耦合五次薛定谔方程系统的离散波湍流

Shayan Zahedi

arXiv:2603.02393v1 [math.AP] 2 Mar 2026

摘要

在描述极限过程的特定标度律下，我们在离散波湍流框架中，严格推导出与一个耦合五次薛定谔方程微观系统相关联的非线性宏观系统。我们的系统从一对精心准备的随机初始数据演化而来。更确切地说，在 $d \geq 2$ 维中，我们在大小为 L 的大盒子上建立微观系统，其非线性项强度为 ϵ。在极限 $L \to \infty$ 和 $\epsilon \to 0$ 下，遵循带有 $\beta \in$ 的 $\epsilon L^{\beta} = 1$ 标度律[1]（1，∞），我们证明，微观系统的长时间行为在统计意义上可由一个非线性共振系统描述，直至时间 $\delta\epsilon^{-1}$；该系统的动力学由精确共振驱动，其中 δ 独立于 L 和 ϵ。我们的系统不具有一般的对称性，尤其不满足质量守恒。在这类不变性较少的系统中，与准共振相比，精确共振的贡献显著更大，并且基本上决定了大盒极限下的有效动力学。我们论证了离散波湍流在该微观模型中的涌现。

目录

1 引言 2

1.1 背景与动机.21.2 主要结果陈述.31.2.1 微观系统（五次非线性薛定谔方程）.31.2.2 宏观系统（宏观系统）.51.2.3 主要结果.61.2.4 （宏观系统）的启发式推导.61.3 证明要素.9

2 费曼图与偶对10

2.1 用带符号和彩色树重新表述.112.2 有根树上的装饰与平均.15

3 定理1.2 证明的第一部分 17

3.1 初始估计与准备工具.183.2 从求和过渡到积分.223.3 权衡收益与损失.31

3.4 $\mathcal{J}_T$ 的时间导数.373.5 Dyson迭代的范数估计.38花朵树与$\mathcal{L}^m$ 的傅里叶表示.393.7 花朵对.43
3.8 $\mathcal{L}^m$ 的核的估计.443.9 $\mathcal{Y}_m^\eta$ ‘„$_n$的时间导数.473.10 $\mathcal{Y}_m^\eta$ ‘„$_n$的范数估计.493.11 $\mathcal{L}^m$ 的范数估计.513.12 压缩论证.53

4 定理1.2 证明的第二部分 57

4.1 有效系统.574.2 作为不动点的有效系统解.59

5 定理1.2 证明的第三部分 63

5.1 关于共振节点.635.2 关于非共振节点.655.3 共振对的类型.655.4 从共振对到三叉树.68
5.5 三叉树重现递归结构.715.6 大盒极限.76

预备引理 82

1 引言

1.1 背景与动机

波湍流理论描述了在热力学极限下，具有相互作用波的系统所呈现的非平衡统计行为；在该极限下，盒子 L 的尺寸趋于无穷大。它是波动版的经典动理学理论，后者研究粒子数 N 趋于无穷大的情形。自由度L 与 N 彼此对应。波湍流理论最初出现在物理学文献中 [1, 2, 17, 18, 24, 29, 30]。在数学上，人们关注的是：在何种条件下，能够在适当的时间尺度上，从具有充分良好随机初始数据的非线性偏微分方程微观系统，严格推导出宏观系统。宏观系统的一般适定性也受到关注。

物理学文献预见到，采用费曼图展开是推导宏观系统的正确方法。然而，主要障碍在于如何使这一展开严格化并证明

收敛，同时牢记 L 与非线性项的次数 ϵ 之间正确的标度律。Lukkarinen 和 Spohn [21] 率先成功证明了格点上的三次薛定谔方程背景下图展开的收敛性。他们研究了热力学极限下不变吉布斯测度的时间关联。此后，关于三次薛定谔方程波湍流的许多研究相继涌现，尤其涉及其解的傅里叶谱 [4], 以及其波动力学方程的严格推导 [5, 6, 9, 14, 15]。五次薛定谔方程的波动力学方程推导在 [26]中进行了研究。在 [25], 中，从超立方格点上的 KdV 型方程推导出了三波动理学方程。在 [28] 中，推导出了一维 MMT 模型的波动力学方程。在 [12, 13] 中，研究了 $2D$ 中的无旋重力水波波湍流。Deng 和 Hani 证明了三次薛定谔方程的波动力学方程可推导至动理学时间尺度 [7, 8]。随后，最后两篇参考文献中的思想被用于长时间推导玻尔兹曼方程 [11] 以及流体力学基本偏微分方程的其他严格推导 [10]。总而言之，动理学描述要求非线性项较弱。然而，在与之互补的极弱非线性情形下，底层微观系统的精确共振会压过准共振。在这种情形下，会出现不同的有效方程 [3, 16, 27]。这种情形称为离散波湍流 [19, 20, 22]。这些情形的特点是缺乏能够支持对底层微观模型进行动理学描述的对称性。文献 [27]研究了二次克莱因-戈尔登方程耦合系统的离散波湍流，并严格推导出了相应的宏观系统。本文关注五次薛定谔方程耦合系统的离散波湍流。

我们考虑一个具有弱非线性项的五次薛定谔方程组 $\epsilon Q^\eta\left(f^\eta, f^\eta, f^\eta, f^\eta, f^\eta\right)$，定义在大小为 L 的盒子上，其中 $\eta \in \{0,\ 1\}$ 且 $\eta = 1-\eta$。我们特别关注那些 Q^η 会破坏某些不变性的情况，尤其是质量守恒。由于缺少这些对称性，精确共振将在大盒极限宏观系统（MS）的非线性动力学中起主导作用 $L\to\infty$，[1]使其在标度律 $\epsilon L^\beta = 1$ 下，对于 $\beta \in (1,\ \infty)$呈现有效的离散型行为。我们假设初始数据是随机且准备充分的。我们预期，微观系统（五次非线性薛定谔方程）的关联函数动力学由（宏观系统）所支配。

1.2 主要结果陈述

1.2.1 微观系统(五次非线性薛定谔方程)

我们考虑空间维数为 $d \geq 2$ 的五次薛定谔方程耦合系统

$$\begin{cases} (\mathrm{i}\partial_t + \Delta) f^0 = \epsilon Q^0\left(f^0, \overline{f^0}, \overline{f^0}, f^1, f^1\right) & \text{in } \mathbb{R}_{\geq} \times \mathbb{T}_L^d, \\ (\mathrm{i}\partial_t + \Delta) f^1 = \epsilon Q^1\left(f^1, \overline{f^1}, \overline{f^1}, f^0, f^0\right) & \text{in } \mathbb{R}_{\geq} \times \mathbb{T}_L^d, \\ \left(f^0(0), f^1(0)\right) = \left(f_{\text{in}}^0, f_{\text{in}}^1\right) & \text{on } \mathbb{T}_L^d, \end{cases} \tag{qNLS}$$

其中

$$\hat{f}(t,k) = \frac{1}{L^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{T}_L^d} f(t,x) e^{\mathrm{i}k\cdot x} \mathrm{d}x, \quad f(t,x) = \frac{1}{L^{\frac{d}{2}}} \sum_{k\in\mathbb{Z}_L^d} \hat{f}(t,k) e^{\mathrm{i}k\cdot x} \tag{1.1}$$

使得卷积的傅里叶变换具有形式 ($n > 1$)

$$\widehat{f_1 \cdots f_n}(k) = \frac{1}{L^{d(n-1)/2}} \sum_{k_1+\cdots+k_n=k} \prod_{i=1}^{n} \widehat{f_i}(k_i) \tag{1.2}$$

以及对 $\eta \in \{0,1\}$,

$$\widehat{Q^\eta}(f,g,h,u,w)(k) := \frac{1}{L^{2d}} \sum_{\sum_{i=1}^5 k_i = k} Q^\eta(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5)\hat{f}(k_1)\hat{g}(k_2)\hat{h}(k_3)\hat{u}(k_4)\hat{w}(k_5). \tag{1.3}$$

我们假设 $Q^\eta, |Q^\eta| \in (W^{1,1} \cap W^{1,\infty})\left((\mathbb{R}^d)^5, \mathbb{C}\right)$对 $\eta \in \{0,1\}$两者均成立。

注 *1.1.* 若 $f := f^0 = f^1$ 且 $Q^\eta(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5) = 1$对 $\eta \in \{0,1\}$两者均成立，则我们将得到五次薛定谔方程

$$\begin{cases} (\mathrm{i}\partial_t + \Delta) f = \epsilon |f|^4 f & \text{in } \mathbb{R}_{\geq} \times \mathbb{T}_L^d, \\ f(0) = f_{\text{in}} & \text{on } \mathbb{T}_L^d \end{cases} \tag{1.4}$$

以及准备良好的随机初始数据 $f_{\text{in}} = f^0$ 于 $= f_{\text{in}}^1$ 中，以及空间变量上的周期性边界条件。在此情形下，我们将观察不到离散波湍流情形中的非线性有效动力学，这可由（宏观系统）看出。我们还有质量随时间的守恒：

$$\partial_t \|f(t)\|^2_{L^2(T_L^d)} = \int_{T_L^d} \left(\partial_t f(t)\overline{f}(t) + f(t)\partial_t \overline{f}(t)\right) \mathrm{d}x = \mathrm{i} \int_{T_L^d} \left(\overline{f}(t)\Delta f(t) - f(t)\Delta \overline{f}(t)\right) \mathrm{d}x = 0. \tag{1.5}$$

系统（五次非线性薛定谔方程）的设计旨在通过引入 Q^η来打破这一不变性。我们将其推广为一个耦合系统，这将导致在分析的图解部分引入颜色，正如在 [27] 中对耦合二次克莱因–戈尔登方程系统所做的那样。

令 $F^\eta := e^{-\mathrm{i}t\Delta} f^\eta$ 和 $\bar{\eta} := 1 - \eta$，从而得到关于傅里叶模的下列方程：

$$\widehat{F^\eta}(t,k) = \mu_k^\eta - \frac{\mathrm{i}\epsilon}{L^{2d}} \int_0^t \sum_{\sum_{i=1}^5 k_i = k} Q^\eta(k_1,\ldots,k_5)\, e^{\mathrm{i}t\Omega} \widehat{F^\eta}(\tau,k_1)\widehat{\overline{F^\eta}}(\tau,k_2)\widehat{\overline{F^\eta}}(\tau,k_3)\widehat{F^{\bar{\eta}}}(\tau,k_4)\widehat{F^{\bar{\eta}}}(\tau,k_5)\mathrm{d}\tau, \tag{1.6}$$

其中

$$\Omega = \Omega(k,k_1,k_2,k_3,k_4,k_5) := |k|^2 - |k_1|^2 + |k_2|^2 + |k_3|^2 - |k_4|^2 - |k_5|^2 \tag{1.7}$$

表示共振因子。

在大盒极限 $L \to \infty$中，我们寻求三个关联函数 $\mathbb{E}\left(\left|\widehat{f^0}(t,k)\right|^2\right)$、$\mathbb{E}\left(\left|\widehat{f^1}(t,k)\right|^2\right)$以及 $\mathbb{E}\left(\widehat{f^0}(t,k)\widehat{f^1}(t,k)\right)$的动力学，而平均是~~对初始~~数据的随机分布进行的。对于复数 $z \in \mathbb{C}$，我们记 $z^+ = z$ 和 $z^- = z$，并假设初始数据$\left(\widehat{f^0}(k), \widehat{f^1}(k)\right)_{k \in \mathbb{Z}_L^d}$是 $\mathbb{C}^2$中一族独立的高斯变量，使得

$$\mathbb{E}\left(\mu_k^\eta\right) = 0 \text{ and } \mathbb{E}\left(\mu_k^{\eta,\iota}\mu_{k'}^{\eta',\iota'}\right) = \delta_{\iota+\iota'}\delta_{k-k'}M^{\eta,\eta'}(k)^\iota \tag{1.8}$$

对所有 $k,k'\in\mathbb{Z}_L^d$, $\eta,\eta'\in\{0,1\}$并且其中 $M^{\eta,\eta'}\in\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)(\mathbb{R}^d)$。假设（1.8）必然蕴含 $M^{\eta,\eta'}=M^{\eta',\eta}$。~~我们~~还假设 $M^{\eta,\eta'}$ 支撑在以原点为中心、固定半径为 $R>0$的球内。

假设 1. 对所有 $n\leq$ |对数ϵ| 以及 $i\in[\![1,4]\!]$，均假设

$$\sum_{k_1,\dots,k_i\in B_{nR}^{\mathbb{Z}_L^d}(0)}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_5}\left|Q_i^{\eta}\left(k_{\sigma(1)},\dots,k_{\sigma(5)}\right)\right|\lesssim L^{id} \tag{1.9}$$

对所有 $k_{i+1},\dots,k_5\in\mathbb{R}^d$，其中隐含常数与 n和 L无关，且 $\mathcal{S}_5$表示 5度对称群。

我们展示宏观系统呈现非线性有效动力学所采用的时间尺度为 δT，其中

$$T:=\epsilon^{-1}, \tag{1.10}$$

$\epsilon=L^{-\beta},\beta\in(1,\infty)$，且 δ是一个与 L和 ϵ无关的常数。

1.2.2 宏观系统(宏观系统)

在初始数据 f^{η} 相互独立的假设下，非线性宏观系统为

$$\begin{cases}
\partial_t\rho^{\eta}(t,\xi)=2\Big[\rho^{\eta}(t,\xi)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Im}\left(Q^{\eta}(\xi,\xi_1,\xi_2,-\xi_1,-\xi_2)\overline{\rho^{\times,\eta}(t,-\xi_1)\rho^{\times,\eta}(t,-\xi_2)}\right)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\\
+\rho^{\eta}(t,\xi)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Im}\left(Q^{\eta}(\xi,\xi_1,\xi_2,-\xi_2,-\xi_1)\overline{\rho^{\times,\eta}(t,-\xi_1)\rho^{\times,\eta}(t,-\xi_2)}\right)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\\
+\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Im}\left(\overline{\rho^{\times}(t,\xi)}Q^{\eta}(\xi_1,-\xi_1,\xi_2,\xi,-\xi_2)\rho^{\eta}(t,\xi_1)\overline{\rho^{\times,\eta}(t,-\xi_2)}\right)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\\
+\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Im}\left(\overline{\rho^{\times}(t,\xi)}Q^{\eta}(\xi_1,\xi_2,-\xi_1,\xi,-\xi_2)\rho^{\eta}(t,\xi_1)\overline{\rho^{\times,\eta}(t,-\xi_2)}\right)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\\
+\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Im}\left(\overline{\rho^{\times}(t,\xi)}Q^{\eta}(\xi_1,-\xi_1,\xi_2,-\xi_2,\xi)\rho^{\eta}(t,\xi_1)\overline{\rho^{\times,\eta}(t,-\xi_2)}\right)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\\
+\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Im}\left(\overline{\rho^{\times}(t,\xi)}Q^{\eta}(\xi_1,\xi_2,-\xi_1,-\xi_2,\xi)\rho^{\eta}(t,\xi_1)\overline{\rho^{\times,\eta}(t,-\xi_2)}\right)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\Big]\\
\partial_t\rho^{\times}(t,\xi)=-\mathrm{i}\Big[\rho^{\times}(t,\xi)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(Q^0(\xi,\xi_1,\xi_2,-\xi_1,-\xi_2)-\overline{Q^1(\xi,\xi_1,\xi_2,-\xi_1,-\xi_2)}\right)\overline{\rho^{\times}(t,-\xi_1)\rho^{\times}(t,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\\
+\rho^{\times}(t,\xi)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(Q^0(\xi,\xi_1,\xi_2,-\xi_2,-\xi_1)-\overline{Q^1(\xi,\xi_1,\xi_2,-\xi_2,-\xi_1)}\right)\overline{\rho^{\times}(t,-\xi_1)\rho^{\times}(t,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\\
+\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\rho^1(t,\xi)Q^0(\xi_1,-\xi_1,\xi_2,\xi,-\xi_2)\rho^0(t,\xi_1)-\rho^0(t,\xi)\overline{Q^1(\xi_1,-\xi_1,\xi_2,\xi,-\xi_2)}\rho^1(t,\xi_1)\right)\overline{\rho^{\times}(t,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\\
+\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\rho^1(t,\xi)Q^0(\xi_1,\xi_2,-\xi_1,\xi,-\xi_2)\rho^0(t,\xi_1)-\rho^0(t,\xi)\overline{Q^1(\xi_1,\xi_2,-\xi_1,\xi,-\xi_2)}\rho^1(t,\xi_1)\right)\overline{\rho^{\times}(t,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\\
+\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\rho^1(t,\xi)Q^0(\xi_1,-\xi_1,\xi_2,-\xi_2,\xi)\rho^0(t,\xi_1)-\rho^0(t,\xi)\overline{Q^1(\xi_1,-\xi_1,\xi_2,-\xi_2,\xi)}\rho^1(t,\xi_1)\right)\overline{\rho^{\times}(t,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\\
+\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\rho^1(t,\xi)Q^0(\xi_1,\xi_2,-\xi_1,-\xi_2,\xi)\rho^0(t,\xi_1)-\rho^0(t,\xi)\overline{Q^1(\xi_1,\xi_2,-\xi_1,-\xi_2,\xi)}\rho^1(t,\xi_1)\right)\overline{\rho^{\times}(t,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\Big],\\
\left(\rho^0(0,\xi),\rho^1(0,\xi),\rho^{\times}(0,\xi)\right)=\left(M^{0,0}(\xi),M^{1,1}(\xi),M^{0,1}(\xi)\right).
\end{cases} \tag{MS}$$

我们将在第 4.1 节证明，存在一个足够小的 $\delta>0$，其取值取决于 $M^{\eta}、\eta'$，使得存在唯一的局部解 $(\rho^{\eta}、\rho^{\times})\in C\left([0,\delta]、\left(W^{1}、\infty\cap W^{1、1}\right)\left(\mathbb{R}^{d}\right)\right)^{2}$，满足（宏观系统）在时间区间$[0,\delta]$上成立。

1.2.3 主要结果

本手稿的主要结果是对（宏观系统）在存在区间 $[0,\delta]$ 上作为平均（五次非线性薛定谔方程）动力学在标度律 $\epsilon=L^{-\frac{1}{\beta}}$ 下当 $\frac{1}{\beta}\in$（0，1）时的极限所做的严格推导。–

