7.2.1（I_0型）。在引理 *7.1.5*（*i*）中，$\frac{1}{m}X_s$是一个维数为 n 的阿贝尔挠子。

定理 7.2.2（I_0^+型）。在引理 *7.1.5*（*ii*）中，存在唯一的正整数 d，它整除 m，且满足以下性质。

（*1*） $d = 2$、*3*、*4* 或 *6*。此外，（*a*） $d = 2$ 当且仅当 P 具有 I_0^*、$I_0^*/2$ 或 $I_0^*/4$ 型。（*b*） $d = 6$ 当且仅当 $j(E) = 0$ 且 P 具有 *II* 型或 II^* 型。（*c*） $d = 4$ 当且仅当 $j(E) = 1728$ 且 P 具有 *III*、$III/2$、III^* 或 $III^*/2$ 型。（*d*） $d = 3$ 当且仅当 $j(E) = 0$ 且 P 具有 *IV*、$IV/3$、IV^* 或 $IV^*/3$ 型。

（*2*）$\frac{1}{m}X_s$ 同构于 $(E \times A_s) / (\langle\tilde{\varphi}\rangle \times G)$，其中 E 是椭圆曲线，G是命题 *6.2.2(2)* 中所述的 P 的阿尔巴内塞稳定子，并且

$$\tilde{\varphi}(x, y) = (\omega^{\pm 1}x, y + a) \qquad for \quad (x, y) \in E \times A_s.$$

这里，$\omega \in$自同构群$_0(E)$ 是一个阶为 d 的群自同构，而 $a \in A_s$ 是一个阶为 m 的挠点

定义 7.2.3。上述情形的*Kodaira* 型为所示型乘以 m。

定理的证明*7.2.1*。由于 $p^*\colon P_s \longrightarrow Q_t$ 是阿贝尔簇之间的同构，引理2.3.4已足以得出该定理。以下给出一个更强的版本。由引理 6.1.11，P_s 在 $\frac{1}{m}X_s = X_{s,\mathrm{red}}$ 上的作用由 Q_t 在 Y_t 上的作用诱导。因此，$\frac{1}{m}\overline{X}_s$ 具有传递的 P_s 作用，从而是一个阿贝尔挠子。$\langle\varphi\rangle$ 在 $\overline{Y_t}$ 上的作用是平移且 $\frac{1}{m}X_s \underline{=} Y_t/\varphi$。□

本小节余下部分将用于证明定理 7.2.2。

由于 P 是不稳定的，且其半稳定基变换 Q是光滑的，因此 P 为 I_0^*、II 型，$\cdots$，$\mathrm{IV}^*/3$ 根据推论6.2.4。让我们更精确地表述。设 $f^\sharp\colon X^\sharp \longrightarrow S$ 是 P 的一个极小紧化，并考虑其阿尔巴内塞稳定子 G。缩小S后，我们可以假设 $g\colon Y \longrightarrow T$ 有一个截面。那么 Y_0 和 $X^\sharp_{T_0}$ 都与 $Q_0 \longrightarrow T_0$同构。因此 Y 和 $X^\sharp_T$ 双有理，或者 Y 是（唯一的）

的极小模型 $X_T^\sharp$。根据命题6.2.2，解缠 $\tilde{X}^\sharp \longrightarrow X^\sharp$ 拉回为 $\tilde{}$ $\tilde{}$一个 G-覆盖 $Y \longrightarrow Y$，其中心纤维 $Y_t = E \times A_s$ 对应于椭圆曲线 E。我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & & \\ \downarrow & & . \\ Y & \longrightarrow & X \end{array} \tag{7.2.4}$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$此外，$Y_t = Y_t/G = (E \times A_s)/G$ 是由 $G \hookrightarrow Q_t = E \times A_s$ $\tilde{}$给出的自由商，其中 $\tau : G \hookrightarrow E$ 和 $\sigma : G \hookrightarrow A_s$ 均为单射。$\mu_m = \langle\psi\rangle$对 $\tilde{Q}_t = E \times A_s$ 的作用具有如下形式：$\tilde{\psi}(x, y) = (\omega^{\pm 1}x, y)$，其中 $(x, y) \in E \times A_s$，且 $\omega \in \mathrm{Aut}_0(E)$ 是 $d = 2$，3、4 或 6 时的一个本原 d 次单位根。

注意，$\tilde{Y}$ 可作为 $\tilde{X}^\sharp$的半稳定基变换，具有惯性自同构 $\tilde{\varphi}^\sharp$。然而，先验上并不清楚是否存在惯性自同构 $\tilde{\varphi}$ $\tilde{}$作用于 Y，并提升 φ 上的惯性自同构 Y。等价地说，就是要用一个新空间 X填补 $\tilde{}$（7.2.4）的右上角。事实证明，这在当前情形 (ii) 下总是可行，但在情形 (iv) 和 (v) 下则不行（引理 7.3.20 和 7.4.9）。

引理 7.2.5。缩小 S *étale* 局部，存在一个伽罗瓦 *étale* 态射 $\tilde{}X \longrightarrow X$ 补全(7.2.4) 的右上角，使其成为笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \longrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array} .$$

$\tilde{}$特别地，存在一个 $\mu_m = \langle\tilde{\varphi}\rangle$-作用于 Y 的作用，它提升了 φ 在 Y 上的作用，并与 G 交换。

$\tilde{}$证明。我们先将 φ提升为 $\tilde{\varphi}$ 上的一个自同构 Y_t。回忆命题6.2.1 – $\tilde{}$ $\tilde{}$6.2.2 我们有一个同构 $Q_t = Y_t = E \times A_s$，以及自同构

$$\tilde{\psi}(x, y) = (\omega^{\pm 1}x, y) \text{ for } (x, y) \in \tilde{Q}_t, \quad g(x, y) = (x + \tau(g), y + \sigma(g)) \text{ for } (x, y) \in \tilde{Y}_t.$$

这里 $\tau : G \hookrightarrow E^\omega$ 和 $\sigma : G \hookrightarrow A_s$ 是单同态。因此，我们有一个关于 $Q_t = Q_t/G = (E \times A_s)$ 上 ψ 的 $\tilde{}$描述。现在，Y_t 上的 φ 可表示为

$$\varphi(x, y) = \psi(x, y) + \varphi(0, 0) \qquad \text{for} \quad (x, y) \in Y_t = (E \times A_s)/G.$$

记 $\varphi(0,0) = (c, a) \in (E \times A_s)/G$，则有 $\varphi(x, y) = (\omega^{\pm 1}x + c, y + a)$。我们可以调整阿贝尔主齐性空间 Y_t 的原点，并假设 $c = 0$。这唯一确定了 $a \in A_s$。现在，我们可以将 φ 提升为 Y_t 上的一个自同构 $\tilde{\varphi}(x, y) = (\omega^{\pm 1}x, y + a)$ $\tilde{}$。它与 G 交换，因为 $\tau(g)$ 是 ω-不变的。

$\tilde{}$ $\tilde{}$将 $\tilde{\varphi}$的自同构提升为 $Y \longrightarrow T$ 的自同构是形式上的。回顾命题 6.1.6，φ被建模为 T上的阿贝尔挠子之间的同构 $\Phi : Y \longrightarrow \zeta^* Y$ of $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$。利用引理 A.1.3，将其提升为唯一的阿贝尔挠子同构 $\Phi : Y \longrightarrow \zeta^* Y$。这构造了 $\tilde{}Y$ 上的等变自同构 $\tilde{\varphi}$，满足命题 6.1.6(2) 中的条件。$\langle\tilde{\varphi}\rangle$-作用与 G-作用可交换，因为它们在 Y_t上可交换。□

$\tilde{}$ $\tilde{}$定理 7.2.2 的证明。引理 7.2.5 表明 $X_s = Y_t/\tilde{\varphi} = (E \times A_s)/\tilde{\varphi}$ 对于$\tilde{\varphi}(x, y) = (\omega^{\pm 1}x, y + a)$。原来的 X_s 由进一步的商 $\tilde{X}_s/G$ 计算得到。所有结论立即成立。□

7.3. **基变换至半稳定纤维化**。我们来研究当 $g: Y \longrightarrow T$ 为严格半稳定的情形，或引理 7.1.5 中的情形 (iii) 与 (iv)。

定理 7.3.1（型 I_R^k）。在引理 *7.1.5*（*iii*）中，${}_{\frac{1}{m}}X_s$ 同构于定理 5.1.1$_1$ 中的型 *I*（$k = R = 1$）半稳定纤维，或是由 $\mathbb{P}^1$-丛构成的一个环：$E_i \longrightarrow A$，它有两个截面 0_i 和 ∞_i，其中 $i = 1, \cdots, R\ (\geq 2)$，它们依次通过 $0_{i+1} = \infty_i$识别。此外，以下结论成立。

（1）$k \mid m$ 和 $k \mid R$。令 $m = kl$ 和 $R = kr$ 分别表示正整数 l 和 r。（2）f 的 *t*- 自同构概形 P 为型 I_r。（3）存在一个自由 $\mu_k = \langle\varphi\rangle$ 等变的 $\mathbb{P}^1$-丛 $p: F \longrightarrow A_s$，使得 $p_i: E_i \longrightarrow A$ 同构于其在自同构$\zeta^i \circ \varphi$下的自由商，其中 ζ 是 F 上的一个自同构，它在 p 的每个纤维上都通过乘以一个本原 k次单位根作用。（4）p_i 和 p_j 同构（保持 0 和 ∞）当且仅当 $i \equiv j$ 模 k。此外，对于一个阶为 k的挠点 $a \in A_s$，有 $A = A_s/a$。

定理 7.3.2. 引理 *7.1.5(iv)* 中，以下结论成立。

(1) $2 \mid m \mid 2R$。令 $m = 2k$ 和 $R = kr$ 为正整数 k 和 r。*(2)* f 的 *t*-自同构概形 P 具有 I_r^*、$I_r^*/2$ 或 $I_r^*/4$ 型。*(3)* ${}_{\frac{1}{m}}X_s$ 同构于 $(C \times A_s)/(\langle\tilde{\varphi}\rangle \times G)$，其中 C 是$\bar{I}_{2kr}$ 型 *Kodaira* 奇异曲线，且 $\tilde{\varphi}$和 G 如下所示之一。*(I_R^+)* G 是 P 的阿尔巴内塞稳定子，$\tilde{\varphi}$ 是一个阶为 $2k$ 的自同构（使用命题 *6.2.1(2)*中的记号）。这里，$\zeta \in \mathbb{G}_m$ 是一个本原 $2k$次单位根，$a \in A_s$ 是一个阶为 $2k$的挠点。*($\bar{I}_R$)* $G = 0$或 $\mathbb{Z}/2$，且 $\tilde{\varphi}$是一个阶为 $4k$ 的自同构，这里 $\tilde{\varphi}(i, z, y) = (-i, \frac{\varepsilon}{z}, y + a)$ *for* $(i, z) \in C$，$y \in A_s$。$\varepsilon \in \mathbb{G}_m$ 是常数，ζ 是一个本原 $2k$次单位根，且 $a \in A_s$ 的阶为 $4k$。

$$\tilde{\varphi}(i, z, y) = (1 - i, \frac{\varepsilon\zeta^i}{z}, y + a) \qquad for \quad (i, z) \in C, \quad y \in A_s.$$

定义 7.3.3. 定理 *Kodaira* 型定理 7.3.1 为 $m \cdot \mathrm{I}_R^k$。定理 7.3.2(a) 的 Kodaira 型为 $m \cdot \mathrm{I}_R^+/|G|$，其中 $|G| = 1$、2或4 是阿尔巴内塞稳定子 G的阶。定理 7.3.2(b) 的 Kodaira 型为 $m \cdot \mathrm{I}_R^-/|G|$，当 $|G| = 1$ 或 2时。

注 7.3.4. 在定理 7.3.1(4) 中，即使 $i \not\equiv j \bmod k$，p_i 和 p_j 也可能同构，但此同构不能保持 0 和 ∞。在定理 7.3.2 中，商 $(C \times A_s)/(\langle\tilde{\varphi}^2\rangle \times G)$ 的型为 I_R^k，当 $R = kr$ 或 $2kr$ 时。因此，${}_{\frac{1}{m}}X_s$ 是某个（非常特殊的）I_R^k 型纤维的 $\overline{\mu_2} = \langle\varphi\rangle$-商。这就是定理 1.0.1 中采用的描述。

本小节的其余部分将证明这两个定理。

在 (iii) 和 (iv) 两种情形下，g 是严格半稳定的，Q_t° 是阿贝尔簇 B_t 的 $\mathbb{G}_m$-扩张，其维数为 $n - 1$。特别地，中心纤维 Y_t 是约化的，因此其商 ${}_{\frac{1}{m}}X_s$ 也是约化的。注意，$Y_t = \sum_i F_i$ 是$\mathbb{P}^1$-丛在 B_t上的环，因此我们可以考虑这个环的定向，即 $\mathbb{P}^1$-纤维环的一个优选方向。

引理 7.3.5. 以下性质刻画了这两种情形。

(iii) $\psi(z) = z$ 对于 $z \in \mathbb{G}_m \subset Q_t$，且 φ 保持 Y_t的定向。(iv) $\psi(z) = 1/z$ 对于 $z \in \mathbb{G}_m \subset Q_t$，且 φ 反转 Y_t的定向。

证明。惯性群的自同构 $\psi: Q_t^\circ \longrightarrow Q_t^\circ$ 诱导出线性部分上的自同构 $\psi: \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m$，其或者为 $\psi(z) = z$，或者为 $1/z$。根据定理 6.1.4，情形（iii）是 $\psi(z) = z$，而情形 (iv) 是 $\psi(z) = 1/z$。由命题 6.1.6，回忆等式 $\varphi(z \cdot y) = \psi(z) \cdot \varphi(y)$ 对于 $z \in \mathbb{G}_m$和 $y \in Y_t$成立。设 φ将一个分支F_i 映到 F_j。如果 $\psi(z) = z$，则有 $\lim_{z\to 0}(z \cdot y) = 0_i$ 以及 $\lim_{z\to 0} \varphi(z \cdot y) = \lim_{z\to 0} z \cdot \varphi(y) = 0_j$。因此，$\varphi$ 保持环的定向。同样地，如果 $\psi(z) = 1/z$，则 φ 反转定向。□

这一观察已将情形 (iv) 与情形（iii）联系起来。

引理 7.3.6。在情形 *(iv)* 中，m 为偶数，并且(7.1.1) 具有如下分解

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X \\ \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{\mu_{m/2}} & U & \xrightarrow{\mu_2} & S \end{array}$$

具有以下性质：

(1) 第一行中的两条水平箭头是 *étale* 的。(2) $h: Z \longrightarrow U$ 是具有重数 δ 的极小 $m/2$-正则阿贝尔纤维化。(3) 左侧交换图属于引理 *7.1.5*的情形（*iii*）。

证明。在情形 (iv) 中，ord ψ为偶数，因此 m为偶数。商 $Z = Y/\varphi^2$构造出该交换图。中间态射 h 是极小的，因为 Z 是正则的。为证明左侧交换图属于情形（iii），注意到其伽罗瓦群为 $\mu_{m/2} = \langle\varphi^2\rangle$，且对于 $z \in \mathbb{G}_m \subset Q_t$，$\psi^2(z) = z$。□

7.3.1. 情形 (iii)。我们先研究情形（iii）。由引理 7.1.5(iii)，$P_s^\circ = Q_t^\circ$因此为简化记号，我们记作 $B_t = A_s$。假设 P_s 的型为 I_r，其中 r 是正整数；于是 Q_t 的型为 I_{mr}（因为余核 $p^* = \mathbb{Z}/m$）。中心纤维 $Y_t = \sum_{i=1}^{mr} F_i$ 的 Kodaira 型也是 I_{mr}。由引理 7.3.5，φ 保持 Y_t 的定向，因此存在正整数 $R \mid mr$（记作 $mr = lR$），使得对每个 $1 \le i \le mr = lR$，都有 $\varphi(F_i) = F_{i+R}$。特别地，φ^l 保持每个分支 F_i，且 $m = \mathrm{ord}\,\varphi$ 可被 l整除。因此，我们同样可以令 $m = kl$，其中 k 是正整数，从而得到 $R = kr$。总之，我们有

$$Y_t = \sum_{j=1}^{klr} F_j, \quad \varphi(F_j) = F_{j+kr}, \quad R = kr, \quad \text{and} \quad m = kl. \tag{7.3.7}$$

