arXiv:2603.02354v1 [math.AP] 2 Mar 2026

二维纳维–斯托克斯方程在Lorentz空间中的唯一性

Alexandru F. Radu

2026年3月4日

摘要

我们研究环面上二维不可压纳维–斯托克斯方程在临界空间类中的温和解唯一性。尽管洛伦兹空间方法通过实插值和弱 L^2 控制，可得 $C([0,T);\, L^{2,\,1}(\mathbb{T}^2))$ 中的唯一性，但将这类论证推广到更大的洛伦兹空间 $L^{2,\,q}$, $1<q<2$ 时，会遇到端点障碍。本文证明，若假设每个重启时刻都具有短时间 L^∞ 平滑性质，即……，则 $C([0,T);\, L^{2,\,q}(\mathbb{T}^2))$ 中的唯一性成立。

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\ \sup_{t\in(T_0,T_0+\delta]}\ \sqrt{t-T_0}\,\|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}=0 \quad \text{for all } T_0\in[0,T).$$

该证明结合了重启温和形式、 L^1 的周期奥辛核 $e^{t\Delta}\mathbb{P}\nabla\cdot$界，以及显式的 Beta 函数计算，从而在短时间区间上得到严格的 L^2 压缩性。平滑性假设在 Kato 和 Koch–Tataru 型临界适定性框架中是自然的，并阐明了抛物正则化如何在唯一性论证中替代 Lorentz 端点结构。

1 引言

二维环面上的不可压缩纳维–斯托克斯方程$\mathbb{T}^2$ 为

$$\begin{cases} \partial_t v + v\cdot\nabla v - \Delta v + \nabla p = 0, \\ \nabla\cdot v = 0, \qquad (t,x)\in(0,T)\times\mathbb{T}^2, \\ v|_{t=0} = v_0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $v(t,\ x)\ \in\ \mathbb{R}^2$ 是速度，$p(t,\ x)\ \in\ \mathbb{R}$ 是压力。低正则性空间中解的唯一性 问题是现代分析研究方程 (1) 的核心主题，与理解双线性项 $B(v,\ v)\ =\mathbb{P}\nabla\cdot(v\otimes v)$ 的临界性、尺度变换和临界映射性质这一研究计划密切相关（其中 $\mathbb{P}$ 表示 Leray 投影算子）。

即使在二维中，Leray–Hopf弱解在经典能量框架下具有全局适定性，但当人们在< 楷体 id='1'>临界空间中工作，并且只假设温和解或分布形式，而不预先假设能量不等式或额外的时空可积性时，唯一性问题也会变得棘手。特别是，在临界尺度上，一个反复出现的困难是，乘积 $v\otimes w$ 可能无法在与抛物型核估计自然相关的函数空间中良好定义（或得到良好控制）。Lemari´e–Rieusset在多部著作中强调，临界空间中的唯一性取决于实插值、核估计和比较原理之间微妙的相互作用；关于广泛的视角，可参见专著 [6] 以及较新的著作 [7]，另请参见临界空间唯一性论文 [8] 和 Morrey–Campanato观点 [9]。

在 L^2尺度和Lorentz端点处的唯一性。描述临界行为的一种便捷方式，是用Lorentz空间替代Lebesgue空间。在 $\mathbb{T}^2$上，(1)的尺度变换形式上保持速度的 L^2 范数不变。从这个意义上说，类 $C([0,T);\ L^2(\mathbb{T}^2))$ 对二维数据而言是“临界”的。然而，压缩映射／温和解方法通常要求双线性算子 $B(\cdot,\ \cdot)$ 具备映射性质，而在这个端点处若无额外结构，这些性质通常是不可获得的。一种精细的替代方案是Lorentz空间 $L^{2,\ 1}$，它严格小于 L^2，并且具有更好的乘积估计。特别是，在Lemari´e– Rieusset的唯一性理论中，一个关键机制就是Lorentz估计

$$\|wz\|_{L^1}\ \lesssim\ \|w\|_{L^{2,1}}\|z\|_{L^{2,\infty}},\tag{2}$$

再结合实插值恒等式 $L^{2,\ \infty}\ =\ [L^1,L^\infty]_{1/2,\ \infty}$ 以及相应的 K–泛函控制。在二维周期情形下，这些思想可推出温和解在 $C([0,T);\ L^{2,\ 1}(\mathbb{T}^2))$ 中的唯一性（进而在 $C([0,T);\ L^p(\mathbb{T}^2))$ 中也成立），对每个 $p\ >\ 2$) 都如此。这一观察在文献和综述性讲义中以各种形式反复出现；例如参见 [6, 3]。

论文 [2]（其命题 1 是我们的起点之一）简洁且自成体系地实现了这一方法，基于 $\mathbb{T}^2$，并依赖

Oseen 型算子 $e^{t\Delta}\mathbb{P}\nabla\cdot$ 的周期核估计，以及将两个解之差分解为若干部分，分别在 L^1和 L^∞中加以控制，再通过 L^2中的洛伦兹插值重新组合。这与 Lemari´e–Rieusset 更广泛的研究纲领高度一致，即在临界纳维 – 斯托克斯理论中运用调和分析和实插值 [6, 9]。

