arXiv:2603.02358v1 [math.AC] 2 Mar 2026

补边理想的关联素理想稳定集

ANTONINO FICARRA

Abstract. 我们明确确定补边理想每个幂的关联素理想，证明它们满足持续性，并计算 v-函数。在证明过程中，我们全面描述了所有由次数相对于定义它们的变量数较大的平方自由单项式理想的各个幂的同调性质。

Introduction

1979年，Brodmann [4]证明，诺特环中理想 I 的各次幂的关联素理想集 Ass(I^k) 最终会稳定：存在一个整数 $k_0 > 0$，使得对于所有 $k \geq k_0$，都有 Ass(I^k) =Ass(I^{k_0})。满足这一性质的最小整数 k_0 称为 I 的关联素理想稳定指数，记作 astab(I)。类似地，集合 Ass(I^{k_0}) 称为 I 的关联素理想稳定集，记作 Ass$^\infty$(I)。

设 $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ 是域 K上的标准分次多项式环，$I \subset S$ 是一个单项式理想。那么，I 的关联素理想都是单项式素理想。设 $[n] = \{1, \ldots, n\}$。单项式素理想是形如 $P_F = (x_i : i \in F)$ 的理想，其中 $F \subset [n]$是一个子集。关于何时 $P_F \in$ Ass$^\infty$(I，文献 [1, 2], 给出了一个非常一般且有效的判据（另见 [19, 定理 2.1]）。由于 $[n]$只有有限多个子集，因此，确定单项式理想 $I \subset S$ 的稳定指标 astab(I) 和 Ass$^\infty$(I) 是可行的问题。

一般而言，若 $P_F \in$Ass(I^k)，则不一定有 $P_F \in$ Ass(I^{k+1})。如果 I 满足持续性，则称其满足

$$\mathrm{Ass}(I) \subset \mathrm{Ass}(I^2) \subset \mathrm{Ass}(I^3) \subset \cdots.$$

在这种情况下，Ass$^\infty$(I) $= \bigcup_{k\geq 1}$Ass(I^k)。并非所有单项式理想都满足持续性。另一方面，Mart´ınez-Bernal、Morey 和 Villarreal 证明了由次数为 2 的平方自由单项式生成的理想满足持续性，见 [28, 定理 2.15]。这些理想称为边理想 [31]。给定一个有限简单图 G，其顶点集为 $V(G) = [n]$，边集为 $E(G)$，则G的边理想是由 S 定义的平方自由单项式理想

$$I(G) = (x_i x_j : \{i, j\} \in E(G)).$$

任何由次数为 2 的平方自由单项式生成的理想都是边理想。在 [26], Lam 和 Viet Trung 描述了任意图 G 及所有 $k \geq 1$的 Ass($I(G)^k$)。

2020 数学学科分类。主要分类号：13D02、13C05、13A02；次要分类号：05E40。关键词和短语。持续性、补边理想、单项式理想。

设 $I \subset S$ 是一个由次数为 $n-2$的平方自由单项式等次生成的理想。正如 [15, 25] 所指出的， I 可视为补边理想

$$I_c(G) = ((x_1 \cdots x_n)/(x_i x_j) : \{i,j\} \in E(G))$$

有限简单图 G 的顶点集为 $[n]$。 G 的组合学与 $I_c(G)$ 的代数性质之间存在丰富的相互作用， [14, 15, 16, 25, 27]中的结果对此作了突出说明。

给定有限简单图 G 和 $i \in V(G)$，令 $\deg_G(i) = |\{j : \{i,j\} \in E(G)\}|$。于是，当且仅当 $\deg_G(i) = 0$时， $i \in V(G)$ 是孤立顶点。记 $b(G)$ 为 G 中顶点数多于一个的二分连通分支的数量。我们将 G 在 $F \subset [n]$上的诱导子图记为 $G|_F$。受 $\operatorname{Ass}(I(G)^k)$ 集合的显著行为启发（见 [26, 28]），本文证明：

定理 A。令 G 为顶点集为 $[n]$ 且满足 $n \geq 3$的有限简单图。那么$I_c(G)$满足持续性：

$$\operatorname{Ass}(I_c(G)) \subset \operatorname{Ass}(I_c(G)^2) \subset \operatorname{Ass}(I_c(G)^3) \subset \cdots .$$

此外，

$$\operatorname{Ass}^\infty(I_c(G)) = \{P_{\{i\}} : \deg_G(i) = 0\} \cup \{P_F : |F| > 1, \widetilde{b}(G|_F) = 0\}.$$

且 $I_c(G)$ 的稳定指标为 $\leq n-2$。

为证明这一结果，我们采用如下策略。设 $I \subset S$ 是一个单项式理想，其极小单项式生成集为 $\mathcal{G}(I)$。给定非空的 $F \subset [n]$，我们令$S_F = K[x_i : i \in F]$。我们定义 K-线性映射 $\varphi_F : S \to S_F$，规定 $\varphi_F(x_i) = x_i$（当 $i \in F$ 时），而在其他情况下 $\varphi_F(x_j) = 1$。单项式理想 $I(P_F) = \varphi_F(I) \subset S_F$称为 I 在 P_F 处的单项式局部化。具体而言， $I(P_F)$ 是由 S_F 得到的单项式理想，其构造方法是将 I 中所有满足 $j \notin F$ 的变量 x_j 替换为 1。

当且仅当深度 $S_F/I(P_F) = 0$ 时，我们有 $P_F \in$伴随素理想集(I)。鉴于这一事实，定理 A 将作为以下结果的推论得到证明。这一点专家们早已熟知（见 [24]），但为留存记录，我们在此明确陈述。

定理 B. 设 $\mathcal{F}$ 是 S 的一族单项式理想，满足以下两个性质。

(a) $I(P_F) \in \mathcal{F}$，对所有 $I \in \mathcal{F}$ 和所有 $F \subset [n]$ 均成立。(b) 函数 $k \mapsto$深度 S/I^k 对所有 $I \in \mathcal{F}$ 均为非递增函数。

那么，所有理想 $I \in \mathcal{F}$ 都满足持续性：

$$\operatorname{Ass}(I) \subset \operatorname{Ass}(I^2) \subset \operatorname{Ass}(I^3) \subset \cdots .$$

此外

$$\operatorname{Ass}^\infty(I) = \bigcup_{k \geq 1} \operatorname{Ass}(I^k) = \{P_F : \operatorname{depth} S_F/I(P_F)^k = 0 \text{ for some } k\}.$$

利用这一结果，可以很容易地证明，多拟阵理想满足持久性，见 [24, 命题 2.3]。

为了证明定理 A，我们结合定理 B 使用以下定理 C。该定理显著推广了 [14, 15, 16] 中证明的若干结果。

为了陈述这一结果，我们还需要引入一些记号。

给定一个有限简单图 G，我们用 $c(G)$ 表示 G 中含有多个顶点的连通分量数。

设 $I \subset S$ 是任意理想。Brodmann [5] 证明，函数 $k \mapsto \operatorname{depth} S/I^k$最终会稳定为常数。使得对于所有 $k \geq k_*$，均有 $\operatorname{depth} S/I^k = \operatorname{depth} S/I^{k_*}$的最小整数 $k_* > 0$称为 I 的深度稳定指数，记作 $\operatorname{dstab}(I)$。

给定一个齐次理想 $I \subset S$ 和一个整数 $j \geq 0$，我们用 $I_{\langle j \rangle}$ 表示由属于 I且次数为 j 的所有齐次多项式生成的齐次理想。若对于所有 $j \geq 0$，I 都有线性分解，则称 I 是分次分量线性的。

设 $I \subset S$ 是一个单项式理想。若存在 $\mathcal{G}(I)$的一个次序 u_1、……、u_m，使得对于所有 $j = 1$、……、m，$(u_1$、……、$u_{j-1})$：u_j 由变量生成，则称 I 具有线性商。具有线性商的单项式理想是分次分量线性的[22,定理 8.2.15] 但反之未必成立。

现在，我们可以陈述定理 C。

定理 C。 设 $I \subset S$是一个由次数为 $\geq n-2$的平方自由单项式生成的单项式理想。那么，以下结论成立。

(a) 函数 $k \mapsto$ 深度 S/I^k 是非递增的。(b) 深度稳定指数(I) $\leq n-1$。(c) (i) 若 I 是次数为 $d \in \{n-1, n\}$的等次生成理想，则

$$\operatorname{reg} I^k = dk, \quad \textit{for all } k \geq 1.$$

(ii) 若 I是次数为 $n-2$的等次生成理想，令 G 为 $[n]$ 上的唯一简单图，使得 $I = I_c(G)$，并设 $c = c(G)$。那么

$$\operatorname{reg} I^k = \begin{cases} (n-1)k & \textit{for } 1 \leq k \leq c-2, \\ (n-2)k + c - 1 & \textit{for } k \geq c-1. \end{cases}$$

(iii) 若 I 在次数 $n-2$ 和 $n-1$上极小生成，则

$$\operatorname{reg} I^k = (n-1)k, \quad \text{for all } k \geq 1.$$

(d) 以下条件等价。(i) 对于所有 $k \geq 1$，I^k 都有线性商。(ii) 对于所有 $k \geq 1$，I^k 都是分次分量线性的。(iii) $I_{\langle n-2 \rangle} = 0$ 或 $I_{\langle n-2 \rangle} = I_c(G)$ $\neq 0$，且 $c(G) = 1$。(e) 对于所有 $k \geq 1$，I^k 的分次 ***Betti*** 数不依赖于 K。

本文的组织结构如下。

在第 1 节中，我们给出定理 B 的证明，并由此说明，所有由次数为 $\geq n-2$ 的 S 生成的平方自由单项式理想都满足持续性。第 2 节专门用于证明定理 C。接下来，我们将在第 3 节中证明定理 A。