引理 7.3.8. 在情形（*iii*）中，(7.1.1) 容许一个分解

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longrightarrow & X^+ & \longrightarrow & X \\ \downarrow g & & \downarrow f^+ & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{\mu_k} & S^+ & \xrightarrow{\mu_l} & S \end{array}$$

并具有下列性质：

(1) 第一行中的两个水平箭头都是 *étale* 的。(2) $f^+: X^+ \longrightarrow S^+$ 是具有重数k的极小 δ-正则阿贝尔纤维化。此外，中心纤维 $\frac{1}{k}X_s^+ = \sum_{j=1}^{klr} E_j^+$ 满足以下条件。(a) 惯性群 $\mu_k = \langle\varphi^l\rangle$对 Y_t 的作用保持每个分支 F_j不变。特别地，对于每个 i，E_j^+ 是 F_i 的自由 μ_k-商。

(b)惯性群 $\mu_l = \langle\varphi\rangle$对 X_s^+ 的作用诱导出一个同构 φ ：$E_j^+ \longrightarrow E_{j+kr}^+$ ，对每个 i成立。

证明。 新的纤维化 f^+是通过商 $\mu_k = \langle\varphi^l\rangle\, X^+ = Y/\varphi^l$得到的。注意， φ^l 保持每个不可约分支 F_i。□

推论 7.3.9。 $\frac{1}{m}X_s = \sum_{i=1}^{kr} E_i$ 有 kr 个不可约分支。此外，对于 $j = 1$、$\cdots$、klr，有同构 $E_j^+ \cong E_{j \bmod kr}$。□

为简化数值计算，我们将用 X 替换 X^+ 并假设 $l = 1$ 在（7.3.7）中成立。也就是说，从现在起，我们假设 $l = 1$， $m = k$， $Y_t = \sum_{i=1}^{kr} F_i$，且惯性$\mu_k = \langle\varphi\rangle$-作用于 Y_t 保持每个 F_i，从而 $E_i = F_i/\varphi$。接下来需要描述惯性自同构 φ（以及 ψ）。取一个正规化

$$\tilde{Y}_t = \bigsqcup_{i=1}^{kr} \tilde{F}_i \qquad \text{for isomorphic copies of } \mathbb{P}^1\text{-bundles } \tilde{p}_i : \tilde{F}_i \longrightarrow B_t.$$

˜当 $r \geq 2$时，注意 $F_i = F_i$ 已经是光滑的。

˜**引理 7.3.10.** F_i 上的 $\langle\varphi\rangle$-作用经由 $\tilde{p}_i$下降为 B_t 上的一个作用。此外，该作用是由阶为 k的挠点 $a \in A_s$ 所作的平移。

˜证明. 由于 F_i 上的 Q_t°-作用与 $\langle\varphi\rangle$-作用可交换，由阿尔巴尼斯态射的泛性质，它们下降为底 B_t 上可交换的作用。与每一个平移可交换的作用是一个平移，因此 A_s 上的 $\langle\varphi\rangle$-作用是由挠点 $a_i \in A_s$所作的平移。若对 $i < k$ 而言 φ^i 在 A_s上的作用为恒等，则它作用在 $\tilde{p}_i$ 的 $\mathbb{P}^1$ 纤维上，从而必然在 $\tilde{F}_i$上有一个不动点，矛盾。因此 a_i 具有阶 k。

为证明所有 a_i 都相同，注意两条截面 0_i 与 ∞_i （属于 $\tilde{p}_i$ ）被 φ保持（引理7.3.5）。由于 $\tilde{p}_i$ 是等变的， φ 在它们上的作用是由 a_i所作的平移。等同 $\infty_i = 0_{i+1}$ 表明 $a_i = a_{i+1}$。□

推论 7.3.11. (1) $\langle\varphi\rangle$ 对 奇点集$(Y_t) = \bigsqcup_{i=1}^{kr}(F_i \cap F_{i+1})$ 的作用在每个分支上都是平移 $a \in A_s$ 。(2) $\tilde{E}_i \longrightarrow A_s/a$ 是 $\tilde{F}_i \longrightarrow A_s$ 的自由 φ-商。特别地，它是一个 $\mathbb{P}^1$-丛。□

引理 7.3.12. 存在一个本原 k 次单位根 $\zeta \in \mathbb{G}_m \subset Q_t^\circ$ ，使得惯性群 $\langle\psi\rangle$ 在 Q_t 上的作用为

$$\psi(f_i) = \zeta^i \cdot f_i \qquad for \quad f_i \in Q_t \ with\ \pi_0(f_i) = i \ \in \ \pi_0(Q_t) = \mathbb{Z}/kr.$$

证明。由引理 A.1.2，我们可将 $Q_t = \mathbb{Z}/kr \times Q_t^\circ$ 写成.....，并将其元素写成 (i, g) $\in \mathbb{Z}/kr \times Q_t^\circ$。回忆等式 $Q_t^\psi = P_s$ 和 $\pi_0(P_s) = k \cdot \mathbb{Z}/kr \subset \mathbb{Z}/kr = \pi_0(Q_t)$，因此当 $k \mid i$ 时，我们已有 $\psi(i, g) = (i, g)$。回忆命题 6.1.6 中的等式 $\varphi((i, g) \cdot y) = \psi(i, g) \cdot \varphi(y)$。由于根据假设 φ 保持所有 F_i，且 $\pi_0(Q_t) = \mathbb{Z}/kr$ 循环置换分支 F_i（推论 5.3.9），这表明 ψ 具有如下形式

$$\psi(i, g) = (i, \psi_i(g)) \qquad \text{for} \quad \psi_i : Q_t^\circ \longrightarrow Q_t^\circ.$$

由于 ψ在 Q_t°上作用平凡，我们有 $\psi(i, g) = \psi(0, g) \cdot \psi(i, 1) = (0, g) \cdot (i, \psi_i(1)) = (i, \psi_i(1) \cdot g)$。这表明 $\psi_i(g) = \zeta_i \cdot g$对于 $\zeta_i = \psi_i(1) \in Q_t^\circ$成立。等式 $\psi(i, g^i) = \psi(1, g)^i$ 表明对于单个 $\zeta \in Q_t^\circ$， $\zeta_i = \zeta^i$ 成立。此外， ζ是 k-挠元，因为$\psi^k = \mathrm{id}$。再者， Q_t^ψ 恰好是 P_s，所以这意味着 ζ 的阶恰好为 k。

还需证明 $\zeta \in Q_t^\circ$ 包含于 $\mathbb{G}_m$。取一点 $y \in F_1 \cap F_{kr}$，一条经过 y的唯一有理曲线 $R \subset F_1$，以及一个唯一的点 $y' = R \cap F_2 \subset F_1 \cap F_2$。回忆引理 5.1.7 指出 Q_t 在 奇点集(Y_t) 上通过循环置换分支而传递作用（稳定子为 $\mathbb{G}_m$）。因此存在 $f_1 \in Q_t$ 使得 $\pi_0(f_1) = 1$且 $y' = f_1 \cdot y$。

现在应用 φ 到 y、$y' \in R \subset F_1$，得到有理曲线 $\varphi(y)$ $\varphi(y') \in \varphi(R) \subset F_1$上的两个点。由推论 7.3.11，若固定任意一个 $f_0 \in Q_t^\circ$，使其在 $Q_t^\circ \longrightarrow A_s$下的像为 a，则 $\varphi(y) = f_0 \cdot y$ 且 $\varphi(y') = f_0 \cdot y'$。现在我们得到一列恒等式

$$\begin{aligned}\varphi(y') = \varphi(f_1 \cdot y) = \psi(f_1) \cdot \varphi(y) = (\zeta \cdot f_1) \cdot (f_0 \cdot y)\\ = \zeta \cdot (f_0 \cdot (f_1 \cdot y)) = \zeta \cdot (f_0 \cdot y') = \zeta \cdot \varphi(y').\end{aligned}$$

但是 $\varphi(y') \in F_1 \cap F_2$ 有一个稳定子 $\mathbb{G}_m$ 同样由引理 5.1.7可知。这意味着 $\zeta \in \mathbb{G}_m \subset Q_t^\circ$。□

˜ ˜（规范化的）不可约分支 $F = F_i \longrightarrow A_s$ 是 $\mathbb{G}_m$-主齐性空间 $Q_t^\circ \longrightarrow A_s$的紧化，或者等价地说，是一个具有两个截面 0 和 ∞的 $\mathbb{P}^1$-丛。˜因此，$F \setminus \infty \longrightarrow A_s$ 可视为带有零截面 0 的线丛。在˜ ˜这个意义下，我们称 $F = (F, 0, \infty) \longrightarrow A_s$ 为线丛。

˜ ˜**引理 7.3.13.** 存在一个线丛的同构 $f\colon F_i \longrightarrow F_j$（即˜ ˜$f(0_i) = 0_j$和 $f(\infty_i) = \infty_j$），使得 $\langle\varphi\rangle$在 F_i和 F_j上的作用满足

$$\varphi(f(y)) = \zeta^{j-i} \cdot f(\varphi(y)).$$

证明. 任取满足 $\pi_0(f) = j - i \in \pi_0(Q_t) = \mathbb{Z}/kr$的 $f = f_{j-i} \in Q_t$。于是它诱导出一个保定向同构 $f\colon F_i \longrightarrow F_j$。所要证明的是等式

$$\varphi(f \cdot y) = \psi(f) \cdot \varphi(y) = \zeta^{j-i} \cdot (f \cdot \varphi(y)).$$ □

˜ ˜ ˜ ˜**引理 7.3.14.** $E_i = F_i/\varphi$ 和 $E_j = F_j/\varphi$ 作为 $A = A_s/a$ 上的线丛同构，当且仅当 $i \equiv j$ 模 k。

˜ ˜证明. 为简便起见，记 $F = F_i$。引理7.3.10构造了一个交换图

$$\begin{array}{ccc}\tilde{F} & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{F}\\ \downarrow\tilde{p} & & \downarrow\tilde{p}\\ A_s & \xrightarrow{t_a} & A_s\end{array},$$

或者等价地，A_s 上的 $\mathbb{P}^1$-丛之间的一个同构 $\tilde{F} \longrightarrow t_a^*\tilde{F}$（满足余循环条件）。这样的同构保留 0 和 ∞，因此是˜线丛的同构。也就是说，$\langle\varphi\rangle$在 F 上的作用定义了 $F \setminus \infty \longrightarrow A_s$上的 $\mathbb{Z}/m$-等变线丛˜结构。

考虑一个左正合列（例如 [Dol03，第 7 节。1]）

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/k, \mathbb{G}_m) = \mu_k \longrightarrow \mathrm{Pic}^{\mathbb{Z}/k}(A_s) \longrightarrow \mathrm{Pic}(A_s).$$

对于每个 i，$\mathrm{Pic}^{\mathbb{Z}/k}(A_s)$ 中的数据 $(\tilde{F}_i, \varphi)$ 在 $\mathrm{Pic}(A_s)$ 中有相同的像。前面的引理指出，$(\tilde{F}_i, \varphi)$ 和 $(\tilde{F}_j, \varphi)$ 相差 $\zeta^{j-i} \in \mu_k$。这表明，这些$\mathbb{Z}/k$-等变结构同构，当且仅当 $i \equiv j \bmod k$。换言之，商 $E_i = F_i/\varphi$ 和 $E_j = F_j/\varphi$ 作为 $A = A_s/a$ 上的线丛同构，当且仅当 $i \equiv j \bmod k$。□

定理 7.3.1的证明。 我们已经看到，一般而言， $\frac{1}{m}X_s = \sum_{i=1}^{kr} E_i$ 由$R = kr$ 个不可约分支组成。由引理 A.3.5–A.3.6，我们可以将 $\frac{1}{m}X_s$ 视为通过 $\tilde{E}_i \longrightarrow A$ 对这些对象进行的识别。 $\infty_i = 0_{i+r}$注意， $\tilde{E}_i \longrightarrow A$与 $\tilde{E}_i^+ \longrightarrow A$同构，其中 $i = 1, \cdots, kr$，且 $\tilde{E}_i^+ \longrightarrow A$是一个自由的 μ_k-商，由$F_i \longrightarrow A_s$ 在惯性作用 φ下得到，其环相差 k。 □

7.3.2. 情形 *(iv)*. 现在研究情形 (iv)。在引理 7.3.6中，我们已将原交换图 (7.1.1) 分解为次数为 $T \longrightarrow U \longrightarrow S$ 和 $m/2$的 2。由于$h : Z \longrightarrow U$ 是类半稳定多重纤维化，其型为 $\frac{m}{2} \cdot \mathrm{I}_R^k$，当 $k \mid \frac{m}{2}$ 且$k \mid R$ 时，由定理 7.3.1可知。令 $\frac{m}{2} = kl$, $g : Y \longrightarrow T$ 是型为 I_{Rl}的半稳定纤维化。事实上，在此情形下， l 是平凡的。

引理 7.3.15。 $l = 1$，或等价地， $m = 2k$。

证明。考虑 $\mu_m = \mu_{2kl} = \langle\varphi\rangle$ 在 Y 上的作用。根据引理 7.3.5， φ 保持环 $Y_t = \sum_{i=1}^{Rl} F_i$ 的定向。对 F_i 重新编号后，不妨设$\varphi(F_i) = F_{-i}$ 或 F_{1-i}。注意，在这两种情形下， φ^2 都保持所有的 F_i。但回顾 (7.3.7)， $\mu_{m/2} = \mu_{kl} = \langle\varphi^2\rangle$ 在 Y_t 上的作用具有形式 $\varphi^2(F_i) = F_{i+R}$。由此可知 $l = 1$。 □

因此，我们得到一个分解

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X \\ \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{\mu_k} & U & \xrightarrow{\mu_2} & S \end{array},$$

其中 g 是 I_R 型半稳定的，而 h 是 $k \cdot \mathrm{I}_R^k$型的类半稳定多重对象。

引理 7.3.16。 $P \longrightarrow S$ 具有 I_r^*、$\mathrm{I}_r^*/2$ 或 $\mathrm{I}_r^*/4$ 型，其中 r为正整数。

证明。 t-自同构概形 P 是不稳定的，而 2 态射$U \longrightarrow S$ 将其约化为 h的半稳定 t-自同构概形。将命题 6.2.1–6.2.2应用于极小紧化 $f^\sharp : X^\sharp \longrightarrow S$的 P。 □

根据定理 5.2.1 和 5.3.2， P 可解缠为一个 I_r^* 型群

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow \tilde{P} \longrightarrow P \longrightarrow 0,$$

其中 $G \subset \pi_0(\tilde{P}_s) = (\mathbb{Z}/2)^{\times 2}$ 对于偶数 r，而 $\mathbb{Z}/4$ 对于奇数 r。类似地，我们尝试将~解缠 X 为一个 G覆盖 $\tilde{X} \longrightarrow X$，如命题 4.2.4 或引理 7.2.5中所述。但这并非总是可能的，因此我们需要仔细研究这一问题。

令 G 为 P的阿尔巴内塞稳定子。类似于（7.2.4）的过程构造出一个~G覆盖 $\tilde{Y} \longrightarrow Y$，其中心纤维为 $Y_t = C \times A_s$，对应于一个 C 型为I_{2kr}的 Kodaira 奇异曲线：

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{Y} & & & & \\ \downarrow & & & & \\ Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X \end{array}. \tag{7.3.17}$$

~~我们想要检验 $\tilde{Y} \longrightarrow Y$ 是否下降到 $X \longrightarrow X$。为此，回忆同态 $p^* : P_s^\circ = \mathbb{G}_a \times A_s \twoheadrightarrow A_s \subset Q_t^\circ$产生一个$(n-1)$维阿贝尔子簇$Q_t^\circ$。这意味着 Y_t 根据推论$(n-1)$，有一个4.1.8：

$$\mathrm{alb} : Y_t \longrightarrow \mathrm{Alb}_t = \mathrm{Alb}_{Y_t}.$$

引理 7.3.18。 阿尔巴尼斯态射 $\frac{1}{m}X_s \longrightarrow \mathrm{Alb}_s$ 是阿尔巴尼斯态射 $Y_t \longrightarrow \mathrm{Alb}_t$ 的一个自由 φ 商。