本工作的动机。自然会问，能否将从 $L^{2,1}$ 得到的唯一性结论扩展到更大的 Lorentz 类 $L^{2,q}$,$1 < q < 2$ （仍严格包含于 L^2之中），甚至扩展到 L^2 本身。然而，式（2）背后的 Lorentz 类策略本质上与端点插值空间 $L^{2,\infty}$ 及实插值范数中的指数 ∞ 密切相关；试图用$L^2 = [L^1, L^\infty]_{1/2,2}$ 替代 $L^{2,\infty}$，会迫使我们引入一个积分型 K泛函，而对于 $r = \infty$ 行之有效的平衡方法，通常会在 $r = 2$中产生对数损失。这一现象与长期以来人们对 L^2 尺度下临界唯一性的关注是一致的。特别是，Lemari´e–Rieusset 曾讨论过 C（$[0, T]$; L^2（$\mathbb{T}^2$））这一情形，将其视为温和形式中的一个微妙端点问题：在此问题中，不假设额外的时空可积性或能量不等式，且双线性型可能无法通过朴素估计得到控制（相关背景和讨论参见 [7] ）。

与此同时，还有一种互补且影响深远的观点：与其只研究固定时刻的空间范数，不如构建能够体现抛物平滑的解空间。这包括 Kato 的强L^p 理论 [4], 尤其是 Koch 和 Tataru 的临界适定性定理 [5]。Koch–Tataru 为初始数据引入了空间 BMO^{-1}，并通过在一个函数空间中运用不动点论证构造了温和解；该函数空间除其他组成部分外，还控制时间加权的 L^∞ 范数:

$$\sup_{t>0} \sqrt{t}\,\|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} < \infty, \tag{3}$$

以及针对热流 [5] 特别设计的 Carleson／帐篷空间型半范数。这类界自然来自半群估计$\|e^{t\Delta}f\|_\infty \lesssim t^{-1/2}\|f\|_2$ （在二维情形下），而且在适定性类中具有时间平移稳定性：在时间 T_0 重启方程后，可得到相同的估计，只需将 t 替换为 $t - T_0$。Lemari´e–Rieusset 及其合作者多次探讨了临界空间中“Kato 温和解”与“Leray 型”解之间的关系（包括 BMO^{-1}），以及唯一性原理如何在两者之间传播；例如参见 [10]，以及 [6, 7]中的综述性研究。

主要结果及其阐释。 本文旨在证明，在假设短时间 L^∞平滑性质的前提下，可以将 $L^{2,1}$ 唯一性结论清晰地推广到更大的类 $L^{2,q}$, $1 < q < 2$。这类平滑性质是 Koch–Tataru/Kato 型框架中的标准条件。更确切地说，我们假设对于每个时刻 $T_0 \in [0, T)$，解都满足以下趋于零的时间加权界

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{t \in (T_0, T_0+\delta]} \sqrt{t - T_0}\, \|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} = 0. \tag{4}$$

条件（4）是对（3）的自然强化：它不仅要求 $\sqrt{t - T_0}\|v(t)\|_\infty$ 具有临界有界性，还要求其在任意重启时刻之后的短时间区间内足够小。这种“短时间小性”正是能够在 L^2 中完成压缩论证、而无需诉诸端点实插值方法的关键，并且它与时间平移不变的适定性类（包括 Koch–Tataru）相容。

主要结果应被视为一种空间可积性与抛物平滑之间的“权衡”：Lemari´e–Rieusset 的 $L^{2,1}$ 理论通过借助 Lorentz 结构强化空间端点来实现唯一性；我们的结果则通过施加一个（非常自然的）短时间L^∞ 平滑条件，允许使用更大的空间 $L^{2,q}$ ，而这一条件已内置于许多不动点构造之中。

与 Lemari´e–Rieusset 纲领的关系。证明受到 Lemari´e–Rieusset 的重启与比较思想 [6, 8, 9], 以及 [2] 中发展起来的周期核框架的启发。在 [2] 的命题 1 中（以 Lemari´e–Rieusset 的经典方法为基础），将差分 $w = v_1 - v_2$ 分解为若干项，并分别在 L^1 和 L^∞ 中进行估计，随后通过实插值在 $L^{2,\infty}$ 中完成临界重组。我们保留了关键的重启恒等式和周期核估计，但改变了闭合机制：我们只使用 L^1 核估计 $\|K_{\mathrm{per}}(t)\|_{L^1} \lesssim t^{-1/2}$ 和乘积估计 $\|v \otimes w\|_{L^2} \le \|v\|_{L^\infty}\|w\|_{L^2}$。条件（4）在于 T_0 处重启后提供了可积权重 $\|v(t)\|_{L^\infty} \lesssim (t - T_0)^{-1/2} \times$（足够小）。因此，时间奇性恰好变为

$$\int_{T_0}^{t} (t - s)^{-1/2}(s - T_0)^{-1/2}\, \mathrm{d}s,$$

其值有限，且等于 π（通过贝塔函数计算得到）。这使得在一个短时间区间（T_0, $T_0 + \delta$]）上构成严格压缩，随后标准的极大时间延拓论证便可推出 $w \equiv 0$ 在全局成立。

证明思路与论文结构。第2节回顾周期性温和解表述以及算子 $\mathrm{e}^{t\Delta}\mathbb{P}\nabla\cdot$ 的核估计，遵循 [2]，并采用标准的奥森核分析。我们还给出基本的洛伦兹嵌入 $L^{2,\,q} \hookrightarrow L^2$（适用于 $q \le 2$），从而将唯一性问题归结为一个 L^2 压缩论证。第3节给出主定理的证明。最后一节讨论（4）如何纳入现有的临界适定性理论，并将此处的机制与 [2] 命题 1 背后的洛伦兹插值策略，以及 Koch–Tataru [5]的临界 BMO^{-1} 框架进行比较。我们还会探讨其在其他情形下的可能推广（例如全空间、受迫方程或 Morrey 型解），这与 Lemari´e–Rieusset 的相关发展思路一致 [9,10, 7]。