定理 1.2. 设 $d\geq 2、\ s>\frac{d}{2}$ 与 $\beta\in$（1，∞）。存在 $\delta、L_0、A_0>0$，使得对所有 $L\geq L_0$ 与 $A\geq A_0$:

(*i*) 存在一个集合 $\mathcal{E}_{L,\ A}$，其概率大于或等于 $1-L^{-A}$，使得若初始数据 f_2^{η}在 中取自 $\mathcal{E}_{L,\ A}$，则 （五次非线性薛定谔方程）具有唯一解 $\left(f^{0},\ f^{1}\right)\in C\left(\left[0,\delta L^{\frac{1}{\beta}}\right],H^{s}\left(\mathbb{T}_{L}^{d}\right)\right)^{2}$。

(ii) 存在唯一解 $\left(\rho^{0},\ \rho^{1},\ \rho^{\times}\right)\in C\left([0,\delta],\ \left(W^{1,\ \infty}\cap W^{1,\ 1}\right)\left(\mathbb{R}^{d}\right)\right)^{3}$ 的(宏观系统)。

(iii) 对所有 $\eta\in\{0,1\}$,

$$\lim_{L\to\infty}\sup_{t\in[0,\delta]}\sup_{k\in\mathbb{Z}_{L}^{d}}\left|\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}_{L,A}}\left|\widehat{f^{\eta}}\left(L^{\frac{1}{\beta}}t,k\right)\right|^{2}\right)-\rho^{\eta}(t,k)\right|=0, \tag{1.11}$$

$$\lim_{L\to\infty}\sup_{t\in[0,\delta]}\sup_{k\in\mathbb{Z}_{L}^{d}}\left|\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}_{L,A}}\widehat{f^{0}}\left(L^{\frac{1}{\beta}}t,k\right)\overline{\widehat{f^{1}}\left(L^{\frac{1}{\beta}}t,k\right)}\right)-\rho^{\times}(t,k)\right|=0. \tag{1.12}$$

注*1.3*。 方程（1.11）和（1.12）的收敛是定量的，即存在 $C,\ \nu>0$，且与 L 无关，使得

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,\delta]}\sup_{k\in\mathbb{Z}_{L}^{d}}\left|\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}_{L,A}}\widehat{f^{0}}\left(L^{\frac{1}{\beta}}t,k\right)\overline{\widehat{f^{1}}\left(L^{\frac{1}{\beta}}t,k\right)}\right)-\rho^{\times}(t,k)\right|\\&+\sup_{t\in[0,\delta]}\sup_{k\in\mathbb{Z}_{L}^{d}}\left|\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}_{L,A}}\left|\widehat{f^{\eta}}\left(L^{\frac{1}{\beta}}t,k\right)\right|^{2}\right)-\rho^{\eta}(t,k)\right|\leq CL^{-\nu}.\end{aligned} \tag{1.13}$$

1.2.4 （宏观系统）的启发式推导

我们定义 $\widehat{G^{\eta}}(t,\ k):=\widehat{F^{\eta}}\left(\epsilon^{-1}t,\ k\right)$和

$$\rho^{\eta}(t,k):=\mathbb{E}\left(\left|\widehat{G^{\eta}}(t,k)\right|^{2}\right)=\mathbb{E}\left(\left|\widehat{f^{\eta}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|^{2}\right), \tag{1.14}$$

$$\rho^{\times,\eta}(t,k):=\mathbb{E}\left(\widehat{G^{\eta}}(t,k)\overline{\widehat{G^{\overline{\eta}}}(t,k)}\right)=\mathbb{E}\left(\widehat{f^{\eta}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\overline{\widehat{f^{\overline{\eta}}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)}\right). \tag{1.15}$$

注意，$\rho^{\times,\overline{\eta}}=\overline{\rho^{\times,\eta}}$。

根据定义

$$\widehat{G^{\eta}}(t,k)=\widehat{F^{\eta}}_{\mathrm{in}}(k)-\frac{\mathrm{i}}{L^{2d}}\int_{0}^{t}\sum_{\sum_{i=1}^{5}=k}Q^{\eta}(k_1,\ldots,k_5)e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\tau\Omega}\widehat{G^{\eta}}(\tau,k_1)\widehat{G^{\overline{\eta}}}(\tau,k_2)\widehat{G^{\eta}}(\tau,k_3)\widehat{G^{\overline{\eta}}}(\tau,k_4)\widehat{G^{\eta}}(\tau,k_5)\mathrm{d}\tau. \tag{1.16}$$

由于我们关注方程（$L\to\infty$ 1.14）和（1.15）的大盒极限，因此 G^η 的动力学由精确共振 $\{\Omega=0\}$主导。我们可以启发式地假设

$$\partial_t\widehat{G^\eta}(t,k)=-\frac{\mathrm{i}}{L^{2d}}\sum_{\substack{\sum_{i=1}^5=k\\ \Omega=0}}Q^\eta(k_1,\dots,k_5)\widehat{G^\eta}(t,k_1)\widehat{\overline{G^\eta}}(t,k_2)\widehat{\overline{G^\eta}}(t,k_3)\widehat{G^{\overline\eta}}(t,k_4)\widehat{G^{\overline\eta}}(t,k_5).\tag{1.17}$$

平凡共振为（这六个集合分别对应图 5.1 中的六幅图）$\{k_2+k_4=k_3+k_5=0$ 和 $k_1=k\}\cup\{k_2+k_5=k_3+k_4=0$和 $k_1=k\}\cup\{k_1+k_2=k_3+k_5=0$和 $k_4=k\}\cup\{k_1+k_3=k_2+k_5=0$ 和 $k_4=k\}\cup\{k_1+k_2=k_3+k_4=0$和 $k_5=k\}\cup\{k_1+k_3=k_2+k_4=0$和 $k_5=k\}$，因此

$$\begin{aligned}\partial_t\widehat{G^\eta}(t,k)=-\frac{\mathrm{i}}{L^{2d}}\Bigg[&\widehat{G^\eta}(t,k)\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}_L^d}Q^\eta(k,k_1,k_2,-k_1,-k_2)\widehat{\overline{G^\eta}}(t,k_1)\widehat{\overline{G^\eta}}(t,k_2)\widehat{G^{\overline\eta}}(t,-k_1)\widehat{G^{\overline\eta}}(t,-k_2)\\
&+\widehat{G^\eta}(t,k)\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}_L^d}Q^\eta(k,k_1,k_2,-k_2,-k_1)\widehat{\overline{G^\eta}}(t,k_1)\widehat{\overline{G^\eta}}(t,k_2)\widehat{G^{\overline\eta}}(t,-k_2)\widehat{G^{\overline\eta}}(t,-k_1)\\
&+\widehat{G^{\overline\eta}}(t,k)\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}_L^d}Q^\eta(k_1,-k_1,k_2,k,-k_2)\widehat{G^\eta}(t,k_1)\widehat{\overline{G^\eta}}(t,-k_1)\widehat{\overline{G^\eta}}(t,k_2)\widehat{G^{\overline\eta}}(t,-k_2)\\
&+\widehat{G^{\overline\eta}}(t,k)\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}_L^d}Q^\eta(k_1,k_2,-k_1,k,-k_2)\widehat{G^\eta}(t,k_1)\widehat{\overline{G^\eta}}(t,k_2)\widehat{\overline{G^\eta}}(t,-k_1)\widehat{G^{\overline\eta}}(t,-k_2)\\
&+\widehat{G^{\overline\eta}}(t,k)\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}_L^d}Q^\eta(k_1,-k_1,k_2,-k_2,k)\widehat{G^\eta}(t,k_1)\widehat{\overline{G^\eta}}(t,-k_1)\widehat{\overline{G^\eta}}(t,k_2)\widehat{G^{\overline\eta}}(t,-k_2)\\
&+\widehat{G^{\overline\eta}}(t,k)\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}_L^d}Q^\eta(k_1,k_2,-k_1,-k_2,k)\widehat{G^\eta}(t,k_1)\widehat{\overline{G^\eta}}(t,k_2)\widehat{\overline{G^\eta}}(t,-k_1)\widehat{G^{\overline\eta}}(t,-k_2)\Bigg]\end{aligned}\tag{1.18}$$

现在利用伊瑟利斯定理（见引理 A.1），并考虑到在这些启发式计算中，我们将大盒极限 $L\to\infty$ 纳入考量，得到

$$\begin{aligned}\partial_t\rho^\eta(t,k)&=2\mathrm{Re}\,\mathbb{E}\left(\partial_t\widehat{G^\eta}(t,k)\overline{\widehat{G^\eta}(t,k)}\right),\\
&=\frac{2}{L^{2d}}\Bigg[\rho^\eta(t,k)\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}_L^d}\mathrm{Im}\left(Q^\eta(k,k_1,k_2,-k_1,-k_2)\overline{\rho^{\times,\eta}(t,-k_1)\rho^{\times,\eta}(t,-k_2)}\right)\\
&+\rho^\eta(t,k)\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}_L^d}\mathrm{Im}\left(Q^\eta(k,k_1,k_2,-k_2,-k_1)\overline{\rho^{\times,\eta}(t,-k_1)\rho^{\times,\eta}(t,-k_2)}\right)\\
&+\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}_L^d}\mathrm{Im}\left(\overline{\rho^{\times,\eta}(t,k)}Q^\eta(k_1,-k_1,k_2,k,-k_2)\rho^\eta(t,k_1)\overline{\rho^{\times,\eta}(t,-k_2)}\right)\\
&+\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}_L^d}\mathrm{Im}\left(\overline{\rho^{\times,\eta}(t,k)}Q^\eta(k_1,k_2,-k_1,k,-k_2)\rho^\eta(t,k_1)\overline{\rho^{\times,\eta}(t,-k_2)}\right)\\
&+\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}_L^d}\mathrm{Im}\left(\overline{\rho^{\times,\eta}(t,k)}Q^\eta(k_1,-k_1,k_2,-k_2,k)\rho^\eta(t,k_1)\overline{\rho^{\times,\eta}(t,-k_2)}\right)\\
&+\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}_L^d}\mathrm{Im}\left(\overline{\rho^{\times,\eta}(t,k)}Q^\eta(k_1,k_2,-k_1,-k_2,k)\rho^\eta(t,k_1)\overline{\rho^{\times,\eta}(t,-k_2)}\right)\Bigg].\end{aligned}\tag{1.19}$$

同理

$$\partial_t \rho^{\times}(t,k) = \mathbb{E}\left(\partial_t \widehat{G^0}(t,k)\overline{\widehat{G^1}(t,k)}\right) + \mathbb{E}\left(\widehat{G^0}(t,k)\partial_t \overline{\widehat{G^1}(t,k)}\right)$$
$$-\frac{\mathrm{i}}{L^{2d}}\Bigg[\rho^{\times}(t,k)\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}_L^d}\left(Q^0(k,k_1,k_2,-k_1,-k_2)-\overline{Q^1(k,k_1,k_2,-k_1,-k_2)}\right)\overline{\rho^{\times}(t,-k_1)\rho^{\times}(t,-k_2)}$$
$$+\rho^{\times}(t,k)\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}_L^d}\left(Q^0(k,k_1,k_2,-k_2,-k_1)-\overline{Q^1(k,k_1,k_2,-k_2,-k_1)}\right)\overline{\rho^{\times}(t,-k_1)\rho^{\times}(t,-k_2)}$$
$$+\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}_L^d}\left(\rho^1(t,k)Q^0(k_1,-k_1,k_2,k,-k_2)\rho^0(t,k_1)-\rho^0(t,k)\overline{Q^1(k_1,-k_1,k_2,k,-k_2)}\rho^1(t,k_1)\right)\overline{\rho^{\times}(t,-k_2)}$$
$$\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}_L^d}\left(\rho^1(t,k)Q^0(k_1,k_2,-k_1,k,-k_2)\rho^0(t,k_1)-\rho^0(t,k)\overline{Q^1(k_1,k_2,-k_1,k,-k_2)}\rho^1(t,k_1)\right)\overline{\rho^{\times}(t,-k_2)}$$
$$+\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}_L^d}\left(\rho^1(t,k)Q^0(k_1,-k_1,k_2,-k_2,k)\rho^0(t,k_1)-\rho^0(t,k)\overline{Q^1(k_1,-k_1,k_2,-k_2,k)}\rho^1(t,k_1)\right)\overline{\rho^{\times}(t,-k_2)}$$
$$+\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}_L^d}\left(\rho^1(t,k)Q^0(k_1,k_2,-k_1,-k_2,k)\rho^0(t,k_1)-\rho^0(t,k)\overline{Q^1(k_1,k_2,-k_1,-k_2,k)}\rho^1(t,k_1)\right)\overline{\rho^{\times}(t,-k_2)}\Bigg] \tag{1.20}$$

我们取极限

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L^{2d}}\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}_L^d} = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 \tag{1.21}$$

在方程（1.19）和（1.20）中，并在第 5.6 节证明其有效性。

$$
\begin{aligned}
\partial_t \rho^\eta(t,\xi) = 2\Bigg[& \rho^\eta(t,\xi) \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Im}\left(Q^\eta(\xi,\xi_1,\xi_2,-\xi_1,-\xi_2)\overline{\rho^{\times,\eta}(t,-\xi_1)\rho^{\times,\eta}(t,-\xi_2)}\right)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 \\
& + \rho^\eta(t,\xi) \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Im}\left(Q^\eta(\xi,\xi_1,\xi_2,-\xi_2,-\xi_1)\overline{\rho^{\times,\eta}(t,-\xi_1)\rho^{\times,\eta}(t,-\xi_2)}\right)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 \\
& + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Im}\left(\overline{\rho^{\times}(t,\xi)}Q^\eta(\xi_1,-\xi_1,\xi_2,\xi,-\xi_2)\overline{\rho^{\times,\eta}(t,-\xi_2)}\right)\rho^\eta(t,\xi_1)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 \\
& + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Im}\left(\overline{\rho^{\times}(t,\xi)}Q^\eta(\xi_1,\xi_2,-\xi_1,\xi,-\xi_2)\overline{\rho^{\times,\eta}(t,-\xi_2)}\right)\rho^\eta(t,\xi_1)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 \\
& + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Im}\left(\overline{\rho^{\times}(t,\xi)}Q^\eta(\xi_1,-\xi_1,\xi_2,-\xi_2,\xi)\overline{\rho^{\times,\eta}(t,-\xi_2)}\right)\rho^\eta(t,\xi_1)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 \\
& + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Im}\left(\overline{\rho^{\times}(t,\xi)}Q^\eta(\xi_1,\xi_2,-\xi_1,-\xi_2,\xi)\overline{\rho^{\times,\eta}(t,-\xi_2)}\right)\rho^\eta(t,\xi_1)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_t \rho^\times(t,\xi) = -\mathrm{i}\Bigg[& \rho^\times(t,\xi) \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \left(Q^0(\xi,\xi_1,\xi_2,-\xi_1,-\xi_2) - \overline{Q^1(\xi,\xi_1,\xi_2,-\xi_1,-\xi_2)}\right)\overline{\rho^\times(t,-\xi_1)\rho^\times(t,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 \\
& + \rho^\times(t,\xi) \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \left(Q^0(\xi,\xi_1,\xi_2,-\xi_2,-\xi_1) - \overline{Q^1(\xi,\xi_1,\xi_2,-\xi_2,-\xi_1)}\right)\overline{\rho^\times(t,-\xi_1)\rho^\times(t,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 \\
& + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \left(\rho^1(t,\xi)Q^0(\xi_1,-\xi_1,\xi_2,\xi,-\xi_2)\rho^0(t,\xi_1) - \rho^0(t,\xi)\overline{Q^1(\xi_1,-\xi_1,\xi_2,\xi,-\xi_2)}\rho^1(t,\xi_1)\right)\overline{\rho^\times(t,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 \\
& + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \left(\rho^1(t,\xi)Q^0(\xi_1,\xi_2,-\xi_1,\xi,-\xi_2)\rho^0(t,\xi_1) - \rho^0(t,\xi)\overline{Q^1(\xi_1,\xi_2,-\xi_1,\xi,-\xi_2)}\rho^1(t,\xi_1)\right)\overline{\rho^\times(t,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 \\
& + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \left(\rho^1(t,\xi)Q^0(\xi_1,-\xi_1,\xi_2,-\xi_2,\xi)\rho^0(t,\xi_1) - \rho^0(t,\xi)\overline{Q^1(\xi_1,-\xi_1,\xi_2,-\xi_2,\xi)}\rho^1(t,\xi_1)\right)\overline{\rho^\times(t,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 \\
& + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \left(\rho^1(t,\xi)Q^0(\xi_1,\xi_2,-\xi_1,-\xi_2,\xi)\rho^0(t,\xi_1) - \rho^0(t,\xi)\overline{Q^1(\xi_1,\xi_2,-\xi_1,-\xi_2,\xi)}\rho^1(t,\xi_1)\right)\overline{\rho^\times(t,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\Bigg]
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

1.3 证明的要点

定理1.2 的证明结合了 [27]和 [6]中的策略，基本分为一个准备步骤和三个关键步骤。其思路是将（五次非线性薛定谔方程）的解拟设为戴森级数展开。更具体地说，

$$
f^\eta = f_0^\eta + \cdots f_{N(L)}^\eta + v^\eta \tag{1.23}
$$

并令 $N(L) = \lfloor \log(L) \rfloor$ diverge as $L \to \infty$。主要问题是证明当 L 足够大时，余项 v^η 的存在唯一性。戴森级数中的每个元素 f_n 都是费曼图的有限和。这一点将在第 2 节证明。随后，Dyson迭代的关联函数被重新表述为对偶对集合的有限和，其基数随分支节点数量呈阶乘级增长。这种阶乘依赖是证明量子非线性薛定谔方程的解在时间区间 $\left[0, \delta L^{\frac{1}{\beta}}\right]$ 上存在唯一性，并证明关联函数 $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}_L,A}\left|\widehat{f^\eta}\right|^2\right)$ 和 $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}_L,A}\widehat{f^\eta}\widehat{f^\eta}\right)$ 在 $L \to \infty$ 时收敛到共振系统 (MS) 的解 $(\rho^0, \rho^1, \rho^\times)$ 的主要障碍。