第4节包含定理 A 的一些应用。在推论 4.1 中，我们简洁地证明了 [30] 的主要结果。具体而言，我们对通常幂与符号幂相等的补边理想进行了分类。在定理 4.2 中，我们计算了任意补边理想的 v-函数。

1. Criteria for the persistence property

在这一短节中，我们证明定理 B。

定理 B 的证明。设对于某些 $F \subset [n]$ 和 $k \geq 1$， $I \in \mathcal{F}$ 和 $P_F \in \operatorname{Ass}_S(I^k)$。则 P_F 是 S_F 的极大理想，并且 $P_F \in \operatorname{Ass}_{S_F}(I^k(P_F)) = \operatorname{Ass}_{S_F}(I(P_F)^k)$。这等价于深度 $S_F/I(P_F)^k = 0$ 这一事实。根据性质 (a)， $I(P_F) \in \mathcal{F}$。注意，深度 $S/I(P_F)^k =$ 深度 $S_F/I(P_F)^k + n - |F|$。根据性质 (b)，深度函数 $k \mapsto$ 深度 $S/I(P_F)^k$ 是非递增的。因此，深度 $S_F/I(P_F)^k$ 也是非递增的。于是，深度 $S_F/I(P_F)^\ell = 0$，因此对于所有 $\ell \geq k$， $P_F \in \operatorname{Ass}_{S_F}(I(P_F)^\ell) = \operatorname{Ass}_{S_F}(I^\ell(P_F))$。所以对于所有 $\ell \geq k$， $P_F \in \operatorname{Ass}_S(I^\ell)$，因此 I 满足持续性。这一论证也证明了第二个断言。□

定理 B 可用于证明某些类别的单项式理想满足持续性。例如，多拟阵理想满足该性质，见 [24,命题 2.3]。

作为定理 B 的一项主要新应用，我们证明

定理 1.1。设 $I \subset S$ 是一个由次数为 $\geq n-2$的平方自由单项式生成的理想。那么 I 满足持续性。

证明。回顾一下，单项式理想 $I \subset S$ 的支撑 定义为集合 $\operatorname{supp}(I) = \bigcup_{u \in \mathcal{G}(I)} \operatorname{supp}(u)$，其中单项式 $u \in S$ 的支撑定义为集合 $\operatorname{supp}(u) = \{i : x_i \text{ 整除 } u\}$。

定义如下族

$$\mathcal{F} = \left\{ I \subset S \;\middle|\; \begin{array}{c} I \text{ is a squarefree monomial ideal} \\ \text{generated in degrees } \geq |\operatorname{supp}(I)| - 2 \end{array} \right\}.$$

鉴于定理 B，只要证明性质 (a) 和 (b) 对定理 B 中的族 $\mathcal{F}$成立，我们的断言便得证。

对于非空子集 $A \subset [n]$，我们令 $\mathbf{x}_A = \prod_{i \in A} x_i$。令 $I \in \mathcal{F}$，并令 $G = \operatorname{supp}(I) \subset [n]$。令 $i, j \in G$ 为互不相同的元素。令 $F \subset [n]$。我们注意到

$$\varphi_F(\mathbf{x}_G) = \mathbf{x}_{G \cap F}, \qquad \varphi_F(\mathbf{x}_{G \setminus \{i\}}) = \begin{cases} \mathbf{x}_{G \cap F} & \text{if } i \notin G, \\ \mathbf{x}_{(G \cap F) \setminus \{i\}} & \text{if } i \in G, \end{cases}$$

$$\varphi_F(\mathbf{x}_{G \setminus \{i,j\}}) = \begin{cases} \mathbf{x}_{G \cap F} & \text{if } i, j \notin G, \\ \mathbf{x}_{(G \cap F) \setminus \{i\}} & \text{if } i \in G,\ j \notin G, \\ \mathbf{x}_{(G \cap F) \setminus \{j\}} & \text{if } i \notin G,\ j \in G, \\ \mathbf{x}_{(G \cap F) \setminus \{i,j\}} & \text{if } i, j \in G. \end{cases}$$

由于 $\operatorname{supp}(I(P_F)) \subset \operatorname{supp}(I) \cap F = G \cap F$，上述计算表明 $I(P_F)$ 是一个由次数为 $\geq |G \cap F| - 2 \geq |\operatorname{supp}(I(P_F))| - 2$ 的平方自由单项式生成的单项式理想。因此 $I(P_F) \in \mathcal{F}$，且性质 (a) 得以满足。

性质 (b) 可由定理 C 的陈述 (a) 得出。 □

2. Squarefree monomial ideals generated in big degrees

设 $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ 满足 $n \geq 3$。我们的目标是证明定理 C。为此，注意对于一个由次数为 $\geq n-2$ 的单项式生成的平方自由单项式理想 $I \subset S$，以下可能性中恰有一种成立：

(i) I 由次数 $n-2$ 生成，此时它是补边理想；**(ii)** I 由次数 $d \in \{n-1, n\}$ 生成，此时它是拟阵理想；**(iii)** I 由两个次数 $n-2$ 和 $n-1$ 极小生成。

在情形 (i) 中，定理 C 的所有结论都可由 [14, 15, 16] 中的结果推出。情形 (ii) 同样平凡，因为此时 I 是拟阵理想，见 [23, 24]。只剩下情形 (iii) 有待处理。接下来完成这一点。

给定单项式理想 $I \subset S$ 和 $j \geq 0$，令 $\mu_j(I) = |\{u \in \mathcal{G}(I) : \deg(u) = j\}|$。

定理 2.1. 设 $I \subset S$ 是由两个次数 $n-2$ 和 $n-1$ 极小生成的平方自由单项式理想。设 $J = I_{\langle n-2 \rangle}$。下列陈述成立。

(a) 对所有 $k \geq 1$，$\operatorname{reg} I^k = (n-1)k$。*(b)* 函数 $k \mapsto \operatorname{depth} S/I^k$ 单调不增。*(c)* 对所有 $k \geq 1$，I^k 的分次 Betti 数不依赖于 K。*(d)* 对所有 $k \geq \operatorname{dstab}(J) + \mu_{n-1}(I)$，$\operatorname{depth} S/I^k = \operatorname{depth} S/J^k - \mu_{n-1}(I)$。*(e)* $\operatorname{dstab}(I) \leq n-2$。*(f)* 以下条件等价。*(i)* 对所有 $k \geq 1$，I^k 都有线性商。*(ii)* 对所有 $k \geq 1$，I^k 都是分次分量线性的。*(iii)* $J = I_c(G)$，且 $c(G) = 1$。

设 $I, I_1, I_2 \subset S$ 是单项式理想，满足 $\mathcal{G}(I) = \mathcal{G}(I_1) \sqcup \mathcal{G}(I_2)$。根据定义 1.1], ，我们称 $I = I_1 + I_2$ 是一个 *Betti* 分裂，如果

$$\beta_{i,j}(I) = \beta_{i,j}(I_1) + \beta_{i,j}(I_2) + \beta_{i-1,j}(I_1 \cap I_2), \quad \text{for all } i, j \geq 0. \tag{1}$$

在这种情况下，由 [21, 推论 2.2]，我们有

$$\begin{aligned} \operatorname{depth} S/I &= \min\{\operatorname{depth} S/I_1, \operatorname{depth} S/I_2, \operatorname{depth} S/(I_1 \cap I_2) - 1\}, \\ \operatorname{reg} I &= \max\{\operatorname{reg} I_1, \operatorname{reg} I_2, \operatorname{reg} I_1 \cap I_2 - 1\}. \end{aligned}$$

考虑自然的短正合列 $0 \to I_1 \cap I_2 \to I_1 \oplus I_2 \to I \to 0$。由[21, 命题 2.1], ，方程 (1) 成立，即 $I = I_1 + I_2$ 是一个 Betti 分裂，当且仅当诱导映射

$$\operatorname{Tor}_i^S(K, I_1 \cap I_2) \to \operatorname{Tor}_i^S(K, I_1) \oplus \operatorname{Tor}_i^S(K, I_2)$$

对所有 $i \geq 0$均为零。在这种情况下，我们称映射 $I_1 \cap I_2 \to I_1$与 $I_1 \cap I_2 \to I_2$是 Tor-消没的。我们引用 [9, 命题 3.1] （或亦见 [29, 引理 4.2]）。

引理 2.2. 设 J、$L \subset S$ 为满足 $J \subset L$的非零单项式理想。假设存在映射 φ： $\mathcal{G}(J) \to \mathcal{G}(L)$，使得对任意 $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathcal{G}(J)$，我们有

$$\operatorname{lcm}(u : u \in \Omega) \in \mathfrak{m} \cdot (\operatorname{lcm}(\varphi(u) : u \in \Omega)),$$

其中 $\mathfrak{m} = (x_1、\ldots\ldots、x_n)$。则包含映射 $J \to L$ 是 Tor-消失的。

给定一个单项式理想 $I \subset S$，令 ∂I 为由元素 u/x_i生成的理想，其中 $u \in \mathcal{G}(I)$且 $i \in \operatorname{supp}(u)$。下一个结果由 Nguyen 和 Vu 的 [29, 命题 4.4]推出。另见 [8, 引理 1.3 和定理 1.2]。

引理 2.3. 设 J、$L \subset S$ 是非零单项式理想。假设 $\partial J \subset L$。那么 $J \subseteq \mathfrak{m}L$，且存在映射 $\varphi : \mathcal{G}(J) \to \mathcal{G}(L)$ 满足引理 *2.2* 的假设。特别地，包含映射 $J \to L$ 是Tor-消失的。