致谢。 A.R. 部分获得了研究、创新与数字化部的资助，该资助由 CCCDI - UEFISCDI 提供，项目编号为 ROSUA-2024-0001，属于 PNCDI IV。作者谨此感谢 Liviu Ignat 在本文准备过程中给予的宝贵建议。

2 预备知识

2.1 记号与基本泛函分析框架

我们用 $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 表示二维平坦环面。除非另有说明，以下所有函数空间均定义在 $\mathbb{T}^2$ 上。对于 $1 \le p \le \infty$, $\|\cdot\|_p$ 表示 $L^p(\mathbb{T}^2)$ 范数。符号 $\lesssim$ 表示不等式在一个普适常数因子意义下成立；该常数可能依赖于维数（此处为 2）等固定参数，但不依赖于所考虑的时间变量。

我们用 $\mathbb{P}$ 表示 $\mathbb{T}^2$ 上投影到无散向量场空间的 Leray 投影算子，其傅里叶乘子定义为

$$\widehat{\mathbb{P}f}(k) = \left(I - \frac{k \otimes k}{|k|^2}\right)\widehat{f}(k), \qquad k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\},$$

$\widehat{\ }$ 以及 $\mathbb{P}f(0) = f(0)$。我们无需对均值施加任何归一化；该投影算子在 L^p 上对 $1 < p < \infty$ 有界，并作为一个 Calder´on–Zygmund 算子起作用。

在 $\mathbb{T}^2$ 上的纳维–斯托克斯方程为

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v + \mathbb{P}\nabla \cdot (v \otimes v) = 0, \\ \nabla \cdot v = 0, \\ v|_{t=0} = v_0. \end{cases} \tag{5}$$

这里 $v = v(t,\ x) \in \mathbb{R}^2$ 是速度，$v \otimes v$ 是元素为 $(v \otimes v)_{ij} = v_i v_j$ 的 2×2 矩阵。

2.2 周期性温和解表述与时间重启

设 $(e^{t\Delta})_{t\geq 0}$ 表示 $\mathbb{T}^2$ 上的热半群。我们回顾，$e^{t\Delta}$ 在所有 L^p 空间上都是压缩，并且满足标准的平滑估计

$$\|e^{t\Delta} f\|_\infty \lesssim t^{-1/2}\|f\|_2, \qquad 0 < t \leq 1, \tag{6}$$

以及类似的 $L^p \to L^r$ 估计。

我们称 v 是 (5) 在 $[0,T)$ 上的温和解，如果对每个 t，$v \in C([0,T); L^2(\mathbb{T}^2))$ 都是无散的（在分布意义下），并且满足积分方程

$$v(t) = e^{t\Delta} v_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\, \mathbb{P}\nabla \cdot \big(v(s) \otimes v(s)\big)\, \mathrm{d}s, \qquad 0 \leq t < T. \tag{7}$$

等价地，可以将杜哈梅尔项改写为与时间相关核 $K_{\mathrm{per}}(t,\ \cdot)$ 的空间卷积，该核是与算子 $e^{t\Delta}\mathbb{P}\nabla\cdot$ 相关联的周期性 Oseen 型核。具体而言，对每个固定的 $t > 0$，$K_{\mathrm{per}}(t,\ \cdot)$ 是一个 $2\times 2\times 2$ 张量值核，使得

$$e^{t\Delta}\mathbb{P}\nabla \cdot F = K_{\mathrm{per}}(t,\cdot) * F \qquad \text{for all suitable matrix fields } F, \tag{8}$$

其中，$*$ 表示在 $\mathbb{T}^2$ 上的卷积，指标的缩并采用自然方式（因此输出为一个向量场）。我们只会用到 K_{per} 上的范数界，不需要显式公式。

时间重启。 式（7）的一个关键特点是，可以在任意中间时刻重新开始。固定 $T_0 \in [0,T)$ 并令 $v(T_0) \in L^2(\mathbb{T}^2)$。利用半群性质 $e^{t\Delta} = e^{(t-T_0)\Delta} e^{T_0\Delta}$ 并拆分杜哈梅积分，可直接验证式（7）等价于以下重启表述：对所有 $t \in [T_0, T)$，

$$v(t) = e^{(t-T_0)\Delta} v(T_0) - \int_{T_0}^t e^{(t-s)\Delta}\, \mathbb{P}\nabla \cdot \big(v(s) \otimes v(s)\big)\, \mathrm{d}s. \tag{9}$$

等价地，用核的形式表示为，

$$v(t) = e^{(t-T_0)\Delta} v(T_0) - \int_{T_0}^{t} K_{\mathrm{per}}(t-s,\cdot) * \big(v(s) \otimes v(s)\big)\, \mathrm{d}s. \tag{10}$$

恒等式（9）–（10）是 Lemari´e–Rieusset 方法以及 [2] 中所用的最大时间重合论证的出发点。

2.3 $e^{t\Delta}\mathbb{P}\nabla\cdot$ 在 $\mathbb{T}^2$ 上的核估计

我们记录下全文将用到的周期核估计。以下估计是标准结果，其（基本上以此形式）见于 [2]；可以从 $\mathbb{R}^2$ 上相应的全空间 Oseen 核出发，再利用全空间核在远离原点处的衰减进行周期化，从而证明这些估计。