在第3 节中，我们将拟设 (1.23) 严格化，并证明对于足够大的 L，其迭代项

戴森级数 f_n^η截断至 $N(L)$以及余项 v^η满足相应的界，从而 v^η可以作为巴拿赫空间 $C\left([0,\delta], H^s\left(\mathbb{T}_L^d\right)\right)^2$中的闭球内某个压缩映射的不动点得到[1]。这证明了方程 (五次非线性薛定谔方程) 在 $[0,\delta L^\beta]$上对任意 $\beta\in(1,\infty)$均存在唯一解。本节的主要难点是以 ϵ的正幂形式获得小量。我们的思路是将 Lukkarinen 和 Spohn 的一个关键结果 [21] 推广到 5元树。这一推广使我们能够构造一个坐标变换，将对所有 k-装饰的乘积之和重述为按照特定序关系组织的和的乘积。我们通过有界区域上的积分来估计这些和。这些积分使我们能够提取 ϵ 的正幂，从而获得小量。

受第1.2.4节中宏观系统的启发式推导启发，（1.22）的局部时间适定性几乎立即得到，并在第4 节中给出一个 $\delta>0$，使得解在 $[0,\delta]$上唯一存在。随后我们构造函数序列 ρ_n，并证明级数 $\left(\sum_{n\le m}\rho_n\right)_{m\in\mathbb{N}}$收敛于解 $\rho=\left(\rho^0,\ \rho^1,\ \rho^\times\right)\in\mathsf{C}\left([0,\delta],\ \left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)\left(\mathbb{R}^d\right)\right)^3$。

共振节点是共振因子恒为零的节点。在第5节中，我们证明，在大盒极限 $L\to\infty$下，微观系统（五次非线性薛定谔方程）的关联函数的唯一贡献来自共振对，即其节点均为共振节点的偶对，并且我们通过三叉树识别共振结构。这使得我们可以使（五次非线性薛定谔方程）的关联函数向宏观系统（宏观系统）的解的收敛系统化，即逐次迭代。

注释 *1.4.* 下面讨论不同非线性项的情况。如果非线性项的度为 $2k+1$，且能够使树的符号规则与共振节点的含义相协调，那么捕捉共振系统递归结构的恰当描述方式将是$(k+1)$元树（见注5.17）。这一说法预示了第5.4 节 $k=2$的内容。

通过在定理3.14中增加更多情形，以下分析适用于任何具有奇次非线性项的耦合薛定谔方程。对于三次非线性项，只有情形 $i\in\{1、2\}$ 相关。

2 费曼图与偶对

我们递归地定义一列 $\left(F_n^\eta\right)_{n\in\mathbb{N}}$，如下：

$$\begin{aligned}\widehat{F_0^\eta}&:=\mu_k^\eta,\\ \widehat{F_{n+1}^\eta}(t,k)&:=-\frac{\mathrm{i}\epsilon}{L^{2d}}\int_0^t\sum_{\substack{\sum_{i=1}^5 n_i=n\\ \sum_{i=1}^5 k_i=k}} e^{\mathrm{i}\tau\Omega}Q^\eta(k_1,\dots,k_5)\widehat{F_{n_1}^\eta}(\tau,k_1)\widehat{\overline{F_{n_2}^\eta}}(\tau,k_2)\widehat{\overline{F_{n_2}^\eta}}(\tau,k_3)\widehat{\overline{F_{n_4}^\eta}}(\tau,k_4)\widehat{\overline{F_{n_5}^\eta}}(\tau,k_5)\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{2.1}$$

对于 $n>0$。

注释 *2.1.* 可以证明

$$\sum_{n\ge0}F_n^\eta\tag{2.2}$$

形式上是（1.6）的解。

更严谨地，我们作如下拟设

$$F^{\eta} = F^{\eta}_{\leq N} + v^{\eta}, \tag{2.3}$$

其中 $F^{\eta}_{\leq N} := \sum_{n\leq N} F^{\eta}_{n}$以及 v^{η}的存在唯一性将在第3.12节稍后通过不动点论证来处理。

定义 2.2. 对于 $\iota \in \{\pm\}$，我们定义算子

$$\widehat{C^{\iota}(t,f_1,\ldots,f_5)}(k) := -\frac{\mathrm{i}\iota\epsilon}{L^{2d}} \sum_{\sum_{i=1}^{5} k_i = k} e^{\mathrm{i}\iota t\Omega} Q^{\eta}_{\iota}(k_1,\ldots,k_5) \prod_{i=1}^{5} \hat{f}_i(k_i). \tag{2.4}$$

注 *2.3.* 我们作如下观察。

- 首先，

$$C^{-}(t,f_1,\ldots,f_5) = \overline{C^{+}\left(t,\overline{f}_1,\ldots,\overline{f_5}\right)}. \tag{2.5}$$

- 其次，我们希望求解的不动点方程（1.6）可改写为

$$F^{\eta}(t) = F^{\eta}_{\mathrm{in}} + \int_0^t C^{+}\left(\tau, F^{\eta}(\tau), \overline{F^{\eta}}(\tau), \overline{F^{\eta}}(\tau), F^{\overline{\eta}}(\tau), F^{\overline{\eta}}(\tau)\right)\mathrm{d}\tau. \tag{2.6}$$

戴森级数（2.1）中 F^{η}_{n+1} 关于 $n \geq 0$ 的各项可改写为

$$F^{\eta}_{n+1}(t) = \int_0^t \sum_{\sum_{i=1}^{5} n_i = n} C^{+}\left(\tau, F^{\eta}_{n_1}(\tau), \overline{F^{\eta}_{n_2}}(\tau), \overline{F^{\eta}_{n_3}}(\tau), F^{\overline{\eta}}_{n_4}(\tau), F^{\overline{\eta}}_{n_5}(\tau)\right)\mathrm{d}\tau. \tag{2.7}$$

2.1 用带符号和彩色树进行重新表述

定义 2.4。 我们递归地定义<stype id='3'>带符号和彩色的有根五叉树 T，其具有**符号** ι 和**颜色** η，并用（$\perp$，ι，η）表示仅由其根组成的平凡树。对于这棵平凡树，根和叶节点的概念重合。我们对所有 $n \in \mathbb{N}$ 迭代地定义，

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0^{\iota,\eta} &:= \{(\perp,\iota,\eta)\}, \\ \mathcal{T}_{n+1}^{\iota,\eta} &:= \left\{ \bullet(T_1,T_2,T_3,T_4,T_5) \mid (T_i)_{i\in[\![1,5]\!]} \in \mathcal{T}_{n_1}^{\iota,\eta} \times \mathcal{T}_{n_2}^{-\iota,\eta} \times \mathcal{T}_{n_3}^{-\iota,\eta} \times \mathcal{T}_{n_4}^{\iota,\overline{\eta}} \times \mathcal{T}_{n_5}^{\iota,\overline{\eta}} \text{ and } \sum_{i=1}^{5} n_i = n \right\}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中 $\bullet(T_1,T_2,T_3,T_4,T_5)$ 定义了这样的运算：将五棵有根树 T_i 各自的根连接到一个公共根 $\bullet$。对于 $T \in \mathrm{T}_n^{\iota,\eta}$，我们将 $\mathrm{N}(T)$ 记作 T（分支）节点的集合，将 $\mathrm{L}(T)$ 记作 T叶子的集合。

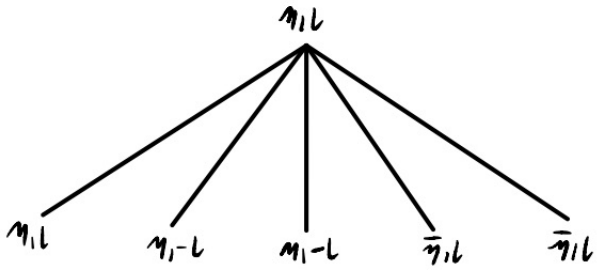

图2.1：（五次非线性薛定谔方程）中的非线性项约定

注*2.5*。 符号为 ι、颜色为 η 的分支节点 n 的符号和颜色规则如图 2.1 所示。若 $T \in \bigsqcup_{\iota\in\{\pm\}} \mathcal{T}_n^{\iota,\eta}$，则可用归纳法证明 $|\mathrm{L}(T)| = 4n+1$。总共有 $5n+1$ 个顶点 $\eta\in\{0,1\}$，因此

$$\left| \bigsqcup_{\substack{\iota\in\{\pm\}\\ \eta\in\{0,1\}}} \mathcal{T}_n^{\iota,\eta} \right| \le \binom{5n+1}{n} \le (10e)^n. \tag{2.9}$$

也就是说，$\mathcal{T}_n^{\iota,\eta}$的基数随 Λ^n 增长，其中 $\Lambda > 0$。

定义2.6。 对于 $T \in \mathcal{T}_n^{\iota,\eta}$，以及 $n \in \mathrm{N}(T)$，我们将 $C(n)$定义为 n的子节点集合。对于$n \in (\mathrm{N}(T) \cup \mathrm{L}(T)) \setminus \{r_T\}$，其中 r_T 表示 T 的根，我们将 $P(n)$ 定义为 n 的父节点。我们将兄弟节点集合记为 $S(n) := C(P(n))$。

定义2.7。 设 $T \in \mathcal{T}_n^{\iota,\eta}$。对于 n，$n' \in \mathrm{N}(T)$，我们定义父子偏序 $n < n'$，当且仅当存在一个有限节点序列$(n_k)_{k=1}^m$，使得 $n_1 = n$、$n_m = n'$ 且对所有$k \in [\![2, m]\!]$，均有 $P(n_{k-1}) = n_k$。若 $\ell \in \mathrm{L}(T)$，则我们称 $\ell < n$，当且仅当 $P(\ell) \le n$。

定义2.8. 对于每个 $T \in \mathcal{T}_n^{\iota,\eta}$，我们迭代地定义函数

$$\mathcal{I}_T(t) := \begin{cases} f_{\mathrm{in}}^{\eta,\iota} & \text{for } n = 0, \\ \int_0^t C^\iota\left(\tau, \mathcal{I}_{T_1}(\tau), \mathcal{I}_{T_2}(\tau), \mathcal{I}_{T_3}(\tau), \mathcal{I}_{T_4}(\tau), \mathcal{I}_{T_5}(\tau)\right) \mathrm{d}\tau & \text{for } n \ge 1, \end{cases} \tag{2.10}$$

其中 $T_1 \in \mathcal{T}_{n_1}^{\iota,\eta}$，$T_2 \in \mathcal{T}_{n_2}^{-\iota,\eta}$，$T_3 \in \mathcal{T}_{n_3}^{-\iota,\eta}$，$T_4 \in \mathcal{T}_{n_4}^{\iota,\eta}$，以及 $T_5 \in \mathcal{T}_{n_5}^{\iota,\eta}$，$n_1 + \cdots + n_5 = n-1$ 以及 $\bullet(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5) = T$ 在情形 $n > 0$下。

引理2.9. 将 $T \in \mathcal{T}_n^{\iota,\eta}$更明确地记为$(T, \iota, \eta)$，其中 ι和 η表示 T的根的符号和颜色，则对所有 $\iota' \in \{\pm\}$，我们有$\mathcal{I}^{\iota'}(T,\iota,\eta) = \mathcal{I}(T', \iota'\iota, \eta)$。

证明。 通过对尺度进行归纳法，可以很快证明该命题 n 属于 T。若 $n = 0$ 根据定义，定义 2.8，该命题显然成立。现在假设该命题对某个 $n \ge 0$ 成立，并取

$(T,\iota,\eta)\in\mathcal{T}_{n+1}^{\iota\,\eta}$，。若 $\iota'=+$ 则无需证明，因此假设 $\iota'=-$。利用性质（2.5），我们得到 d

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{J}_{(T,\iota,\eta)}(t)}&=\int_0^t\overline{C^{\iota}\left(\tau,\mathcal{J}_{(T_1,\iota,\eta)}(\tau),\mathcal{J}_{(T_2,-\iota,\eta)}(\tau),\mathcal{J}_{(T_3,-\iota,\eta)}(\tau),\mathcal{J}_{(T_4,\iota,\overline{\eta})}(\tau),\mathcal{J}_{(T_5,\iota,\overline{\eta})}(\tau)\right)}\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^t C^{-\iota}\left(\tau,\overline{\mathcal{J}_{(T_1,\iota,\eta)}(\tau)},\overline{\mathcal{J}_{(T_2,-\iota,\eta)}(\tau)},\overline{\mathcal{J}_{(T_3,-\iota,\eta)}(\tau)},\overline{\mathcal{J}_{(T_4,\iota,\overline{\eta})}(\tau)},\overline{\mathcal{J}_{(T_5,\iota,\overline{\eta})}(\tau)}\right)\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^t C^{-\iota}\left(\tau,\mathcal{J}_{(T_1,-\iota,\eta)}(\tau),\mathcal{J}_{(T_2,\iota,\eta)}(\tau),\mathcal{J}_{(T_3,\iota,\eta)}(\tau),\mathcal{J}_{(T_4,-\iota,\overline{\eta})}(\tau),\mathcal{J}_{(T_5,-\iota,\overline{\eta})}(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\\&=\mathcal{J}_{(T,-\iota,\eta)}(t),\end{aligned}\tag{2.11}$$

其中在第三个等号中用到了归纳步骤。 □

戴森级数的元素 $F^{\eta,\ n\ \iota}$可以写成如下关于带符号和彩色树的有限和。

引理 2.10. 戴森级数 $F^{\eta,\ n\ \iota}$的元素可以表示为关于带符号和彩色树的有限和：

$$F_n^{\eta,\iota}=\sum_{T\in\mathcal{T}_n^{\eta,\iota}}\mathcal{J}_T.\tag{2.12}$$

证明。 我们对带符号和彩色树的尺度 n 使用归纳法来证明该断言。若 $n=0$，结论显然成立。为简化记号，我们令 $\mathrm{T}_1=\mathrm{T}^{\ \eta,\ \iota}$、$\mathrm{T}_2=\mathrm{T}^{\ \eta,\ -\iota}$、$\mathrm{T}_3=\mathrm{T}^{\ \eta,\ -\iota}$、$\mathrm{T}_4=\mathrm{T}^{\ \eta,\ \iota}$和 $\mathrm{T}_5=\mathrm{T}^{\ \eta,\ \iota}$，并假设该结论对某个 $n\geq 0$成立。利用归纳假设，

$$\begin{aligned}F_{n+1}^{\eta,\iota}(t)&=\int_0^t\sum_{\sum_{i=1}n_i=n}C^{\iota}\left(\tau,F_{n_1}^{\eta,\iota}(\tau),F_{n_2}^{\eta,-\iota}(\tau),F_{n_3}^{\eta,-\iota}(\tau),F_{n_4}^{\overline{\eta},\iota}(\tau),F_{n_5}^{\overline{\eta},\iota}(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\\&=\sum_{\sum_{i=1}n_i=n}\ \sum_{(T_i)_{i=1}^5\in\bigtimes_{i=1}^5(\mathcal{T}_i)_{n_i}}\int_0^t C^{\iota}\left(\tau,\mathcal{J}_{T_1}(\tau),\mathcal{J}_{T_2}(\tau),\mathcal{J}_{T_3}(\tau),\mathcal{J}_{T_4}(\tau),\mathcal{J}_{T_5}(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\\&=\sum_{\sum_{i=1}n_i=n}\ \sum_{(T_i)_{i=1}^5\in\bigtimes_{i=1}^5(\mathcal{T}_i)_{n_i}}\mathcal{J}_{\bullet(T_1,T_2,T_3,T_4,T_5)}(t)\\&=\sum_{T\in\mathcal{T}_{n+1}^{\eta,\iota}}\mathcal{J}_T(t),\end{aligned}\tag{2.13}$$

其中在最后一个等号中，我们用到了如下事实：若 G 是定义在 $\mathrm{T}_{n+1}^{\ \eta\ \iota}$ 上的任意函数，则有

$$\sum_{\sum_{i=1}^5 n_i=n}\ \sum_{(T_i)_{i=1}^5\in\bigtimes_{i=1}^5(\mathcal{T}_i)_{n_i}}G\left(\bullet(T_1,T_2,T_3,T_4,T_5)\right)=\sum_{T\in\mathcal{T}_{n+1}^{\eta,\iota}}G(T).\tag{2.14}$$

□

命题 2.11. 对所有 $\iota\in\{\pm\}$，$\eta\in\{0,1\}$，$T\in\mathcal{T}_n^{\eta\ \iota}$，$t\in\mathbb{R}$与 $k\in\mathbb{Z}_L^d$，$\mathcal{J}_T$ 的傅里叶变换为

$$\widehat{\mathcal{J}_T}(t,k)=\left(-\frac{\mathrm{i}\epsilon}{L^{2d}}\right)^n\prod_{n\in\mathcal{N}(T)}\iota_n\sum_{\kappa\in\mathcal{D}_k(T)}\prod_{n\in\mathcal{N}(T)}Q_n^T(\kappa)\int_{I_T(t)}\prod_{n\in\mathcal{N}(T)}e^{\mathrm{i}\iota_n\Omega_n^T(\kappa)t_n}\mathrm{d}t_n\prod_{\ell\in\mathcal{L}(T)}\mu_{\kappa(\ell)}^{\eta_\ell,\iota_\ell},\tag{2.15}$$

其中

$$\begin{aligned}I_T(t)&\coloneqq\left\{(t_n)_{n\in\mathcal{N}(T)}\in[0,t]^n\mid t_n\leq t_{n'}\ \text{if}\ n\leq n'\right\},\\Q_n^T(\kappa)&\coloneqq Q_{\iota_n}^{\eta_n}\left(K_C(n_1)(\kappa),\ldots,K_C(n_5)(\kappa)\right)\end{aligned}\tag{2.16}$$

对于 $C(n)=\{n_1,\dots,n_5\}$（从左到右的有序子节点）。

证明。证明通过对尺度 n 进行归纳法得出。对于 $n=0$，无需证明任何内容。我们假设该命题对 $n-1\in\mathbb{N}$ 成立，并假设 $T\in \mathrm{T}_n^{\eta,\iota}$，因此 $T=\bullet(T_1,\ .....,\ T_5)$、$T_1\in \mathrm{T}_{n_1}^{\iota,\eta}$、$T_2\in \mathrm{T}_{n_2}^{-\iota,\eta}$、$T_3\in \mathrm{T}_{n_3}^{-\iota,\eta}$、$T_4\in \overline{\mathrm{T}}_{n_4}^{\iota,\eta}$ 以及 $T_5\in \overline{\mathrm{T}}_{n_5}^{\iota,\eta}$，其中 $\sum_{i=1}^5 n_i=n-1$。于是得到