以下两个基本事实将在后文中直接使用。

注 2.4. 设 $I \subset S$ 是分次理想，$f \in S$ 是齐次元素。那么 $\operatorname{reg} fI = \operatorname{reg} I + \deg(f)$，且深度 $S/(fI) =$ 深度 S/I。

注 *2.5.* 设 $I_x \subset S_x = K[x_1, \ldots, x_p]$ 和 $I_y \subset S_y = K[y_1, \ldots, y_q]$ 是定义在变量集合互不相交的多项式环中的真单项式理想。那么，$\operatorname{reg} I_xI_y = \operatorname{reg} I_x + \operatorname{reg} I_y$，且深度 $S/(I_xI_y)$ =深度 S_x/I_x +深度 $S_y/I_y + 1$。此外，若 $I_y = (1)$ 但 $I_x \neq (1)$，则深度 $S/(I_xI_y)$ = 深度 $S_x/I_x + q$。类似地，若$I_x = (1)$ 但 $I_y \neq (1)$，则深度 $S/(I_xI_y)$ =深度 $S_y/I_y + p$。

Fo对于单项式 $u \in S$ 和整数 $i \in [n]$，u 的 x_i-次数定义为

$$\deg_{x_i}(u) = \max\{j : x_i^j \text{ divides } u\}.$$

现在，我们可以证明定理 2.1。

定理 2.1 的证明。注意，$I_{\langle n-2\rangle} = I_c(G)$ 是某个图 G 的补边理想。由于 I 由次数为 $n-2$ 和 $n-1$ 的元素极小生成，我们可以找到一个次数为 $n-1$ 的极小单项式生成元 $u \in \mathcal{G}(I)$。于是，对于某个 $i \in [n]$，有 $u = \mathbf{x}_{[n]}/x_i$。我们断言，i 是 G 的一个孤立顶点。否则，对于某个 j，有$\{i, j\} \in E(G)$，于是 $\mathbf{x}_{[n]}/(x_ix_j) \in I_{\langle n-2\rangle}$ 会整除 u，这与 u 是极小生成元的事实矛盾。令 $F = \{i\colon \mathbf{x}_{[n]}/x_i \in \mathcal{G}(I)\}$。那么 F 是 G 的孤立顶点的子集，因此 $\mathbf{x}_F$ 整除 $I_c(G)$ 的所有单项式生成元。经过重新标记，我们可以假设，对于某个 $p \geq 1$，有 $F = [p]$。令$H = G|_{[n]\setminus[t]}$。那么 $I_c(G) = \mathbf{x}_{[p]}I_c(H)$。为方便起见，我们将变量 $\{x_{p+1}, \ldots, x_n\}$ 重新标记为 $\{y_1, \ldots, y_q\}$。由此可见，我们可以写成

$$I = \mathbf{x}_{[t]}I_c(H) + \mathbf{y}_{[q]}(\mathbf{x}_{[t]}/x_i : i \in [t]).$$

我们令 $I_y = I_c(H)$ 和 $I_x = (\mathbf{x}_{[t]}/x_i : i \in [t])$。于是

$$I^k = \sum_{h=0}^{k} \mathbf{x}_{[p]}^{k-h}\mathbf{y}_{[q]}^{h}I_y^{k-h}I_x^h$$

对所有 $k \geq 1$ 均成立。固定一个整数 $k \geq 1$，并令 $J_\ell = \sum_{h=0}^{\ell}\mathbf{x}_{[p]}^{k-h}\,\mathbf{y}_{[q]}^{h}I_y^{k-h}I_x^h$，其中 $0 \leq \ell \leq k$。注意到 $J_k = I^k$。对于每个 $0 < \ell \leq k$，我们断言

$$J_\ell = J_{\ell-1} + \mathbf{x}_{[p]}^{k-\ell}\mathbf{y}_{[q]}^{\ell}I_y^{k-\ell}I_x^{\ell} \tag{2}$$

是 J_ℓ 的 Betti 分裂。首先，我们注意到

$$\mathcal{G}(J_\ell) = \mathcal{G}(J_{\ell-1}) \sqcup \mathcal{G}(\mathbf{x}_{[p]}^{k-\ell}\mathbf{y}_{[q]}^{\ell}I_y^{k-\ell}I_x^{\ell}).$$

为此，设 $u \in \mathcal{G}(J_{\ell-1})$ 与 $v \in \mathcal{G}(\mathbf{x}_{[p]}^{k-\ell}\,\mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell} I_x^{\ell})$。则对某个 $0 \le h < \ell$，有 $u \in \mathbf{x}_{[p]}^{k-h}\,\mathbf{y}_{[q]}^{h} I_y^{k-h} I_x^{h}$。简单计算表明

$$\sum_{i\in[p]} \deg_{x_i}(u) \;=\; pk-h \;>\; pk-\ell \;=\; \sum_{i\in[p]} \deg_{x_i}(v),$$

$$\sum_{j\in[q]} \deg_{y_j}(u) \;=\; (q-2)k+2h \;<\; (q-2)k+2\ell \;=\; \sum_{j\in[q]} \deg_{y_j}(v).$$

因此， u 不能整除 v ，且 v 不能整除 u。这证明了我们的断言。接下来，我们计算交集

$$\begin{aligned} L \;=\; J_{\ell-1} \cap (\mathbf{x}_{[p]}^{k-\ell}\mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell} I_x^{\ell}) \;&=\; (\sum_{h=0}^{\ell-1} \mathbf{x}_{[p]}^{k-h}\mathbf{y}_{[q]}^{h} I_y^{k-h} I_x^{h}) \cap (\mathbf{x}_{[p]}^{k-\ell}\mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell} I_x^{\ell}) \\ &=\; \sum_{h=0}^{\ell-1} [(\mathbf{x}_{[p]}^{k-h}\mathbf{y}_{[q]}^{h} I_y^{k-h} I_x^{h}) \cap (\mathbf{x}_{[p]}^{k-\ell}\mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell} I_x^{\ell})] \\ &=\; \sum_{h=0}^{\ell-1} [(\mathbf{x}_{[p]}^{k-h} I_x^{h}) \cap (\mathbf{x}_{[p]}^{k-\ell} I_x^{\ell})][(\mathbf{y}_{[q]}^{h} I_y^{k-h}) \cap (\mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell})]. \end{aligned}$$

注意，$(\mathbf{x}_{[p]}) \subset I_x$ 和 $(\mathbf{y}_{[q]}) \subset I_y$。给定 $h < \ell$，我们有 $k-h > k-\ell$ ，因此 $\mathbf{x}_{[p]}^{k-h} I_x^{h} = \mathbf{x}_{[p]}^{k-\ell}\,\mathbf{x}_{[p]}^{\ell-h} I_x^{h} \subset \mathbf{x}_{[p]}^{k-\ell} I_x^{\ell-h} I_x^{h} = \mathbf{x}_{[p]}^{k-\ell} I_x^{\ell}$。类似地，我们有 $\mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell} \subset \mathbf{y}_{[q]}^{h} I_y^{k-h}$。因此，

$$\begin{aligned} L \;=\; J_{\ell-1} \cap (\mathbf{x}_{[p]}^{k-\ell}\mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell} I_x^{\ell}) \;&=\; \sum_{h=0}^{\ell-1} (\mathbf{x}_{[p]}^{k-h} I_x^{h}\mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell}) \;=\; (\sum_{h=0}^{\ell-1} \mathbf{x}_{[p]}^{k-h} I_x^{h})(\mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell}) \\ &=\; \mathbf{x}_{[p]}^{k-\ell+1} I_x^{\ell-1}\mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell}, \end{aligned}$$

这里我们用到了 $(\mathbf{x}_{[p]}^{k}) \subset \mathbf{x}_{[p]}^{k-1} I_x \subset \cdots \subset \mathbf{x}_{[p]}^{k-(\ell-1)} I_x^{\ell-1}$。

为了得出(2)确实是一个 Betti 分裂，我们必须证明包含映射 $L \to J_{\ell-1}$ 和 $L \to \mathbf{x}\mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell} I_x^{\ell}$ 是 Tor-消失的。

我们证明第一个映射是 Tor-消失的，另一种情况类似。首先，暂且假设 H 不含孤立顶点。在此假设下，我们断言 $\partial(\mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell}) \subset \mathbf{y}_{[q]}^{\ell-1} I_y^{k+1-\ell}$。事实上，取 $u = \mathbf{y}_{[q]}^{\ell} u_1 \cdots u_{k-\ell} \in \mathcal{G}(\mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell})$，其中 $u_s \in \mathcal{G}(I_y)$ 对所有 $s = 1,\ldots,k-\ell$ 都成立，并设 y_i 整除 u。由于我们假设 H 不含孤立顶点，因此对于某个 j，有 $\mathbf{y}_{[q]}/(y_i y_j) \in \mathcal{G}(I_y)$。于是

$$\mathbf{y}_{[q]}^{\ell-1} u_1 \cdots u_{k-\ell}(\mathbf{y}_{[q]}/(y_i y_j)) \;\text{ divides }\; u/y_i.$$

这表明 $u/y_i \in \mathbf{y}_{[q]}^{\ell-1} I_y^{k+1-\ell}$。因此， $\partial(\mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell}) \subset \mathbf{y}_{[q]}^{\ell-1} I_y^{k+1-\ell}$。引理 2.3 蕴含存在一个映射 $\varphi\colon \mathcal{G}(\mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell}) \to \mathcal{G}(\mathbf{y}_{[q]}^{\ell-1} I_y^{k+1-\ell})$，使得对于任意非空子集 $\Omega \subset \mathcal{G}(\mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell})$，我们有

$$\operatorname{lcm}(u : u \in \Omega) \;\in\; \mathfrak{m}_y \cdot (\operatorname{lcm}(\varphi(u) : u \in \Omega)), \tag{3}$$