引理 2.1（周期核估计）。设 $K_{\mathrm{per}}(t,\cdot)$ 是如（8）中所述的算子 $e^{t\Delta}\mathbb{P}\nabla\cdot$ 在 $\mathbb{T}^2$ 上的周期核。那么存在常数 $C>0$，使得对所有 $t>0$，

$$\|K_{\mathrm{per}}(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} \le C\, t^{-1/2}, \tag{11}$$

and

$$\|K_{\mathrm{per}}(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \le C\,(1 + t^{-3/2}). \tag{12}$$

证明略述。证明是经典的；我们简要说明其原理，并请参阅 [2]，其中对周期情形作了详细介绍。

在 $\mathbb{R}^2$ 上，$e^{t\Delta}\mathbb{P}\nabla\cdot$ 的核是（张量值）Oseen 核 $K(t,\ x)$，它满足逐点估计（当 $t>0$ 时）

$$|K(t,x)| \ \lesssim\ \frac{1}{(\sqrt{t}+|x|)^3}, \tag{13}$$

这反映了热核的一个空间导数与 Calder´on– Zygmund 投影的组合。由 (13) 可得

$$\|K(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \lesssim t^{-1/2}, \qquad \|K(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \lesssim t^{-3/2}.$$

周期核通过周期化获得

$$K_{\mathrm{per}}(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} K(t, x+n)$$

（在分布的意义下）。利用 (13)， $n = 0$ 项产生与 $t \downarrow 0$相同的奇异行为，而项 $n \neq 0$ 则贡献一致有界的尾项，因为对于 $x \in \mathbb{T}^2$，$|x + n| \gtrsim 1$。由此得到 (11) 和 (12)；(12) 中额外出现的无关紧要的“$+1$”来自 $n \neq 0$ 尾项。关于详细的周期性推导和常数，请参见 [2], 命题 1 及其中引用的核估计。 □

我们强调，我们的主要唯一性证明仅使用(11)和杨氏不等式

$$\|K_{\mathrm{per}}(t-s,\cdot) * F\|_{L^2} \;\le\; \|K_{\mathrm{per}}(t-s,\cdot)\|_{L^1}\, \|F\|_{L^2}. \tag{14}$$

更强的 L^∞ 界(12)在Lemari´e–Rieusset和 [2], 的洛伦兹端点论证中是必不可少的，但不会进入我们的 L^2 压缩闭包。

2.4 Lorentz空间与嵌入 $L^{2,\,q} \hookrightarrow L^2$

我们简要回顾Lorentz空间 $L^{p,\,r}(\mathbb{T}^2)$，并记录将我们的唯一性陈述归结为一个 L^2 论证所需的嵌入。

定义。 对于 $\mathbb{T}^2$上的可测函数 f，令 f^* 表示其递减重排。对于 $1 \le p < \infty$ 和 $1 \le r \le \infty$，洛伦兹范数定义为

$$\|f\|_{L^{p,r}} := \begin{cases} \displaystyle\left(\int_0^{|\mathbb{T}^2|} \left[t^{1/p} f^*(t) \right]^r \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/r}, & 1 \le r < \infty, \\[2ex] \displaystyle\sup_{0<t<|\mathbb{T}^2|} t^{1/p} f^*(t), & r = \infty. \end{cases}$$

我们回顾第二个指标上的单调性：对于固定的 p，若 $1 \le r_1 \le r_2 \le \infty$，则

$$L^{p,r_1}(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow L^{p,r_2}(\mathbb{T}^2) \qquad \text{and} \qquad \|f\|_{L^{p,r_2}} \le C\, \|f\|_{L^{p,r_1}}. \tag{15}$$

特别地， $L^{p,p} = L^p$。

引理 2.2（嵌入 $L^{2,q} \hookrightarrow L^2$ 对于 $q \le 2$）。 设 $1 \le q \le 2$。则

$$L^{2,q}(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{T}^2)$$

连续地。特别地，如果 $v \in C([0,T)\; L^{2,q})$ 满足 $q \le 2$，那么 $v \in C([0,T)\; L^2)$。

证明。 由于 $L^{2,2}=L^2$，由 (15) 取 $p=2, r_1=q, r_2=2$ 即可立即得出结论：

$$\|f\|_{L^2}=\|f\|_{L^{2,2}}\le C\,\|f\|_{L^{2,q}}.$$

时间连续性在连续嵌入下得以保持：若 $t\mapsto v(t)$ 在 $L^2\cap H^q$ 连续，且到 L^2 的嵌入是连续的，则 $t\mapsto v(t)$ 在 L^2 中连续。

□

2.5 主要证明中使用的一个基本 L^2 乘积不等式

我们记录一个初等乘积估计，在有了一个 L^∞ 界之后，可用它将纳维–斯托克斯非线性项放入 L^2 。

引理 2.3。 对于 $f\in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ 和 $g\in L^2(\mathbb{T}^2)$，有 $fg\in L^2(\mathbb{T}^2)$ 以及

$$\|fg\|_{L^2}\le\|f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^2}.$$

因此，对于向量场 a、b，

$$\|a\otimes b\|_{L^2}\le\|a\|_{L^\infty}\|b\|_{L^2}.$$

证明。 由 L^∞ 的定义和柯西–施瓦茨不等式可立即得到：

$$\|fg\|_2^2=\int_{\mathbb{T}^2}|f|^2|g|^2\le\|f\|_\infty^2\int_{\mathbb{T}^2}|g|^2=\|f\|_\infty^2\|g\|_2^2.$$