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{J}_T}(t,k)&=-\frac{\mathrm{i}\iota\epsilon}{L^{2d}}\int_0^t\sum_{\sum_{i=1}^5 k_i=k} e^{\mathrm{i}\iota\tau\Omega}Q_\iota^\eta(k_1,\dots,k_5)\prod_{i=1}^5\widehat{\mathcal{J}_{T_i}}(\tau,k_i)\mathrm{d}\tau\\&=\left(-\frac{\mathrm{i}\epsilon}{L^{2d}}\right)^n\prod_{n\in\mathcal{N}(T)}\iota_n\sum_{\substack{\sum_{i=1}^5 k_i=k\\ \kappa_i\mathcal{D}_{k_i}\forall i\in[\![1,5]\!]}}Q_\iota^\eta(k_1,\dots,k_5)\\&\cdot\int_0^t e^{\mathrm{i}\iota\tau\Omega}\left[\int_{\times_{i=1}^5 I_{T_i}(\tau)}\prod_{i=1}^5\prod_{n_i\in\mathcal{N}(T_i)}e^{\mathrm{i}\iota_{n_i}\Omega_{n_i}^{T_i}(\kappa_i)t_{n_i}}\mathrm{d}t_{n_i}\right]\mathrm{d}\tau\\&\cdot\prod_{i=1}^5\prod_{n_i\in\mathcal{N}(T_i)}Q_{n_i}^{T_i}(\kappa_i)\cdot\prod_{i=1}^5\prod_{\ell_i\in\mathcal{L}(T_i)}\mu_{\kappa_i(\ell_i)}^{\eta_{\ell_i},\iota_{\ell_i}}.\end{aligned}\tag{2.17}$$

给定 $\kappa\in \mathrm{D}_K(T)$，$\kappa|_{T_i}$ 是 T_i 上的 k_i-装饰，其中 $\kappa|_{T_i}$ 表示将 κ 限制到子树 T_i 的叶子所成子集上。我们使用典范双射

$$\mathcal{D}_k(T)\cong\left\{(k_1,\dots,k_5,\kappa_1,\dots,\kappa_5)\mid k_1,\dots,k_5\in\mathbb{Z}_L^d\text{ and }\sum_{i=1}^5 k_i=k\text{ and }\kappa_i\in\mathcal{D}_{k_i}(T_i)\forall i\in[\![1,5]\!]\right\},\tag{2.18}$$

利用 $\mathrm{N}(T)=\{r_T\}\sqcup\bigsqcup_{i=1}^5\mathrm{N}(T_i)$ 以及 $\mathrm{L}(T)=\bigsqcup_{i=1}^5\mathrm{L}(T_i)$ 这一事实，推得

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\sum_{i=1}^5 k_i=k\\ \kappa_i\in\mathcal{D}_{k_i}(T_i)\forall i\in[\![1,5]\!]}}&=\sum_{\kappa\in\mathcal{D}_k(T)},\\Q_\iota^\eta(k_1,\dots,k_5)\prod_{i=1}^5\prod_{n_i\in\mathcal{N}(T_i)}Q_{n_i}^{T_i}(\kappa_i)&=\prod_{n\in\mathcal{N}(T)}Q_n^T(\kappa)\\\prod_{i=1}^5\prod_{\ell_i\in\mathcal{L}(T_i)}&=\prod_{\ell\in\mathcal{L}(T)}.\end{aligned}\tag{2.19}$$

可以通过归纳法证明

$$I_T(T)=\left\{(t_n)_{n\in\mathcal{N}(T)}\in[0,t]^n\,\middle|\,t_{r_T}\in[0,t]\text{ and }\left((t_n)_{n\in\mathcal{N}(T_i)}\right)_{i=1}^5\in\bigtimes_{i=1}^5 I_{T_i}\left(t_{r_T}\right)\right\},\tag{2.20}$$

因此

$$\int_0^t e^{\mathrm{i}\iota\Omega_{r_T}^T(\kappa)t_{r_T}}\int_{\times_{i=1}^5 I_{T_i}(t_r)}\prod_{i=1}^5\prod_{n_i\in\mathcal{N}(T_i)}e^{\mathrm{i}\iota_{n_i}\Omega_{n_i}^{T_i}(\kappa_i)t_{n_i}}\mathrm{d}t_{n_i}\mathrm{d}t_r=\int_{I_T(t)}\prod_{n\in\mathcal{N}(T)}e^{\mathrm{i}\iota_n\Omega_n^T(\kappa)t_n}\mathrm{d}t_n\tag{2.21}$$

从而

$$\widehat{\mathcal{J}_T}(t,k)=\left(-\frac{\mathrm{i}\epsilon}{L^{2d}}\right)^n\prod_{n\in\mathcal{N}(T)}\iota_n\sum_{\kappa\in\mathcal{D}_k(T)}\prod_{n\in\mathcal{N}(T)}Q_n^T(\kappa)\int_{I_T(t)}\prod_{n\in\mathcal{N}(T)}e^{\mathrm{i}\iota_n\Omega_n^T(\kappa)t_n}\mathrm{d}t_n \cdot\prod_{\ell\in\mathcal{L}(T)}\mu_{\kappa(\ell)}^{\iota_\ell,\eta_\ell}. \tag{2.22}$$

□

注释 *2.12.* 时间重标度以消去 ϵ^n 前置因子，从而得到

$$\widehat{\mathcal{J}_T}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)=\left(-\frac{\mathrm{i}}{L^{2d}}\right)^n\prod_{n\in\mathcal{N}(T)}\iota_n\sum_{\kappa\in\mathcal{D}_k(T)}\prod_{n\in\mathcal{N}(T)}Q_n^T(\kappa) \cdot\int_{I_T(t)}\prod_{n\in\mathcal{N}(T)}e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\iota_n\Omega_n^T(\kappa)t_n}\mathrm{d}t_n\prod_{\ell\in\mathcal{L}(T)}\mu_{\kappa(\ell)}^{\iota_\ell,\eta_\ell}. \tag{2.23}$$

2.2 装饰与过根树的平均

为了将波数与三叉树的节点和叶子相关联，并随后取期望，我们必须引入耦合的概念。

定义 2.13. 对每个 $T\in\mathrm{T}_n^{\iota,\eta}$，我们将 $(\mathbb{R}^d)^{\mathcal{L}(T)}$ 的任一元素称为树 T 的**装饰**，并按如下方式将波数与每个节点和叶节点相关联。设 $K_T\colon \mathrm{N}(T)\cup\mathrm{L}(T)\to L\left((\mathbb{R}^d)^{\mathcal{L}(T)},\ \mathbb{R}^d\right)$ 为由下式定义的映射

$$K_T(n)(\kappa):=\sum_{\mathcal{L}(T)\ni\ell\le n}\kappa(\ell). \tag{2.24}$$

给定树 T 的一个装饰 $\kappa\in(\mathbb{R}^d)^{\mathrm{L}(T)}$，我们称节点或叶节点 $n\in\mathrm{N}(T)\cup\mathrm{L}(T)$ 具有波数 $K_T(n)(\kappa)$。对固定的 $k\in\mathbb{Z}_L^d$，若 $\kappa(\mathrm{L}(T))\subseteq\mathbb{Z}_L^d$ 且 $K(\mathfrak{r}_T)(\kappa)=k$，其中 $\mathfrak{r}_T$ 表示 T 的根，则称装饰 $\kappa\in(\mathbb{R}^d)^{\mathrm{L}(T)}$ 为 k-装饰。我们将 k-装饰的子集记为 $\mathrm{D}_k(T)$。对每棵树 $T\in\mathrm{T}_n^{\eta}$ 以及节点 $n\in\mathrm{N}(T)$，我们关联由下式定义的共振因子 $\Omega_n^T\colon\ (\mathbb{R}^d)^{\mathrm{L}(T)}\to\mathbb{R}$

$$\Omega_n^T(\kappa):=\iota_n|K_T(n)(\kappa)|^2-\sum_{n'\in C(n)}\iota_{n'}|K_T(n')(\kappa)|^2. \tag{2.25}$$

我们还设

$$Q_n^T(\kappa):=Q_{\iota_n}^{\eta_n}\left(K_T(n_1)(\kappa),\dots,K_T(n_5)(\kappa)\right), \tag{2.26}$$

其中 n_1、……、n_5 表示 n 的子节点，从左到右排列。

定义 2.14。对于任意 $T\in\mathrm{T}_n^{\eta,\iota}$ 以及 $T'\in\mathrm{T}_{n'}^{\eta',\iota'}$，若

$$\left|\{\ell\in\mathcal{L}(T)\mid\iota_\ell=-\}\cup\{\ell\in\mathcal{L}(T')\mid\iota'_\ell=-\}\right|=\left|\{\ell\in\mathcal{L}(T)\mid\iota_\ell=+\}\cup\{\ell\in\mathcal{L}(T')\mid\iota'_\ell=+\}\right| \tag{2.27}$$

并且，如果存在一个对合 $\sigma\colon\mathrm{L}(T)\cup\mathrm{L}(T')\to\mathrm{L}(T)\cup\mathrm{L}(T')$，称为耦合映射，使得 σ 限制在 $\{\mathrm{l}\in\mathrm{L}(T)\mid\iota_\ell=-\}\cup\{\mathrm{l}\in\mathrm{L}(T')\mid\iota_\ell=-\}$ 上时，是一个映到 $\{\mathrm{l}\in\mathrm{L}(T)\mid\iota_\ell=+\}\cup\{\mathrm{l}\in\mathrm{L}(T')\mid\iota_\ell=+\}$ 的对合，则称三元组 $C:=(T,T',\sigma)$ 为一对。我们将 (2.27) 中右侧和左侧的集合分别记为 $\mathrm{L}(C)_\pm$，并进一步记 $\mathrm{N}(C):=\mathrm{N}(T)\cup\mathrm{N}(T')$ 和 $\mathrm{L}(C):=\mathrm{L}(T)\cup\mathrm{L}(T')$。

此外，

$$C_{n,n'}^{\eta,\eta',\iota,\iota'} := \left\{(T,T',\sigma) \text{ couple } \mid T \in \mathcal{T}_n^{\eta,\iota}, T' \in \mathcal{T}_{n'}^{\eta',\iota'}\right\}, \tag{2.28}$$

$$C_{n,n'} := \bigsqcup_{\substack{\eta,\eta' \{0,1\} \\ \iota,\iota' \in \{\pm\}}} C_{n,n'}^{\eta,\eta',\iota,\iota'}. \tag{2.29}$$

定义 2.15。 设 $C \in \mathrm{C}_{n\,n'}^{\eta\ \eta'\ \iota\ \iota'}$,,,,为一个配对，且 $n(C) := |\mathrm{N}(C)|$。 $\left(\mathbb{R}^d\right)_{\mathcal{L}(C)^+}$中的任意元素都称为配对 C的**装饰** 。我们定义 $K_C : \mathrm{N}(C) \cup \mathrm{L}(C) \to L\left(\left(\mathbb{R}^d\right)_{\mathcal{L}(C)^+}, \mathbb{R}^d\right)$为正叶子上的求值映射，并在其他所有位置按如下方式定义

$$K_C(n) := \begin{cases} -K_C(\sigma(n)) & \text{if } n \in \mathcal{L}(C)_-, \\ \sum\limits_{\mathcal{L}(C) \ni \ell < n} K_C(\ell) & \text{if } n \in \mathcal{N}(C). \end{cases} \tag{2.30}$$

对于配对 C的特定装饰 κ ，映射 K_C 将波数关联到配对的每个节点和叶子。我们定义向量子空间 $V(C) := \operatorname{span}\{K(\ell) \mid \ell \in \mathrm{L}(C)_+\}$。需要注意的是， $K_C(\ell)_{\ell \in \mathrm{L}(C)_+}$为 $V(C)$定义了一个基。对于任意固定的 $k \in \mathbb{Z}_L^d$，如果 $\kappa(\mathrm{L}(C)_+) \subseteq \mathbb{Z}_L^d$且 $K_C(\imath_C)(\kappa) = k$，则称 $\kappa \in \left(\mathbb{R}^d\right)_{\mathrm{L}(C)^+}$是 C的一个 k-装饰，其中 $\imath_C$表示 C的左树的根。我们用 $\mathrm{D}_k(C)$表示配对 C的 k-装饰子集。若叶子子集 F 满足 $\sigma(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$，则称其为自耦合的。

注 *2.16.* 定义2.15 特别地意味着

$$K_C(\ell) + K_C(\sigma(\ell)) = 0 \text{ for all } \ell \in \mathcal{L}(C). \tag{2.31}$$

若 $\imath_C$ 与 $\imath'_C$ 分别表示 C中左树与右树的根，则

$$K_C(\imath_C) + K_C(\imath'_C) = \sum_{\ell \in \mathcal{L}(C)} K_C(\ell) = \sum_{\ell \in \mathcal{L}(C)_+} K_C(\ell) - \sum_{\ell \in \mathcal{L}(C)_-} K_C(\sigma(\ell)) = 0 \tag{2.32}$$

其中，在最后一个等号处，我们利用了如下事实： σ 限制为从 $\mathrm{L}(C)_-$ 到 $\mathrm{L}(C)_+$上的一个对合。设 $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{L}(C)$。则

$$\sum_{\ell \in \mathcal{F}} K_C(\ell) = 0 \Leftrightarrow \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}. \tag{2.33}$$

因此， K_C 可用于度量配对 C的叶子子集的自耦合性。

命题 2.17. 对任意 η_1、 $\eta_2 \in \{0,\ 1\}$， ι_1、 $\iota_2 \in \{\pm\}$， n_1、 $n_2 \in \mathbb{N}$与 $k \in \mathbb{Z}_L^d$，我们有

$$\mathbb{E}\left(\widehat{\mathcal{J}_{n_1}^{\eta_1,\iota_1}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\widehat{\mathcal{J}_{n_2}^{\eta_2,\iota_2}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right) = \sum_{C \in \mathrm{C}_{n_1,n_2}^{\eta_1,\eta_2,\iota_1,\iota_2}} \mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t,k\right), \tag{2.34}$$

其中函数 $\mathcal{J}_C$ 定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t,k\right) &:= \left(\frac{-\mathrm{i}}{L^{2d}}\right)^{n(C)} \prod_{n \in \mathcal{N}(C)} \iota_n \sum_{\kappa \in \mathcal{D}_k(C)} \prod_{n \in \mathcal{N}(C)} Q_n \\ &\cdot \int_{I_C(t)} \prod_{n \in \mathcal{N}(C)} e^{\mathrm{i}\iota_n \epsilon^{-1}\Omega_n t_n} \mathrm{d}t_n \prod_{\ell \in \mathcal{L}(C)_+} M^{\eta_\ell,\eta_{\sigma(\ell)}}(\kappa(\ell))^{\iota_\ell}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

其中 $Q_n := Q_n^{T_i}(\kappa)$ 和 $\Omega_n := \Omega_n^{T_i}(\kappa)$ 对于 $n \in \mathcal{N}(T_i)$ 以及 $I_C(t) := I_{T_1}(t) \times I_{T_2}(t)$。若 $\mathcal{N}(C) = \emptyset$，则有 $I_C(t) = \emptyset$，此时通常约定，对 $I_C(t)$ 的积分等于 1。

证明。 根据命题2.11，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\widehat{F_{n_1}^{\eta_1,\iota_1}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\widehat{F_{n_2}^{\eta_2,\iota_2}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right) &= \sum_{\substack{T_1\in\mathcal{T}_{n_1}^{\eta_1,\iota_1}\\ T_2\in\mathcal{T}_{n_2}^{\eta_2,\iota_2}}} \mathbb{E}\left(\widehat{\mathcal{J}_{T_1}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\widehat{\mathcal{J}_{T_2}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right)\\ &= \left(\frac{-\mathrm{i}}{L^{2d}}\right)^{n(C)} \prod_{n\in\mathcal{N}(C)} \iota_n \sum_{\substack{T_1\in\mathcal{T}_{n_1}^{\eta_1,\iota_1}\\ T_2\in\mathcal{T}_{n_2}^{\eta_2,\iota_2}}} \sum_{\kappa_1\in\mathcal{D}_k(T_1)} \sum_{\kappa_2\in\mathcal{D}_{-k}(T_2)} \prod_{n\in\mathcal{N}(C)} Q_n\\ &\quad\cdot\int_{I_C(t)} \prod_{n\in\mathcal{N}(C)} e^{\mathrm{i}\iota_n\Omega_n t_n}\mathrm{d}t_n \mathbb{E}\left(\prod_{\ell\in\mathcal{L}(C)} \mu_{\kappa(\ell)}^{\eta_\ell,\iota_\ell}\right),\end{aligned} \tag{2.36}$$

其中我们隐式定义了 $\kappa|_{\mathcal{L}(T_i)} := \kappa_i$。根据伊瑟利斯定理（见引理 A.1），可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\prod_{\ell\in\mathcal{L}(C)} \mu_{\kappa(\ell)}^{\eta_\ell,\iota_\ell}\right) &= \sum_{\text{Pairings }\sigma\text{ of }\mathcal{L}(C)} \prod_{\ell\in\mathcal{S}_\sigma} \mathbb{E}\left(\mu_{\kappa(\ell)}^{\eta_\ell,\iota_\ell}\mu_{\kappa(\sigma(\ell))}^{\eta_{\sigma(\ell)}\iota_{\sigma(\ell)}}\right)\\ &= \sum_{\text{Pairings }\sigma\text{ of }\mathcal{L}(C)} \prod_{\ell\in\mathcal{S}_\sigma} \delta_{\iota_\ell+\iota_{\sigma(\ell)}}\delta_{\kappa(\ell)+\kappa(\sigma(\ell))}M^{\eta_\ell,\eta_{\sigma(\ell)}}(\kappa(\ell))^{\iota_\ell}\end{aligned} \tag{2.37}$$

对于 L (C) 的每一种配对 σ，都存在 L (C) 的叶子子集 $\mathrm{S}_\sigma \in$，使得 $\mathrm{S}_\sigma \sqcup \sigma(S_\sigma) =$L (C)。现在，为了得到非平凡的贡献，这些配对必须满足 $\iota_\ell + \iota_{\sigma(\ell)} = 0$，并且对所有 $\ell \in S_\sigma$，$\kappa(\ell) + \kappa(\sigma(\ell)) = 0$。第一个条件意味着 $S_\sigma =$L $(C)_+$，第二个条件则给出

$$\sum_{\substack{T_1\in\mathcal{T}_{n_1}^{\eta_1,\iota_1}\\ T_2\in\mathcal{T}_{n_2}^{\eta_2,\iota_2}}} \sum_{\kappa_1\in\mathcal{D}_k(T_1)} \sum_{\kappa_2\in\mathcal{D}_{-k}(T_2)} \sum_{\text{Pairings }\sigma\text{ of }\mathcal{L}(C)} \prod_{\ell\in\mathcal{L}(C)_+} \delta_{\kappa(\ell)+\kappa(\sigma(\ell))} = \sum_{C=(T_1,T_2,\sigma)\in\mathcal{C}_{n_1,n_2}^{\eta_1,\eta_2,\iota_1,\iota_2}} \sum_{\kappa\in\mathcal{D}_k(C)} . \tag{2.38}$$