其中 $\mathfrak{m}_y = (y_1, \ldots, y_q)$。我们声称，即使 H 含有孤立顶点，这样的映射 Φ 也存在。

为此，假设 H 含有孤立顶点。设这些顶点分别对应变量 y_1、. . .、 y_r，其中 $r < q$。那么 $\mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell} = \mathbf{y}_{[r]}^{\ell} \mathbf{y}_{[q]\setminus[r]}^{\ell} (I_y')^{k-\ell}$，其中 $I_y' = I_c(H')$，而 H' 是从 H 中移除孤立顶点后得到的图。类似地，$\mathbf{y}_{[q]}^{\ell-1} I_y^{k-\ell+1} = \mathbf{y}_{[r]}^{\ell-1} \mathbf{y}_{[q]\setminus[r]}^{\ell-1} (I_y')^{k-\ell+1}$。像之前一样重复这一论证，我们得到一个映射 Φ' : $\mathcal{G}(\mathbf{y}_{[q]\setminus[r]}^{\ell} (I_y')^{k-\ell}) \to \mathcal{G}(\mathbf{y}_{[q]\setminus[r]}^{\ell-1} (I_y')^{k-\ell+1})$，满足性质 (3)。接着，我们通过令$\Phi(u) = \mathbf{y}_{[r]}^{\ell-1} \Phi(u/\mathbf{y}_{[r]}^{\ell})$，定义映射 φ: $\mathcal{G}(\mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell}) \to \mathcal{G}(\mathbf{y}_{[q]}^{\ell-1} I_y^{k+1-\ell})$。由此立即可知，性质 (3) 再次成立。

在已经得到对任意图 H 都存在映射 Φ 之后，我们定义一个映射

$$\Phi : \mathcal{G}(L) \to \mathcal{G}(J_{\ell-1})$$

利用映射 φ。设 $u \in \mathcal{G}(L)$。则 $u = u_x u_y$，其中 $u_x \in \mathcal{G}(\mathbf{x}_{[p]}^{k+1-\ell} I_x^{\ell-1})$ 且$u_y \in \mathcal{G}(\mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell})$。我们令 $\Phi(u) = \varphi(u_y)u_x$。注意 Φ 是良定义的，因为$\Phi(u) \in \mathcal{G}(J_{\ell-1})$。最后，设 $\Omega \subset \mathcal{G}(L)$ 为一个非空子集。我们可以写成 $\operatorname{lcm}(u : u \in \Omega) = \operatorname{lcm}(u_x : u \in \Omega) \cdot \operatorname{lcm}(u_y : u \in \Omega)$，并且利用 (3)，我们有

$$\begin{aligned} \operatorname{lcm}(u : u \in \Omega) &\in \mathfrak{m}_y \cdot (\operatorname{lcm}(\varphi(u_y) : u \in \Omega)) \cdot \operatorname{lcm}(u_x : u \in \Omega) \\ &= \mathfrak{m}_y \cdot (\operatorname{lcm}(\varphi(u_y)u_x : u \in \Omega)) \\ &\subset \mathfrak{m} \cdot (\operatorname{lcm}(\Phi(u) : u \in \Omega)), \end{aligned}$$

其中 $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$。引理 2.2 表明包含 $L \to J_{\ell-1}$确实是 Tor-消失的，正如所期望的那样。

令 $S_x = K[x_1, \dots, x_p]$ 和 $S_y = K[y_1, \dots, y_q]$。接下来，我们断言：

$$\operatorname{reg} I^k = \max \left\{ \begin{matrix} \operatorname{reg} I_y^k + pk, (n-1)k, \\ \max\limits_{0<h<k} \{\operatorname{reg} I_y^{k-h} + pk + (q-1)h\} \end{matrix} \right\}, \tag{4}$$

$$\operatorname{depth} \frac{S}{I^k} = \min \left\{ \begin{matrix} \operatorname{depth} S_y/I_y^k + p, \operatorname{depth} S_x/I_x^k + q, \operatorname{depth} S_x/I_x^{k-1} + q - 1, \\ \min\limits_{0<h<k} \{\operatorname{depth} S_y/I_y^{k-h} + \operatorname{depth} S_x/I_x^h + 1\}, \\ \min\limits_{0<h<k} \{\operatorname{depth} S_y/I_y^{k-h} + \operatorname{depth} S_x/I_x^{h-1}\} \end{matrix} \right\}. \tag{5}$$

由于 (2) 是一个 Betti 分裂，且 $I^k = J_k$，我们有

$$\operatorname{reg} I^k = \max\{\operatorname{reg} J_{k-1}, \operatorname{reg}(\mathbf{y}_{[q]}^k I_x^k), \operatorname{reg}(\mathbf{x}_{[p]} \mathbf{y}_{[q]}^k I_x^{k-1}) - 1\},$$

深度 $S/I^k =$ min{深度 S/J_{k-1}，深度 $S/(\mathbf{y}_{[q]}^k I_x^k)$，深度 $S/(\mathbf{x}_{[p]} \mathbf{y}_{[q]}^k I_x^{k-1}) - 1$}.

由于 $I_x \subset S_x$ 是由次数为 $p-1$ 的生成元生成的 S_x 的平方自由 Veronese 理想，且 $\dim(S_x) = p$，我们有 $\operatorname{reg} I_x^h = (p-1)h$，并且函数 $k \mapsto$深度S_x/I_x^h 对所有 $h \geq 1$ 都是非递增的。因此，对所有 $k \geq 1$，$\operatorname{reg}(\mathbf{y}_{[q]}^k I_x^k) = qk + (p-1)k = (n-1)k$。类似地，$\operatorname{reg}(\mathbf{y}_{[q]} \mathbf{x}_{[p]}^k I_x^{k-1}) - 1 = (n-1)k$。深度也可以进行类似的计算。因此，

$$\operatorname{reg} I^k = \max\{\operatorname{reg} J_{k-1}, (n-1)k\},$$

深度 $S/I^k =$最小{深度 S/J_{k-1}，深度 $S_x/I_x^k + q$，深度 $S_x/I_x^{k-1} + q - 1$}.

通过使用 Betti 分裂 (2)，将这些计算迭代至 J_{k-1}，.....， J_0，我们看到公式 (4) 和 (5) 确实成立。

现在，我们来证明陈述 (a)、(b)、(c)、(d)、(e) 和 (f)。

(a) 令 $c = c(H)$ 表示 H 中非孤立顶点的连通分支数。由 [15, 定理 4.1] 可得

$$\operatorname{reg} I_y^k = \begin{cases} (q-1)k & \text{if } 1 \le k \le c-2, \\ (q-2)k + c - 1 & \text{if } k \ge c-1. \end{cases} \tag{6}$$

由此公式可知，对于所有 $k \ge 1$，都有 $\operatorname{reg} I_y^k \le (q-1)k$。因此，对于所有 $k \ge 1$ 和所有 $0 < h < k$，都有

$$\begin{aligned} \operatorname{reg} I_y^k + pk &\le (q-1)k + pk = (n-1)k, \\ \operatorname{reg} I_y^{k-h} + pk + (q-1)h &\le (q-1)(k-h) + pk + (q-1)h = (n-1)k. \end{aligned}$$

Thes这些不等式和方程 (4) 表明，对于所有 $k \ge 1$，都有 $\operatorname{reg} I^k = (n-1)k$。

(b) 由 [15, 定理 4.1], 可知，函数 $k \mapsto$ 深度 S_y/I_y^k 是非递增的。此外， $k \mapsto$ 深度 S_x/I_x^k 也是非递增的，因为 I_x 是拟阵型的。由公式 (5) 可立即得出， $k \mapsto$ 深度 S/I^k 也同样是非递增的。

(c) 根据 [15, 推论 4.7], ，对于所有 $k \ge 1$， I_y^k 的分次贝蒂数均不依赖于基域 K。由于 I_x 是拟阵理想，其各次幂也具有相同的独立性。考虑贝蒂分裂 (2)。我们此前计算得到， $L = J_{\ell-1} \cap (\mathbf{x}_{[p]}^{k-\ell}\, \mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell} I_x^{\ell}) = \mathbf{x}_{[p]}^{k-\ell+1} I_x^{\ell-1} \mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell}$。这个理想是理想 $\mathbf{x}_{[p]}^{k-\ell+1} I_x^{\ell-1}$ 与 $\mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell}$ 的乘积，它们具有不相交支撑，且其分次贝蒂数不依赖于 K。因此， L 的分次贝蒂数不依赖于 K。最后，关于 $\ell = k$ 的贝蒂分裂 (2) 表明，对于所有 $k \ge 1$， I^k 的分次贝蒂数均不依赖于 K。

(d) 我们用 $b(H)$ 表示图H的二分连通分支数。需要指出，孤立顶点也视为一个二分连通分支。根据 [16, 定理 4.1], ，对于所有 $k \ge \operatorname{dstab}(I_y)$， $\operatorname{depth} S_y/I_y^k = \operatorname{depth} S_y/I_c(H)^k = b(H)$。接下来，注意到 $\operatorname{depth} S_x/I_x^{p-1} = 0$。为此，考虑单项式 $u = \mathbf{x}_{[p]}^{p-2}$。它不属于 I_x^{p-1}，因为 $\deg(u) = p(p-2)$ 严格小于 $(p-1)^2$，而后者是 I_x^{p-1} 的初始次数。另一方面，对于所有 $i \in [p]$ ，我们有

$$x_i u = x_i \mathbf{x}_{[p]}^{p-2} = \prod_{\substack{j \in [p] \\ j \ne i}} (\mathbf{x}_{[p]}/x_j) \in I_x^{p-1}.$$