张量估计可逐分量得出。 □

引理 2.1（尤其是 (11)）、引理 2.2 和引理 2.3 将构成第3节中 L^2 压缩论证的分析基础。短时平滑假设 (16) 的作用是确保在任意重启时刻 T_0 之后，$\|v(t)\|_{L^\infty}$ 的表现类似于 $(t-T_0)^{-1/2}$，且前面的系数足够小，从而使沃尔泰拉核 $(t-s)^{-1/2}(s-T_0)^{-1/2}$可积，并在经过足够短的重启间隔后得到严格压缩。

3 主要结果

定理 3.1。 设 $T \in (0,\ \infty]$ 且令 $1 < q < 2$。设 v_1、v_2 是周期性纳维–斯托克斯方程在 $[0,T) \times \mathbb{T}^2$ 上的温和解，且具有相同的初始数据

$$v_1(0) = v_2(0) \in L^{2,q}(\mathbb{T}^2).$$

假设：

1. $v_j \in C([0,T);\ L^{2,\,q}(\mathbb{T}^2))$ 当 $j = 1$ 时，2。

2.（每个重启时刻的短时平滑效应）对于每个 $T_0 \in [0,T)$，

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{t \in (T_0, T_0+\delta]} \sqrt{t - T_0}\, \|v_j(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} = 0, \qquad j = 1, 2. \tag{16}$$

那么 $v_1 \equiv v_2$ 在 $[0,T)$.

证明。 **步骤 1**。 由于 $1 < q < 2$，第二个指标上的洛伦兹嵌入单调性给出

$$L^{2,q}(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow L^{2,2}(\mathbb{T}^2) = L^2(\mathbb{T}^2)$$

连续地。因此 $v_j \in C([0,T);\ L^{2,q})$ 蕴含 $v_j \in C([0,T);\ L^2)$，从而

$$w := v_1 - v_2 \in C([0,T), L^2(\mathbb{T}^2)).$$

步骤 2. 定义

$$T^* := \sup\{S \in [0,T) : w(t) = 0 \text{ in } L^2 \text{ for all } t \in [0,S)\}.$$

若 $T^* = T$，则已完成。假设 $T^* < T$。由于 $w \in C([0,T);\ L^2)$ 且 $w(t) = 0$ 对 $t < T^*$ 成立，我们有

$$w(T^*) = 0 \quad \text{in } L^2(\mathbb{T}^2). \tag{17}$$

步骤 3。 根据温和解的时间重启性质，对每个 $j = 1$，2 以及所有 $t \in [T^*, T)$，

$$v_j(t) = e^{(t-T^*)\Delta} v_j(T^*) - \int_{T^*}^{t} K_{\mathrm{per}}(t-s) * \big(v_j(s) \otimes v_j(s)\big)\, ds, \tag{18}$$

其中 K_{per} 是与 Leray 投影算子相关的周期性 Oseen 型核。将 $j=1$ 和 $j=2$对应的恒等式 (18) 相减，由于 (17)，线性项相互抵消，因此

$$w(t) = -\int_{T^*}^{t} K_{\mathrm{per}}(t-s) * \Big(v_1(s)\otimes v_1(s) - v_2(s)\otimes v_2(s) \Big)\, ds. \tag{19}$$

利用代数恒等式

$$v_1\otimes v_1 - v_2\otimes v_2 = (v_1-v_2)\otimes v_1 + v_2\otimes (v_1-v_2) = w\otimes v_1 + v_2\otimes w,$$

我们将 (19) 改写为

$$w(t) = -\int_{T^*}^{t} K_{\mathrm{per}}(t-s) * \Big(w(s)\otimes v_1(s) + v_2(s)\otimes w(s) \Big)\, ds. \tag{20}$$

步骤 4. 我们使用核估计

$$\|K_{\mathrm{per}}(t)\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} \le C\, t^{-1/2}, \qquad t>0. \tag{21}$$

固定 $t\in[T^*,T)$。在 (20) 中取 L^2范数并利用三角不等式，可得

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_2 \le & \int_{T^*}^{t} \big\| K_{\mathrm{per}}(t-s) * \big(w(s)\otimes v_1(s) \big) \big\|_2 \, ds \\ & + \int_{T^*}^{t} \big\| K_{\mathrm{per}}(t-s) * \big(v_2(s)\otimes w(s) \big) \big\|_2 \, ds. \end{aligned} \tag{22}$$

由杨氏不等式 $L^1 * L^2 \to L^2$ 及 (21),

$$\|K_{\mathrm{per}}(t-s) * F\|_2 \le \|K_{\mathrm{per}}(t-s)\|_1 \|F\|_2 \le C(t-s)^{-1/2}\|F\|_2,$$

因此由 (22)

$$\|w(t)\|_2 \le C\int_{T^*}^{t} (t-s)^{-1/2}\, \|w(s)\otimes v_1(s)\|_2\, ds + C\int_{T^*}^{t} (t-s)^{-1/2}\, \|v_2(s)\otimes w(s)\|_2\, ds. \tag{23}$$

利用乘积估计 $L^\infty\times L^2 \subset L^2$,

$$\|w(s)\otimes v_1(s)\|_2 \le \|v_1(s)\|_\infty \|w(s)\|_2, \qquad \|v_2(s)\otimes w(s)\|_2 \le \|v_2(s)\|_\infty \|w(s)\|_2,$$

我们得到

$$\|w(t)\|_2 \le C \int_{T^*}^{t} (t-s)^{-1/2} \big(\|v_1(s)\|_\infty + \|v_2(s)\|_\infty \big) \|w(s)\|_2 \, ds. \tag{24}$$