证明。 与引理 7.3.10类似， $\langle\varphi\rangle$-作用下降为在阿尔巴内塞映射$_t$上的平移作用。设 φ^i 对 $i < m = 2k$ 的作用在 阿尔巴内塞映射$_t$上是平凡的。那么它在 C 的 $Y_t \longrightarrow$ 阿尔巴内塞映射$_t$纤维上作用。但在 $\mathbb{P}^1$的环上，任何反转定向的作用都有不动点，这与 $\langle\varphi\rangle$-作用在 Y_t 上是自由的这一事实矛盾。现在，自由商

$$\alpha : \tfrac{1}{2k}X_s = Y_t/\varphi \longrightarrow \mathrm{Alb}_t/\varphi$$

是一个 A_s-等变的 C-纤维丛。 阿尔巴内斯主齐性空间 $\frac{1}{2k}X_s$ 是阿尔巴内塞映射$_s$ (命题7.1.7)，因此 α 可经由 $\frac{1}{2k}X_s \longrightarrow$ 阿尔巴内塞映射$_s \longrightarrow$ 阿尔巴内塞映射$_t/\varphi$分解。后一个态射阿尔巴内塞映射$_s \longrightarrow$ 阿尔巴内塞映射$_t/\varphi$ 是阿贝尔挠子之间的同源，因而是有限的。但 α 本身已经具有连通纤维 C，因此 阿尔巴内塞映射$_s =$ 阿尔巴内塞映射$_t/\varphi$ ，且 α 是阿尔巴尼斯态射。 □

将命题 6.2.2(3) 与引理 7.3.18 结合起来，得到一个笛卡尔图

$$\begin{array}{ccccc} C \times A_s & \longrightarrow & Y_t & \longrightarrow & \frac{1}{m}X_s \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{alb}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{alb}} \\ A_s & \xrightarrow{G} & \mathrm{Alb}_t & \xrightarrow{\mu_{2k}} & \mathrm{Alb}_s \end{array}.$$

复合映射 $A_s \longrightarrow$Alb$_s$ 是阿贝尔挠子之间的一个同源，因此自动是伽罗瓦的。其伽罗瓦群 H 处于一个短正合列中

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow \mu_{2k} \longrightarrow 0. \tag{7.3.19}$$

下面的结果回答了 X 的 G-覆盖是否存在这一问题。

引理 7.3.20。 序列 (7.3.19)分裂，当且仅当存在一个伽罗瓦˜*étale*态射 $X \longrightarrow X$ 使 (7.3.17) 补成一个笛卡尔图

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{Y} & \longrightarrow & \tilde{Z} & \longrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X \end{array}.$$

˜在这种情况下， Y上的 $\mu_{2k} = \langle\varphi\rangle$-作用提升为 Y上的一个与 G交换的 $\mu_{2k} = \langle\tilde{\varphi}\rangle$-作用。

证明。 若 $H \cong G \times \mu_{2k}$，则先对 μ_{2k} 取商，得到一个阿贝尔挠子的笛卡尔图（其中 $a \in A_s$ 的阶为 $2k$ ）

$$\begin{array}{ccc} A_s & \longrightarrow & A_s/a \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ \mathrm{Alb}_t & \longrightarrow & \mathrm{Alb}_s \end{array}.$$

因此，我们可以对同源˜u ： $A_s/a \longrightarrow$ 阿尔巴内塞映射$_s$ 应用引理 7.1.8 (并结合引理 7.3.18)，并按所述构造 $X \longrightarrow X$ 。反过来，如果我们能补上˜（7.4.6）右上角的部分，那么惯性群 $\mu_{2k} = \langle\tilde{\varphi}\rangle$在 Y 上的作用满足$\mu_{2k} \cap G = 0$，并且是 φ的一个提升。也就是说，这会诱导出一个分裂$H \cong G \times \mu_{2k}$。 □

引理 7.3.21。 假设序列 (7.3.19) 分裂。那么，对于型 $\mu_{2k} = \langle\tilde{\varphi}\rangle$在 $Y_t = C \times A_s$ 上的作用，若I_{2kr} *Kodaira* 曲线 C 是

$$\tilde{\varphi}(i, z, y) = (-i, \tfrac{\zeta^i}{z}, y + a) \qquad for \quad (i, z) \in C, \quad y \in A_s,$$

其中 ζ 是一个本原 $2k$ 次单位根， $a \in A_s$ 是一个阶为 $2k$ 的挠点。

证明。由引理A.1.6，$\tilde{\varphi}$ 在 $Y_t = C \times A_s$ 上（自由地）对角作用。因此，它在 A_s 上通过挠点 $a \in A_s$ 的平移 $2k$作用，且在曲线 C 上通过反转定向作用。

收缩 $\mathbb{G}_m$ 挠点 延拓为 A_s 的阶为 $2k$ 的挠 截面 $a\colon T \longrightarrow Q$。这在 Y 上定义了一个自由的 μ_{2k} 作用，因此其商 $\bar{g}\colon Y = Y/a \longrightarrow S$ 是一个带有 $Y_t = C \times A_s/a$ 的极小阿贝尔纤维化。根据命题 6.1.6，Y 上的 $\langle a\rangle$ 作用与 $\langle\bar{\varphi}\rangle$ 作用可交换，因此 $\tilde{\varphi}$ 下降为 Y 上的一个 $\mu_{2k} = \langle\bar{\varphi}\rangle$ 作用。现在，命题 6.2.1（更确切地说，推论 6.2.13）确定了 $\bar{\varphi}(i, z, \bar{y}) = (-i, \zeta^i z^{-1}, \bar{y})$，因此自由作用 $\tilde{\varphi}$ 必定如所述。□

引理 7.3.22. 假设序列 (7.3.19) 不分裂。则 $H \cong \mathbb{Z}/4k$ 或$\mathbb{Z}/4k \times \mathbb{Z}/2$。此外，$\tilde{\varphi}$ 作为 $\mathbb{Z}/4k$ 的生成元具有如下形式

$$\tilde{\varphi}(i, z, y) = (1 - i, \tfrac{\varepsilon\zeta^i}{z}, y + a) \qquad for \quad (i, z) \in C, \quad y \in A_s,$$

其中 $\varepsilon \in \mathbb{G}_m$ 是一个常数，$\zeta \in \mathbb{G}_m$ 是一个本原 $2k$次单位根，且 $a \in A_s$是一个阶为 $4k$ 的挠点。

证明。我们首先说明 H 与所求的群同构。若 $G = \mathbb{Z}/2$，则 $H = \mathbb{Z}/4k$ 是 μ_{2k}的唯一非平凡 $\mathbb{Z}/2$-扩张。对于其余情形，我们需要按 r的奇偶性分情况讨论。当 r 为奇数时，我们可以有$G = \mathbb{Z}/4$。取 $\tilde{\varphi} \in H$ 为 $\varphi \in \mu_{2k}$的任意提升。则 $\tilde{\varphi}^{2k}$ 是 G 中的一个非平凡元素，因为该序列不分裂。由于 $\tilde{\varphi}$ 通过反转定向作用于I_{2kr} 型曲线 $C = \sum_{i=1}^{2kr} C_i$，故 $\tilde{\varphi}(C_i) = C_{-i}$ 或 C_{1-i}，从而 φ^{2k} 总是保持每一个 C_i。因此，由命题 6.2.1–6.2.2 的描述，$\tilde{\varphi}^{2k} \in G = \mathbb{Z}/4$ 必为 $2 \in \mathbb{Z}/4$。这意味着 $\tilde{\varphi}$ 的阶为 $4k$，从而如所断言有 $H \cong \mathbb{Z}/4k \times \mathbb{Z}/2$。类似地，当 r 为偶数时，$G = (\mathbb{Z}/2)^{\times 2}$ 包含唯一的非平凡元素 g，它保持每一个 F_i。这表明 $\tilde{\varphi}^{2k} = g$，并且再次得到 $H \cong \mathbb{Z}/4k \times \mathbb{Z}/2$。

现在来确定 $\tilde{\varphi}$ of $\mathbb{Z}/4k$ 的生成元。对于上述任一情况，$\tilde{\varphi}$ is $\varphi \in \mu_{2k}$ 的提升，使得 $\tilde{\varphi}^{2k}$ 是一个 t-自同构，其作用为

$$\tilde{\varphi}^{2k}(i, z, y) = (i, -z, y + \sigma)$$

对一个非零 2-挠点 $\sigma \in A_s$（命题 6.2.2(3)）。不失一般性，设 $G = \mathbb{Z}/2$。自同构 $\tilde{\varphi}$ 在 $C \times A_s$ 上如常一样是自由且对角线的，因此 $\tilde{\varphi}$ 必须在 A_s 上作用为平移，平移量是一个阶为 $4k$ 的挠点 $a \in A_s$（其中 $\sigma = 2ka$）。它在 C 上的作用为 $\tilde{\varphi}(C_i) = C_{-i}$，或如上所述为 C_{1-i}。在前一种情况下，可以如常证明 $\tilde{\varphi}(i, z, y) = (-i, \zeta^i z^{-1}, y + a)$ 或 $(-i, -\zeta^i z^{-1}, y + a + \tau)$。然而，这样的 $\tilde{\varphi}$ 绝不可能具有如上所述的 $2k$ 次幂 $\tilde{\varphi}^{2k}$。因此，$\tilde{\varphi}$ 将 C_i 送到 C_{1-i}。

我们已经在推论6.2.13中看到 $\tilde{\varphi}(i, z, y)$。现在命题 6.1.6 在 Y_t上成立，因此在其双覆盖 Y_t 上，我们至少有

$$\tilde{\varphi}(i, z, y) = (-i, \zeta^i z^{-1}, y) \cdot \tilde{\varphi}(0, 1, 0) \quad \text{or} \quad (-i, -\zeta^i z^{-1}, y + \tau) \cdot \tilde{\varphi}(0, 1, 0).$$

但后一种情况不可能，因为我们已经假设 $\tilde{\varphi}$ 作用于 A_s 的方式是平移 a（而不是 $a + \tau$）。写作 $\tilde{\varphi}(0, 1, 0) = (1, \varepsilon, a)$，由此便得到了对 $\tilde{\varphi}$ 所要求的描述。□

证明定理 7.3.2。我们在论证过程中已经证明了 (1) 和 (2)。当 (7.3.19) 分裂时，引理 7.3.20–7.3.21 适用，且 (3a) 由该同构推出

$$\tfrac{1}{2k}X_s = \tfrac{1}{2k}\tilde{X}_s/G = (C \times A_s)/(\langle\tilde{\varphi}\rangle \times G).$$

X的型	C	α	β	$\langle\tilde{\varphi}\rangle$	G	m重数	P的型
I_0^*-a	I_0^*	交换 $E_{1\ ,2}$	-	μ_m	0	模 4 同余于 2	III 或 III*
I_0^*-a/2	I_0^*	交换 $E_{1\ ,2}$	交换 $E_{3\ ,4}$	μ_m	$\mathbb{Z}/2$	模 4 同余于 2	III/2 或 III*/2
I_0^*-b	I_0^*	循环 $E_{1..4}$	-	μ_{2m}	0	模 4 同余于 2	III/2 或 III*/2
I_0^*-c	I_0^*	循环 $E_{1..3}$	-	μ_m	0	模 6 的 3	II 或 II*
IV-a	IV	交换 $E_{1\ ,2}$	-	μ_m	0	± 2 模 6	II 或 II*
IV*-a	IV*	交换 $F_{1\ ,2}$	-	μ_m	0	± 2 模 6	II 或 II*

表 7. 其他类不稳定多重纤维（为简便起见，型中省略重数m ）。

即使当 (7.3.19) 不分裂时，我们仍有同构 $\frac{1}{2k}X_s = (C\times A_s)/H$，且引理7.3.22即得结论。□

7.4. **基变换到不稳定纤维化**。 最后，我们考虑以下情形：$g:\ Y \longrightarrow T$ 是不稳定的，这是引理中最后一个尚未处理的情形 7.1.5(v)。

定理 7.4.1. 在引理 *7.1.5(v)* 中，$\frac{1}{m}X_s$ 同构于定理 *5.2.1* 中的任一不稳定纤维，但以下几种除外：I_r^*、$\mathrm{I}_r^*/2$和$\mathrm{I}_r^*/4$（当 $r \geq 1$时）；或者同构于商 $(C\times A_s)/(\langle\tilde{\varphi}\rangle\times G)$，其中有两个可交换的自由作用，分别由 $\tilde{\varphi}$ 和 G给出，如下所示。

(I_R^*) $C = E_1 + E_2 + 2(\sum_{j=0}^{mr} F_j) + E_3 + E_4$ 是 $R = mr$ 的 I 型$_R^*$ *Kodaira* 奇异曲线，群 $G = 0$、$\mathbb{Z}/2$、$\mathbb{Z}/4$ 或 $(\mathbb{Z}/2)^{\times 2}$ 在 $C\times A_s$ 上作为阿尔巴内塞稳定子作用，而 $\langle\tilde{\varphi}\rangle = \mu_m$ 在 $E_i\times A_s$ 和 $F_j\times A_s$ 上作为

$\tilde{\varphi}(z_i, y) = (z_i, y+a)$ $\tilde{\varphi}(z_j, y) = (\zeta^j z_j, y+a)$ 对于 $(z_i, y) \in E_i\times A_s$，$(z_j, y) \in F_j\times A_s$.这里，$\zeta\in\mathbb{G}_m$ 是一个本原 m 次单位根，且 $a\in A_s$ 的阶为 m。

- $\langle\tilde{\varphi}\rangle = \mu_m$ 或 μ_{2m}，以及 $G = \langle g\rangle = 0$ 或 $\mathbb{Z}/2$。它们在 $C\times A_s$ 上自由作用，具体为 $\tilde{\varphi}(x, y) = (\alpha(x)\ y + a)$ $g(x, y) = (\beta(x)\ y + b)$，对于 $(x, y) \in C\times A_s$，其中 a、$b\in A_s$ 是挠点。(C, α, β) 的所有可能性均列于表 7 中，其中我们分别用 $C = \sum_{i=1}^4 E_i + 2F$ 表示 I 型$_0^*$，用 $C = \sum_{i=1}^3 E_i$ 表示 IV 型，用 $C = \sum_{i=1}^3 (E_i + 2F_i) + 3H$ 表示 IV^* 型。

定义 7.4.2。 定理*Kodaira* 型 定理 7.4.1 中的 Kodaira 型要么是不稳定类型，要么是表7中的附加类型，且两者都乘以 m。

注 7.4.3。 表7中的附加可能性最早由 Matsushita 在辛四维流形上的拉格朗日纤维化背景下，采用不同方法发现，见 [Mat01，表 4] 。在我们的描述中，Matsushita 表中的某些项被分成了两类。例如，类型 $\mathrm{I}_0^*/4$ 和 I_0^*-a/2 都对应于 Matsushita 的类型 I_0^*-4。

附加类型以定理中曲线 C 的类型命名（等价地说，按 Hwang–Oguiso 术语即特征循环命名）。但请注意，其 t-自同构群 P 的类型可能大不相同。

命题 7.4.4。 在定理 *7.4.1*中，重数 m应满足以下条件 - *lowing*。设 T 为 $\frac{1}{m}X_s$的型。—

(1) 如果 T 同源于II 或II*，则$\gcd(6, m) = 1$。(2) 如果 T 同源于III 或III*，则 $2\nmid m$。

(3) 如果 T 同源于IV 或IV*，则 $3 \nmid m$。(4) 如果 T 同源于I_0^*，则 $2 \nmid m$。(5) 如果 T 同源于I_R^* 对于 $R \geq 1$，则 $2 \nmid m$。(6) 对于附加型 T，见表7。

本小节余下部分将用于证明定理7.4.1 和命题7.4.4。根据引理 7.1.5(v)，我们有一个同构（为简便起见，记$B_t = A_s$ ）

$$Q_t^\circ = P_s^\circ = \mathbb{G}_a \times A_s.$$

两个阿尔巴内塞主齐性空间的维数均为 $n-1$ （命题 4.1.6 和 7.1.7）：

$$\mathrm{alb} : Y_t \longrightarrow \mathrm{Alb}_t = \mathrm{Alb}_{Y_t}, \qquad \mathrm{alb} : \tfrac{1}{m} X_s \longrightarrow \mathrm{Alb}_s .$$