因此 $(I_x^{p-1}\colon u) = (x_1, \ldots, x_p) \in S_x(I_x^{p-1})$ 的伴随素理想集，并且 $\operatorname{depth} S_x/I_x^{p-1} = 0$。由于 I_x 是拟阵理想，对于所有 $k \ge p-1 = \mu_{n-1}(I) - 1$，我们也有 $\operatorname{depth} S_x/I_x^k = 0$。

设 $k \ge$ 深度稳定指数$(I_y) + \mu_{n-1}(I)$。根据前面的讨论和方程 (5)，可得

$$\operatorname{depth} S/I^k = \min \begin{Bmatrix} b(H)+p,\ q,\ q-1, \\ b(H)+1,\ b(H) \end{Bmatrix} = \min\{b(H),\ q-1\} = b(H),$$

因为 $q - 1 = |V(H)| - 1 \ge b(H)$，这是由于 H 至少有一条边。

根据 [16, 定理 4.1], 深度 $S/I^k_{\langle n-2\rangle}$ = 深度 $S/(\mathbf{x}_{[p]}I_y)^k$ = 深度 $S/I_c(G)^k$ =$b(G)$, 对所有 $k \geq$深度稳定指数$(I_y)+\mu_{n-1}(I)$均成立。回忆一下, H是从 G中删除孤立顶点 $1,\ldots,p$ 后得到的图。因此, $b(H) = b(G) - p$。总而言之,

$$\operatorname{depth} S/I^k = b(H) = b(G) - p = \operatorname{depth} S/I^k_{\langle n-2\rangle} - \mu_{n-1}(I)$$

对所有 $k \geq \operatorname{dstab}(I_{\langle n-2\rangle}) + \mu_{n-1}(I)$。

(e) (d) 部分意味着 $\operatorname{dstab}(I) \leq \operatorname{dstab}(I_y)+p$。根据 [16, 定理 4.1], , 我们有 $\operatorname{dstab}(I_y) \leq q-2$。由于 $p+q-2 = n-2$, 结论得证。

(f) 对任意单项式理想, 蕴含关系 (i) $\Rightarrow$ (ii) 均成立。假设 (ii) 成立。由于$n-2$是 I的初始次数, $J = I_c(G)$ 具有线性幂。根据 [14, 定理 B], 我们有 $c(G) = 1$, 从而 (iii) 得证。最后, 我们证明 (iii) $\Rightarrow$ (i)。假设$J = I_c(G)$, 且 $c(G) = 1$。同样根据 [14, 定理 B], 对于所有$k \geq 1$, J^k 具有线性商。由于 (2) 是 Betti 分裂, 根据我们之前证明的结果, 我们有

$$\mathcal{G}(I^k) = \bigsqcup_{h=0}^{k} \mathcal{G}(\mathbf{x}_{[p]}^{k-h}\mathbf{y}_{[q]}^{h} I_y^{k-h} I_x^h), \quad \text{for all } k \geq 1. \tag{7}$$

注意到 $c(H) = 1$ 因为 $c(G) = 1$。因此, 对所有$k \geq 1$, $I_y^k = I_c(H)^k$ 都具有线性商。由于 I_x 是拟阵理想, 因此对所有 $k \geq 1$, I_x^k 也具有线性商。由于 $\operatorname{supp}(I_x) \cap \operatorname{supp}(I_y) = \emptyset$, [13, 引理 4.7(b)] 意味着, 对所有 $k \geq 1$ 和所有 $0 \leq h \leq k$, $I_x^h I_y^{k-h}$都具有线性商。用单项式乘以具有线性商的理想会保持线性商性质。因此, 对所有 $k \geq 1$ 和所有 $0 \leq h \leq k$, $\mathbf{x}_{[p]}^{k-h}\ \mathbf{y}_{[q]}^{h} I_y^{k-h} I_x^h$ 都具有线性商。固定 $k \geq 1$, 并对每个 $0 \leq h \leq k$固定 $\mathbf{x}_{[p]}^{k-h}\ \mathbf{y}_{[q]}^{h} I_y^{k-h} I_x^h$的一个线性商序 $>_h$ 。根据方程 (7), 我们按如下方式排列 $\mathcal{G}(I^k)$中的单项式。设 $u, v \in \mathcal{G}(I^k)$。那么, 对某些 h 和 ℓ, 有 $u \in \mathcal{G}(\mathbf{x}_{[p]}^{k-h}\mathbf{y}_{[q]}^{h} I_y^{k-h} I_x^h)$ 和 $v \in \mathcal{G}(\mathbf{x}_{[p]}^{k-\ell}\ \mathbf{y}_{[q]}^{\ell} I_y^{k-\ell} I_x^\ell)$。我们令

$$u > v \iff h < \ell \quad \text{or} \quad h = \ell \quad \text{and} \quad u >_h v.$$

设 u、$v \in \mathcal{G}(I^k)$, 其中 $u > v$ 如前所述。若 $h = \ell$, 由于 $\mathbf{x}_{[p]}^{k-h}\ \mathbf{y}_{[q]}^{h} I_y^{k-h} I_x^h$具有线性商, 故存在 $w \in \mathcal{G}(\mathbf{x}_{[p]}^{k-h}\ \mathbf{y}_{[q]}^{h} I_y^{k-h} I_x^h) \subset \mathcal{G}(I^k)$, 满足 $w >_h v$, 从而也满足 $w > v$, 使得 $w : v = \operatorname{lcm}(w, v)/v$ 是一个整除 $u : v$ 的变量。现在假设 $h < \ell$。如前计算, 我们有 $\sum_{i\in[p]} \deg_{x_i}(u) = pk - h > pk - \ell = \sum_{i\in[p]} \deg_{x_i}(v)$。因此, 存在 $i \in [p]$, 使得 x_i 整除 $u : v$。我们可以将 $v = \mathbf{x}_{[p]}^{k-\ell}\mathbf{y}_{[q]}^{\ell} v_1 \cdots v_{k-\ell} v'_1 \cdots v'_\ell$ 写成 $v_j \in \mathcal{G}(I_y)$, 且对所有 j 有 $v'_j \in \mathcal{G}(I_x)$。由于 x_i 整除 $u : v$, 且 $I_x = (\mathbf{x}_{[p]}/x_j : j \in [p])$, 故必存在某个 t, 使得 $v'_t = \mathbf{x}_{[p]}/x_i$ 。在重新标记的意义下, 我们可以假设 $t = \ell$。设 $\mathbf{y}_{[q]}/(y_r y_s) \in \mathcal{G}(I_y)$ 为一个单项式生成元。我们考虑如下单项式

$$\begin{aligned} w &= x_i(v/(y_r y_s)) \\ &= \mathbf{x}_{[p]}^{k-(\ell-1)}\mathbf{y}_{[q]}^{\ell-1} v_1 \cdots v_{k-\ell}\mathbf{y}_{[q]}/(y_r y_s) v'_1 \cdots v'_{\ell-1} \in \mathcal{G}(\mathbf{x}_{[p]}^{k-(\ell-1)}\mathbf{y}_{[q]}^{\ell-1} I_y^{k-(\ell-1)} I_x^{\ell-1}). \end{aligned}$$

于是, 根据序关系 $>$的定义, $w > v$, 且 $w : v = x_i$ 整除 $u : v$。我们得出, I^k 确实具有线性商, 因此 (i) 得证。□

3. The stable set of associated primes of $I_c(G)$

本节中，我们证明给出本文标题的定理。我们先提出以下观察。

Pro命题 *3.1*。*</style>*设 G 是一个以 $[n]$为顶点集的有限简单图，并且令 $F \subset [n]$。置

$$A_F \;=\; \{i \in [n] :\; \deg_{G|_F}(i) = 0 \text{ and } \{i,j\} \in E(G) \text{ for some } j \in [n]\}.$$

Then

$$(I_c(G))(P_F) \;=\; \begin{cases} I_c(G|_F) + (\mathbf{x}_F/x_i \;:\; i \in A_F) & \text{if } (\bigcup_{e\in E(G)} e) \cap F \neq \emptyset, \\ (\mathbf{x}_F) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。设 $I = I_c(G)$，并取一个单项式 $u \in \mathcal{G}(I)$。于是， $u = \mathbf{x}_{[n]}/\mathbf{x}_e$，其中某条边为 $e = \{i,j\} \in E(G)$。令 $\varphi = \varphi_F$ 为引言中定义的映射。我们有

$$\varphi(u) \;=\; \begin{cases} \mathbf{x}_F & \text{if } i,j \notin F, \\ \mathbf{x}_F/x_i & \text{if } i \in F,\, j \notin F, \\ \mathbf{x}_F/x_j & \text{if } i \notin F,\, j \in F, \\ \mathbf{x}_F/\mathbf{x}_e & \text{if } i,j \in F. \end{cases} \tag{8}$$

现在，我们区分两种可能的情形。

情形 1。假设 $(\bigcup_{e\in E(G)} e) \cap F = \emptyset$。则计算 (8) 表明，对于所有 $v \in \mathcal{G}(I)$， $\varphi(v) = \mathbf{x}_F$。因此， $I(P_F) = (\mathbf{x}_F)$。