步骤 5. 固定 $\delta \in (0, \min\{1, T - T^*\})$，并限制到 $t \in [T^*, T^* + \delta]$。定义

$$M(\delta) := \sup_{s \in (T^*, T^* + \delta]} \sqrt{s - T^*} \, \big(\|v_1(s)\|_\infty + \|v_2(s)\|_\infty \big). \tag{25}$$

则对于 $s \in (T^*, T^* + \delta]$,

$$\|v_1(s)\|_\infty + \|v_2(s)\|_\infty \le \frac{M(\delta)}{\sqrt{s - T^*}}. \tag{26}$$

根据假设 (16) 在 $T_0 = T^*$ 处对每个 v_j 的应用，我们有

$$\lim_{\delta \downarrow 0} M(\delta) = 0. \tag{27}$$

接下来，令

$$\|w\|_{L^2_\delta} := \sup_{t \in [T^*, T^* + \delta]} \|w(t)\|_2.$$

利用 (24)、(26) 以及 $\|w\|_{L^2_\delta}$ 的定义，对 $t \in [T^*, T^* + \delta]$ 可得 ,

$$\|w(t)\|_2 \le C \, M(\delta) \, \|w\|_{L^2_\delta} \int_{T^*}^{t} (t-s)^{-1/2} (s - T^*)^{-1/2} \, ds. \tag{28}$$

显式计算该积分。令 $a := t - T^* > 0$，并设 $s = T^* + a\theta$、$ds = a \, d\theta$、$\theta \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \int_{T^*}^{t} (t-s)^{-1/2} (s - T^*)^{-1/2} \, ds &= \int_0^1 (a(1-\theta))^{-1/2} (a\theta)^{-1/2} \, a \, d\theta \\ &= \int_0^1 \theta^{-1/2} (1-\theta)^{-1/2} \, d\theta \\ &= \mathrm{B}\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) = \pi. \end{aligned}$$

因此，(28) 变为

$$\|w(t)\|_2 \le C\pi \, M(\delta) \, \|w\|_{L^2_\delta} \qquad \forall t \in [T^*, T^* + \delta].$$

对 $t \in [T^*, T^* + \delta]$ 取上确界，得到

$$\|w\|_{L^2_\delta} \le C\pi\, M(\delta)\, \|w\|_{L^2_\delta}. \tag{29}$$

步骤 6。 根据 (27)，取 $\delta > 0$ 足够小，使得 $C\pi\, M(\delta) < 1$。于是 (29) 推出 $\|w\|_{L^2_\delta} = 0$，即对所有 $t \in [T^*, T^* + \delta]$，$w(t) = 0$ 属于 L^2。除非 $T^* = T$，否则这与 T^* 的定义矛盾。因此 $T^* = T$，且 $v_1 \equiv v_2$ 于 $[0, T)$。□

4 应用：主要结果的推论。

本节给出定理 3.1 的两个推论。第一个是一个“桥接”命题，将 Lorentz 数据解与 Kato/Koch–Tataru 型路径空间联系起来。第二个是 L^2 中的定量短时间稳定性估计（特别是对重启数据的 Lipschitz 型依赖）。

4.1 Koch–Tataru/Kato 型解的唯一性

我们首先提炼出 Koch–Tataru 框架中与唯一性论证相关的解析特征。在 [5], Koch 和 Tataru 为 BMO^{-1} 中的小初值构造了 $\mathbb{R}^d$ 温和解，其解空间尤其能够控制带时间权重的 L^∞ 范数 $\sup_{t>0} \sqrt{t}\|u(t)\|_\infty$（以及帐篷空间 Carleson 型范数）。一个关键点是，他们的解空间具有时间平移不变性，因此在任意时刻 T_0重启后，都能获得同类控制。（另见 [1] 关于 Koch–Tataru 结果的算子理论证明。）

在环面 $\mathbb{T}^2$ 上，可以提出一种类似的“Kato/Koch–Tataru 类型”路径空间假设，专门用于推出短时间平滑条件 (16)。就我们的目的而言，采用以下抽象定义便已足够。

定义 4.1（重启平滑路径类）。 设 $T \in (0, \infty]$。我们称定义在 $[0, T)$ 上的温和解 $v \times \mathbb{T}^2$ 属于类 $\mathcal{X}_0([0, T))$，如果对于每个重启时刻 $T_0 \in [0, T)$，

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{t \in (T_0, T_0 + \delta]} \sqrt{t - T_0}\, \|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} = 0. \tag{30}$$

当然，定义 4.1 与 (16) 完全相同（因此是为 3.1 量身定制的）。关键在于，许多标准的临界温和解构造都满足 (30)：例如，在 Koch–Tataru 框架中，临界理论的“消失”版本（通常与 VMO^{-1} 数据相关）会将小量性 $\lim_{t\downarrow 0}\sqrt{t}\|u(t)\|_\infty = 0$ 作为解空间拓扑的一部分，而时间平移不变性则进一步推出对所有 T_0 都成立的重启版本（见[5]以及后续论述中关于消失子空间的讨论）。