前者是一个以 C为纤维的局部平凡丛；根据定理 5.2.1，该纤维是一条不稳定 Kodaira 奇异曲线。后者也是一个局部平凡的 C-纤维丛，依据如下引理：

引理 7.4.5。 阿尔巴尼斯态射 $\frac{1}{m} X_s \longrightarrow \mathrm{Alb}_s$ 是阿尔巴尼斯态射 $Y_t \longrightarrow \mathrm{Alb}_t$的一个自由 φ 商。

证明。 证明与引理 7.3.18相同，但改用以下事实：不稳定 Kodaira 奇异曲线 C 的每个自同构都有不动点。后一断言的证明需要逐一分类讨论。例如，型 II 曲线有一个奇点，因此其任意自同构都必须固定该点。 □

由于 $g : Y \longrightarrow T$ 是不稳定纤维化，因此它具有阿尔巴内塞稳定子 G 和命题 4.2.4 中的解缠 $Y \longrightarrow Y$，故 $\tilde{g} : Y \longrightarrow T$ 具有一个中心纤维$Y_t = C \times A_s$。将命题 6.2.1–6.2.2 应用于 Y，我们得到另一个次数为 $U \longrightarrow T$ $d = 2$ 的基变换，次数为 3 、 4 或 6 ，并有交换图

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{Z} & \dashrightarrow & \tilde{Y} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ Z & \dashrightarrow & Y & \xrightarrow{q} & X \\ \downarrow h & & \downarrow g & & \downarrow f \\ U & \xrightarrow{\mu_d} & T & \xrightarrow{\mu_m} & S \end{array} . \tag{7.4.6}$$

令 $R \longrightarrow U$ 和 $R \longrightarrow U$ 分别为 h 和 h 的 t-自同构概形。由于 $U \longrightarrow S$ 是伽罗瓦的，伽罗瓦群为 μ_{dm}，根据命题 6.1.1， R 具有一个 $\mu_{dm} = \langle\psi\rangle$-作用；根据命题 6.1.6， Z 具有一个 $\mu_{dm} = \langle\varphi\rangle$-作用。类似地，$R$ 具有一个 $\mu_d = \langle\psi^m\rangle$-作用，且 Z 具有一个 $\mu_d = \langle\tilde{\varphi}^m\rangle$-作用，它们分别是 ψ^m和 φ^m的提升。不过请注意， φ （分别地， ψ）可能无法提升到 Z （分别地， R），因为 (7.4.6) 右上角的对象缺失（与图 (7.3.17) 中情形 (iv) 的问题类似）。另请注意， G-作用与 $\langle\tilde{\varphi}^m\rangle$-作用在 Z 上交换，因为 (7.4.6) 的左上方方块是笛卡尔的。

命题 7.4.4(1–5) 的证明。设 h 光滑，或等价地， Y 具有 I_0^*、 $\cdots$ 或 IV*型。由命题 6.2.2(2)可知， ψ^m 通过 $\psi^m(x, y) = (\omega^{\pm 1} x, y)$ 作用于 $R_u = (E \times A_s)/G$，其中 $(x, y) \in R_u$。由定理 6.1.4， ψ 在 $\{0\} \times A_s \subset R_u$ 上的作用是平凡的，因此在它们的商E/G上诱导出一个非平凡作用。这个 ψ-作用于 E/G 上满足 $\psi^m(x) = \omega^{\pm 1} x$。例如，考虑 II 型和 II*型。在这种情况下，自同构 ψ 作用于 E/G（其 j-不变量为 0），使得其 m次幂 ψ^m 的作用是一个本原六次单位根。

当 m 可被 2 或 3 整除时这是不可能的，因此 m 必须与 6 互素，从而得出 (2)。同样的论证证明了 (1–4)，但有一个例外：当 C 具有 I_0^* 型且 $j(E) = 1728$时，我们有 $\mathrm{Aut}_0(E) = \mu_4$，而 ψ^m 通过−1作用于 E/G。因此，在此情况下，只有当 $j(E/G) = 1728$ 时，m 才可能为偶数，从而 $\mathrm{Aut}(E/G) = \mu_4$（即，当 $G = 0$、$E^{\sqrt{-1}}$ 或 $E[2]$时）。即便如此，m 仍不能被 4 整除。此情形将归入表 7 中的前三个附加情形。

当 h 为严格半稳定时，同样的思路也适用。在这种情况下，注意到 ψ固定 $A_s \subset R_u^\circ$，并在其商 $\mathbb{G}_m$ 上诱导出一个作用，使得 $\psi^m(z) = 1/z$。由于这是 $\mathbb{G}_m$的唯一非平凡群自同构，m 不可能为偶数。□

我们可以将上述证明更精确地重新表述如下：

推论 7.4.7。 d 与 m互素，但以下唯一情形除外：C 为 I_0^* 型$(E) = 1728$, $d = 2$, 且 $m \equiv 2$ 模 4。此外，在此情形下，τ：$G \hookrightarrow E$的像为0、$E^{\sqrt{-1}}$或 $E[2]$。□

下一步是仿照引理 7.3.20中的解缠过程。取引理 4.2.1和引理 7.4.5 中的交换图，以形成一个笛卡尔图

$$\begin{array}{ccccc} C \times A_s & \longrightarrow & Y_t & \xrightarrow{q} & \frac{1}{m}X_s \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_s & \xrightarrow{G} & \mathrm{Alb}_t & \xrightarrow{\mu_m} & \mathrm{Alb}_s \end{array}.$$

底行 $A_s \longrightarrow$阿尔巴内塞映射$_s$ 的伽罗瓦群为 H，并有一个短正合列

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow \mu_m \longrightarrow 0. \tag{7.4.8}$$

引理 7.4.9。 (1) 序列 (7.4.8) 分裂，当且仅当存在一个伽罗瓦˜*étale* 态射 $X \longrightarrow X$，其伽罗瓦群为 G，使得在 (7.4.6) 的右上角补入该态射后构成一个笛卡尔图

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{Z} & \dashrightarrow & \tilde{Y} & \longrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z & \dashrightarrow & Y & \xrightarrow{q} & X \end{array}.$$

在此情形下，Z 上的 $\mu_{dm} = \langle\varphi\rangle$-作用（分别地，$R$上的 $\langle\psi\rangle$-作用）提升为 Z 上的 ˜$\mu_{dm} = \langle\tilde{\varphi}\rangle$-作用（分别地，$R$上的 $\langle\psi\rangle$-作用），且与 G交换。

(2) 若 d 和 m 互素（见推论 7.4.7），则序列 (7.4.8)有唯一的分裂。

˜证明。（1）与引理 7.3.20 相同。（2）回顾包含关系 $G \subset \pi_0(Q_t)$。根据定理 5.3.2 和命题 6.2.1，在每一种不稳定 Kodaira 型中，$|\pi_0(Q_t)|$ 的素因子总是被 d 的素因子支配。因此，$\gcd(d, m) = 1$ 蕴含 $\gcd(|G|, m) = 1$，由此得到唯一分裂 $H = G \times \mu_m$。□

引理 7.4.10–7.4.14 将研究 H 分裂的情形。引理 7.4.15–7.4.17将研究 H 不分裂的情形。

引理 7.4.10。 若序列 (7.4.8) 分裂，则命题 *4.2.4(2)* 成立。也就是说，存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow \tilde{P} \longrightarrow P \longrightarrow 0 \quad \textit{such that} \quad G \cap \tilde{P}^\circ = 0.$$

˜特别地，$0 \longrightarrow G \longrightarrow \pi_0(P_s) \longrightarrow \pi_0(P_s) \longrightarrow 0$。

证明。左正合列 $0 \longrightarrow G \longrightarrow P_s \longrightarrow P_s$ 已在引理 7.4.9中得到证明（其中使用了引理7.1.8），因此只需证明其满射性。由于 $Q_t^\circ = Q_t^\circ = \mathbb{G}_a \times A_s$，我们有 $P_s^\circ = P_s^\circ = \mathbb{G}_a \times A_s$，从而 $G \cap P_s^\circ = 0$。因此，只需证明 $\pi_0(P_s) = \pi_0(P_s/G)$。考虑交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \tilde{P}_s & \longrightarrow & P_s \\ & & \| & & \downarrow p^* & & \downarrow p^* \\ 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \tilde{Q}_t & \longrightarrow & Q_t \longrightarrow 0 \end{array},$$

其中 p^* 是 t-自同构的拉回。它们的核为0 或 $\mathbb{G}_a$，其像是定理 6.1.4中的惯性不变子群。因此，我们有同构 $\pi_0(\tilde{P}_s) = \pi_0(\tilde{Q}_t^\psi)$ 以及 $\pi_0(P_s) = \pi_0(Q_t^\psi)$。注意，$\mu_m = \langle\tilde{\psi}\rangle$-作用与$G$-作用在 $\tilde{Q}_t$ 上彼此交换，因此 $G \subset \tilde{Q}_t^\psi$。这表明

$$\pi_0(P_s) = \pi_0(Q_t^\psi) = \pi_0((\tilde{Q}_t/G)^{\tilde{\psi}}) = \pi_0(\tilde{Q}_t^{\tilde{\psi}}/G) = \pi_0(\tilde{P}_s/G). \qquad \square$$

引理 7.4.11。假设序列 (7.4.8) 分裂，且 h 是光滑的。那么存在一个同构 $Z_u \cong E \times A_s$，使得惯性作用为

$\tilde{\varphi}(x, y) = (\omega^{\pm 1}x, y+a)$, $(\omega^{\pm 1/2}x, y+a)$ 或 $(\omega^{\pm 1/3}x, y+a)$，对于 $(x, y) \in E \times A_s$. 这里，ω 是一个本原 d 次单位根，如命题 *6.2.1* 中所述；$a \in A_s$ 是一个阶为 m 的挠点。后两种情况只会出现在以下四种情形中：

(1) Y 型为 I_0^*, $d = 2$, $j(E) = 1728$，且 $m \equiv 2$ 模 *4.* *(2)* Y 型为 I_0^*, $d = 2$, $j(E) = 0$，且 $m \equiv 3$ 模 *6.* *(3)* Y 型为 *IV* 型，$d = 3$, $j(E) = 0$，且 $m \equiv \pm 2$ 模 *6.* *(4)* Y 型为 *IV**, $d = 3$, $j(E) = 0$，且 $m \equiv \pm 2$ 模 *6*。

证明。首先证明 $\tilde{\varphi}$ 可以化为对角自同构。这与命题 6.2.1 的证明类似，但要注意，引理 6.2.5(2)在此情形下不成立（因此 $\tilde{\varphi}$ 不能与 ψ等同）。利用命题 6.2.1(1) 来固定一个同构 $R_u \cong E \times A_s$，其中 E 是椭圆曲线，使得 $\mu_d = \langle\psi^m\rangle$- 作用为 $\tilde{\psi}^m(x, y) = (\omega^{\pm 1}x, y)$，其中 $(x, y) \in E \times A_s$。引理 6.2.9证明的第一部分仍适用于 ψ，因此我们有

$$\tilde{\psi}(x, y) = (\alpha x, y + \xi(x)) \qquad \text{for} \quad \alpha \in \mathrm{Aut}_0(E), \quad \xi : E \longrightarrow A_s \text{ homomorphism.}$$

比较 $\tilde{\psi}^m$，我们得到 $\alpha^m = \omega^{\pm 1}$ 和 $\xi((1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-1})x) = 0$ 对每个$x \in E$都成立。后者意味着 $\xi \equiv 0$ 或 $1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-1} = 0$。

我们断言 $\alpha = \omega^{\pm 1}$、$\omega^{\pm 1/2}$或 $\omega^{\pm 1/3}$，以及 α^m 永远不等于 1。由此可得 $\xi \equiv 0$ 和，进而得到 $\psi(x, y) = (\alpha x, y)$。对于 II 型、II*、III、III*或 I_0^*，且 $j(E) \neq 0$、1728 时，我们有 $\mathrm{Aut}_0(E) = \mu_d$。于是 $\alpha^m = \omega^{\pm 1}$ 是 $\mathrm{Aut}_0(E)$ 的生成元，因此这迫使 $\alpha = \omega^{\pm 1}$（并且在推论 7.4.7 中 $\gcd(d, m) = 1$）。这也意味着 $\alpha^m = \omega^{\pm m} \neq 1$。对于剩下的 IV 型、IV*或 I_0^*，且 $j(E) = 0$ 或 1728 时，我们有 $\mathrm{Aut}_0(E) \supsetneq \mu_d$。例如，若 $\tilde{Y}$的型为 IV 或 IV*，则 $d = 3$ 且 $\mathrm{Aut}_0(E) = \mu_6$。因此 $\alpha^m = \omega^{\pm 1}$是一个本原三次单位根，从而得到 $3 \nmid m$。当 m 为奇数时，$\alpha = \omega^{\pm 1}$ 是唯一的可能。当 m 为偶数时，α 可以是 $\omega^{\pm 1}$ 或 $\omega^{\pm 1/2}$。无论如何，$\alpha^m \neq 1$，因为 $3 \nmid m$。对于 I_0^* 且 $j(E) = 0$ 或 1728 的情形，同样成立。

既然我们已知 $\psi(x, y) = (\alpha x, y)$ 对于所需的 α，命题 6.1.6 指出

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \tilde{\psi}(x, y) + \tilde{\varphi}(0, 0) = (\alpha x, y) + \tilde{\varphi}(0, 0).$$

由于 $\alpha \neq 1$，我们可以调整主齐性空间 $Z_u \cong E \times A_s$ 的原点，使得$\tilde{\varphi}(0,0) = (0,a)$，因此 $\tilde{\varphi}(x,y) = (\alpha x, y+a)$。由于命题 6.2.1(1)给出 $\tilde{\varphi}^m(x,y) = (\omega^{\pm 1}x, y)$，所以 $a \in A_s$ 是 m-挠元。其阶恰为 m，因为由诱导的 $\mu_m = \langle\tilde{\varphi}\rangle$作用在 $Y_t = C \times A_s$ 上是自由的。□

回想一下，Q 根据定义是解缠的。下面计算的 Kodaira P型。回顾定义6.2.3 中 Kodaira 型的共轭。

引理 7.4.12。沿用引理 *7.4.11*的记号和假设。在第一种情形下，$\tilde{\varphi}$ 的 *Kodaira* 型为 P 的型 Q或其共轭。在四种情形（*1–4*）中，有如下结论。

（1） Q 的型为I_0^*，且 P 的型为 III 或III*。（2） Q 的型为I_0^*，且 P 的型为II 或II*。（3） Q 的型为IV，且 P 的型为II或II*。（4） Q 的型为 IV*，且 P 的型为II 或II*。

证明。在引理7.4.11中，我们已推出

$$\tilde{\psi}^m(x,y) = (\omega^{\pm 1}x, y), \qquad \tilde{\psi}(x,y) = (\alpha x, y) \quad \text{for} \quad \alpha = \omega^{\pm 1}, \omega^{\pm 1/2}, \text{ or } \omega^{\pm 1/3}.$$

推论 6.2.4 计算 P 的型，其依据为 R的型。 □

引理 7.4.13. 假设序列 (7.4.8) 分裂，且 h 是严格半稳定的（从而 $d = 2$ 且 m 为奇数）。则

（1） P 对 $r \geq 1$具有I_r^* 型，Q 具有 I_{mr}^*型，且 R 具有I_{2mr}型。（2） $Z_u = D \times A_s$ 对于一条I_{2mr} 型曲线 D，惯性作用为

$$\tilde{\varphi}(i,z,y) = (-i, \tfrac{\zeta^i}{z}, y+a) \qquad for \quad (i,z) \in D,\ y \in A_s,$$

其中 $\zeta \in \mathbb{G}_m$ 为一个本原 $2m$次单位根，且 $a \in A_s$ 的阶为 m。

将此陈述与I_{kr}^+ 型（定理7.3.2中）相比较：它们的惯性作用的唯一差别是 $a \in A_s$的阶。

证明。（1）这仍然是推论 6.2.4，因为注意到中心纤维 $Z_u = D \times A_s$作为命题 6.2.1(2)所给的 Y 的基变换是平凡的。（2）由同一命题，$\tilde{\psi}(i,z,y) = (-i, \zeta^i z^{-1}, y)$，其中 $2m$ 是单位根 ζ 的阶。写作 $\varphi(0,1,0) = (i_0, \varepsilon, a)$，照例可得

$$\tilde{\varphi}(i,z,y) = \tilde{\psi}(i,z,y) \cdot \tilde{\varphi}(0,1,0) = (i_0 - i, \varepsilon\zeta^i z^{-1}, y+a) \quad \text{for} \quad (i,z,y) \in D \times A_s.$$