情形 2。假设 $(\bigcup_{e\in E(G)} e) \cap F \neq \emptyset$。令 $H = G|_F$。那么，对于任意 $e \in E(H)$，我们有 $e \in E(G)$，并且方程 (8) 表明 $\mathbf{x}_F/\mathbf{x}_e \in I(P_F)$。方程 (8) 还表明， $I(P_F)$ 中的任意单项式的次数至少为 $|F| - 2$。因此，所有单项式 $\mathbf{x}_F/\mathbf{x}_e \in \mathcal{G}(I_c(H))$ 都是 $I(P_F)$ 的极小单项式生成元。由于根据假设，对于至少一条边 $e \in E(H)$， $\mathbf{x}_F/\mathbf{x}_e \in I(P_F)$，因此 $\mathbf{x}_F \notin \mathcal{G}(I(P_F))$。所以，除了来自 $I_c(H)$ 的极小单项式生成元外， $I(P_F)$ 中唯一可能的额外极小单项式生成元的次数为 $|F| - 1$，因而具有 $w = \mathbf{x}_F/x_i$ 的形式，其中某个 $i \in F$。方程 (8) 蕴含： w 属于 $I(P_F)$ 当且仅当存在 $j \in [n]$ 使得 $\{i,j\} \in E(G)$。此外， w 是 $I(P_F)$ 的极小生成元，当且仅当对于所有 $j \in F \setminus \{i\}$， $\{i,j\} \notin E(H)$。也就是说，当且仅当 $\deg_{G|_F}(i) = 0$。综上， $w = \mathbf{x}_F/x_i \in \mathcal{G}(I(P_F))$ 当且仅当 $i \in A_F$。 □

因此，我们可以证明定理 A。

定理 A 的证明。首先注意，若 $i \in V(G)$ 是 G 的一个孤立顶点，且令 $H = G|_{[n]\setminus\{i\}}$，则对所有 $k \geq 1$， $I_c(G)^k = x_i^k I_c(H)^k = (x_i^k) \cap I_c(H)^k$。因此，对所有 $k \geq 1$， $\mathrm{Ass}(I_c(G)^k) = \{(x_i)\} \cup \mathrm{Ass}(I_c(H)^k)$。所以不失一般性，我们可以假设 G 不含孤立顶点。现在，取满足 $|F| \geq 2$ 的 $F \subset [n]$。由定理 B， $P_F \in \mathrm{Ass}^\infty(I_c(G))$ 当且仅当对所有 $k \gg 0$，深度 $S_F/(I_c(G)^k(P_F)) = 0$。由命题 3.1，由于我们假设 G 不含孤立顶点（因此 $\bigcup_{e\in E(G)} e = [n]$），我们有

$$I_c(G)^k(P_F) \;=\; (I_c(G)(P_F))^k \;=\; \big(I_c(G|_F) + (\mathbf{x}_F/x_i :\; \deg_{G|_F}(i) = 0)\big)^k.$$

现在，我们区分两种可能的情形。

~情形 1. </style>假设 $b(G|_F) = b(G|_F)$。那么 $G|_F$不含孤立顶点，因此 $I_c(G)^k(P_F) = I_c(G|_F)^k$。由 [16, 定理 4.1],，对于所有 $k \geq |F| - 2$，深度 $S_F/I_c(G|_F)^k =$~ ~b $(G) = b(G)$。因此， $P_F \in$ 伴随素理想集$^\infty(I_c(G))$ 当且仅当 $b(G) = 0$。

~**情形 2.** 假设 $b(G|_F) \neq b(G|_F)$。那么 $G|_F$含有某个孤立顶点。在此情形下，定理 2.1(d) 和 [16,定理 4.1] 推出

$$\begin{aligned} \operatorname{depth} S_F/(I_c(G)^k(P_F)) &= \operatorname{depth} S_F/I_c(G|_F)^k - \mu_{|F|-1}(I_c(G)^k(P_F)) \\ &= b(G) - |\{i \in F : \deg_{G|_F}(i) = 0\}| \\ &= \widetilde{b}(G). \end{aligned}$$

~因此，再次有 $P_F \in$ 伴随素理想集$^\infty(I_c(G))$ 当且仅当 $b(G) = 0$。

还需证明 astab$(I_c(G)) \leq n-2$。为此，设 $P_F \in$ Ass$^\infty(I_c(G))$。若 $F = \{i\}$ 是单元素集，则 i 是 G的孤立顶点，因此对于所有 $k \geq 1$，都有 $P_F \in$ Ass$(I_c(G)^k)$。否则，设 $|F| \geq 2$。那么对于所有 $k \gg 0$，都有 depth $S_F/(I_c(G)^k(P_F)) = 0$。由定理 2.1(e) 和定理 4.1],，可得对于所有 $k \geq |F| - 2$，都有 depth $S_F/(I_c(G)^k(P_F)) = 0$。因此

$$\operatorname{astab}(I_c(G)) \leq \max\{1, \max_{\substack{P_F \in \operatorname{Ass}^\infty(I_c(G)) \\ |F| \geq 2}} \{|F| - 2\}\} \leq n - 2,$$

如所需。 □

该定理的证明还给出了以下附加信息。

推论 3.2。 设 G 是顶点集为 $[n]$的有限简单图。设 $F \subset [n]$ 满足 $|F| \geq 2$~且 b $(G|_F) = 0$。那么

$$P_F \in \operatorname{Ass}(I_c(G)^k), \quad \textit{for all } k \geq \max\{1, |F| - 2\}.$$

4. Consequences

给定整数 t 和图 H，我们将 tH 定义为由 t 个 H 的不相交副本组成的图。以下三种图将发挥关键作用。

(i) 具有 n 个顶点的完全图是图 K_n，其 $V(K_n)$ 为 $= [n]$，边集 $E(K_n)$ 为 $= \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq n\}$。(ii) 具有 n 个顶点的路径是图 P_n，其 $V(P_n)$ 为 $= [n]$，边集$E(P_n)$ 为 $= \{\{i, i+1\} : 1 \leq i < n\} = \{\{1,2\},\{2,3\},\ldots,\{n-1,n\}\}$。(iii) 具有 n 个顶点的圈是图 C_n，其 $V(C_n)$ 为 $= [n]$，边集$E(C_n)$ 为 $= \{\{1,2\},\{2,3\},\ldots,\{n-1,n\},\{n,1\}\}$。

Re称单项式理想 $I \subset S$ 的第 k 次符号幂定义为

$$I^{(k)} = \bigcap_{P_F \in \operatorname{Ass}(I)} I^k(P_F)S$$

对于所有 $k \geq 1$，我们总有 $I^k \subset I^{(k)}$，但等号未必成立。

当 I 是平方自由单项式理想时，存在某个 $k \geq 1$ 使得 $I^k = I^{(k)}$，当且仅当 Ass(I^k) =Ass(I)，参见 [22, 定理 1.4.6] 的证明。根据这一简单事实和定理 A，我们可以给出 [30, 定理 2.9] 的另一种证明。

推论 4.1. 设 G 是以 $[n]$为顶点集的有限简单图。下列条件等价。

(a) $I_c(G)^k = I_c(G)^{(k)}$ 对所有 $k \geq 1$成立。(b) $I_c(G)^k = I_c(G)^{(k)}$ 对某个 $k \geq 2$ 成立。(c) G与图 K_2、 K_3、 P_3、 $2K_2$、 P_4 或 C_4 之一同构，并带有(可能)的若干孤立顶点。

证明. (a) $\Rightarrow$ (b) 对任意理想成立。

(b) $\Rightarrow$ (c) 假设对某个 $k \geq 2$有 $I_c(G)^k = I_c(G)^{(k)}$。如前所述，这成立当且仅当伴随素理想集($I_c(G)^k$) = 伴随素理想集($I_c(G)$)。用图论中的一个简单练习可以证明：若 G 不满足陈述 (c)，则 $V(G)$ 包含~一个子集 F，满足 $|F| = 4$，使得 $b(G|_F) = 0$。反设 (c) 不成立。则我们可以找到这样一个 4-子集 $F \subset [n]$。由推论 3.2，对所有 $\ell \geq 2$有 $P_F \in$伴随素理想集($I_c(G)^\ell$)。因此， $P_F \in$伴随素理想集($I_c(G)^k$)。由 [15, 定理 2.1] 我们有 $P_F \in$ 伴随素理想集($I_c(G)^k$) \伴随素理想集($I_c(G)$)。矛盾。故 (c) 成立。

(c) $\Rightarrow$ (a) 显然，若 G 满足陈述 (c)，则对所有 $k \geq 1$，都有 Ass($I_c(G)^k$) = Ass($I_c(G)$)。因此 (a) 得证。□

我们的下一个应用涉及计算 $I_c(G)$ 的 v-函数。

按照 [7], ，给定一个齐次理想 $I \subset S$ 和一个素理想 $P \in$ Ass(I)，定义 I 在 P 处的局部 v- 数为满足 $I : f = P$ 的齐次元素 $f \in S$ 的最小次数，另见 [3, 6, 10, 11, 12, 17, 18, 19, 20]。于是， I 的全局 v-数定义为

$$\mathrm{v}(I) = \min_{P \in \mathrm{Ass}(I)} \mathrm{v}_P(I).$$

设 $P \in$ Ass$^\infty$(I)。令 astab$_P$(I) 为满足对所有 $k \geq k_P$ 都有 $P \in$ Ass(I^k) 的最小整数 $k_P > 0$。于是可以考察 $k \geq k_P$ 的函数 v$_P$(I^k)。这称为 I 在 P 处的（局部）v$_P$-函数。 I 的（全局）v-函数就是函数$k \mapsto$v(I^k)。 [6] 和 [17], 分别独立证明了，齐次理想 I 的局部 v-函数和 v-函数最终都是线性函数。此外， [17, 的定理 4.1], 证明了， I 的 v-函数的斜率是 I 的初始次数。使得对所有 $k \geq k_0$, v(I^k) 都是线性函数的最小整数 $k_0 > 0$，称为 I 的 ν- 稳定性指标，记为 vstab(I)。

预计（[17] 和 [11, 猜想 2.6]）

（i）对于任意齐次理想 $I \subset S$ 及所有 $k \gg 0$, v(I^k) $<$ reg I^k。（ii）如果 $I \subset S$ 是具有线性幂的单项式理想，则对于所有 $k \geq 1$, v(I^k) = reg $I^k - 1$。