推论 4.2 (在 $C_t L^2_{,x}{}^q$中，在 $\mathcal{X}_0$内的唯一性)。 设 $T \in (0,\infty]$ 且令$1 < q < 2$。设 v_1, v_2 是定义在 $[0,T) \times \mathbb{T}^2$ 上的温和解，使得

$$v_1, v_2 \in C([0,T), L^{2,q}(\mathbb{T}^2)) \cap \mathcal{X}_0([0,T)).$$

若 $v_1(0) = v_2(0)$ 属于 $L^{2,q}(\mathbb{T}^2)$，则 $v_1 \equiv v_2$ 在 $[0,T)$上。

证明。 由于 $q < 2$，我们有连续嵌入 $L^{2,q}(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{T}^2)$，因此 $v_j \in C([0,T);\, L^2)$，且差值 $w = v_1 - v_2$属于 $C([0,T);\, L^2)$。此外，$v_1, v_2 \in \mathcal{X}_0([0,T))$ 意味着每个 v_j 都满足短时重启平滑条件 (16)（T_0 任意）。因此，定理 3.1 的所有假设均已满足，从而得到 $v_1 \equiv v_2$。 □

注 4.3（与 Koch–Tataru 的衔接方式）。 推论 4.2 可视为一项桥接结论：如果某个温和解属于 Koch–Tataru/Kato 型路径空间，且该空间蕴含重启消失估计 (30)（例如，与 VMO^{-1}data 相关的 Koch–Tataru 空间中的消失子类），那么在满足相同重启平滑条件的所有 $C([0,T);\, L^{2,q})$ 温和解中，它是唯一的。从这个意义上说，短时抛物平滑取代了经典 Lemari´e–Rieusset 论证中使用的 Lorentz 端点结构（$L^{2,1}$ 与 $L^{2,\infty}$）。

4.2 短时稳定性in L^2

现在我们记录一个在压缩证明中隐含的定量估计。在短时间区间内，该估计给出了解关于 L^2 拓扑下重启数据的 Lipschitz 型依赖，并带有一个显式的稳定性因子。

推论 4.4 （重启平滑下的短时 L^2 稳定性）。 设 $T \in$（0，∞] 且设 $1 < q < 2$。令 v_1、v_2 为定义在 $[0,T)$ $\times \mathbb{T}^2$ 上的温和解，满足

$$v_1, v_2 \in C([0,T), L^{2,q}(\mathbb{T}^2)),$$

并假设对于某个固定的重启时刻 $T_0 \in [0,T)$，以下小量条件成立：

$$M_{T_0}(\delta) := \sup_{t\in(T_0,T_0+\delta]} \sqrt{t-T_0}\left(\|v_1(t)\|_{L^\infty} + \|v_2(t)\|_{L^\infty}\right) \le m, \tag{31}$$

对某个 $\delta \in (0, \min\{1, T-T_0\})$ 以及某个 $m \ge 0$。

那么差值 $w = v_1 - v_2$ 在 $[T_0, T_0+\delta]$上满足，

$$\sup_{t\in[T_0,T_0+\delta]} \|w(t)\|_{L^2} \le \frac{\|w(T_0)\|_{L^2}}{1-\kappa}, \qquad \kappa := C\pi\, m, \tag{32}$$

其中 C 是核估计 $\|K_{\mathrm{per}}(t)\|_{L^1} \le Ct^{-1/2}$中的常数。特别地，若 $\kappa < 1$，则每当 $w(T_0) = 0$时，$v_1 \equiv v_2$ 在 $[T_0, T_0+\delta]$ 上成立。

证明。**步骤 1**。如定理 3.1 的证明所示，由于 $q < 2$，我们有 $L^{2,q} \hookrightarrow L^2$，因而 $v_j \in C([0,T);\, L^2)$，所以 $w := v_1 - v_2 \in C([0,T);\, L^2)$。在时刻 T_0重新开始采用温和形式：

$$v_j(t) = e^{(t-T_0)\Delta} v_j(T_0) - \int_{T_0}^{t} K_{\mathrm{per}}(t-s) * \big(v_j(s)\otimes v_j(s)\big)\, ds, \qquad t \in [T_0, T).$$

相减得

$$w(t) = e^{(t-T_0)\Delta} w(T_0) - \int_{T_0}^{t} K_{\mathrm{per}}(t-s) * \Big(w(s)\otimes v_1(s) + v_2(s)\otimes w(s)\Big)\, ds. \tag{33}$$

步骤 2。对 (33) 取 L^2 范数。利用热半群在 L^2上是压缩映射，

$$\|e^{(t-T_0)\Delta} w(T_0)\|_2 \le \|w(T_0)\|_2,$$

并使用杨氏不等式 $L^1 * L^2 \to L^2$ 以及 $\|K_{\mathrm{per}}(t)\|_1 \le Ct^{-1/2}$，对于 $t \in [T_0, T_0+\delta]$，我们得到：

$$\|w(t)\|_2 \le \|w(T_0)\|_2 + C\int_{T_0}^{t} (t-s)^{-1/2}\, \|w(s)\otimes v_1(s)\|_2\, ds + C\int_{T_0}^{t} (t-s)^{-1/2}\, \|v_2(s)\otimes w(s)\|_2\, ds. \tag{34}$$

使用 $\|fg\|_2 \le \|f\|_\infty \|g\|_2$，

$$\|w(s)\otimes v_1(s)\|_2 \le \|v_1(s)\|_\infty \|w(s)\|_2, \qquad \|v_2(s)\otimes w(s)\|_2 \le \|v_2(s)\|_\infty \|w(s)\|_2,$$

因此（34）变为

$$\|w(t)\|_2 \le \|w(T_0)\|_2 + C\int_{T_0}^{t} (t-s)^{-1/2}\big(\|v_1(s)\|_\infty + \|v_2(s)\|_\infty\big)\|w(s)\|_2\, ds. \quad (35)$$