现在利用同一命题中的 $\tilde{\varphi}^m(i,\ z,\ y) = (-i,\ (-1)^i z^{-1},\ y)$（并且 m 是奇数），从而得出 $i_0 = 0$、$\varepsilon = 1$ 和 $ma = 0$。$\tilde{\varphi}$ 的自由性表明 $\operatorname{ord} a = m$。□

以下将引理7.4.11–7.4.13 下降到 Y。

推论 7.4.14. 假设 (7.4.8) 分裂。则诱导的 $\mu_m = \langle\tilde{\varphi}\rangle$-作用于$Y_t = C \times A_s$ 是对角线的，在 A_s 上的作用是平移一个阶为 $a \in A_s$ 的挠点 m，并在 C 上的作用如下。

(1) 当 h 光滑时，$\tilde{\varphi}$ 在 C 上的作用要么平凡，要么属于定理 *7.4.1* 和表 *7* 中的 I_0^*-*a*、I_0^*-*c*、*IV-a* 和 *IV**-*a* 这几种情形。*(2)* 假设 h 严格半稳定，并将 *Kodaira* 型 I_{mr}^* 曲线 C 记作$E_0 + E_1 + 2\big(\sum_{j=0}^{mr} F_j\big) + E_2 + E_3$。那么，$\tilde{\varphi}$ 在 E_i 上的作用平凡，在 F_j上的作用为 $\tilde{\varphi}(z) = (-\zeta)^j z$，其中 $z \in F_j = \mathbb{P}^1$。

证明。(1) 回忆命题 6.1.9，$Z/\tilde{\varphi}^m$ 和 Y 在 T上是 Q-等变双有理的。引理 7.4.11 对 Z_u上的惯性作用进行了分类。在非例外情形下，$\tilde{\varphi}(x,y) = (\omega^{\pm 1}x, y+a)$，而且 $\tilde{\varphi}^m(x,y) = (\omega^{\pm 1}x, y)$ 在 $\tilde{Z}_u = E \times A_s$上。因此，在 $Z_u/\tilde{\varphi}^m = C \times A_s$ 上诱导的 $\mu_m = \langle\tilde{\varphi}\rangle$ 是由 a 在 A_s上的平移，所以它在 $Y_t = C \times A_s$ 上的作用方式相同。

对于例外情形，我们只考虑型 I_0^*, $j(E) = 1728$，以及 $m \equiv 2 \bmod 4$（其他情形类似）。$E \longrightarrow F = E/\pm 1 = \mathbb{P}^1$的四个分歧点为 $E[2]$。作用 $\tilde{\varphi} = \pm\sqrt{-1}$ 在 E 上固定其中两个，并交换另外两个。因此，诱导的 $\tilde{\varphi}$在 F 上固定两个分支点，并交换另外两个。对于 $C = \sum_{i=1}^{4} E_i + 2F$，这四个分支点在 $\tilde{Y}_t = C \times A_s$ 中为 $E_i \cap F$。我们还注意到，$\tilde{\varphi}$ 以 $\pm\sqrt{-1}$作用于 $2F \subset C$ 的无穷小方向，因此，这唯一确定了自同构 $\tilde{\varphi}$在 C 上的共轭类。

(2) 引理 7.4.13 描述了 $D = \sum_{i=1}^{2mr} D_i$时 $\langle\tilde{\varphi}\rangle$对 $\tilde{Z}_u = D \times A_s$ 的作用。作用 $\tilde{\varphi}^m(i,z) = (-i, (-1)^i z^{-1})$ 诱导出同构 $\tilde{\varphi}^m : D_i \longrightarrow D_{-i}$。由于 $\tilde{\varphi}(i,z) = (-i, \zeta^i z^{-1}) = (0, (-\zeta)^i) \cdot (-i, (-1)^i z^{-1})$，我们得出，诱导的 $\mu_m = \langle\tilde{\varphi}\rangle$对 $F_i \subset D/\tilde{\varphi}^m$ 的作用，是将 $(-\zeta)^i$ 乘以 $i \neq 0, mr$。两个分支 D_{2mr} 和 D_{mr} 在 $\tilde{\varphi}$作用下保持不变，其商是链 F_0 和 F_{mr}的两个端点；这两个端点是 $\mathbb{P}^1$，其中 $\tilde{\varphi}$ 平凡作用。□

现在考虑 (7.4.8) 是非分裂的情形。由推论 7.4.7 和 7.4.9, Y 的型为 I_0^*, $j(E) = 1728$, $d = 2$，以及 $m \equiv 2$ 模 4。记

$$m = 2k \quad \text{for an odd integer } k.$$

回顾一下，H 是由 G扩张 $\mu_m = \mu_{2k}$ 得到的。由于 H 是非分裂的，我们有两种选择：$G = E^{\sqrt{-1}}$ 或 $E[2]$。无论哪种情况，G 都包含唯一一个被 $\sqrt{-1}$固定的元素$\tau \neq 0$。注意，对于任意 $g \in E[2] \setminus E^{\sqrt{-1}}$，都可以写成 $\tau = (1+\sqrt{-1})g$。阿尔巴内塞稳定子 $G \hookrightarrow E \times A_s$ 诱导出另一个包含关系 $\sigma : G \hookrightarrow A_s$。

引理 7.4.15. 假设 (7.4.8)不分裂。那么存在一个同构$Z_u \cong (E \times A_s)/G$，其惯性作用为

$$\varphi(x,y) = (\pm\sqrt{-1}x + g, y + a) \qquad for \quad (x,y) \in (E \times A_s)/G.$$

此处，$g \in E[2] \setminus E^{\sqrt{-1}}$ 和 $a \in A_s$ 是阶为 $4k$ 的挠点，使得 $2ka = \sigma((1+\sqrt{-1})g)$。

证明。我们先计算 R_u上的惯性自同构 ψ。回忆一下，$R_u = E \times A_s$ 且 $R_u = (E \times A_s)/G$，其中$G = E^{\sqrt{-1}}$ 或 $E[2]$，而 G-作用由结合 $G \subset E$ 和 σ 的平移给出：$G \hookrightarrow A_s$（命题 6.2.2(2)）。由于 ψ 固定 $\{0\} \times A_s \subset R_u$，商 $R_u/(\{0\} \times A_s) = E/G$上存在一个诱导的群自同构 ψ，其 j-不变量仍为 1728。因此，ψ 在E/G 上的作用是乘以 $\alpha = -1$ 或 $\pm\sqrt{-1}$。无论哪种情况，它都能以相同的乘法唯一提升到 $E \times \{0\} \subset R_u$。这表明 ψ 具有如下形式

$$\psi(x,y) = (\alpha x, y + \xi(x)) \qquad \text{for} \quad (x,y) \in R_u = (E \times A_s)/G,$$

其中 $\xi : E \longrightarrow A_s$ 是一个同态。由于我们已经知道，根据命题 6.2.1(1)，$\psi^{2k}(x,y) = (-x, y)$，因此 $\alpha^{2k} = -1$ 且 $\xi((1+\alpha+\cdots+\alpha^{2k-1})x) = 0$ 对每个 $x \in E$都成立。回想起 k 是奇数，我们得到 $\alpha = \pm\sqrt{-1}$ 和 $\xi \equiv 0$。这表明对于 $(x,y) \in R_u = (E \times A_s)/G$，$\psi(x,y) = (\pm\sqrt{-1}x, y)$。

写作 $\varphi(0,0)=(g,a)\in Z_u=(E\times A_s)/G$，我们有 $\varphi(x,y)=(\pm\sqrt{-1}x+g,y+a)$。由于 φ 是自由的且阶为 $4k$，$a\in A_s$ 的阶为 $4k$。由于 $\varphi^{2k}(x,y)=(-x,y)$，我们有 $((1+\sqrt{-1})g,2ka)\in G$。当 $G=E^{\sqrt{-1}}$时，这就得到了所声称的 $g\in E[2]\setminus E^{\sqrt{-1}}$。当 $G=E[2]$时，g 有更多自由度，但我们可以选择具有所需形式的 g。□

引理 7.4.16. 即使 (7.4.8) 不分裂，仍存在一个优选的自由 $\mu_{4k}=\langle\tilde{\varphi}\rangle$作用于 Z，以提升 $\langle\varphi\rangle$作用于 Z。此 $\tilde{\varphi}$ 与 $\tau\in G$交换，且 $\tilde{Z}\dashrightarrow\tilde{Y}$ 由$(\tau\circ\tilde{\varphi}^{2k})$商给出。

证明。只需取 $\tilde{\varphi}(x,y)=(\pm\sqrt{-1}x+g,y+a)$ 作为 $\tilde{Z}_u=E\times\overline{A_s}$的自同构，其公式与引理 7.4.15 相同。计算表明，这样的 $\tilde{\varphi}$ 的阶为 $4k$，且与 $\tau=(1+\sqrt{-1})g$ 交换。按照引理 7.2.5（使用引理 A.1.3），将 $\tilde{\varphi}$ 延拓为 $\tilde{Z}$ 的自同构是形式上的。最后，$\tau\circ\tilde{\varphi}^{2k}(x,y)=\tau(-x+(1+\sqrt{-1})g,y+2ka)=(-x,y)$ 是描述商 $\tilde{Z}\longrightarrow Z/\mu_2$ 的自同构，其保正则解消为 Y。□

推论 7.4.17。 如果 (7.4.8) 不分裂，则 $G=E^{\sqrt{-1}}=\mathbb{Z}/2$。此外，

(1) Q 的型为 $\mathrm{I}_0^*/2$，而 P 的型为$\mathrm{III}/2$ 或 $\mathrm{III}^*/2$。(2) $H\cong\mathbb{Z}/4k=\langle\tilde{\varphi}\rangle$ 按表 I_0^*-*b* 中的情形作用于 $\mathcal{Z}$。

证明。取引理 $\tilde{\varphi}$ 中 Z 的自同构 $\tilde{\varphi}$ 作用于 Z 上 $\tilde{\varphi}$，并注意到 τ 彼此交换，取自由商 $Z=Z/\tau$和 $Y=Y/\tau$。于是 $\tilde{\varphi}$ 下降为$\mu_{4k}=\langle\bar{\varphi}\rangle$-作用于 $\bar{Z}$上，而 $\bar{Z}\dashrightarrow\bar{Y}$ 是关于 $\bar{\varphi}^{2k}$的有理商。取进一步的商 $X=Y/\bar{\varphi}$，得到如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc}\tilde{Z} & \overset{/\tau\tilde{\varphi}^{2k}}{\dashrightarrow} & \tilde{Y} & & \\ \downarrow/\tau & & \downarrow/\tau & & \\ \bar{Z} & \overset{/\bar{\varphi}^{2k}}{\dashrightarrow} & \bar{Y} & \xrightarrow{/\bar{\varphi}} & \bar{X}\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z & \overset{/\varphi^{2k}}{\dashrightarrow} & Y & \xrightarrow{/\varphi} & X\end{array}.$$

交换图的下半部分与引理7.2.5起相同作用。因此，取 $G'=G/\langle\tau\rangle=0$ 或 $\mathbb{Z}/2$，我们得到一个左正合列 $0\longrightarrow G'\longrightarrow P\longrightarrow P^{\vee}$ 其中 $G'\cap P^{\circ}=0$。这表明包含关系 $G'\subset\pi_0(P_s)$成立。

(1) 现在我们来研究交换图的上半部分，或者等价地，假设$G=E^{\sqrt{-1}}=\langle\tau\rangle$。由引理 7.4.16，我们在$\tilde{Z}$上有一个 $\langle\tilde{\varphi}\rangle\times\langle\tau\rangle$-作用。这样的作用下降为 Y上的 $\mu_{4k}=\langle\bar{\varphi}\rangle$-作用，它描述了 H-作用。命题 6.2.2 表明，Q的型为 $\mathrm{I}_0^*/2$，而 P 与 III 型或 III*同源。由引理 7.4.15，$R_u^{\psi}=(E^{\sqrt{-1}}\times A_s)/\tau\cong A_s$ 有平凡的 π_0。由定理 6.1.4，这表明 $\pi_0(P_s)=0$，正如所声称的那样。既然我们知道 $\pi_0(P_s)=0$，这就迫使 $G'=0$成立。也就是说，情形 $G=E[2]$ 不可能。

(2) 根据 $\tilde{\varphi}(x)=\pm\sqrt{-1}x+g$ 对 $\overline{x\in E}$ 的定义，它循环 $\tilde{\varphi}:\ 0\longmapsto g\longmapsto\tau=(1+\sqrt{-1})g\longmapsto\sqrt{-1}g\longmapsto\overline{0_o}$ 这些是$E\longrightarrow F=E/\pm1=\mathbb{P}^1$的四个分歧点。因此 $\tilde{\varphi}$ 下降为 F 上的一个自同构，该自同构循环四个分支点，即型 I_0^* 曲线 $C=\sum_{i=1}^4E_i+2F$ 中的 $E_i\cap F$。□

定理的证明 *7.4.1*。假设序列 (7.4.8) 分裂。在此情况下，我们有一个同构 ${}_m^1X_s={}_m^1\tilde{X}_s/G=\tilde{Y}_t/(\langle\tilde{\varphi}\rangle\times G)=(C\times A_s)/(\langle\tilde{\varphi}\rangle\times G)$ 并且$\langle\tilde{\varphi}\rangle$-作用在 Y_t 上的作用由推论 7.4.14分类。注意，阿尔巴内塞稳定子 G

˜是 $\pi_0(P_s)$的一个子群，由引理7.4.10可知；而它又由引理 7.4.12和引理 7.4.13(1)分类。

若 h 光滑且 $\tilde{\varphi}$ 不是例外的，则 $\tilde{\varphi}$ 在 C 因子上平凡作用，因此$\frac{1}{m}\tilde{X}_s = (C \times A_s/a)/G$ 与定理 5.2.1中的不稳定纤维同构。若 h光滑且 $\tilde{\varphi}$ 是例外的，则得到表 7 中的类型，但不包括I_0^*-b。若h 严格半稳定，则这就是I_R^* 型对于 $R = mr$的描述。

即使序列 (7.4.8) 不分裂，我们仍有一个同构$\frac{1}{m}X_s = (C \times A_s)/H$。 H对 $\tilde{Y}_t$ 的作用由推论 7.4.17描述。这是剩余的情形I_0^*-b。□

8. 例子

我们来构造定理 X_s 5.1.1、5.2.1以及 §7中分类的所有中心纤维 E 。在全文中，假设 A 是椭圆曲线， $n-1$是维数为 ω的阿贝尔簇，且$\zeta \in \mathbb{G}_m$ 、 $\zeta \in \mathbb{G}_m$ 是单位根。

例 8.0.1. 设 $X \longrightarrow S$ 是一个极小椭圆纤维化， $\mathfrak{A} \longrightarrow S$ 是相对维数为 $n-1$的阿贝尔概形。那么 $X \times_S \mathfrak{A} \longrightarrow S$ 是一个极小的 δ-正则阿贝尔纤维化，其中心纤维为 $X_s \times \mathfrak{A}_s = X_s \times A_s$。

例 8.0.2（带有扭挠剪切的半稳定纤维化）. 设 $f\colon X \longrightarrow S$ 是任意一个带有 t-自同构概形 $P \longrightarrow S$的极小 δ-正则阿贝尔纤维化。设$G \subset P_s$ 是一个有限子群，它在 X_s上自由作用，也就是说， G 与 X_s的每个可能的稳定子都没有非平凡交。缩小 S后，我们可以将其延拓为扭挠¯ ¯截面 $G \subset P$。商 $f\colon X = X/G \longrightarrow S$ 是一个极小的 δ-正则阿贝尔¯纤维化，其中心纤维为 $X_s = X_s/G$。