将这些观察结果代入（2.36），恰好得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\widehat{\mathcal{J}_{T_1}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\widehat{\mathcal{J}_{T_2}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right) &= \left(\frac{-\mathrm{i}}{L^{2d}}\right)^{n(C)} \sum_{C\in\mathcal{C}_{n_1,n_2}^{\eta_1,\eta_2,\iota_1,\iota_2}} \sum_{\kappa\in\mathcal{D}_k(C)} \prod_{n\in\mathcal{N}(C)} \iota_n \prod_{n\in\mathcal{N}(C)} Q_n\\ &\quad\cdot\int_{I_C(t)} \prod_{n\in\mathcal{N}(C)} e^{\mathrm{i}\iota_n\epsilon^{-1}\Omega_n t_n}\mathrm{d}t_n \prod_{\ell\in\mathcal{L}(C)_+} M^{\eta_\ell,\eta_{\sigma(\ell)}}(\kappa(\ell))^{\iota_\ell}.\end{aligned} \tag{2.39}$$

□

3 定理1.2证明的第一部分

本节证明微观系统（五次非线性薛定谔方程）在时间区间 $\left[0,\delta L^{\frac{1}{\beta}}\right]$ 上解的存在唯一性。

3.1 初始估计和准备工具

定义 3.1。设 $<$ 和 $<'$ 是给定集合上的两个序关系。如果对底集中的任意元素 a 和 b，$a<b$ 都蕴含 $a<'b$，则称 $<'$ **与 相容**。对于全序有限集 S $=\{s_1<'\cdots s_{|S|}\}$ 显然，其全序关系 $<'$ 可与一个双射 $f_{<'}:\ [\![1,|S|]\!]\to S$ 对应，当且仅当 $f_{<'}^{-1}(s_i)<f_{<'}^{-1}(\ s_j)$ 当 $s_i<'s_j$。底层双射 $f_{<'}$ 枚举了 S 的元素。给定 S 上的偏序关系 $<_S$，我们将 S 上所有与 $<_S$ 相容的全序关系组成的集合记为 M (S, $<_S$)。若 S 是叶子和节点的子集，我们始终将亲代序视为偏序关系，并将 M (S) $=$M $(S,<)$ 简记为 M (S)。

引理 3.2. 存在 $\Lambda(d,R)>0$，使得

$$\left|\mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|\le\Lambda|\mathcal{M}(\mathcal{N}(C))|\frac{(\Lambda t)^n}{n!} \tag{3.1}$$

对所有 $t\in[0,\delta]$ 和 $k\in\mathbb{Z}_L^d$ 均成立。

证明。 我们只需将（2.35）中的积分估计为

$$\left|\int_{I_C(t)}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)}e^{\mathrm{i}\iota_n\epsilon^{-1}\Omega_n t_n}\mathrm{d}t_n\right|\le\int_{I_C(t)}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)}\mathrm{d}t_n=|\mathcal{M}(\mathcal{N}(C))|\frac{t^n}{n!} \tag{3.2}$$

并且还利用函数 Q_n 和 $M^{\eta,\,\eta'}$ 有界这一事实，此外，$M^{\eta,\,\eta'}$ 属于 $B_R(0)$ 且具有紧支撑。回顾 $|\mathrm{L}(C)_+|=2n+1$。在这方面，

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\mathcal{J}_C}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|&\le\Lambda^{2n+1}L^{-2nd}|\mathcal{M}(\mathcal{N}(C))|\frac{t^n}{n!}\sum_{\substack{\kappa\in\mathcal{D}_k(C)\\ \kappa(\mathcal{L}(C)_+)\subseteq B_R(0)}}1\\&=\Lambda^{2n+1}L^{-2nd}|\mathcal{M}(\mathcal{N}(C))|\frac{t^n}{n!}\left|\left\{\kappa\in\left(\mathbb{Z}_L^d\cap B_0(R)\right)^{\mathcal{L}(C)_+}\ \middle|\ K_C(\mathscr{r})(\kappa)=k\right\}\right|\\&\le\Lambda^{2n+1}L^{-2nd}|\mathcal{M}(\mathcal{N}(C))|\frac{t^n}{n!}\left(L^dR^d\right)^{2n}\\&\le\Lambda|\mathcal{M}(\mathcal{N}(C))|\frac{(\Lambda t)^n}{n!}\end{aligned} \tag{3.3}$$

通过增大 Λ。 □

The 以下技术工具是获得正幂的一个初等但至关重要的步骤 ϵ.

引理 3.3（预解式恒等式）。设 $n\in\mathbb{N}$、α_1、……、$\alpha_n\in\mathbb{R}$和 $\nu>0$。则

$$\int_{0\le t_1<\cdots<t_n\le t}\prod_{i=1}^n e^{\mathrm{i}\alpha_i t_i}\mathrm{d}t_i=\frac{e^{\nu t}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{\mathrm{i}\xi t}}{\nu-\mathrm{i}\xi}\prod_{i=1}^n\frac{1}{\nu-\mathrm{i}\left(\xi+\sum_{k=i}^n\alpha_k\right)}\mathrm{d}\xi. \tag{3.4}$$

*P*证明。 对于一个变量的可积函数（g_i）$_{i=1}^{n}$，可以通过归纳法相当迅速地证明 kly,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t g_n(s_n)\int_{s_n}^t g_{n-1}(s_{n-1})\cdots\int_{s_2}^t g_1(s_1)\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_n\\
&=\int_0^t g_n(s_n)\int_0^{t-s_n} g_2(s_n+s_{n-1})\cdots\int_0^{t-\sum_{i=2}^n s_i} g_1\left(\sum_{i=1}^n s_i\right)\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_n\\
&=\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} g_n(s_n)g_{n-1}(s_n+s_{n-1})\cdots g_1\left(\sum_{i=1}^n s_i\right)\delta\left(\sum_{i=0}^n s_i-t\right)\mathrm{d}s_0\cdots\mathrm{d}s_n.
\end{aligned}\tag{3.5}$$

通过令 （，我们应用公式 g_i（t_i）$\coloneqq e^{\mathrm{i}\alpha_i t_i}$，从而得到

$$\int_{0\le t_1<\cdots<t_n\le t}\prod_{i=1}^n e^{\mathrm{i}\alpha_i t_i}\mathrm{d}t_i=\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\prod_{k=1}^n e^{\mathrm{i}t_k\sum_{i=k}^n\alpha_i}\delta\left(\sum_{i=1}^n t_i+t'-t\right)\mathrm{d}t'\prod_{i=1}^n\mathrm{d}t_i.\tag{3.6}$$

我们使用恒等式

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}\xi\tag{3.7}$$

并将 $e^{\eta\left(t-t'-\sum_{i=1}^n t_{f_{<'}(i)}\right)}$作为因子乘到（3.6）中积分的被积函数上，因为它在该积分的支集上取值为 1。于是得到

$$\begin{aligned}
\int_{0\le t_1<\cdots<t_n\le t}\prod_{i=1}^n e^{\mathrm{i}\alpha_i t_i}\mathrm{d}t_i&=\frac{e^{\eta t}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}\xi t}\int_{\mathbb{R}_+} e^{(-\eta+\mathrm{i}\xi)t'}\mathrm{d}t'\int_{\mathbb{R}_+^n}\prod_{k=1}^n e^{\left(-\eta+\mathrm{i}(\xi+\epsilon^{-1}\omega_k)\right)t_k}\mathrm{d}t_k\mathrm{d}\xi\\
&=\frac{e^{\eta t}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\mathrm{i}\xi t}}{\eta-\mathrm{i}\xi}\prod_{k=1}^n\frac{1}{\eta-\mathrm{i}\left(\xi+\epsilon^{-1}\omega_k\right)}\mathrm{d}\xi,
\end{aligned}\tag{3.8}$$

其中记

$$\omega_k\coloneqq\sum_{i=k}^n\alpha_i.\tag{3.9}$$

□

推论 3.4。有

$$\int_{I_C(t)}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)} e^{\mathrm{i}\iota_n\epsilon^{-1}\Omega_n t_n}\mathrm{d}t_n=\frac{e^{nt/\delta}}{2\pi}\sum_{<'\in\mathcal{M}(\mathcal{N}(C))}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\mathrm{i}\xi t}}{n\delta^{-1}-\mathrm{i}\xi}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)}\frac{1}{n\delta^{-1}-\mathrm{i}\left(\xi+\epsilon^{-1}\omega_n(<')\right)}\mathrm{d}\xi,\tag{3.10}$$

其中

$$\omega_n(<')\coloneqq\sum_{n\le' n'\in\mathcal{N}(C)\setminus\mathcal{N}_{\mathrm{res}}(C)}\iota_{n'}\Omega_{n'}.\tag{3.11}$$

证明。 这只需应用预解式恒等式（引理 3.3），并注意到 $\nu=n\delta^{-1}$ 即可。

$$\int_{I_C(t)} f\left((t_n)_{n\in\mathcal{N}(C)}\right)\prod_{n\in\mathcal{N}(C)}\mathrm{d}t_n=\sum_{<'\in\mathcal{M}(\mathcal{N}(C))}\int_{0\le t_{f_{<'}(1)}<\cdots<t_{f_{<'}(n)}\le t} f\left(\left(t_{f_{<'}(i)}\right)_{i=1}^n\right)\prod_{i=1}^n\mathrm{d}t_{f_{<'}(i)}\tag{3.12}$$

由于其补集

$$\bigsqcup_{<'\in\mathcal{M}(\mathcal{N}(C))}\left\{(t_n)_{n\in\mathcal{N}(C)}\in[0,t]^n \mid 0\le t_{f_{<'}(1)}<\cdots t_{f_{<'}(n)}\le t\right\} \tag{3.13}$$

在 $I_C(t)$ 内部具有零测度。 □

我们可以分解

$$\mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t,k\right)=\sum_{<'\in\mathcal{M}(\mathcal{N}(C))}\mathcal{J}_C^{<'}\left(\epsilon^{-1}t,k\right), \tag{3.14}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_C^{<'}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)&:=\left(\frac{-\mathrm{i}}{L^{2d}}\right)^n\frac{e^{nt/\delta}}{2\pi}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)}\iota_n\sum_{\kappa\in\mathcal{D}_k(C)}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)}Q_n\\&\cdot\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\mathrm{i}\xi t}}{n\delta^{-1}-\mathrm{i}\xi}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)}\frac{1}{n\delta^{-1}-\mathrm{i}\left(\xi+\epsilon^{-1}\omega_n(<')\right)}\mathrm{d}\xi\prod_{\ell\in\mathcal{L}(C)_+}M^{\eta_\ell,\eta_{\sigma(\ell)}}(\kappa(\ell))^{\iota_\ell}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

我们再次利用函数 $M^{\eta,\,\eta'}$ 为紧支撑这一事实，并初步估计

$$\sup_{t\in[0,\delta]}\left|\mathcal{J}_C^{<'}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|\le\Lambda^{n+1}L^{-2dn}\int_{\mathbb{R}}\frac{\sum\limits_{\kappa\in\mathcal{D}_k(C)}\prod\limits_{n\in\mathcal{N}(C)}\frac{|Q_n|}{\left|n\delta^{-1}-\mathrm{i}\left(\xi+\epsilon^{-1}\omega_n(<')\right)\right|}}{\left|n\delta^{-1}-\mathrm{i}\xi\right|}\mathrm{d}\xi. \tag{3.16}$$

定义 3.5. 设 C为一个配对，且 $\mathrm{S}\subseteq\mathrm{N}(C)\sqcup\mathrm{L}(C)$。若 K 可被分解为如下形式，则称元素 $K\in V(C)$ 为族 $(K_C(n))_{n\in\mathcal{S}}$ 的**带符号组合**

$$K=\sum_{n\in\mathcal{S}}s_nK_C(n) \tag{3.17}$$

其中对所有 $n\in\mathrm{S}$，有 $s_n\in\{-1,\ 0,\ 1\}$。由此，对所有$n\in\mathrm{N}(C)\sqcup\mathrm{L}(C)$， $K_C(n)$ 是 $(K_C(\ell))_{\ell\in\mathcal{L}(C)_+}$的带符号组合。

以下结果给出了一种坐标变换，据此可以重新组织对 k-装饰的求和。

命题 *3.6.* 设 $C\in\mathcal{C}_{n_1,n_2}$，并考虑 C 所有顶点上的任意全序关系 $<_f$，该全序关系与父子关系相容，其中 $f\colon[\![1,5n(c)+1]\!]\to N(C)\sqcup L(C)$ 表示相应的双射，它枚举 $N(C)\sqcup L(C)$。那么存在一个顶点子集 $N^{<_f}(C)\subseteq N(C)\sqcup L(C)$，使得

- 其基数为 $\left|\mathcal{N}^{<_f}(C)\right|=2n(C)+1$,
- 族 $(K_C(n))_{n\in\mathcal{N}^{<_f}(C)}$ 构成 $V(C)$ 的一组基,
- 对所有 $n\in\mathcal{N}(C)\sqcup\mathcal{L}(C)$， $K_C(n)$ 是 $(K_C(n))^{n\le_f n}{}_{n\in\mathcal{N}^{<_f}(C)}$ 的带符号组合。

证明。这是将第 5 节在 [21] 中从三叉改编为5叉树。 □

在叶子 $\mathrm{L}(C)$ 上固定任意全序关系后，我们可以将其与任意 $<'\in\mathrm{M}(\mathrm{N}(C))$ 结合，从而得到一个元素 $<''\in\mathrm{M}(\mathrm{L}(C)\sqcup\mathrm{N}(C))$。更准确地说，我们定义 $<''|_{\mathcal{N}(C)}:=<'$ 以及 $<''|_{\mathrm{L}(C)}$ 为

叶子上的固定全序关系。我们将命题 3.6 应用于 $<''$，得到 $\mathcal{N}_{<''}(C) \subseteq \mathrm{N}(C) \sqcup \mathrm{L}(C)$。我们将配对 $\mathrm{R}(C)$ 中两棵树的根的集合记为 C。

定义 3.7。 设 C 为一个配对。定义

$$\mathcal{P}_i := \{n \in \mathcal{N}(C) \mid |C(n) \cap \mathcal{N}_{<''}(C)| = i\}. \tag{3.18}$$

设 $n \in \mathrm{N}(C)$，并将 n 关于 $<''$ 的**度** 定义为

$$\deg_{<''}(n) := |C(n) \cap \mathcal{N}_{<''}(C)|. \tag{3.19}$$

注 *3.8*。 分解

$$\mathcal{N}(C) = \bigsqcup_{i=0}^{5} \mathcal{P}_i \tag{3.20}$$

按照各自的度对节点进行分组，因此 P_i 包含所有度为 i的五叉节点，并且 d

$$\sum_{i=0}^{5} |\mathcal{P}_i| = n(C). \tag{3.21}$$

引理 3.9。 恰好存在一个 $r \in \mathcal{R}(C)$，使得 $r \in \mathcal{N}_{<''}(C)$。此外，$\mathcal{P}_5 = \emptyset$和 $|\mathcal{P}_1| + 2|\mathcal{P}_2| + 3|\mathcal{P}_3| + 4|\mathcal{P}_4| = 2n(C)$。

证明。对于 $C = (T_1, T_2, \sigma)$，记 $\mathrm{R}(C) = \{r, r'\}$，其中 r表示左树的根，r'表示右树的根。根据 [27, 命题 3.4] 的证明，以及动量图的根顶点属于生成树这一事实，我们已经有 $\mathrm{R}(C) \cap \mathrm{N}_{<''}(C) \neq \emptyset$。从现在起，每当我们提到路径或游走时，均指生成树构造某个迭代步骤中顶点集与边集里的路径或游走。我们不妨假设已经到达将 v_{root} 加入生成树顶点集的迭代步骤。由于五叉树的叶子数为奇数，存在一个融合顶点 v_ℓ，使得存在一条满足 $\ell \in \mathrm{L}(T_1)$ 的路径 $v_\ell \to \ell \to r \to v_{\mathrm{root}}$，且 $\sigma(\ell) \in \mathrm{L}(T_2)$。现在假设存在 $n \in \mathrm{L}(T_2) \sqcup \mathrm{N}(T_2)$，使得存在一条路径 $\sigma(\ell) \to n$，并假设添加 $\{n, P(n)\}$ 会形成一个环。这意味着存在 $n' \in S(n) \setminus \{n\}$，使得 $\{n', P(n)\}$ 已经被添加，并且存在一条从 n' 到某个 $\ell' \in \mathrm{L}(T_2)$ 的路径。我们区分 $\sigma(\ell') \in \mathrm{L}(T_2)$ 和 $\sigma(\ell') \in \mathrm{L}(T_1)$ 两种情况。在第一种情况下，必定存在某个 $\ell'' \in \mathrm{L}(T_2)$，使得存在一条路径 $\sigma(\ell') \to \ell''$，以及一条闭合该环的路径 $\ell'' \to n$。此时，我们可以继续到$P(n)$，并使高度增加 1。在第二种情况下，存在 $\ell''' \in \mathrm{L}(T_1)$，满足 $\sigma(\ell''') \in \mathrm{L}(T_2)\tilde{}$，使得存在一条路径 $\sigma(\ell') \to \ell'''$，以及一条从 $\sigma(\ell''')$ 到某个 $\ell \in \mathrm{L}(T_2)$ 的路径，最终还有一条˜路径 $\ell \to P(n)$，因此存在一条路径 $\sigma(\ell''') \to P(n)$。此时，我们从 v_ℓ 切换到 $v_{\ell'}$。这一迭代可以重复进行，直到考虑到一个融合顶点 $v_{\ell_{\mathrm{final}}}$，而算法转而考虑另一个根 r'。可以看出，添加边 $\{r', v_{\mathrm{root}}\}$ 会形成一个包含根顶点和 $v_{\ell_{\mathrm{final}}}$ 的环。