步骤 3. 由 (31)，对于 $s \in (T_0,\ T_0+\delta]$ 我们有

$$\|v_1(s)\|_\infty + \|v_2(s)\|_\infty \le \frac{m}{\sqrt{s-T_0}}.$$

定义

$$\|w\|_{L^2_\delta} := \sup_{t\in[T_0,T_0+\delta]} \|w(t)\|_2.$$

那么，对于 $t \in [T_0, T_0+\delta]$，（35）意味着

$$\|w(t)\|_2 \le \|w(T_0)\|_2 + Cm\,\|w\|_{L^2_\delta} \int_{T_0}^{t} (t-s)^{-1/2}(s-T_0)^{-1/2}\, ds. \qquad (36)$$

精确计算时间积分：令 $a = t - T_0 > 0$ 和 $s = T_0 + a\theta$，

$$\int_{T_0}^{t} (t-s)^{-1/2}(s-T_0)^{-1/2}\, ds = \int_0^1 \theta^{-1/2}(1-\theta)^{-1/2}\, d\theta = \mathrm{B}\Big(\frac12,\frac12\Big) = \pi.$$

因此，（36）得出

$$\|w(t)\|_2 \le \|w(T_0)\|_2 + C\pi m\,\|w\|_{L^2_\delta}, \qquad t \in [T_0, T_0+\delta].$$

对 $t \in [T_0, T_0+\delta]$ 取上确界，得到

$$\|w\|_{L^2_\delta} \le \|w(T_0)\|_2 + C\pi m\,\|w\|_{L^2_\delta}.$$

整理后，

$$(1-\kappa)\|w\|_{L^2_\delta} \le \|w(T_0)\|_2, \qquad \kappa := C\pi m.$$

若 $\kappa < 1$，则由此可得 (32)。最后，若 $w(T_0) = 0$，则 $\|w\|_{L^2_\delta} = 0$，从而在 $[T_0, T_0+\delta]$ 上有 $v_1 \equiv v_2$。 □

注 4.5。若 v_1，v_2 在时刻 T_0 满足重启消失平滑条件 (16)，则当 $\delta \downarrow 0$ 时 $M_{T_0}(\delta) \to 0$。特别地，可以选取 δ，使得 (32) 中 $\kappa < 1$。令 $T_0 = T^*$（最大重合时刻）以及 $w(T^*) = 0$，推论 4.4 复现了定理 3.1 中的关键压缩步骤。

5 利益冲突声明

作者声明无利益冲突。

6 关于在稿件准备过程中使用生成式人工智能和人工智能辅助技术的声明

作者在稿件准备过程中未使用生成式人工智能和人工智能辅助技术。

参考文献

[1] P. Auscher 和 D. Frey，对 *Koch* 和 *Tataru* 关于纳维–斯托克斯方程适定性结果的一个新证明，载于 BMO^{-1}，预印本，arXiv:1310.3783。

[2] *P.-G. Lemari´e–Rieusset*，环面上二维纳维–斯托克斯方程的高度奇异（频域稀疏）稳态解，《泛函分析杂志》*288*（*2025*），第*4*期，*110761*。 doi:10.1016/j.jfa.2024.110761。[3]*J. He*，关于 $2D$ 中纳维–斯托克斯解的唯一性的注记，预印本（*2024*）。可于 https://jiao-math.github.io/jiao.he/research/uniqueness_2D-NS.pdf 获取。[4] *T. Kato*， $\mathbb{R}^m$ 中纳维–斯托克斯方程的强 L^p-解及其对弱解的应用，《数学杂志》*187*（*1984*），*471–480*。 https://eudml.org/doc/173504。[5] *H. Koch* 和 *D. Tataru*，纳维–斯托克斯方程的适定性，《数学进展》*157*（*2001*），*22–35*。 https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870800919376。[6]*P.-G. Lemari´e–Rieusset*，纳维–斯托克斯问题的最新进展，*Chapman & Hall/CRC* 数学研究笔记，*431*，*2002*。https://www.taylorfrancis.com/books/mono/10.1201/9780367801656/recent-developments-navier-stokes-problem-pierre-gilles-lemarie-rieusset。

[7]P.-G. Lemari´e–Rieusset, 《*21*世纪的纳维–斯托克斯问题》，第2版，CRCPress，2023年。https://www.routledge.com/The-Navier-Stokes-Problem-in-the-21st-Century/Lemarie-Rieusset/p/book/9780367487263。

[8] P.-G.Lemari´e–Rieusset，纳维–斯托克斯问题的唯一性：关于 *Jean-Yves Chemin* 定理的评述，《非线性》**20**（2007），第 6 期，1475–1490。https://www.maths.univ-evry.fr/pages_perso/lemarie/publi/107_kritik.pdf。

[9] P.-G. Lemari´e–Rieusset，临界*Morrey–Campanato*空间中的纳维–斯托克斯方程，《伊比利亚美洲数学杂志》**23** （2007），第 3 期，897–930。https://ems.press/content/serial-article-files/38217。

[10] P.-G. Lemari´e–Rieusset 和 N. Prioux，具有 数据的纳维–斯托克斯方程，《非线性分析》**70** （2009），1612–1633。可从作者主页获取：https://math.maths.univ-evry.fr/lemarie/publi/107_Lemarie_Prioux.pdf。

"Simion Stoilow" Institute of Mathematics of the Romanian Academy, Calea Grivitei Street, no. 21, 010702 Bucharest, Ro-mania.

电子邮箱地址：sasharadu@icloud.com。