¯若 f 如上例所述，则 $X_s = C \times A$ 和 $X_s = (C \times A)/G$。设 C 是由正整数 e 和 r确定的 I 型$_{er}$ 半稳定曲线。则$P_s \cong \mathbb{Z}/er \times \mathbb{G}_m \times A$ ，且根据引理 5.1.7，唯一的非平凡稳定子是 $\{0\} \times \mathbb{G}_m \times \{0\}$ 。任取一个阶为 e 的扭挠元素（r， ζ， a） $\in P_s$，并令 $G \subset P_s$ 为它生成的¯循环群。由此得到一个带有挠剪切 $a \in A$ 、阿尔巴内斯主齐性空间 $\mathrm{Alb}_{\bar{X}_s} = A/a$的 I 型半稳定 $X_s =$ （$C \times A$）$/G$ 。

例 8.0.3（不稳定纤维化）。 在例 8.0.2中，设 C 是一条不稳定的 Kodaira 曲线。那么 $P_s \cong \pi_0(P_s) \times \mathbb{G}_a \times A_s$，且每个稳定子都包含于$\pi_0(P_s) \times \mathbb{G}_a \times \{0\}$。若 G 是一个带有两个嵌入 $G \subset \pi_0(P_s)$ 和$G \subset A_s$的有限阿贝尔群，那么 $G \subset P_s$ 给出一个极小的 δ-正则阿贝尔纤维化 $X = X/G \longrightarrow S$，其阿尔巴内塞稳定子为 G。

例子 8.0.4（具有非挠剪切的半稳定纤维化）。 Nakamura [Nak77]和 Hwang–Oguiso [HO16] 构造了极小 δ-正则阿贝尔纤维化的显式例子 f： $X \longrightarrow S$ 型 I_1 ，具有非挠剪切。关于他们的（解析）构造，请参阅原始论文。若进行次数为 r 的全分歧基变换 $T \longrightarrow S$ 并取保正则解消 $Y \longrightarrow X_T \longrightarrow T$，便可构造出一个具有非挠剪切的 I_r 型纤维。

例子 8.0.5（不稳定等变纤维化）。 中的许多例子 [Mat01，§6], [HO11，§6], [KLM26] 都是等变的。设 f： $X \longrightarrow S$ 是一个极小的 δ-正则阿贝尔纤维化，且为非多重和等变的（所有光滑纤维均同构于一个阿贝尔簇 B）。标准的层结构论证表明，存在一个有限基变换 $T \longrightarrow S$ ，使得 f_T 与一个平凡族双有理等价g： $Y = B \times T \longrightarrow T$。这意味着 f 是不稳定的（例如，定理 6.1.4），而且

此外，它不可能是 $\mathrm{I}^*_{\geq 1}$-型（命题 6.2.1）。这是对 [KLM26，命题 4.20]的推广。

反过来，取一条椭圆曲线 E、一个维数为 $n-1$ 的阿贝尔簇 A，以及平凡族 $Y=(E\times A)\times\mathbb{A}^1\longrightarrow\mathbb{A}^1$。赋予其一个 $\mu_d=\langle\varphi\rangle$作用：

$$\varphi(x,y,t)=(\omega^{\pm 1}x,y,\omega t)\qquad\text{for}\quad(x,y,t)\in Y=E\times A\times\mathbb{A}^1$$

如命题 6.2.1所述。其商是一个 klt-极小阿贝尔纤维化 $X=Y/\varphi\longrightarrow\mathbb{A}^1$，其极小模型 $X\longrightarrow\mathbb{A}^1$ 可以是任意非$\mathrm{I}^*_{\geq 1}$-型不稳定纤维化（具有平凡阿尔巴内塞稳定子）。若要构造具有非平凡阿尔巴内塞稳定子的例子，请使用例 8.0.2。

例子 8.0.6（$\mathrm{I}^*_0/4$ 型）。给定一个簇，分别用 和 表示其希尔伯特平方和对称平方。取一个光滑椭圆纤维化 $Y\longrightarrow\mathbb{A}^1$，并

$$Y^{[2]}\longrightarrow Y^{(2)}\longrightarrow(\mathbb{A}^1)^{(2)}\cong\mathbb{A}^2.$$

它沿对角线 $\mathbb{A}^1\subset(\mathbb{A}^1)^{(2)}$奇异。取底上的一般特质 S，使其与 $\mathbb{A}^1$横截相交。在 $Y^{[2]}$ 上的 S 限制是一个极小δ-正则阿贝尔纤维化 $f\colon X\longrightarrow S$ 其中心纤维 X_s 是两个$\mathbb{P}^1$椭圆曲线上的丛的并 E，其中一个的重数为 1，另一个的重数为 2。有趣的计算 X_s 留给读者完成；但即使不做这项计算，X_s 也必定是 I型，这可由我们在定理5.2.1中的分类得出。

以下例子构造了重中心纤维。注意，我们对多个纤维化的分类明确描述了惯性作用 φ（或$\tilde{\varphi}$），因此构造例子很容易。

例子 8.0.7（通过非平凡主齐性空间得到多重纤维）。设 $S=\operatorname{Spec}R$ 和 $S_0=\operatorname{Spec}K$ 分别为一个严格亨泽尔离散赋值环及其分式域的 Spec。设 $P\longrightarrow S$是阿贝尔簇在 S_0上的任意 δ-正则 Néron 模型。任意一个 $\alpha\in H^1_{\acute{e}t}(S_0,\ P_0)$都定义了一个 P_0-主齐性空间 $X_0\longrightarrow S_0$ 及其唯一的极小模型 $f\colon X\longrightarrow S$。若 $\alpha\neq 0$，则 f 不可能有任何截面，否则中心纤维 X_s 就是一个多重纤维。群 $H^1_{\acute{e}t}(S_0,\ P_0)$是挠群，因此设 α 的阶为 m。于是，多重纤维 X_s的重数为 m，因为次数为 m 的全分歧基变换 $T\longrightarrow S$会消去 α。尽管我们的证明中没有用到这种解释，但这是理解多个纤维化的一个重要视角。

例 8.0.8（型 $m\cdot\mathrm{I}_0$）。设 B 是维数为 n 的阿贝尔簇，且$B\times T\longrightarrow T=\mathbb{A}^1$ 为一个平凡族。取其由下列给出的自由 $\mu_m=\langle\varphi\rangle$-作用

$$\varphi(x,t)=(x+b,\zeta t)\qquad\text{for}\quad(x,t)\in B\times T,$$

其中 $b\in B$ 与 $\zeta\in\mathbb{G}_m$ 的阶均为 m。商是一个极小纤维化$f\colon X=(B\times T)/\varphi\longrightarrow S$，且 $X_s=m\cdot(B/b)$。参见定理7.2.1。

例 8.0.9（型 $m\cdot\mathrm{I}^+_0$）。通过下列方式在 $E\times A\times T$ 上取自由 $\mu_m=\langle\varphi\rangle$-作用

$$\varphi(x,y,t)=(\omega^{\pm 1}x,y+a,\zeta t)\qquad\text{for}\quad(x,y,t)\in E\times A\times T.$$

这里我们选择 $m=dk$ 使得 $d=2$，3、4、或 6，$\zeta\in\mathbb{G}_m$ 是一个本原 dk 次单位根，$\omega=\zeta^k\in\operatorname{Aut}_0(E)$ 的阶为 d，且 $a\in A$ 的阶为 dk。商空间有一个中心纤维 $X_s=dk\cdot(E\times A)/\varphi$。参见定理 7.2.2。

例 8.0.10（型 $m\cdot \mathrm{I}_R^k$，其中 $m=kl$ 和 $R=kr$）。从一个极小椭圆纤维化 $X\longrightarrow S=\mathbb{A}^1$ 开始，它有一个 I 型 $l\cdot \mathrm{I}_r$ 重中心纤维 X_s。取一列关于 S 的分歧覆盖，并在其上进行极小基变换

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longrightarrow & X^+ & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{\mu_k} & S^+ & \xrightarrow{\mu_l} & S \end{array}.$$

则 X_s^+具有型 I_{lr}，且 Y_t 具有型 I_{klr}。此外，Y容许一个 $\mu_{kl}=\langle\varphi\rangle$-作用。由引理 7.3.12，惯性作用具有如下形式

$$\varphi(i,z)=(i+kr,\zeta^i z)\qquad \text{for}\quad (i,z)\in Y_t=\sum_{i=1}^{klr} C_i,$$

其中 ζ 是一个本原 kl 次单位根。取一个维数为 $n-1$ 的阿贝尔簇 A，并按下式在 $Y\times A$ 上构造一个 μ_{kl}-作用

$$\varphi(x,y)=(\varphi(x),y+a)\qquad \text{for}\quad (x,y)\in Y\times A,$$

其中 $a\in A$ 的阶为 kl。商 $(Y\times A)/\mu_{kl}\longrightarrow S$ 具有中心纤维，其型为 $kl\cdot \mathrm{I}_{kr}^k$。t-自同构 P（商的）即为 ψ-不变量，它取自 $Y\times A$ 的 t-自同构。参见定理 7.3.1。

例 8.0.11（$m=2k$ 与 $R=kr$ 情形下的 $m\cdot \mathrm{I}_R^+$ 型）。从具有 I_r^* 型中心纤维的极小椭圆纤维化 $X\longrightarrow S=\mathbb{A}^1$ 出发。取极小椭圆纤维化的一个序列

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longrightarrow & Z & \dashrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{\mu_k} & U & \xrightarrow{\mu_2} & S \end{array}.$$

则 Z_u 为 I_{2r} 型，Y_t 为 I_{2kr}型。此外，Y具有一个 $\mu_{2k}=\langle\varphi\rangle$作用，该作用在 Y_t 上表示为

$$\varphi(i,z)=(-i,\tfrac{\zeta^i}{z})\qquad \text{for}\quad (i,z)\in Y_t,$$

其中 ζ 是一个本原的 $2k$ 次单位根。现在将其与一个由 $a\in A$ 定义的、阶为 $2k$ 的平移自同构结合，形成 μ_{2k}作用于 $Y\times A\longrightarrow T$上的对角线 μ_{2k}作用。其商为 $(Y\times A)/\varphi\longrightarrow S$，具有一个 $2k\cdot \mathrm{I}_{kr}^+$型的中心纤维。见定理 7.3.2。

例 8.0.12（$m\cdot \mathrm{I}_R^-$ 型，针对 $m=2k$ 和 $R=kr$）。取与例 I_{2kr} 中的相同类型的极小椭圆纤维化 $Y\longrightarrow T$ 8.0.11。它具有一个中心 t-自同构群 $\mathbb{Z}/2kr\times\mathbb{G}_m$，因此取任意一个 ε_1 作用于 Y上的 t-自同构 Y_t，其作用为 $(1,\varepsilon)\in\mathbb{Z}/2kr\times\mathbb{G}_m$。则 $\tilde{\varphi}=\varepsilon_1\circ\varphi$ 是 Y上的一个自同构，其作用于 Y_t 上的形式为

$$\tilde{\varphi}(i,z)=(1-i,\tfrac{\varepsilon\zeta^i}{z})\qquad \text{for}\quad (i,z)\in Y_t.$$

容易验证，它在 Y 上的阶为 $4k$，使得 $\tilde{\varphi}^{2k}$ 在 T 上作用平凡，并在 Y_t 上作为 t-自同构 $\tilde{\varphi}^{2k}(i,z)=(i,-z)$ 作用。利用这一点定义一个对角线 μ_{4k}-作用 $Y\times A$（在 A 上的阶为 $4k$ 的平移），使得商 $(Y\times A)/\tilde{\varphi}\longrightarrow S$ 具有型为 $2k\cdot \mathrm{I}_{kr}^-$ 的中心纤维。参见定理 7.3.2。

例 8.0.13（型 $m\cdot \mathrm{I}_R^*$（奇数 $m=k$ 和 $R=kr$）。再次从 $Y\longrightarrow T$例 8.0.11 中取型为 I_{2kr}的情形，但进一步假设 k 是奇数。赋予 $Y\times A$一个对角线 μ_{2k}-作用

$$\varphi(x,y)=(\varphi(x),y+a)$$

但其中 $a \in A$ 的阶为 k（而非原来的 $2k$）。于是，由于 k 是奇数， φ^k 在中心纤维上作用为 φ^k（i， z， y）$=$（$-i$，$(-1)_z^{\,i}$， y）。这是命题 6.2.1(2)中描述的自同构，因此 $(Y \times A)/\varphi^k \longrightarrow T/\varphi^k$ 有一个 I_{kr}^*型极小模型。其后续商 φ的型为 $k \cdot \mathrm{I}_{kr}^*$。参见引理 7.4.13。

例 8.0.14（其他类不稳定多重纤维）。 从平凡族$E \times A \times T \longrightarrow T = \mathbb{A}^1$出发。取 E 上阶为 $d = 2$、3、4、或 6 的群自同构 ω，一个与 d互素的整数 m， 以及一个满足 $\omega = \zeta^m$的本原 dm次根 ζ。赋予其如下 μ_{dm}-作用：

$$\varphi(x, y, t) = (\omega^{\pm 1}x, y + a, \zeta t) \qquad \text{for} \quad (x, y, t) \in E \times A \times T,$$

其中 $a \in A$ 的阶为 m。商 $(E \times A \times T)/\varphi \longrightarrow S$ 具有如引理 7.4.11所述的类不稳定多重中心纤维。将 φ的第一项改为 $\omega^{\pm 1/2}x$ 或 $\omega^{\pm 1/3}x$ 将得到四种例外类型（及其商）。见引理 7.4.11。

为得到最奇异类型 $m \cdot \mathrm{I}_0^*$-b，对奇数 k假设 $j(E) = 1728$、 $d = 2$、 $m = 2k$，并赋予 $E \times A \times U$ 上如下的 $\mu_{4k} \times \mathbb{Z}/2$-作用：

$$\tilde{\varphi}(x, y, t) = (\pm\sqrt{-1}x + g, y + a, \zeta t), \qquad \tau(x, y, t) = (x + (1 + \sqrt{-1})g, y + 2ka, t),$$

其中 $g \in E[2] \setminus E^{\sqrt{-1}}$， $a \in A$ 的阶为 $4k$，且 ζ是一个本原 $4k$ 次单位根。商 $(E \times A \times U)/\langle\tilde{\varphi},\ \tau\rangle \longrightarrow S = U/\mu_{4k}$具有 $2k \cdot \mathrm{I}_0^*$-b 型的中心纤维。参见引理7.4.15。

附录 A. 辅助结果

所有讨论均在固定的特征零域 k 上进行。在许多情况下，我们需要将这些结果应用于非既约且可约的概形 X。

我们感谢 Takumi Murayama 讲解他关于 Kollár 单射性与无挠性定理的结果。

引理 A.0.1. 设 S 是 k上的一个戴德金概形，且 $f\colon X \longrightarrow S$ 是一个相对维数为 n的平坦射影态射，其中 X 具有有理奇点。那么，对于 $0 \le i \le n$， $R^i f_*\mathcal{O}_X$ 是局部自由的，且其形成与基变换相容。

证明。这是 [KK25定理 1], 的推论，其中 S 被假定为 k上的簇。我们仅指出，当 S 为戴德金概形时，他们的论证同样适用，现概述如下。

我们的断言在底上是扎里斯基局部的，因此可假定 $S = \operatorname{Spec} R$， 其中 R是以 k为剩余域的戴德金整环。首先， $R^i f_*\omega_X$ 是局部自由的，因为它依 [Mur24定理 8.6 是无挠的。1] （或由 [Mur25定理 A(ii)] 连同单射性 $\Longrightarrow$无挠性论证）。由 [KK25], 的 (16) 与 (19)， $R^i f_*\omega_f$ 与 $R^i f_*\mathcal{O}_X$ 同样是局部自由的。为证明 $\mathcal{O}_X$ 的高阶直接像的形成与任意基变换交换，只需证明拟同构 $Rf_*\mathcal{O}_X = \bigoplus_{i=0}^n R^i f_*\mathcal{O}_X[-i]$， 这可由拟凝聚层的上同调基变换 [Stacks，标签 08IB]得到。

再次根据同上引文中的 (16)，我们可以改为证明 $Rf_*\omega_f = \bigoplus_{i=0}^n R^i f_*\omega_f[-i]$。为此，取一个充分一般且正的除子 $H \subset X$，复合态射$g\colon H \subset X \longrightarrow S$，并应用同上引文中的定理 1 和[Kol86的定理 3 中的归纳论证。1]。唯一需要验证的是