两个猜想 (i) 和 (ii) 已经对若干类单项式理想得到了证明，其中包括边理想族（关于边理想情形下猜想 (i) 和 (ii) 的证明，参见论文 [11],和 [11, 定理 5.1], [3, 定理 5.1]以及 [12, 推论 5.7] 中的结果）。

接下来，我们将对补边理想证明猜想 (i) 和 (ii)。

定理 4.2。 设 G 是顶点集为 $[n]$ 的有限简单图。以下命题成立。(a) 对所有 $k \geq 1$,

$$\mathrm{v}(I_c(G)^k) \;=\; \begin{cases} (n-2)k & \text{if } G = tK_2, \text{ with } t \geq 2, \\ (n-2)k-1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(b) $\mathrm{v}(I_c(G)^k) < \operatorname{reg} I_c(G)^k$ 对所有 $k \geq 1$。

(c) 若 $I_c(G)$ 具有线性幂，则 $\mathrm{v}(I_c(G)^k) = \operatorname{reg} I_c(G)^k - 1$ 对所有 $k \geq 1$ 均成立。

证明。 (a) 根据 [11, 命题 2.2], ，可得 $\mathrm{v}(I_c(G)^k) \geq (n-2)k-1$ 对所有$k \geq 1$均成立。因此，为证明等式对所有 $k \geq 1$ 均成立，只需对每个 $k \geq 1$ 找到一个单项式 u_k，使得 $I_c(G)^k$: $u_k \in \mathrm{Ass}(I_c(G)^k)$ 且 $\deg(u_k) = (n-2)k-1$。

设 G 含有一个孤立顶点 i。那么，对所有$k \geq 1$，$(x_i) \in \mathrm{Ass}(I_c(G)^k)$。令 $e \in E(G)$，则 $i \notin e$。我们考虑单项式 $u_k = (\mathbf{x}^{[n]\setminus e})^k/x_i$ ，其中对所有 $k \geq 1$均成立。注意，对所有 $k \geq 1$， $x_i u_k \in I_c(G)^k$ 。现在，令 v 为一个满足 $\mathrm{supp}(v) \subset [n]\setminus\{i\}$ 的单项式。则 $\deg_{x_i}(vu_k) = k-1$。因此 $vu_k \notin I_c(G)^k$。由此可得 $I_c(G) : u_k = P_{\{i\}} = (x_i)$，证毕。

现在假设 G 不含孤立顶点。令 G^c 为 G的补图，即与 G 具有相同顶点集、其边为原图中非边的图。此外，令 $\mathcal{T}(G)$ 为 G的三角形（也称为 3-团）集合。由定理 2.1], ，由于 G 没有孤立顶点，我们有

$$\mathrm{Ass}(I_c(G)) \;=\; \{P_e : \; e \in E(G^c)\} \cup \{P_T : \; T \in \mathcal{T}(G)\}.$$

首先，假设 G 包含一个三角形 $T = \{p,q,r\}$。考虑单项式$u_k = (\mathbf{x}_{[n]}/(x_p x_q x_r))(\mathbf{x}_{[n]}/(x_p x_q))^{k-1}$，其中 $k \geq 1$。注意，$\deg(u_k) = (n-2)k-1$。我们断言 $I_c(G)^k$： $u_k = P_T$。显然，$P_T \subset I_c(G)^k$： u_k。例如，

$$x_p u_k \;=\; (\mathbf{x}_{[n]}/(x_q x_r))(\mathbf{x}_{[n]}/(x_p x_q))^{k-1} \in I_c(G)^k.$$

为证明反向包含关系 $I_c(G)^k$： $u_k \subset P_T$，我们证明：若 v 是一个满足 $\mathrm{supp}(v) \subset [n]\setminus\{p,q,r\}$的单项式，则 $v \notin I_c(G)^k$： u_k。反设$v \in I_c(G)^k$： u_k。那么，存在边 $e_1, \ldots, e_k \in E(G)$，使得

$$w \;=\; \prod_{i=1}^{k} \mathbf{x}_{[n]\setminus e_i} \quad \text{divides} \quad vu_k \;=\; v(\mathbf{x}_{[n]}/(x_p x_q x_r))(\mathbf{x}_{[n]}/(x_p x_q))^{k-1}. \tag{9}$$

由此可得

$$\deg_{x_p}(w) \;=\; k - |\{j \in [k] : \; p \in e_j\}| \;\leq\; \deg_{x_p}(v) + \deg_{x_p}(u_k) \;=\; 0,$$

因为 x_p 不整除 v 和 u_k。由于 $|\{j \in [k] : \; p \in e_j\}| \leq k$，上述不等式蕴含 $|\{j \in [k] : \; p \in e_j\}| = k$。因此对所有 $j \in [k]$有 $p \in e_j$。类似地，对所有 $j \in [k]$有 $q \in e_j$。因此 $e_1 = \cdots = e_k = \{p,q\}$。由此可得$\deg_{x_r}(w) = k$。该$x_r$-次数应小于或等于$\deg_{x_r}(vu_k) = \deg_{x_r}(v) + \deg_{x_r}(u_k) = k-1$，因为 $r \notin \mathrm{supp}(v)$。但这是不可能的。因此 $v \notin I_c(G)^k$： u_k。我们得出结论： $I_c(G)^k$： $u_k = P_T$。

现在，假设 G 不含三角形。由于 G 没有孤立顶点，要么 G 包含一条诱导 3-路径 P_3，要么 $G = tK_2$ 满足 $t \geq 2$ （因为 $n \geq 3$）。

首先，假设 G 包含一个诱导 3-路径。设 $\{p,q\},\{q,r\} \in E(G)$，但 $e = \{p,r\} \notin E(G)$。因此， $P_e \in$ 是 $I_c(G)$的伴随素理想集。再次考虑单项式$u_k = (\mathbf{x}_{[n]}/(x_p x_q x_r))(\mathbf{x}_{[n]}/(x_p x_q))^{k-1}$，其中 $k \geq 1$。注意，$\deg(u_k) = (n-2)k - 1$。我们断言 $I_c(G)^k : u_k = P_e$。与前面一样，$P_e \subset I_c(G)^k : u_k$。反过来，我们证明：若 v 是一个满足 $\operatorname{supp}(v) \subset [n] \setminus \{p,r\}$的单项式，则 $v \notin I_c(G)^k : u_k$。反设结论不成立。那么，方程 (9)仍然成立。由此方程可得，所有边 $e_1, \ldots, e_k$ 都包含 p。由于 $\{p,r\} \notin E(G)$，可知 $\deg_{x_r}(w) = k$。但这个 x_r- 次数应小于或等于 $\deg_{x_r}(vu_k) = k-1$，这显然矛盾。由此得出 $I_c(G)^k : u_k = P_e$。

现在，令 $G = tK_2$，其中 $t \geq 2$。称 $E(G) = \{\{1,2\},\{3,4\},\ldots,\{2t-1,2t\}\}$。首先证明，不存在次数为 $(2t-2)k-1$ 的单项式 $u \in S$，使得 $I_c(G)^k : u$ 是单项式素理想。反设存在这样的单项式 u。那么， $I_c(G)^k : u$ 应由变量生成。经过重新标记后，不妨设 $x_1 \in I_c(G)^k : u$。于是 $x_1 u \in I_c(G)$。由于 $\deg(x_1 u) = (2t-2)k$，因此 $x_1 u \in \mathcal{G}(I_c(G)^k)$。所以，存在边 e_1、.....、$e_k \in E(G)$，使得$x_1 u = \prod_{i=1}^k \mathbf{x}^{[2t]\setminus e_i}$。由于 x_1 整除这个单项式，因此至少有一个指标 $i \in [k]$ 满足 $1 \notin e_i$。设 $e_i = e_1 = \{3,4\}$。因此 $u = \mathbf{x}^{[2t]\setminus\{1,3,4\}}(\prod_{i=2}^k \mathbf{x}^{[2t]\setminus e_i})$。注意，$x_3 x_4 \in I_c(G)^k : u$，因为 $x_3 x_4 u = x_2 \mathbf{x}^{[2t]\setminus\{1,2\}}(\prod_{i=2}^k \mathbf{x}^{[2t]\setminus e_i}) \in I_c(G)^k$。我们断言，$x_3 \notin I_c(G)^k : u$，且 $x_4 \notin I_c(G)^k : u$。这表明 $x_3 x_4$ 是 $I_c(G)^k : u$ 的极小生成元，因此 $I_c(G)^k : u$ 并非由变量生成。如果 $x_3 \in I_c(G)^k : u$，那么我们应有

$$x_3 u = \mathbf{x}_{[2t]\setminus\{1,4\}}(\prod_{i=2}^k \mathbf{x}_{[2t]\setminus e_i}) = \mathbf{x}_{[2t]}^k/((x_1 x_4)\mathbf{x}_{e_2}\cdots\mathbf{x}_{e_k}) \in I_c(G)^k.$$

由于 $\deg(x_3 u) = (2t-2)k$，这等价于 $w = (x_1 x_4)\mathbf{x}_{e_2}\cdots\mathbf{x}_{e_k} \in I(G)^k$。令$w' = \mathbf{x}_{e_2}\cdots\mathbf{x}_{e_k}$。由于 $\mathcal{G}(I_c(G)) = \{\mathbf{x}^{\{1,2\}}, \ldots, \mathbf{x}_{\{2t-1,2t\}}\}$， $v \in I(G)^k$ 的每个极小单项式生成元都满足 $\deg_{x_1}(v) + \deg_{x_2}(v)$ 是偶整数。另一方面，$\deg_{x_1}(w) + \deg_{x_2}(w) = 1 + \deg_{x_1}(w') + \deg_{x_2}(w')$ 是奇整数，因为 $w \in \mathcal{G}(I_c(G)^{k-1})$。因此 $w \notin I_c(G)^k$，所以 $x_3 \notin I_c(G)^k : u$，得证。