Sup设存在 $n \in \mathrm{P}_5$，这等价于陈述 $C(n) \subseteq \mathrm{N}_{<''}(C)$。由于 t

$$K_C(n) = \sum_{n' \in C(n)} K_C(n'), \tag{3.22}$$

我们有 $n \notin \mathrm{N}_{<''}(C)$，否则就会违背 $(K_C(n'))_{n' \in \mathcal{N}_{<''}(C)}$的线性无关性。

方程 (3.6) 表明

$$K_C(n) = \sum_{n <'' n' \in \mathcal{N}_{<''}(C)} s_{n'} K_C(n') \tag{3.23}$$

对于某个 $s_{n'} \in \{-1,\ 0,\ 1\}$。根据构造，$<''$ 与亲代序相容。但这种相容性意味着 $C(n) \cap \{n' \in \mathcal{N}_{<''}(C) \mid n <'' n'\} = \emptyset$，并将方程（3.22）从方程（3.23）中相减，得到

$$\sum_{n <'' n' \in \mathcal{N}_{<''}(C)} s_{n'} K_C(n') - \sum_{n' \in C(n)} K_C(n') = 0 \tag{3.24}$$

这意味着 $(K_C(n'))_{n' \in \mathcal{N}_{<''}(C)}$ 线性相关，矛盾。因此可得 $\mathrm{P}_5 = \qquad\qquad \emptyset.$

一个一般事实是，若 $\mathrm{S} \subseteq (\mathrm{L}(C) \sqcup \mathrm{N}(C)) \setminus \mathrm{R}(C)$ 是叶子和节点的任意子集，并记 $\mathrm{P}_i(\mathrm{S}) := \{n \in \mathrm{N}(C) \mid |C(n) \cap \mathrm{S}| = i\}$，则有 $|S| = \sum_{i=1}^{4} i|\mathrm{P}_i(\mathrm{S})| + 1$ 以及 $P(\mathrm{S} \setminus \{r\}) = \bigsqcup_{i=1}^{5} \mathrm{P}_i(\mathrm{S})$，因此

$$P(\mathcal{N}_{<''}(C) \setminus \{r\}) = \bigsqcup_{i=1}^{4} \mathcal{P}_i \tag{3.25}$$

并且由于 $|\mathrm{N}_{<''}(C) \setminus \{r\}| = 2n(C)$,

$$\sum_{i=1}^{4} |\mathcal{P}_i| i = 2n(C). \tag{3.26}$$

□

3.2 从和到积分

记号。 对于 $x \in \mathbb{R}^d$和 $r > 0$，我们记作 $Q_{x,r} := \prod_{i=1}^{d} [x_i - r, x_i + r]$, $Q_{x,r,L} := Q_{x,r} \cap \mathbb{Z}_L^d$，并定义 $m = m(R, L)$ 为满足 $\frac{m+1}{L} > R \geq \frac{m}{L}$ 的 $\mathbb{N}$ 中的唯一元素，~~最后~~定义特殊立方体

$$Q_m := \left[-\frac{1}{2L} - \frac{m}{L}, \frac{1}{2L} + \frac{m}{L}\right]^d \tag{3.27}$$

及其离散版本 $Q_m^{\mathbb{Z}_L^d} := Q_m \cap \mathbb{Z}_L^d$。

引理 3.10。 若 $m/L + 1/(2L) \geq R$，则 $(Q_m \setminus Q_{0,R}) \cap \mathbb{Z}_L^d = \emptyset$；若 $m/L + 1/(2L) < R$，则 $(Q_{0,R} \setminus Q_m) \cap \mathbb{Z}_L^d = \emptyset$。

证明。 假设第一种情形 $m/L + 1/(2L) \geq R$ 且 $x \in (Q_m \setminus Q_{0,R}) \cap \mathbb{Z}_L^d$。这等价于说 $R < |x_i| \leq m/L + 1/(2L)$，并且通过令 $y := Lx \in \mathbb{Z}^d$，这意味着

$$m < |y_i| \leq m + \frac{1}{2} \tag{3.28}$$

这是一个矛盾。现在假设我们处于第二种情形，当 $m/L + 1/(2L) < R$ 且假设存在 $x \in (Q_{0,R} \setminus Q_m) \cap \mathbb{Z}_L^d$。类似地，通过令 $y := Lx$，我们得到

$$m + \frac{1}{2} < |y_i| < m + 1 \tag{3.29}$$

这也与 $y \in \mathbb{Z}^d$ 矛盾。 □

引理 3.11。 假设 $g_i\colon \left(\mathbb{R}^d\right)^i \to \mathbb{R}_>$ 对于每个 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 以及 $R > 0$ 都是正的 C^1-函数。那么存在 $\Lambda_i = \Lambda_i(d) > 0$，使得

$$\sum_{x_1,\dots,x_i \in Q_{0,R}^{\mathbb{Z}_L^d}} g_i(x_1,\dots,x_i) \le \Lambda_i \left(\frac{1}{L} \sum_{x_1,\dots,x_i \in Q_{0,2R}^{\mathbb{Z}_L^d}} \sup_{\times_{j=1}^i Q_{x_j,\frac{1}{2L}}} |\nabla g_i| + L^{id} \int_{Q_{0,2R}^i} g_i(x_1,\dots,x_i)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_i) \right). \tag{3.30}$$

对于C^1 函数 $f_i\colon \left(\mathbb{R}^d\right)^i \to \mathbb{C}$ 存在维数常数 $\Lambda_i > 0$，使得

$$\left| \frac{1}{L^{id}} \sum_{(x_j)_{j=1}^i \in (\mathbb{Z}_L^d)^i} f\left((x_j)_{j=1}^i\right) - \int_{(\mathbb{R}^d)^i} f\left((x_j)_{j=1}^i\right) \mathrm{d}(x_1,\dots,x_i) \right| \le \frac{\Lambda_i}{L^{id+1}} \sum_{(x_j)_{j=1}^i \in (\mathbb{Z}_L^d)^i} \sup_{\times_{j=1}^i Q_{x_j,\frac{1}{2L}}} \left| \nabla_{(x_j)_{j=1}^i} f \right| \tag{3.31}$$

证明。 按照引理 3.10进行分类讨论。首先假设 $m/L + 1/(2L) < R$ 并应用引理 3.10，由此可写成

$$\sum_{x \in Q_{0,R}^{\mathbb{Z}_L^d}} g(x) = \sum_{x \in Q_m^{\mathbb{Z}_L^d}} g(x) \text{ and } \int_{Q_{0,R}} g(y)\mathrm{d}y = \sum_{x \in Q_m^{\mathbb{Z}_L^d}} \int_{Q_{x,\frac{1}{2L}}} g(y)\mathrm{d}y + \int_{Q_{0,R}\setminus Q_m} g(y)\mathrm{d}y. \tag{3.32}$$

利用 $1/L^d = \int_{Q_{x,\frac{1}{2L}}} 1\,\mathrm{d}y$ 这一事实，可以进一步写成

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{L^d} \sum_{x \in Q_{0,R}^{\mathbb{Z}_L^d}} g(x) - \int_{Q_{0,R}} g(y)\mathrm{d}y \right| &\le \sum_{x \in Q_m^{\mathbb{Z}_L^d}} \int_{Q_{x,\frac{1}{2L}}} |g(x) - g(y)|\mathrm{d}y + \int_{Q_{0,R}} g(y)\mathrm{d}y \\ &\le \sum_{x \in Q_{0,R}^{\mathbb{Z}_L^d}} \sup_{Q_{x,\frac{1}{2L}}} |\nabla g| \int_{Q_{x,\frac{1}{2L}}} |x-y|\mathrm{d}y + \int_{Q_{0,R}} g(y)\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{3.33}$$

几何事实 $|x-y| \le \frac{\sqrt{d}}{2L}$ 使精细估计得到

$$\left| \frac{1}{L^d} \sum_{x \in Q_{0,R}^{\mathbb{Z}_L^d}} g(x) - \int_{Q_{0,R}} g(y)\mathrm{d}y \right| \le \frac{\sqrt{d}}{2L^{d+1}} \sum_{x \in Q_{0,R}^{\mathbb{Z}_L^d}} \sup_{Q_{x,\frac{1}{2L}}} |\nabla g| + \int_{Q_{0,R}} g(y)\mathrm{d}y \tag{3.34}$$

由此得到

$$\sum_{x \in Q_{0,R}^{\mathbb{Z}_L^d}} g(x) \le \Lambda \left(\frac{1}{L} \sum_{x \in Q_{0,R}^{\mathbb{Z}_L^d}} \sup_{Q_{x,\frac{1}{2L}}} |\nabla g| + L^d \int_{Q_{0,R}} g(x)\mathrm{d}x \right) \tag{3.35}$$

对于 $\Lambda_1 := \max\left(2, \frac{\sqrt{d}}{2}\right)$。

现在假设 $m/L+1/(2L)\geq R$。在这种情况下，$Q_{0,\,R}\subseteq Q_m\subseteq Q_{0,\,2R}$。类似地，　　t

$$\sum_{x\in Q_{0,R}^{\mathbb{Z}_L^d}} g(x)=\sum_{x\in Q_m^{\mathbb{Z}_L^d}} g(x) \text{ and } \int_{Q_{0,R}} g(y)\mathrm{d}y=\sum_{x\in Q_m^{\mathbb{Z}_L^d}}\int_{Q_{x,\frac{1}{2L}}} g(y)\mathrm{d}y-\int_{Q_m\setminus Q_{0,R}} g(y)\mathrm{d}y. \tag{3.36}$$

与式（3.33）相比，现在的估计为

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{L^d}\sum_{x\in Q_{0,R}^{\mathbb{Z}_L^d}} g(x)-\int_{Q_{0,R}} g(y)\mathrm{d}y\right| &\leq \sum_{x\in Q_m^{\mathbb{Z}_L^d}}\int_{Q_{x,\frac{1}{2L}}} |g(x)-g(y)|\mathrm{d}y+\int_{Q_m\setminus Q_{0,R}} g(y)\mathrm{d}y\\ &\leq \frac{\sqrt{d}}{2L^{d+1}}\sum_{x\in Q_{0,2R}^{\mathbb{Z}_L^d}}\sup_{Q_{x,\frac{1}{2L}}}|\nabla g|+\int_{Q_{0,2R}} g(y)\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{3.37}$$

但 Λ_1 仍可如前选取。其余不等式可用类似方法证明，其中取 $\Lambda_i:=\max\left(2,\frac{\sqrt{id}}{2}\right)$。

我们显然可以改写

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^i} f_i\left((x_j)_{j=1}^i\right)\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_i)=\sum_{(x_j)_{j=1}^i\in(\mathbb{Z}_L^d)^i}\int_{\times_{j=1}^i Q_{x_j,\frac{1}{2L}}} f_i\left((x_j)_{j=1}^i\right)\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_i) \tag{3.38}$$

并回顾

$$\frac{1}{L^{id}}=\int_{\times_{j=1}^i Q_{x_j,\frac{1}{2L}}} 1\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_i) \tag{3.39}$$

从而

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{L^{id}}\sum_{(x_j)_{j=1}^i\in(\mathbb{Z}_L^d)^i} f\left((x_j)_{j=1}^i\right)-\int_{(\mathbb{R}^d)^i} f\left((x_j)_{j=1}^i\right)\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_i)\right|\\ &\quad\leq\sum_{(x_j)_{j=1}^i\in(\mathbb{Z}_L^d)^i}\int_{\times_{j=1}^i Q_{x_j,\frac{1}{2L}}}\left|f\left((x_j)_{j=1}^i\right)-f\left((y_j)_{j=1}^i\right)\right|\mathrm{d}(y_1,\ldots,y_i)\\ &\quad\leq\sum_{(x_j)_{j=1}^i\in(\mathbb{Z}_L^d)^i}\sup_{\times_{j=1}^i Q_{x_j,\frac{1}{2L}}}\left|\nabla_{(x_j)_{j=1}^i} f\right|\int_{\times_{j=1}^i Q_{x_j,\frac{1}{2L}}}\left|(x_j)_{j=1}^i-(y_j)_{j=1}^i\right|\mathrm{d}(y_1,\ldots,y_i).\end{aligned} \tag{3.40}$$

我们现在利用如下事实：

$$\left|(x_j)_{j=1}^i-(y_j)_{j=1}^i\right|^2=\sum_{j=1}^i|x_j-y_j|^2\leq\sum_{j=1}^i\frac{d}{(2L)^2}=\frac{id}{(2L)^2}. \tag{3.41}$$

因此，之前的 Λ_i 给出了结果。 □

引理 3.12。 设 C 为一个配对，并考虑一个节点 $n\in N(C)$。

1.) 如果 n 度为 1，记 $n'\in C(n)$ 为属于 $N_{<''}(C)$ 的顶点。于是存在 n''　　∈

$C(n)\setminus\{n'\}$使得 $K_C(n'')$是 $(K_C(n'''))_{n'<''n'''\in\mathcal{N}_{<''}(C)}$的一个带符号组合。

2.) 若 n 的度为 2，并将 n 中属于 $\mathcal{N}_{<''}(C)$ 的子节点记为 n_1 和 n_2，将 n 中不属于 $\mathcal{N}_{<''}(C)$的子节点记为 n'_1、n'_2 和 n'_3，则有以下分类讨论：

$$\begin{cases} K_C(n'_i) &= -K_C(n_1)-K_C(n_2)+G, \\ K_C(n'_j) &= G, \\ K_C(n'_k) &= G, \end{cases} or \begin{cases} K_C(n'_i) &= -K_C(n_1)+G, \\ K_C(n'_j) &= -K_C(n_2)+G, \ or \\ K_C(n'_k) &= G \end{cases} \tag{3.42}$$

$$\begin{cases} K_C(n'_i) &= \iota_1 K_C(n_1)+\iota_2 K_C(n_2)+G, \\ K_C(n'_j) &= \iota_3 K_C(n_2)+G, \\ K_C(n'_k) &= \iota_4 K_C(n_2)+G, \end{cases} or \begin{cases} K_C(n'_i) &= \iota_1 K_C(n_1)+\iota_2 K_C(n_2)+G, \\ K_C(n'_j) &= \iota_3 K_C(n_1)+G, \\ K_C(n'_k) &= \iota_4 K_C(n_1)+G, \end{cases} or \tag{3.43}$$

$$\begin{cases} K_C(n'_i) &= \iota_1 K_C(n_1)+\iota_1 K_C(n_2)+G, \\ K_C(n'_j) &= \iota_2 K_C(n_1)+\iota_3 K_C(n_2)+G, \\ K_C(n'_k) &= \iota_4 K_C(n_1)+\iota_5 K_C(n_2)+G, \end{cases} \tag{3.44}$$

其中，在每种情况下，$\iota_i\in\{\pm\}$ 满足：将每种情况下右侧的三行相加，恰好得到 $-K_C(n_1)-K_C(n_2)+G$。用记号 G 表示 $(K_C(n''))_{n_1,n_2<''n''\in\mathcal{N}_{<''}(C)}$ 的任意带符号组合。

3.) 若 n 的度为3，$n_1,n_2,n_3\in C(n)\cap\mathcal{N}_{<''}(C)$ 且 $n'_1,n'_2\in(\mathcal{N}(C)\setminus\mathcal{N}_{<''}(C))$，则

$$\begin{aligned} &K_C(n'_1)=G\wedge K_C(n'_2)=-K_C(n_1)-K_C(n_2)-K_C(n_3)+G \ or \\ &K_C(n'_1)=-K_C(n_3)+G\wedge K_C(n'_2)=-K_C(n_1)-K_C(n_2)+G \ or \\ &K_C(n'_1)=-K_C(n_2)+G\wedge K_C(n'_2)=-K_C(n_1)-K_C(n_3)+G \ or \\ &K_C(n'_1)=-K_C(n_1)+G\wedge K_C(n'_2)=-K_C(n_2)-K_C(n_3)+G \ or \\ &K_C(n'_1)=-K_C(n_2)-K_C(n_3)+G\wedge K_C(n'_2)=-K_C(n_1)+G \ or \\ &K_C(n'_1)=-K_C(n_1)-K_C(n_3)+G\wedge K_C(n'_2)=-K_C(n_2)+G \ or \\ &K_C(n'_1)=-K_C(n_1)-K_C(n_2)+G\wedge K_C(n'_2)=-K_C(n_3)+G \ or \\ &K_C(n'_1)=-K_C(n_1)-K_C(n_2)-K_C(n_3)+G\wedge K_C(n'_2)=G, \end{aligned} \tag{3.45}$$

并且 G表示 $(K_C(n''))_{n_1,n_2,n_3<''n''\in\mathcal{N}_{<''}(C)}$的一个带符号组合。

4.) 若 n 的度4，并且记 $n_1,\ldots,n_4\in\mathcal{N}_{<''}(C)$ 为属于$\mathcal{N}_{<''}(C)$的 n 的子节点，则剩余顶点 $n''\in C(n)\setminus\{n_i\}_{i=1}^4$满足

$$K_C(n'')=-\sum_{i=1}^{4}K_C(n_i)+K_C(n), \tag{3.46}$$

其中 $G=K_C(n)$当然是$(K_C(n'''))_{n_1,\ldots,n_4<''n'''\in\mathcal{N}_{<''}(C)}$的一个带符号组合。

证明。 证明主要是一个计数问题。

1.) 由于 $\deg(n) = 1$，任何 $n'' \in S(n') \setminus \{n'\}$ 都满足 $n'' \notin \mathrm{N}_{<''}(C)$，而命题 3.6 意味着 $K_C(n'')$ 是 $(K_C(n'''))_{n''<n'''\in \mathrm{N}_{<''}(C)}$ 的带符号组合。对于 $K_C(n) = \sum_{n'''\in C(n)} K_C(n''')$，结论也相同。将 $K_C(n')$ 对每个 $n''' \in C(n)$ 的带符号坐标贡献记为 $s_{n_i'''} \in \{-1, 0, 1\}$，我们得到

$$1 + \sum_{i=1}^{4} s_{n_i'''} = 0 \tag{3.47}$$

而且，只有当至少存在一个 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ 使得 $s_{n_i'''} = 0$ 时，这个方程才能成立。其余两个符号自动为 1 和 -1。因此，我们要找的顶点是 $n'' = n_i'''$。