满射同态 α： $g_*\omega_g \longrightarrow R^1 f_*\omega_f$ 的分裂。由于 S 是仿射的，且 $R^1 f_*\omega_f$是局部自由的，因此 $\mathrm{Ext}^1_S(R^1 f_*\omega_f,$ 核 $\alpha) = 0$。证明完毕。□

A.1. **代数群与作用**。 两个交换连通代数群 G 与 H 之间的同源 是一个准有限满同态 f :$G \longrightarrow H$。两个阿贝尔挠子之间的同源 是它们之间的有限 étale 态射，且必然是伽罗瓦的。

引理 A.1.1. 设 G 与 H 为连通交换代数群。则同源 $f : G \longrightarrow H$ 诱导它们的线性部分与阿贝尔簇部分的同源。特别地， G 与 H 的线性部分同构。

证明。 同态 f 诱导Chevalley正合列之间的一个同态

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \ker g & & \ker f & & \ker h & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L_G & \longrightarrow & G & \longrightarrow & A_G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow g & & \downarrow f & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & L_H & \longrightarrow & H & \longrightarrow & A_H & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array} .$$

由蛇引理，同态 h是满射。$\ker h$ 的中性分支是一个阿贝尔簇，因此它不容许到连通线性代数群上的满射。这迫使$\mathrm{coker}\, g$ 为有限，或等价地 g 是满射。因此 g 与 h 都是同源。关于第二个断言，注意 k 上的每个连通交换线性代数群都具有形式 $\mathbb{G}_m^{\times a} \times \mathbb{G}_a^{\times b}$。若二者同源，则它们同构（并非由该同源给出）。□

称局部代数群 为 k上的局部有限型群概形 G。称代数群 为 k上的有限型群概形 G，或者等价地，称具有有限 $\pi_0(G)$ 的局部代数群为代数群。

引理 A.1.2. 设 G是交换局部代数群。

(1) 若 $\pi_0(G)$ 有限生成，则 $0 \longrightarrow G^\circ \longrightarrow G \longrightarrow \pi_0(G) \longrightarrow 0$ 分裂。(2) 若 $\pi_0(G)$ 有限且 G° 是幺幂的，则该分裂唯一。

证明。固定一个同构 $\pi_0(G) = \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Z}/d_i \oplus \bigoplus_{j=1}^r \mathbb{Z}$。对每个 i，取一个与生成元 $1 \in \mathbb{Z}/d_i \subset \pi_0(G)$ 对应的连通分支 $G^i \subset G$ 。根据 [BLR90，引理 7.3，d_i 次幂态射 $[d_i]$: $G^i \longrightarrow G^\circ$ 是满射，1], 因此任取一点 $g_i \in G^i$ 使得 $d_i \cdot g_i = 0$。对每个 j，任取一点 $g_j \in G$，使其位于与 j次 $\mathbb{Z}$的生成元对应的分支中。由所有 g_i 和 g_j 生成的 G的子群同构于 $\pi_0(G)$，且在 G的每个连通分支中恰含一个元素。这证明该 π_0序列分裂。当且仅当 $\mathrm{Hom}(\pi_0(G)\ G^\circ) = 0$时，该分裂唯一。□

引理 A.1.3。 设 A、 B和 B 是概形 S 上的阿贝尔挠子， f： $A \longrightarrow B$ 是阿贝尔挠子之间的一个态射，且 $B \longrightarrow B$ 是一个同源。假设 f_s： $A_s \longrightarrow B_s$~ ~ 在闭点 $s \in S$ 上提升为一个态射 f_s： $A_s \longrightarrow B_s$。那么，在 ***étale*** 局部缩小(S, s) 后，存在唯一的提升，将 f 提升为阿贝尔挠子之间的态射~ ~ ~f： $A \longrightarrow B$，其在 s 上的限制为 f_s。

证明。我们可以假设 $S = \mathrm{Spec}\mathcal{O}_{S,\,s}^{sh}$ 是严格亨泽尔的。于是所有阿贝尔挠子都是平凡的，因此可以假设它们是阿贝尔概形，且 f 是一个同态。~取 S 上 fppf 阿贝尔层的短正合列 $0 \longrightarrow G \longrightarrow B \longrightarrow B \longrightarrow 0$ （此处 G 是一个常值有限群概形），以及它对应的长正合列

$$\mathrm{Hom}(A,G) = 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,\tilde{B}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A,G).$$

最后一项是层 Ext $\mathrm{Ext}^1(A,G)$ 的整体截面，因为 S 是严格亨泽尔的 [Stacks，标签 03QO]。注意到 $\mathrm{Ext}^1(A,G) = \mathrm{Hom}(\hat{}G, \mathrm{Ext}^1(A,\mathbb{G}_m)) = \mathrm{Hom}(\hat{}G, \check{}A)$，最后一项是 $\mathrm{Hom}(\hat{}G, \check{}A)$。$\check{}A$ 的挠截面平凡，当且仅当其在 s 上的限制平凡。□

引理 A.1.4. 设 G 是一个作用于 k 上拟射影概形 X 的代数群。若 $K \subset Z_G$ 是 G 中心的有限子群，则在 X/K 上存在一个诱导的 G/K-作用。

证明. 赋予作用态射 $G \times X \longrightarrow X$ 一个等变的 $K^{\times 2}$-作用，其定义为 $(k,k') \cdot (g,x) = (kg, k' \cdot x)$ 和 $(k,k') \cdot x = (kk') \cdot x$。其概形论商给出一个态射 $G/K \times X/K \longrightarrow X/K$。群作用公理很容易验证。□

以下是 [AF16引理 516]的一个略微推广。

引理 A.1.5。 设 G 是一个代数群，作用于 k上的真连通概形X 。若该作用的核是仿射的，则对于每个点 $x \in X$，稳定子群St_x 都是仿射的。

证明。我们可以假设 G是连通的。先证明 X 约化时的结论。记 $X = \bigcup_i X_i$ 为其不可约分解，则 G 作用于每个 X_i。由于 X_i 是整的， [AF16，引理 5.16]的证明表明，每个 $x \in X_i$都有仿射稳定子，当且仅当 $\ker(G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{X_i})$ 是仿射的。反设存在一个不可约分支 X_i ，其核不是仿射的，并令 $H \subset G$ 为该核的非平凡反仿射部分。于是 H 在整个 X_i上作用平凡。由 X的连通性，存在另一个分支 X_j ，使得 H 固定一个点 $x \in X_i \cap X_j$。根据 [Bri09，引理 1.1]， H 在整个 X_j上的作用平凡。由归纳法（以及 X的连通性）可得， H 在 X 上的作用平凡，或者 $H \subset \ker(G \longrightarrow \mathrm{Aut}_X)$。但我们已假设该核是仿射的，因此它不可能包含非平凡的反仿射子群。

一般情况下，我们通过证明诱导的 G在 X_{red}上的作用具有仿射核来完成证明。这就能推出所述结论，因为考察 $x \in X$ 的稳定子群 St_x 的问题是集合论的，因此可以在 X_{red}上验证。

反设 $\ker(G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{X_{\mathrm{red}}})$ 不是仿射的，并令 H 为其反仿射部分。由于每个点 $x \in X$ 都被 H固定，局部环 $\mathcal{O}_{X,\,x}$ 具有一个 H-作用。记其极大理想为 $\mathfrak{m}$ ，根据 [Bri09，引理 1.1]， H 在$\mathcal{O}_{X,\,x}/\mathfrak{m}^i$ 上作用平凡，其中 $i \geq 0$亦然。由于 $\bigcap_i \mathfrak{m}^i = 0$，这意味着对每个点 $x \in X$， H 在$\mathcal{O}_{X,\,x}$ 上作用平凡。因此， H 在 X 上的作用平凡，这与 G-作用的核是仿射的这一事实相矛盾。□

引理 A.1.6。 设 C 是一个完备曲线，其不可约分支带有约化诱导结构，且均为有理曲线。那么Aut_C 是仿射的。

证明。 我们断言，每个在 C上忠实作用的连通代数群 G 都是仿射的。在正规化 $C^\nu = \bigsqcup_{i=1}^r \mathbb{P}^1$上取一个诱导的 G作用。这构造了一个态射 $G \longrightarrow \mathbf{PGL}_2^{\times r}$，因此只需证明其核是仿射的。也就是说，我们可以假设 G 在 C^ν 上平凡作用，或者在 C_{red} 上平凡作用。

现在，我们在 G上有一个忠实的作用， C 且该作用在 C_{red}上平凡。我们可以采用 Brion 在引理 A.1.5 中使用的方法。反设 G 不是仿射的，并取其反仿射部分 $H \subset G$。那么每个点 $x \in C$ 都被 H 固定，因此我们得到一个 H在$\mathcal{O}_{C\text{上的作用}, x}$。根据 [Bri09, 引理 1.1], H 在商$\mathcal{O}_{C\text{上的作用}x}/\mathfrak{m}^i$ 对每个 i 都是平凡的，因此它在整个 $\mathcal{O}_{C\text{上}x}$的作用也是平凡的。这说明 H 在 C 上的作用是平凡的，与 G在 C上忠实作用的假设矛盾。□

A.1.1. 皮卡德概形。

引理 A.1.7. 设 G 是一个有限阿贝尔群，它在射影概形X 上自由作用，且X 定义在 k上，满足 $h^0(X, \mathcal{O}_X) = 1$；令 $q\colon X \longrightarrow Z = X/G$ 为其商。则$q^* : \mathrm{Pic}_Z \longrightarrow \mathrm{Pic}_X$ 的核为$\hat{}G = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_m)$。

证明。 结构态射 $X \longrightarrow \mathrm{Spec}\, k$ 的堆商是一个态射$f\colon Z \longrightarrow BG = [\mathrm{Spec}\, k/G]$。将 Leary 谱序列应用于 f，得到：

$$E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X, \mathbb{G}_m)) \quad \Longrightarrow \quad H^{p+q}(Z, \mathbb{G}_m).$$

这给出了所需的左正合列 $0 \longrightarrow H^1(G, \mathbb{G}_m) \longrightarrow H^1(Z, \mathbb{G}_m) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{G}_m)$。注意，$H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$蕴含 $H^0(X, \mathbb{G}_m) = \mathbb{G}_m$（$BG$ 上的一个 fppf 层），并且 $H^1(G, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_m) = \hat{}G$。□

以下是 [Stacks，标签 0C6S]关于特征为 0 的真概形的推广。

引理 A.1.8。 设 Y 是 k 上的一个真概形，且 $i\colon Z \hookrightarrow Y$ 是由一个幂零理想定义的闭子概形。则

(1) $i^*\colon \mathrm{Pic}^\circ_Y \longrightarrow \mathrm{Pic}^\circ_Z$ 有一个幺幂核和余核。(2) $i^*\colon \mathrm{NS}(Y_{\bar{k}}) \longrightarrow \mathrm{NS}(Z_{\bar{k}})$ 是单射，且有无挠余核。

证明. 我们可以假设 k 是代数闭的。所有断言在无穷小加厚的复合 $W \hookrightarrow Z \hookrightarrow Y$ 下保持稳定，因此我们可以进一步假设 i 是一阶增厚，即理想层 $I = I_Z$ 满足 $I^2 = 0$。取Y上 fppf 阿贝尔层的短正合列$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathbb{G}_{m,Y} \longrightarrow i_*\mathbb{G}_{m,Z} \longrightarrow 0$, 其中第一个同态由 $f \longmapsto 1 + f$ 利用假设$I^2 = 0$定义。其长正合列

$$H^1(Y, I) \longrightarrow \mathrm{Pic}_Y \xrightarrow{i^*} \mathrm{Pic}_Z \longrightarrow H^2(Y, I) \tag{A.1.9}$$

立即可知 余核i^* 无挠。取 d-挠元部分（A.1.9）， $i^*\colon \mathrm{Pic}_Y[d] \longrightarrow \mathrm{Pic}_Z[d]$ 是每个 d-挠点的同构 $d \in \mathbb{Z}$ [Stacks，标签 0C6S]。因此， 核i^* 也无挠。

（（1）和（2）的余核）取短正合列之间的一个同态

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \ker f & & \ker i^* & & \ker g & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^\circ_Y & \longrightarrow & \mathrm{Pic}_Y & \longrightarrow & \mathrm{NS}(Y) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow i^* & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^\circ_Z & \longrightarrow & \mathrm{Pic}_Z & \longrightarrow & \mathrm{NS}(Z) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \mathrm{coker}\, f & & \mathrm{coker}\, i^* & & \mathrm{coker}\, g & & \end{array} .$$

注意到余核 f 是连通的，而余核 g 是离散的。因此，余核(核 $g \longrightarrow$余核 f)是余核 i^*的中性分支。由于余核 i^* 无挠，其中性分支余核(核 $g \longrightarrow$ 余核 f)是幺幂的。但核 g 是离散的，因此这意味着余核 f 是幺幂的，且核 $g \longrightarrow$ 余核 f 是零映射。此外，根据引理 A.1.2，余核 i^* 的无挠性意味着余核 g 也无挠。

（(1) 和 (2) 的核）由于核 i^* 无挠，核 f 也无挠。这证明核 f 的中性分支是幺幂的。但核 f 是有限型的，因此π_0(核 f)是有限群，所以 π_0(核 f)必为平凡群，进而核 f 是幺幂的。现在，短正合列 $0 \longrightarrow$ 核 $f \longrightarrow$ 核 $i^* \longrightarrow$ 核 $g \longrightarrow 0$ 再次（唯一地）分裂，这是引理 A.1.2 的结论。由于核 $i^* =$ 核 $f \times$ 核 g 无挠，核 $g \cong \mathbb{Z}^r$ 无挠且核 $i^* \cong \mathbb{G}_a^{\times s} \times \mathbb{Z}^r$。最后，回顾 (A.1.9)， k-点群 (核 i^*)(k) $= k^s \times \mathbb{Z}^r$ 是阿贝尔群 $H^1(Y, I) \cong k^t$的商。由于k^t 是可除群，其商 $k^s \times \mathbb{Z}^r$ 也可除。这证明了 $r = 0$，也就是所声称的核 $g = 0$ 。□

A.2. **阿尔巴内塞态射**。 下面明确本文所采用的阿尔巴内塞态射的定义。

定义 A.2.1。 设 X 是 k 上的有限型概形。 X 的阿尔巴尼斯态射是一个态射 $\mathrm{alb}: X \longrightarrow \mathrm{Alb}_X$ ，它在从 X 到 k 上的阿贝尔挠子的所有态射中具有泛性质。阿贝尔挠子 Alb_X 称为 X 的阿尔巴内斯主齐性空间。

注意，这一定义没有固定 k 的一个 X -点（因此，Alb_X 应是阿贝尔挠子，而非阿贝尔簇）。当 k 不是代数闭时，或当 X 带有群作用时，这一区别至关重要。众所周知，每个光滑真连通簇 X 都有阿尔巴内塞态射。下面的结果是这一事实的一个极大推广。

定理 A.2.2 ([陈17], [伦24])。 设 X是 上的真概形，且 $h^0(X, \mathcal{O}_X) =1$。那么

(1) 阿尔巴尼斯态射 阿尔巴内塞映射： $X \longrightarrow$阿尔巴内塞$_X$
存在。(2) 在 阿尔巴内塞映射 下的拉回是一个单同态

$$\mathrm{alb}^*: \mathrm{Pic}^\circ_{\mathrm{Alb}_X} = \mathrm{Alb}_X^\vee \hookrightarrow \mathrm{Pic}^\circ_X,$$

其像是Pic°_X的极大阿贝尔子簇。特别地，阿尔巴内塞$_X$是Pic°_X的极大阿贝尔子簇的对偶的一个主齐性空间。

推论 A.2.3. 设 Y 是定义在 k 上的真概形，且 $i: Z \hookrightarrow Y$ 是由幂零理想定义的闭子概形。假设 $h^0(Y, \mathcal{O}_Y) = h^0(Z, \mathcal{O}_Z) = 1$。那么

存在一个满射态射 阿尔巴内塞映射$_Z \twoheadrightarrow$阿尔巴内塞映射$_Y$ 以及一个交换图

$$\begin{array}{ccc} Z & \xhookrightarrow{i} & Y \\ \downarrow\mathrm{alb} & & \downarrow\mathrm{alb} \\ \mathrm{Alb}_Z & \twoheadrightarrow & \mathrm{Alb}_Y \end{array}.$$