总结至此的讨论，我们证明了对所有 $k \geq 1$，有 $\mathrm{v}(I_c(G)^k) \geq (2t-2)k$。现在我们证明等式成立。为此，考虑单项式$u_k = \mathbf{x}^{[2t]\setminus\{1,3\}}(\mathbf{x}^{[2t]\setminus\{1,2\}})^{k-1}$。注意 $x_1 u_k = x_4 \mathbf{x}^{[2t]\setminus\{3,4\}}(\mathbf{x}^{[2t]\setminus\{1,2\}})^{k-1} \in I_c(G)^k$。类似地， $x_3 u_k \in I_c(G)^k$。因此 $(x_1, x_3) \subset I_c(G)^k : u_k$。为证明反向包含，考虑一个单项式 $v \in S$，其 $\operatorname{supp}(v) \subset [2t] \setminus \{1,3\}$。反设 $vu_k \in I_c(G)^k$，则存在边 $e_1, \ldots, e_k \in E(G)$，使得 $w = \prod_{i=1}^k \mathbf{x}^{[2t]\setminus e_i}$ 整除 vu_k。由于 $\deg_{x_1}(vu_k) = 0$，从而 $\deg_{x_1}(w) = 0$，因此 $e_1 = \cdots = e_k = \{1,2\}$。故 $\deg_{x_3}(w) = k$。然而，这个 x_3-次数应小于或等于 $\deg_{x_3}(vu_k) = k-1$，这是荒谬的。由此可得$I_c(G)^k : u_k = (x_1, x_3)$，如所欲证。我们得出结论：对所有$k \geq 1$，$\mathrm{v}(I_c(G)^k) = (2t-2)k$，从而陈述 (a) 成立。

(b) 设 $c = c(G)$。由 [15, 定理 4.1] 或本文中的定理 C(c)(ii)，确实可得对所有 $k \geq 1$，$\mathrm{v}(I_c(G)^k) < \mathrm{reg}\, I_c(G)^k$。

(c) 假设 $I_c(G)$ 具有线性幂。则对所有 $k \geq 1$，$\mathrm{reg}\ I_c(G)^k = (n-2)k$。此外，[14, 定理 B]（或定理 C(c)(ii)）给出 $c(G) = 1$。第 (a) 部分表明，对所有 $k \geq 1$，$\mathrm{v}(I_c(G)^k) = (n-2)k - 1 = \mathrm{reg}\, I_c(G)^k - 1$。□

推论 4.3. 对任意图 G，我们有 $\mathrm{vstab}(I_c(G)) = 1$。

显式确定一个补边理想的全部局部 v-函数，以及一个边理想的局部 v-函数，将是极有意义的。

我们以如下注记结束本文。

诺特环中的理想 I 称为满足强持续性，若对所有 $k \geq 1$ 有 $I^{k+1} : I = I^k$。当 I 满足强持续性时，它亦满足持续性。边理想满足强持续性，见 [28, 引理 2.12]。

除了定理 B 之外，还有其他方法可以证明一个理想满足持续性。例如，Herzog 和 Qureshi [23, 定理 1.4] 证明，若单项式理想 $I \subset S$ 的 Rees 代数 $\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{k\geq 0} I^k t^k \subset S[t]$ 满足 Serre 条件（S_2），则 I 满足（强）持续性。

预计补边理想的 Rees 代数总是 Cohen-Macaulay（[16, 猜想 4.7]）。若此猜想成立，则任意补边理想都满足强持续性，这将为定理 A 提供另一种证明。目前，$I_c(G)$ 是否总是满足强持续性仍是一个悬而未决的问题。

致谢。 A. Ficarra 获得了由 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 资助的 JDC2023-051705-I 项目资助（Grant JDC2023-051705- I），以及 FSE+ 的资助；此外还获得了 INDAM（意大利高等数学研究院）的资助。我们感谢 Kamalesh Saha 就定理 4.2 进行了有益的讨论。

References

[1] S. Bayati, J. Herzog, G. Rinaldo, 《单项式理想的关联素理想的稳定集合》，《数学档案》，98（2012），213-217。[2] S.Bayati, J.Herzog, G. Rinaldo, 《计算单项式理想的关联素理想稳定集合的程序》，http://ww2.unime.it/algebra/rinaldo/stableset/，2011。[3] P. Biswas, M. Mandal, K. Saha, 《分次理想的 v-数的渐近性态与稳定性指标》，2024，预印本 https://arxiv.org/abs/2402.16583。[4] M. Brodmann, 《Ass(M/I^nM) 的渐近稳定性》，《美国数学学会会刊》，74（1979），16–18[5] M. Brodmann, 《解析扩张的渐近性质》，《剑桥哲学学会数学会刊》，《86》（1979），35–39。[6] A. Conca, 《关于 v-不变量的注记》，《美国数学学会会刊》《152 》（2024），第6期，2349–2351。[7] S.M. Cooper, A. Seceleanu, S.O. Toh˘aneanu, M. Vaz Pinto, R.H. Villarreal。《广义最小距离函数与 Geramita 理想的代数不变量》。《应用数学进展》，112:101940，2020。[8] M. Crupi, A. Ficarra, E. Lax, 《匹配、平方自由幂与 Betti 分裂》，《伊利诺伊数学杂志》69(2)：353-372。

[9] S. Eliahou, M. Kervaire, 《某些单项式理想的极小分解》, J. Algebra 129(1), 1–25（1990）。[10] A. Ficarra, 《同调移位理想：Macaulay2 软件包》, 2023, 预印本 https://arxiv.org/ abs/2309.09271。[11] A. Ficarra, 《Simon 猜想与单项式理想的 v-数》, Collectanea Mathematica（2024）: 1–16。https://doi.org/10.1007/s13348-024-00441-z[12] A. Ficarra, P. Macias Marques, 《理想和的幂的 v-函数》, J Algebr Comb 62, 13（2025）。https://doi.org/10.1007/s10801-025-01429-z[13] A. Ficarra, S. Moradi, 《多拟阵理想的符号幂》, Journal of Pure and Applied Algebra, 229(10):108082, 2025。[14] A. Ficarra, S. Moradi, 《具有线性幂的 Stanley-Reisner理想》, 2025, 预印本 https:// arxiv.org/abs/2508.10354。[15] A. Ficarra, S. Moradi, 《补边理想》, （2025）, 预印本 https://arxiv.org/abs/2508.10870。[16] A. Ficarra, S. Moradi, 《补边理想的 Rees代数》, （2025）, 预印本 https: //arxiv.org/abs/2509.18048。[17]A. Ficarra, E. Sgroi, 《齐次理想的 v-数的渐近性态》, 2023, 预印本 https://arxiv.org/abs/2306.14243[18]A. Ficarra, E. Sgroi, 《VNumber》, Macaulay2 软件包, 见 https://github.com/ EmanueleSgroi/VNumber, 2024。[19] A. Ficarra, E. Sgroi, 《整数规划的渐近性态与分次滤过的 v-函数》, J. Algebra Its Appl., 2025, https://doi.org/10.1142/S0219498826502361[20] A. Ficarra, E. Sgroi, 《分次理想的幂的稳定性指数之比较》, （2025）, 预印本 https://arxiv.org/abs/2505.15608。[21] C. A. Francisco, H. T. H`a, A. Van Tuyl, 《单项式理想的分裂》, Proc. Amer. Math. Soc. 137（2009）, 第10期, 3271-3282。[22] J. Herzog, T. Hibi, 《单项式理想》, Graduate texts in Mathematics 260, Springer, 2011。[23] J. Herzog, A.A. Qureshi, 《理想的幂的持久性与稳定性》, J. Pure Appl. Algebra, 219（2015）, 530–542。[24] J. Herzog, A. Rauf, M. Vladoiu, 《多拟阵理想的关联素理想的稳定集合》, J. Algebr. Comb. 37（2013）, 289-312。[25] T. Hibi, A. A. Qureshi, S. Saeedi Madani, 《补边理想》, 2025, 预印本 Ψhttps: // arxiv.org/abs/2508.09837。[26] H.M. Lam, N.V. Trung, 《边理想的幂的关联素理想与图的耳分解》, Trans. Amer. Math. Soc. 372（2019）, 3211–3236。[27] D. Lu, Z. Wu, G. Zhu, 《补边理想的幂的同调移位》, （2025）, 预印本 https://arxiv.org/abs/2511.13267。[28] J. Mart´ınez-Bernal, S. Morey, R. Villarreal, 《边理想的幂的关联素理想》, Collect. Math. 63, 361-374（2012）。[29] H. D. Nguyen, T. Vu, 《理想和的幂及其同调不变量》, Journal of Pure and Applied Algebra, 223(7)（2019）, 3081–3111。[30] A. Roy, K. Saha, 《通常幂与符号幂相等性以及（$n-2$）-均匀乱集的 Conforti-Cornu´ejols 猜想》, （2025）, 预印本 https://arxiv.org/abs/2510.15864。[31] R. H. Villareal, 《单项式代数》, 第2版（Chapman and Hall/CRC, 2018）。

Antonino Ficarra, BCAM – Basque Center for Applied Mathematics, Mazarredo14, 48009 Bilbao, Basque Country – Spain, Ikerbasque, Basque Foundation for Sci-ence, Plaza Euskadi 5, 48009 Bilbao, Basque Country – Spain电子邮件地址: aficarra@bcamath.org, antficarra@unime.it