2.) 我们记 $n_1, n_2 \in C(n) \cap \mathrm{N}_{<''}(C)$ 以及 $n_1', n_2', n_3' \in C(n) \cap (\mathrm{N}(C) \setminus \mathrm{N}_{<''}(C))$，于是

$$K_C(n_1) + K_C(n_2) + K_C(n_1') + K_C(n_2') + K_C(n_3') = K_C(n). \tag{3.48}$$

和之前一样，我们用 $s_{n_i}^{n_j'} \in \{-1, 0, 1\}$ 表示 $K_C(n_i)$ 对 $K_C(n_j')$ 的带符号展开所作的带符号坐标贡献。我们得到

$$1 + s_{n_1}^{n_1'} + s_{n_1}^{n_2'} + s_{n_1}^{n_3'} = 0, \tag{3.49}$$

$$1 + s_{n_2}^{n_1'} + s_{n_2}^{n_2'} + s_{n_2}^{n_3'} = 0. \tag{3.50}$$

这两个方程总共给出 36 种可能性。事实上，式（3.49）只有在 $s_{n_1}^{n_i'} = -1$ 且其余符号为 $s_{n_1}^{n_j'} = s_{n_1}^{n_k'} = 0$，或者 $s_{n_1}^{n_i'} = 1$ 且其余符号为 $s_{n_1}^{n_j'} = s_{n_1}^{n_k'} = -1$ 时才能成立。当然，式（3.50）也同样如此。若式（3.49）适用第一种情况，那么对任意固定的 $s_{n_1}^{n_i'}$，都有六种不同的组合。对于$s_{n_1}^{n_i'}$，有三种不同的固定组合，因此我们得到18 种不同的组合。对第二种排列重复这一论证，还可得到另外 18 种可能性，最终得到36 种不同的组合。

3.) 与 2.) 中一样，现在有

$$K_C(n_1) + K_C(n_2) + K_C(n_3) + K_C(n_1') + K_C(n_2') = K_C(n) \tag{3.51}$$

因此，这一次

$$1 + s_{n_1}^{n_1'} + s_{n_1}^{n_2'} = 0, \tag{3.52}$$

$$1 + s_{n_2}^{n_1'} + s_{n_2}^{n_2'} = 0, \tag{3.53}$$

$$1 + s_{n_3}^{n_1'} + s_{n_3}^{n_2'} = 0. \tag{3.54}$$

(3.52) 至 (3.54) 表明，存在满足 $s_{n_1}^{n_i'} = s_{n_2}^{n_j'} = s_{n_3}^{n_k'} = 0$ 的 i、j、$k \in \{1, 2\}$。在这种情况下，只需考虑 8 种组合。这些组合为 $(i, j, k) = (1, 1, 1)$、$(i, j, k) = (1, 1, 2)$、$(i, j, k) = (1, 2, 1)$、$(i, j, k) = (2, 1, 1)$、$(i, j, k) = (1, 2, 2)$、$(i, j, k) = (2, 1, 2)$、$(i, j, k) = (2, 2, 1)$ 以及 $(i, j, k) = (2, 2, 2)$。

4.）根据 K_C 的定义和命题3.6，该结论显然成立。 □

推论 3.1 3.如果 $n \in \mathcal{N}(C)$ 是一个共振节点，那么对于所有 $<'' \in \mathcal{M}(\mathcal{L}(C) \sqcup \mathcal{N}(C))$，有 $\deg_{<''}(n) \in \{0、1、2\}$.

证明。尽管这可以直接应用引理 3.12，但我们也可以利用命题 3.6 直接论证：如果 $\deg_{<''}(n) = 3$，那么，由于 $(K_C(n'))_{n'\in \mathrm{N}_{<''}(C)}$ 与 $K_C(n) = K_C(n_i)$ 的线性无关性，对于某个 $i \in \{1, 2, 3\}$，其中我们记 $C(n) \cap \mathrm{N}_{<''}(C) = \{n_1, n_2, n_3\}$。但这与命题 3.6 的第三点相矛盾。若假设 $\deg_{<''}(n) = 4$，同样的论证也成立。 □

定理 3.14. 令 $p \in (1, \infty)$ 和 $\tilde{\gamma} > 0$。我们区分以下情形。

1.) 对于度为 $i = 1$ 的节点。假设 $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，$B, C \in \mathbb{R}$, $\iota \in \{\pm\}$，$\gamma \in (0, \tilde{\gamma})$，并取 $P \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$，使得 $|P| \geq \epsilon^{\gamma}$。我们有

$$\gamma_\iota(x) := \frac{1}{\left|A + \mathrm{i}\left(B + \epsilon^{-\tilde{\gamma}}\left(|x|^2 + \iota|x - P|^2 + C\right)\right)\right|^p}, \quad \int\limits_{Q_{0,(2n+1)R}} \gamma_\iota \mathrm{d}x \leq \Lambda |A|^{1-p} n^{d-1} \epsilon^{\tilde{\gamma}-\gamma}. \tag{3.55}$$

2.) 对于度为 $i \in [\![2 \text{ 的 } 4]\!]$ 个节点。令 $(\iota_j)_{j\in[\![1,i]\!]} \in \{\pm\}^i$, $\left(\iota_j^{j'}\right)_{j\in[\![1,j'\in[\![i+1}^{i]\!],5]\!]} \in \{\pm, 0\}^5$，并记为 $\iota = \left((\iota_j)_{j\in[\![1,i]\!]}, (\iota_j)_{j\in[\![i+1,5]\!]}, (\iota\right.$

此外，假设 $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，$B$、$C \in \mathbb{R}$ 和 $P_j \in \mathbb{R}^d$ 满足 $j \in [\![i+1、5]\!]$。若定义

$$\gamma_\iota(x_1, \ldots, x_i) := \frac{1}{\left|A + \mathrm{i}\left(B + \epsilon^{-\tilde{\gamma}}\left(\sum_{j=1}^i \iota_j |x_j|^2 + \sum_{j=i+1}^5 \iota_j \left|\sum_{j'=1}^i \iota_j^{j'} x_{j'} - P_j\right|^2 + C\right)\right)\right|^p}, \tag{3.56}$$

then

$$\int\limits_{Q^i_{0,(2n+1)R}} \gamma_\iota(x_1, \ldots, x_i) \, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_i) \leq \Lambda |A|^{1-p} n^{id-2} \epsilon^{\tilde{\gamma}} \tag{3.57}$$

证明。 证明如下。

1.) 我们首先考虑 $\iota = +$，并得到

$$\begin{aligned}
\int\limits_{Q_{0,2(2n+1)R}} \gamma_+^1 \mathrm{d}x &\leq |A|^{-p} \int\limits_{B_{\sqrt{d}(2n+1)R}(-P/2)} \frac{\mathrm{d}x}{\left|1 + \mathrm{i}A^{-1}\left(B + \epsilon^{-\tilde{\gamma}}\left(2|x|^2 + |P|^2/2 + C\right)\right)\right|^p} \\
&\leq \Lambda |A|^{-p} \int\limits_0^{\sqrt{d}(2n+1)R} \frac{r^{d-1}\mathrm{d}r}{\left|1 + \mathrm{i}A^{-1}\left(B + \epsilon^{-\tilde{\gamma}}\left(2r^2 + |P|^2/2 + C\right)\right)\right|^p} \\
&= \frac{\Lambda}{2} |A|^{-p} \int\limits_0^{\left(\sqrt{d}(2n+1)R\right)^2} \frac{u^{\frac{d-2}{2}}\mathrm{d}u}{\left|1 + \mathrm{i}A^{-1}\left(B + \epsilon^{-\tilde{\gamma}}\left(2u + |P|^2/2 + C\right)\right)\right|^p} \\
&\leq \Lambda |A|^{1-p} \left(\sqrt{d}(2n+1)R\right)^{d-2} \epsilon^{\tilde{\gamma}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}r'}{|1 + \mathrm{i}r'|^p} \leq \Lambda |A|^{1-p} n^{d-2} \epsilon^{\tilde{\gamma}}.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

对于 $\iota = -$ 的情况，我们可以先写出

$$\int\limits_{Q_{0,(2n+1)R}} \gamma_-^1 \mathrm{d}x = |A|^{-p} \int\limits_{Q_{-P/2,(2n+1)R}} \frac{\mathrm{d}x}{\left|1 + \mathrm{i}A^{-1}\left(B + \epsilon^{-\tilde{\gamma}}\left(2xP + C\right)\right)\right|^p}. \tag{3.59}$$

现在重要的是认识到 $P \neq 0$，使得 $\|P\|_\infty := \max_{1\leq i\leq d} |P_i| > 0$。记 $i_0 \in$

$[\![1,\ d]\!]$ 为满足 $\left|P_{i_0}\right| = \|P\|_\infty$ 的指标，并应用富比尼定理将其改写为

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_{0,(2n+1)R}} \gamma_-^1 \mathrm{d}x \\
&= |A|^{-p} \int\limits_{-\frac{P_1}{2}-(2n+1)R}^{-\frac{P_1}{2}+(2n+1)R} \cdots \int\limits_{-\frac{P_{i_0}}{2}-(2n+1)R}^{-\frac{P_{i_0}}{2}+(2n+1)R} \frac{\mathrm{d}x_{i_0} \prod\limits_{i\in[\![1,d]\!]\setminus\{i_0\}} \mathrm{d}x_i}{\left|1+\mathrm{i}A^{-1}\left(B+\epsilon^{-\tilde{\gamma}}\left(2x_{i_0}P_{i_0}+2\sum_{i\in[\![1,d]\!]\setminus\{i_0\}} x_iP_i+C\right)\right)\right|^p},
\end{aligned} \tag{3.60}$$

也就是说，我们希望先进行 x_{i_0} 积分，再像之前一样将虚部代入分母。这得到

$$\begin{aligned}
\int\limits_{Q_{0,2(2n+1)R}} \gamma_-^1 \mathrm{d}x &\le \Lambda \frac{|A|^{1-p}}{\|P\|_\infty} \epsilon \int\limits_{-\frac{P_1}{2}-(2n+1)R}^{-\frac{P_1}{2}+(2n+1)R} \cdots \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x'_{i_0}}{\left|1+\mathrm{i}x'_{i_0}\right|^p} \prod_{i\in[\![1,d]\!]\setminus\{i_0\}} \mathrm{d}x_i \\
&\le \Lambda |A|^{1-p} \|P\|_\infty^{-1} n^{d-1} \epsilon^{\tilde{\gamma}} \le \Lambda |A|^{1-p} |P|^{-1} n^{d-1} \epsilon^{\tilde{\gamma}} \le \Lambda |A|^{1-p} n^{d-1} \epsilon^{\tilde{\gamma}-\gamma},
\end{aligned} \tag{3.61}$$

这里用到了有限维向量空间中的所有范数都等价这一事实。

2.) 我们考察变量 x_1 在求和中的出现情况

$$\sum_{j=1}^{i} \iota_j \left|x_j\right|^2 + \sum_{j=i+1}^{5} \iota_j \left|\sum_{j'=1}^{i} \iota_j^{j'} x_{j'} - P_j\right|^2. \tag{3.62}$$

我们列举

$$\left\{j \in [\![i+1,5]\!] \mid \iota_j^1 \neq 0\right\} = \left\{k_1, \ldots, k_q\right\} \tag{3.63}$$

因此有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{j\in[\![i+1,5]\!] \\ \iota_j^1\neq 0}} \iota_j \left|\sum_{j'=1}^{i} \iota_j^{j'} x_{j'} - P_j\right|^2 = \iota_{k_1} \left|\sum_{j'=1}^{i} \iota_{k_1}^{j'} x_{j'} - P_{k_1}\right|^2 + \cdots + \iota_{k_q} \left|\sum_{j'=1}^{i} \iota_{k_q}^{j'} x_{j'} - P_{k_q}\right|^2 \\
&= \left(\iota_{k_1} + \cdots + \iota_{k_q}\right) |x_1|^2 + 2\iota_{k_1}\iota_{k_1}^1 x_1 \left(\sum_{j'=2}^{i} \iota_{k_1}^{j'} x_{j'} - P_{k_1}\right) + \cdots + 2\iota_{k_q}\iota_{k_q}^1 x_1 \left(\sum_{j'=2}^{i} \iota_{k_q}^{j'} x_{j'} - P_{k_q}\right).
\end{aligned} \tag{3.64}$$

于是， x_1 的总贡献为

$$\left(\iota_1 + \iota_{k_1} + \cdots + \iota_{k_q}\right) |x_1|^2 + 2\iota_{k_1}\iota_{k_1}^1 x_1 \left(\sum_{j'=2}^{i} \iota_{k_1}^{j'} x_{j'} - P_{k_1}\right) + \cdots + 2\iota_{k_q}\iota_{k_q}^1 x_1 \left(\sum_{j'=2}^{i} \iota_{k_q}^{j'} x_{j'} - P_{k_q}\right). \tag{3.65}$$

现在需要区分两种性质不同的情形。第一种情形是 $c \coloneqq \iota_1 + \iota_{k_1} + \cdots + \iota_{k_q} \neq$

0. Setting $c_l \coloneqq \iota_{k_l}\iota^1_{k_l}\left(\sum_{j'=2}^{i}\iota^{j'}_{k_l}x_{j'}-P_{k_l}\right)$, we have

$$c|x_1|^2+2(c_1+\cdots+c_q)x_1=c\left(|x_1|^2+\frac{2}{c}(c_1+\cdots+c_q)x_1\right)=c\left|x_1+\frac{c_1+\cdots+c_q}{c}\right|^2-\frac{\left|c_1+\cdots+c_q\right|^2}{c} \tag{3.66}$$

现在对 x_1 的积分形式为

$$\begin{aligned}&\int\limits_{Q_{0,(2n+1)R}}\gamma_\iota(x_1,\ldots,x_i)\,\mathrm{d}x_1\\&=|A|^{-p}\int\limits_{Q_{0,(2n+1)R}}\frac{1}{\left|1+\mathrm{i}A^{-1}\left(B+\epsilon^{-\tilde\gamma}\left(c\left|x_1+\frac{c_1+\cdots+c_q}{c}\right|^2+R(x_2,\ldots,x_i)\right)\right)\right|^p}\mathrm{d}x_1\\&=|A|^{-p}\int_{Q_{\frac{c_1+\cdots+c_q}{c},(2n+1)R}}\frac{1}{\left|1+\mathrm{i}A^{-1}\left(B+\epsilon^{-\tilde\gamma}\left(c|x_1|^2+R(x_2,\ldots,x_i)\right)\right)\right|^p}\mathrm{d}x_1,\end{aligned} \tag{3.67}$$

其中，$R(x_2,\ldots\ldots,x_i)$ 是用剩余变量表示的余项。可以验证，$\frac{|c_1+\cdots+c_q|}{|c|}\le 2(5-i)(i-1)\sqrt{d}$，因此 $Q_{\frac{c_1+\cdots+c_q}{c},(2n+1)R}\subseteq Q_{0,\Lambda n}$ 由此得到

$$\int\limits_{Q_{0,(2n+1)R}}\gamma_\iota(x_1,\ldots,x_i)\,\mathrm{d}x_1\le|A|^{-p}\int_{Q_{0,\Lambda n}}\frac{\mathrm{d}x_1}{\left|1+\mathrm{i}A^{-1}\left(B+\epsilon^{-\tilde\gamma}\left(c|x_1|^2+R(x_2,\ldots,x_i)\right)\right)\right|^p}. \tag{3.68}$$

并且可以像式（3.58）那样处理。这导致

$$\int\limits_{Q_{0,(2n+1)R}}\gamma_\iota(x_1,\ldots,x_i)\,\mathrm{d}x_1\le\Lambda|A|^{1-p}n^{d-2}\epsilon^{\tilde\gamma} \tag{3.69}$$

因此

$$\int\limits_{Q^i_{0,(2n+1)R}}\gamma_\iota(x_1,\ldots,x_i)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_i)\le\Lambda|A|^{1-p}n^{id-2}\epsilon^{\tilde\gamma}. \tag{3.70}$$

在第二种情况下，$c=0$。该 x_1 积分的唯一贡献来自

$$2\iota_{k_1}\iota^1_{k_1}x_1\left(\sum_{j'=2}^{i}\iota^{j'}_{k_1}x_{j'}-P_{k_1}\right)+\cdots+2\iota_{k_q}\iota^1_{k_q}x_1\left(\sum_{j'=2}^{i}\iota^{j'}_{k_q}x_{j'}-P_{k_q}\right) \tag{3.71}$$

根据式（3.65）。由于 $i\ge2$，存在某个 $\tilde c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，使得式（3.71）中的一项恰好是 $\tilde c x_1x_2$。如果我们用 $x_2'=x_2+x_1$ 替换 x_2，就必须先对 x_2' 在 $Q_{x_1,2(2n+1)R}$ 上积分，然后再对 x_1 积分。不过，我们可以再次论证 $Q_{x_1,2(2n+1)R}\subseteq Q_{0,4(2n+1)R}$，通过将 x_2' 的积分区域替换为 $Q_{0,4(2n+1)R}$ 来估计该积分，然后利用富比尼定理先对 x_1 变量积分。此时，被积函数的分母关于 x_1 变量是二次的，因此可以应用式（3.58）。剩余积分的贡献

为 $\mathrm{O}\left(n^{(i-1)d}\right)$。综上，

$$\int_{Q^i_{0,(2n+1)R}} \gamma_\iota(x_1,\dots,x_i)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_i) \le \Lambda|A|^{1-p}n^{id-2}\epsilon^{\tilde{\gamma}}. \tag{3.72}$$

□

推论 3.15. 令 $n \le |\ln\epsilon|$。则存在 $\alpha=\alpha(d)>0$，使得对所有 $i\in[\![1,4]\!]$

$$\int_{Q^i_{0,2(2n+1)R}} \gamma_\iota(x_1,\dots,x_i)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_i) \le \Lambda|A|^{1-p}\epsilon^{\alpha}. \tag{3.73}$$

证明。 这是定理3.14的直接应用。 □

引理 3.16. 定理 γ_ι 中的函数*3.14* 满足

$$|\nabla\gamma_\iota| \le \Lambda|A|^{-p-1}\epsilon^{-\tilde{\gamma}}n. \tag{3.74}$$

此外，对所有 $i\in[\![1,4]\!]$,

$$\frac{1}{L}\sum_{x_1,\dots,x_i\in\mathbb{Z}^d_L\cap Q_{0,2R}} \sup_{\times_{j=1}^i Q_{x_j,\frac{1}{2L}}} |\nabla\gamma_\iota| \le \Lambda L^{id}|A|^{-p-1}n^{id+1}\epsilon^{\beta-\tilde{\gamma}}. \tag{3.75}$$