证明。 定理 A.2.2 同时适用于 Y 和 Z。因此，只需证明 $i^*:\ \mathrm{Pic}^\circ_Y \longrightarrow \mathrm{Pic}^\circ_Z$ 在它们的极大阿贝尔子簇之间诱导一个单同态。设 $A = \mathrm{Alb}_Y^\vee$ 是 Pic°_Y 的极大阿贝尔子簇。由引理 $\ker i^*$ 是幺幂的，因此 A.1.8，我们有 $A \cap \ker\, i^* = 0$，或者说 i^* 单射 A 到 Pic°_Z。 □

A.3. **通过导子子概形处理非正规概形。** 本小节遵循 [Stacks，标签 0ECH] 和 [Sch12]。这是对 [Ser88，§IV 中奇异曲线构造的推广。1]。

命题 A.3.1 ([Stacks，标签 0E25])。 设 Y 是一个定义在 k上的拟射影概形， $Z \subset Y$ 是一个闭子概形，而 $\tilde{Z} \longrightarrow Z$ 是一个有限态射。那么存在一个推出 $\tilde{Y} = Y \amalg_{\tilde{Z}} Z$，它位于概形范畴中：

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \hookrightarrow & \tilde{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \hookrightarrow & Y \end{array}. \tag{A.3.2}$$

此外， $Z \subset Y$ 是一个闭子概形， $\tilde{Y} \longrightarrow Y$ 是有限的，而且该交换图也是笛卡尔图。

交换图（A.3.2）在拓扑空间范畴中也是一个推出，因此它看起来确实像是将 $\tilde{Z}$ 收缩到 Z。

现在从一个约化拟射影概形 Y（其上方于 k）出发，并取其正规化

$$\nu : \tilde{Y} \longrightarrow Y.$$

同态 $\mathcal{O}_Y \longrightarrow \nu_*\mathcal{O}_{\tilde{Y}}$ 是单射，因为 Y 是约化的。 $F = \nu_*\mathcal{O}_{\tilde{Y}}/\mathcal{O}_Y$ 的概形论支撑是一个闭子概形 $Z \subset Y$，即 Y 的导子子概形。其理想层 $\mathfrak{c} = I_Z \subset \mathcal{O}_Y$ 称为导子理想，等价地定义为

$$\mathfrak{c} = \{f \in \mathcal{O}_{\tilde{Y}} : f\,\mathcal{O}_{\tilde{Y}} \subset \mathcal{O}_Y\} \subset \mathcal{O}_Y.$$

容易验证 $\mathfrak{c} \subset \mathcal{O}_{\tilde{Y}}$ 也是一个理想，因此它定义了一个闭子概形$\tilde{Z} = \nu^{-1}(Z) \subset \tilde{Y}$。由此得到一个笛卡尔图（A.3.2）。

命题 A.3.3 (由正规概形得到的约化概形 [Sch14])。 设 Y 为一个约化拟射影概形， $\nu:\ \tilde{Y} \longrightarrow Y$ 为其正规化，而 $Z \subset Y$和$\tilde{Z} \subset \tilde{Y}$ 为上述导子子概形。那么，笛卡尔图 (A.3.2)是一个推出图。

证明。 以下是 Schwede 证明的副本。我们可以假设 $Y = \mathrm{Spec}\, A$，其中 k 是有限型约化 k- 代数 A。记 $\bar{A}$ 为 A 的正规化，记 $\mathfrak{c} \subset A \subset \bar{A}$ 为导子理想，我们需要证明该交换图

$$\begin{array}{ccc} \bar{A}/\mathfrak{c} & \longleftarrow & \bar{A} \\ \uparrow & & \uparrow \\ A/\mathfrak{c} & \longleftarrow & A \end{array} \tag{A.3.4}$$

是交换环的拉回图。换言之，我们需要证明由 $f \longmapsto (f, f)$ 定义的环同态 $A \longrightarrow \{(f,h) \in A \times A/\mathfrak{c} : f = h \in A/\mathfrak{c}\}$ 是同构。它是单射，因为正规化 $A \subset A$ 是单射。它是满射，因为若 $f - h \in \mathfrak{c} \subset A$ 对于 $f \in A$ 和 $h \in A$ 成立，则 $f \in A$。□

换言之，每个既约概形 Y 都以一种首选方式，通过使用导子子概形/理想的概念，对其正规化 $\tilde{Y}$ 进行“压缩”而得到。

A.3.1. 等变性。 上述关于导子的讨论具有等变性。

引理 A.3.5。 设 G 为作用于 Y 上的有限群，其中 Y 是k上的拟射影概形。则正规化与取商可交换：$Y^\nu/G = (Y/G)^\nu$。

证明。 这里要求拟射影性，只是为了保证商作为概形存在。由于该命题在 Y 和 $Y_{\mathrm{red}}/G = (Y/G)_{\mathrm{red}}$上是局部的，我们可以设为 $Y = \operatorname{Spec} A$，其中 k是一个有限型约化 A-代数。

将全分式环记为 $K = S^{-1}A$，其中 $S \subset A$ 是所有非零因子的集合，并将 A 的正规化记为 $\bar{A}$。我们有 $A \subset \bar{A} \subset K$。$K$ 的G-不变部分是 A^G 的全分式环，因为根据 [AM69，第 5.12]题，$K^G = (S^{-1}A)^G = (S \cap A^G)^{-1}A^G$。我们需要证明 $A^G = \bar{A}^G$。包含关系 $(\subset)$显然。为证明 $(\supset)$，假设 $f \in \bar{A}$ 是 G-不变的。对 $a_i \in A$ 取等式 $f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$。对每个 $g \in G$ 应用该等式并将它们相加，得到 $|G| \cdot f^n + (\sum_g g \cdot a_{n-1})f^{n-1} + \cdots + (\sum_g g \cdot a_0) = 0$。由于 k具有特征零，我们得到 $f \in A^G$。□

引理 A.3.6. 设 G 是作用在约化拟射影概形Y 上方 k的有限群。考虑命题 (A.3.2) 中的导子子概形图*A.3.3*。则该交换图是 G-等变的，且其商是命题 *A.3.1*中的推出图。

证明。 回忆相干层 $F = \nu_*\mathcal{O}_{\tilde{Y}}/\mathcal{O}_Y$。$G$ 作用唯一地提升到 Y，因此 F 是 Y 上的 G-等变层。于是其支撑 Z 及其理想层 $\mathfrak{c}$ 都是G-等变的。这证明了导子子概形图是等变的。

现在我们来证明，等变推出图（A.3.2）的商仍是推出图。首先考虑一个 G-等变的交换环拉回图

$$\begin{array}{ccc} B/IB & \longleftarrow & B \\ \uparrow & & \uparrow \\ A/I & \longleftarrow & A \end{array},$$

或一个同构 $A \longrightarrow \{(f,h) \in B \times A/I : f = h \in B/IB\}$。取其 G-不变量，复合映射

$$A^G \longrightarrow \{(f, \bar{h}) \in B^G \times A^G/I^G : \bar{f} = \bar{h}\} \subset \{(f, \bar{h}) \in (B \times A/I)^G : \bar{f} = \bar{h}\}$$

是一个同构。这证明第一个映射和第二个映射都是同构。也就是说，图中 G-不变部分是笛卡尔的。我们不知道对 Y 的导体图取 G 商后，是否仍是 Y/G 的导体图（但它仍然是一个推出图）。□

参考文献

[AF16] Dima Arinkin 和 Roman Fedorov。“可积系统的部分傅里叶-穆凯变换及其在 Hitchin 纤维化中的应用”。载于：《杜克数学杂志》165.15（2016），第2991–3042页。[AF24] Giuseppe Ancona 和 Dragoş Frˇaţilˇa。“Ngô 支撑定理与准射影交换群概形的可极化性”。载于：《代数几何电子期刊》8（2024年），第11–20页。[AM69] M. F. Atiyah 和 I. G. Macdonald。《交换代数导论》。Addison-Wesley，1969年，第ix+128页。[ASD73] M. Artin 和 H. P. F. Swinnerton-Dyer。“$K3$ 曲面上椭圆曲线铅笔的 Shafarevich-Tate 猜想”。载于：《数学发明》20（1973年），第249–266页。[Bar+04] Wolf Barth 等。《紧复曲面》。第二版。第4卷。A Series of Modern Surveys in Mathematics。施普林格出版社，柏林，2004年。[BLR90] Siegfried Bosch、Werner Lütkebohmert 和 Michel Raynaud。《Néron 模型》。第21卷。Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)。施普林格出版社，柏林，1990年。[Bri09] Michel Brion。“反仿射代数群”。载于：《代数杂志》321.3（2009年），第934–952页。[Bri15] Michel Brion。“关于有限商的代数群扩张”。载于：《太平洋数学杂志》279.1-2（2015年），第135–153页。[Cam05] Frédéric Campana。“曲面上的多重纤维：几何、双曲与算术方面”。载于：《数学手稿》117.4（2005年），第429–461页。[CKS26] Mark Andrea A. de Cataldo、Yoon-Joo Kim 和 Christian Schnell。编写中。2026年。[Con17] Brian Conrad。《非完美域上的阿尔巴内塞簇》。MathOverflow。https: //mathoverflow.net/q/261032（版本：2017年1月31日）。2017年。[CTS21] Jean-Louis Colliot-Thélène 和 Alexei N. Skorobogatov。《Brauer-Grothendieck 群》。第71卷。A Series of Modern Surveys in Mathematics。施普林格出版社，2021年，第xv+453页。[Dol03] Igor Dolgachev。《不变量理论讲义》。第296卷。伦敦数学会讲义系列。剑桥大学出版社，剑桥，2003年，第xvi+220页。[Edi92] Bas Edixhoven。“Néron 模型与温和分歧”。载于：Compositio Math. 81.3（1992年），第291–306页。[Eng+25] Philip Engel 等。“某些纤维化 K-平凡簇的有界性”。2025年。arXiv：2507.00973v1。[FC90] Gerd Faltings 和 Ching-Li Chai。《阿贝尔簇的退化》。第22卷。Results in Mathematics and Related Areas。施普林格出版社，柏林，1990年。[HM07] Christopher Hacon 和 James Mckernan。“关于 Shokurov 有理连通性猜想”。载于：《杜克数学杂志》138.1（2007年），第119–136页。[HO09] Jun-Muk Hwang 和 Keiji Oguiso。“全纯拉格朗日纤维化判别超曲面上的特征叶状结构”。载于：Amer. J. Math. 131.4（2009年），第981–1007页。[HO11] Jun-Muk Hwang 和 Keiji Oguiso。“全纯拉格朗日纤维化的多重纤维”。载于：《当代数学通讯》13.2（2011年），第309–329页。[HO16] Jun-Muk Hwang 和 Keiji Oguiso。“主极化稳定拉格朗日纤维化的局部结构”。载于：《极小模型与极端射线》。第70卷。Adv. Stud. Pure Math.，日本数学会，2016年，第247–275页。[Hol19] David Holmes。“维数大于1的基概形上雅可比簇的 Néron 模型”。载于：《纯粹与应用数学杂志》747（2019年），第109–145页。

[Kaw81] Yujiro Kawamata。“阿贝尔簇的刻画”。载于：Compositio Math. 43.2（1981），第253–276页。[Kim24] Yoon-Joo Kim。“高维拉格朗日纤维化的 Néron 模型”。2024年。arXiv：2410.21193v1。[KK25] János Kollár 和 Sándor Kovács。“对偶化层的高阶直接像 III”。2025年。arXiv：2508.16507v2。[Kle05] Steven Kleiman。“皮卡德概形”。载于：基础代数几何。第123卷。Math. Surveys Monogr. 美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2005年，第235–321页。[KLM26] Yoon-Joo Kim、Radu Laza 和 Olivier Martin。“紧致超凯勒流形的等变拉格朗日纤维化”。载于：J. Math. Pures Appl.（9）205（2026年），论文编号103810。[KM98] János Kollár 和 Shigefumi Mori。代数簇的双有理几何。第134卷。Cambridge Tracts in Mathematics。剑桥大学出版社，剑桥，1998年。[Kod60] K. Kodaira。“关于紧致复解析曲面。I”。载于：Ann. of Math.（2）71（1960年），第111–152页。[Kod63] K. Kodaira。“关于紧致解析曲面。II、III”。载于：Ann. of Math.（2）77（1963年），第563–626页；78（1963年），第1–40页。[Kol25a] János Kollár。“带截面的阿贝尔纤维空间及其 Tate–Shafarevich 扭曲”。2025年。arXiv：2504.21705v1。[Kol25b] János Kollár。“Néron 模型、极小模型与双有理群作用”。2025年。arXiv：2502.13800v1。[Kol86] János Kollár。“对偶化层的高阶直接像。II”。载于：Ann. of Math.（2）124.1（1986年），第171–202页。[Kol96] János Kollár。代数簇上的有理曲线。第32卷。A Series of Modern Surveys in Mathematics。施普林格出版社，柏林，1996年，第viii+320页。[Liu02] Qing Liu。代数几何与算术曲线。第6卷。Oxford Graduate Texts in Mathematics。牛津大学出版社，2002年，第viii[页。24] LS[Bruno Laurent 和 Stefan Schröer。“拟阿贝尔簇与阿尔巴内塞映射”。载于：Bull. Braz. Math. Soc.（N.S.）55.1（2024年），论文编号4，第39页。01] Mat[Daisuke Matsushita。“全纯辛流形上拉格朗日纤维化的奇异纤维”。载于：Math. Ann. 321.4（2001年），第755–773页。17] Mil[James Milne。代数群。第170卷。Cambridge Studies in Advanced Mathematics。域上有限型群概形的理论。剑桥大学出版社，剑桥，2017年。66] MM[Hideyuki Matsumura 和 Masayoshi Miyanishi。“关于阿贝尔簇的某些对偶性”。载于：Nagoya Math. J. 27（1966年），第447–462页。70] Mum+242David Mumford。阿贝尔簇。第5卷。Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics。牛津大学出版社，1970年，第viii[页。24] Mur[Takumi Murayama。“概形、Stacks 与解析空间的单射定理和立方下降”。2024年。arXiv：2406.10800v1。25] Mur[Takumi Murayama。“Q-概形的相对消失定理”。载于：Algebr. Geom. 12.1（2025年），第84–144页。64] N[André Néron。“局部域和整体域上的阿贝尔簇的极小模型”。载于：Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 21（1964年），第128页。77] Nak[I. Nakamura。“Néron 模型的相对紧化及其应用”。载于：复分析与代数几何。Iwanami Shoten Publishers，1977年，第207–225页。10] Ngô[Bao Châu Ngô。“李代数的基本引理”。载于：Publ. Math. 高等科学研究所 111（2010年），第1–169页。66] RayMichel Raynaud。“Néron 模型”。载于：C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 262（1966年），A345–A347。

[Ray70] Michel Raynaud。群概形与齐性空间上的丰线丛。第119卷。数学讲义。施普林格出版社，柏林-纽约，1970年。[Saw22] Justin Sawon。“非常一般的拉格朗日纤维化的奇异纤维”。载于：Com- mun. Contemp. Math. 24.9（2022年），论文编号2150070，第19页。[Sch12] Christian Schnell。“任意中间雅可比簇族的复解析 Néron 模型”。载于：《数学发明》188.1（2012年），第1–81页。[Sch14] Karl Schwede。通过推出获得非正规簇。MathOverflow。https: //mathoverflow.net/q/186650（版本：2014-11-09）。2014年。[Ser88] Jean-Pierre Serre。代数群与类域。第117卷。数学研究生教材。由法文译出。施普林格出版社，纽约，1988年，第x+207页。[SGA 3_{I}] 群概形 I：群概形的一般性质。布瓦-马里代数几何研讨班 1962/64（SGA 3_{I}）。施普林格出版社，柏林-纽约，1970年。[SGA 7_{I}] 代数几何中的单值群 I。布瓦-马里代数几何研讨班 1967/69（SGA 7_{I}）。施普林格出版社，柏林-纽约，1972年。[Stacks] Stacks Project 作者。Stacks Project。https://stacks.math.columbia. edu。2024年。

哥伦比亚大学数学系，美国纽约州纽约市，邮编 10027 HCMC，韩国高等研究院，韩国首尔电子邮件地址：yk3029@columbia.edu