证明。 所有情形的计算都非常相似，下面以考察以下情形为例：

$$\gamma_\iota(x,y) := \frac{1}{\left|A+\mathrm{i}\left(B+\epsilon^{-\tilde{\gamma}}\left(\iota_1|x|^2+\iota_2|y|^2-\iota_3|x+y-P|^2+C\right)\right)\right|^p}, \tag{3.76}$$

其中 $A\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，$B,C\in\mathbb{R}$, $\iota:=(\iota_1,\iota_2,\iota_3)\in\{\pm\}^3$ 以及 $P\in B_{(2n+1)R}(0)$。直接计算可得

$$\nabla\gamma_\iota(x,y) = -\frac{2p\epsilon^{-\tilde{\gamma}}\left(B+\epsilon^{-\tilde{\gamma}}\left(\iota_1|x|^2+\iota_2|y|^2-\iota_3|x+y-P|^2+C\right)\right)}{\left|A+\mathrm{i}\left(B+\epsilon^{-\tilde{\gamma}}\left(\iota_1|x|^2+\iota_2|y|^2-\iota_3|x+y-P|^2+C\right)\right)\right|^{p+2}}\begin{pmatrix}\iota_1x-\iota_3(x+y-P)\\ \iota_1y-\iota_3(x+y-P)\end{pmatrix} \tag{3.77}$$

给出

$$|\nabla\gamma_\iota| \le \Lambda|A|^{-p-1}\epsilon^{-\tilde{\gamma}}\left(|x|+|y|+|P|\right) \tag{3.78}$$

并且由于 $x,y,P\in B_{(2n+1)R}(0)$，我们得到

$$\left|\nabla_{x,y}\gamma_\iota\right| \le \Lambda|A|^{-p-1}\epsilon^{-\tilde{\gamma}}n \tag{3.79}$$

因此

$$\frac{1}{L}\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d_L\cap Q_{0,2(n+1)R}} \sup_{Q_{x,\frac{1}{2L}}\times Q_{y,\frac{1}{2L}}} |\nabla\gamma_\iota| \le \Lambda L^{-1}|A|^{-p-1}\epsilon^{-\tilde{\gamma}}n\left|Q^{\mathbb{Z}^d}_{0,2(n+1)R}\right|^2 \tag{3.80}$$

$$\le \Lambda L^{2d}|A|^{-p-1}n^{2d+1}\epsilon^{\beta-\tilde{\gamma}}, \tag{3.81}$$

其中，在最后一步中我们使用了 $L^{-1}=\epsilon^{\beta}$。 □

推论 3.17。 若 $\beta>\tilde{\gamma}$，则存在一个 $\alpha=\alpha(d,\beta)>0$，使得对所有 $n\le|\ln\epsilon|$

$$\frac{1}{L}\sum_{x_1,\dots,x_i\in Q^{\mathbb{Z}^d_L}_{0,2R}}\ \sup_{\times_{j=1}^{i}Q_{x_j,\frac{1}{2L}}}|\nabla\gamma_\iota|\le\Lambda L^{id}|A|^{-p-1}\epsilon^{\alpha}. \tag{3.82}$$

证明。 这由引理 3.16得出。 □

3.3 权衡收益与损失

定义 3.18。设 C 是一个配对。若 $n_1,\dots,n_5$（无序）表示节点 $n\in\mathrm{N}(C)$ 的子节点，且 $\iota_{n_1}+\iota_{n_2}=0$, $\iota_{n_3}+\iota_{n_4}=0$, $K_C(n_1)+K_C(n_2)=0$, $K_C(n_3)+K_C(n_4)$ 和$K_C(n_5)=K_C(n)$，则称节点 $n\in\mathrm{N}(C)$ 为共振节点。若子节点 $n_1,\dots,n_5$ 按从左到右的顺序排列，且对某个 $i\in\{1,\dots,5\}$，有 $K_C(n_i)=K_C(n)$，则称 n 1,... 为 5- 共振的。我们用 $\mathrm{N}_{\mathrm{res}}(C)\subseteq\mathrm{N}(C)$ 表示共振节点的子集，并且 $n_{\mathrm{res}}(C):=|\mathrm{N}_{\mathrm{res}}(C)|$。

注 *3.19*。 将 $n\in\mathrm{N}(C)$ 定义为共振的，等价于要求 $\{\ell\le n_1\mid\ell\in\mathrm{L}(C)\}\sqcup\{\ell\le n_2\mid\ell\in\mathrm{L}(C)\}$ 和 $\{\ell\le n_3\mid\ell\in\mathrm{L}(C)\}\sqcup\{\ell\le n_4\mid\ell\in\mathrm{L}(C)\}$ 均为自耦合。

我们定义

$$A_n(\kappa,\xi):=\frac{|Q_n|}{\left|n\delta^{-1}-\mathrm{i}\left(\xi+\epsilon^{-1}\omega_n(<')\right)\right|} \tag{3.83}$$

并利用命题 3.6，可以考虑由下式定义的线性同构 $I\colon\ \left(\mathbb{R}^d\right)_{\mathcal{L}(C)_+}\to\left(\mathbb{R}^d\right)^{2n(C)+1}$

$$I(\kappa):=\left(K_C(n_1)(\kappa),\dots,K_C(n_{2n})(\kappa),K_C(r_1)(\kappa)\right). \tag{3.84}$$

根据定义，$I\left(\left(\mathbb{Z}^d_L\right)_{\mathcal{L}(C)^+}\right)\subseteq\left(\mathbb{Z}^d_L\right)^{2n(C)+1}$，更准确地说

$$I\left(\left(B^{\mathbb{Z}^d_L}_R(0)\right)^{\mathcal{L}(C)_+}\right)\subseteq\left(B^{\mathbb{Z}^d_L}_{(2n(C)+1)R}(0)\right)^{2n(C)+1} \tag{3.85}$$

and

$$I\left(\mathcal{D}_k(C)\right)\subseteq\left(B^{\mathbb{Z}^d_L}_{(2n(C)+1)R}(0)\right)^{2n(C)}\times\{k\}. \tag{3.86}$$

注 *3.20*。 从现在起，我们将简写为 $n=n(C)$。可以看出，同构 I 对坐标所在的球进行缩放，其缩放幅度至多随节点数线性增长，即为$O(n)$。因此，我们应谨慎核算因破坏质量守恒而最终产生的潜在损失，参见注 1.1。可以证明，存在一些偶对，其损失随节点数呈阶乘级增长。

我们现在定义

$$\tilde{A}_n\left(\tilde{k}_1,\dots,\tilde{k}_{2n},k,\xi\right) \coloneqq A_n\left(I^{-1}\left(\tilde{k}_1,\dots,\tilde{k}_{2n},k\right),\xi\right), \tag{3.87}$$

其中定义域为

$$\left(\tilde{k}_1,\dots,\tilde{k}_{2n}\right) \in \left(B^{\mathbb{Z}^d_L}_{(2n(C)+1)R}(0)\right)^{2n}. \tag{3.88}$$

我们将全序关系 $<_\rho \in \mathrm{M}(\mathrm{N}(C))$ 与底层双射 $\rho\colon [\![1,\ n]\!] \to \mathrm{N}(C)$ 对应起来。我们可以对其排序

$$\bigsqcup_{i=1}^{4} \mathcal{P}_i = \left\{n_1 <_\rho \cdots <_\rho n_{n(C)-p_0}\right\} \tag{3.89}$$

并首先估计

$$\begin{aligned}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)} A_n(\kappa,\xi) &\le \left(\frac{\delta}{n}\right)^{p_0} \prod_{i=1}^{4}\prod_{n\in\mathcal{P}_i} A_n(\kappa,\xi)\\ &= \left(\frac{\delta}{n}\right)^{p_0} \prod_{i=1}^{n(C)-p_0} A_{n_i}(\kappa,\xi)\end{aligned} \tag{3.90}$$

使得

$$\sum_{\substack{\kappa\in\mathcal{D}_k(C)\\ \kappa(\mathcal{L}(C)_+)\subseteq B_R(0)}} \prod_{n\in\mathcal{N}(C)} A_n(\kappa,\xi) \le \left(\frac{\delta}{n}\right)^{p_0} \sum_{(x_i)_{i=1}^{2n}\in\left(B^{\mathbb{Z}^d_L}_{(2n+1)R}(0)\right)^{2n}} \prod_{i=1}^{n-p_0} \tilde{A}_{n_i}(\boldsymbol{x},\xi), \tag{3.91}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ \dots\dots,\ x_{2n})$。记 $n_i \in \mathcal{P}_{j_i}$ 对于 $j_i \in [\![1,\ 4]\!]$ 以及 $i \in [\![1,\ n-p_0]\!]$ 使得 $\sum_{i=1}^{n-p_0} j_i = 2n$ (根据引理 3.9)，我们可以通过观察以下事实，为等式（3.91）中的求和赋予更多结构

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{\kappa\in\mathcal{D}_k(C)\\ \kappa(\mathcal{L}(C)_+)\subseteq B_R(0)}} \prod_{n\in\mathcal{N}(C)} A_n(\kappa,\xi)\\ \le \left(\frac{\delta}{n}\right)^{p_0} &\sum_{(x_i)_{i=2n(C)-j_{n(C)-p_0}+1}^{2n(C)}\in\left(B^{\mathbb{Z}^d_L}_{(2n+1)R}(0)\right)^{j_{n(C)-p_0}}} \tilde{A}_{n_{n(C)-p_0}}(\boldsymbol{x},\xi)\cdots \sum_{(x_i)_{i=1}^{j_1}\in\left(B^{\mathbb{Z}^d_L}_{(2n+1)R}(0)\right)^{j_1}} \tilde{A}_{n_1}(\boldsymbol{x},\xi).\end{aligned} \tag{3.92}$$

尽管根据构造，

$$\mathcal{N}_{<''}(C) \coloneqq \left\{\tilde{n}_1 <'' \cdots <'' \tilde{n}_{2n(C)} <'' r_1\right\} \tag{3.93}$$

因此，P_i和 $p_i \coloneqq |\mathrm{P}_i|$也依赖于底层阶数 $<''\in\mathrm{M}\left(\mathrm{L}(C)\sqcup\mathrm{N}(C)\right)$。由于以下两个重要关系与 $<''\in\mathrm{M}\left(\mathrm{L}(C)\sqcup\mathrm{N}(C)\right)$无关，我们省略这一依赖：

$$p_0+p_1+p_2+p_3+p_4 = n, \tag{3.94}$$

$$p_1+2p_2+3p_3+4p_4 = 2n. \tag{3.95}$$

记

$$\mathcal{P}_{\mathrm{res},i} \coloneqq \mathcal{P}_i \cap \mathcal{N}_{\mathrm{res}}(C), \tag{3.96}$$

$$p_{\mathrm{res},i} \coloneqq \left|\mathcal{P}_{\mathrm{res},i}\right|. \tag{3.97}$$

并回顾推论3.13 可知，$p_{\mathrm{res},3} = p_{\mathrm{res},4} = 0$，因此$p_{\mathrm{res},1} + p_{\mathrm{res},2} = n_{\mathrm{res}}$。我们进一步将$\tilde{\mathrm{P}}_1$ 记为 1 阶节点的子集，这样定理 3.14 第 1.) 点中的向量 P （它表示一个带符号组合，其中共振因子的波数不求和）满足 $|P| < \epsilon^{\gamma}$，其中$\tilde{}$某个固定的 $\gamma \in$ 属于 (0,1)。记为 $\tilde{p}_1 \coloneqq |\mathrm{P}_1|$。对于我们的五次非线性项，可以证明 $\mathrm{P}_{\mathrm{res},1} \subsetneq \mathrm{P}_1$，这要求我们在计算 ϵ 中的收益以及 1 阶节点可能遭受的损失时格外谨慎。

引理 3.21。设 $i \in [\![1, n(C) - p_0]\!]$ 以及 $p > 1$。存在一个 $\alpha_0 > 0$，使得对所有 $n \leq |\ln \epsilon|$,

$$\begin{aligned} &\sum_{(x_j)_{j=\sum_{k=1}^{i-1} j_k+1}^{\sum_{k=1}^{i} j_k} \in \left(B_{(2n+1)R}^{\mathbb{Z}^d_L}\right)^{j_i}} \tilde{A}_{n_i}^{p} \\ &\leq \begin{cases} \Lambda L^{j_i d} \left(\frac{\delta}{n}\right)^{p} \epsilon^{j_i \alpha_0} & \text{if } j_i \geq 2 \text{ and } n_i \in \mathcal{P}_{j_i} \setminus \mathcal{P}_{\mathrm{res},j_i} \text{ or } j_i = 1 \text{ and } n_i \in \mathcal{P}_1 \setminus \tilde{\mathcal{P}}_1, \\ \Lambda L^{j_i d} \left(\frac{\delta}{n}\right)^{p} & \text{if } j_i \geq 2 \text{ and } n_i \in \mathcal{P}_{\mathrm{res},j_i} \text{ or } j_i = 1 \text{ and } n_i \in \tilde{\mathcal{P}}_1. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.98}$$

证明。回顾

$$\tilde{\omega}_{n_i}(<') = \iota_{n_i} \tilde{\Omega}_{n_i} + \sum_{n_i < n' \in \mathcal{N}(C)} \iota_{n'} \tilde{\Omega}_{n'}, \tag{3.99}$$

~ ~其中，记号 $\tilde{\omega}$ 和 Ω 表示坐标变换 I的应用。现在，$A_{n_{j_i}}$ 将具有定理 3.14 中定义的某个 γ_ι 的形式。更准确地说，按照定理 3.14 的记号，$\tilde{} A = n$、$B = \xi$、$C = \sum_{n_{j_i} < n' \in \mathrm{N}} (C)\ \iota_{n'} \Omega_{n'}$ 以及 $\tilde{\gamma} = 1$。我们首先可以将方程（3.98）左端的和转换为梯度上的和以及立方体上的积分，正如引理 3.11 中一般所述的那样~。现在，$j_i = 1$ 和 $n_i \in \mathrm{P}_1 \setminus \mathrm{P}_1$ 的情形对应于定理 3.14 的第 1 点，而 $j_i \geq 2$ 和 $n_i \in \mathrm{P}_{j_i} \setminus \mathrm{P}_{\mathrm{res},j_i}$ 的情形对应于定理 3.14 的第 2 种情形。在这两种情形下，我们应用推论 3.15 和 3.17，得到

$$\begin{aligned} \sum_{(x_j)_{j=\sum_{k=1}^{i-1} j_k+1}^{\sum_{k=1}^{i} j_k} \in \left(B_{(2n+1)R}^{\mathbb{Z}^d_L}\right)^{j_i}} \tilde{A}_{n_i}^{p} &\leq \Lambda L^{j_i d} \left(\frac{\delta}{n}\right)^{p+1} \epsilon^{\alpha} + \Lambda L^{j_i d} \left(\frac{\delta}{n}\right)^{p-1} \epsilon^{\alpha} \\ &\leq \Lambda L^{j_i d} \left(\frac{\delta}{n}\right)^{p} \epsilon^{j_i \alpha_0}, \end{aligned} \tag{3.100}$$

对所有 $0 < \epsilon \leq \delta^{\mathcal{W}} \leq \delta \ll 1$，其中 $\mathcal{W} > 0$ 足够大，并且我们平凡地估计了方程（3.100）的第一项，并引入了一个额外的因子 n^{-1} 到第二项中，同时利用$n \leq |\ln \epsilon|$。

方程（3.98）的其余情形依赖于**??**。事实上，

$$\sum_{(x_j)_{j=\sum_{k=1}^{i-1} j_k+1}^{\sum_{k=1}^{i} j_k} \in \left(B_{(2n+1)R}^{\mathbb{Z}^d_L}\right)^{j_i}} \tilde{A}_{n_i} \leq \frac{\delta}{n} \sum_{(x_j)_{j=\sum_{k=1}^{i-1} j_k+1}^{\sum_{k=1}^{i} j_k} \in \left(B_{(2n+1)R}^{\mathbb{Z}^d_L}\right)^{j_i}} \left|\tilde{Q}_{n_i}\right| \leq \Lambda L^{j_i d} \frac{\delta}{n} \tag{3.101}$$

至此证明结束。 □

注 3.22. 设 $C \in \mathrm{C}_{n,n}^{\eta,\eta',\iota,-\iota}$，则 C包含 $4n+1$个正叶子（和负叶子）。对于这个特定的固定偶对，存在 $(4n+1)!$ 个耦合映射。因此

$$\left|C_{n,n}^{\eta,\eta',\iota,-\iota}\right| \leq \Lambda^n (4n+1)!. \tag{3.102}$$

and

$$(4n+1)! \leq (4n+1)^{4n+1} \leq (5n)^{5n} = 5^{5n} n^{5n} \leq \Lambda^n n^{5n}. \tag{3.103}$$

定义 3.23. 设 C为一个偶对，且 $n \in \mathrm{N}(C) \sqcup \mathrm{L}(C)$。我们称

$$\mathrm{Off}(n) \coloneqq \{\ell \leq n \mid \ell \in \mathcal{L}(C)\} \tag{3.104}$$

后代集合 n。

每个都含有常数个共振节点的偶对集合的基数证明，遵循 [27] 中引理 2.4 的策略。

引理 3.24. 有

$$c_{n,q} \coloneqq \left| \bigsqcup_{n_1+n_2=n} \left\{C \in C_{n_1,n_2} \mid n_{\mathrm{res}}(C) = q\right\} \right| \leq \Lambda^n (2(n-q)+2)! \tag{3.105}$$

证明。设 $C = (T_1, T_2, \sigma) \in \mathrm{C}_{n_1,n_2}$，且 $n \in \mathrm{N}_{\mathrm{res}}(C)$ 是一个共振节点（若存在）。其子节点 $C(n) = \{n_1, \ldots, n_5\}$（无序列表）满足 $K_C(n_1) + K_C(n_2) = 0$ 以及 $K_C(n_3) + K_C(n_4) = 0$，这等价于说 $X_{n,1} \coloneqq \mathrm{Off}(n_1) \sqcup \mathrm{Off}(n_2)$ 和 $X_{n,2} \coloneqq \mathrm{Off}(n_3) \sqcup \mathrm{Off}(n_4)$ 是自耦合的（见注 3.19）。我们枚举共振节点 $(n_i)_{i=1}^q$，以及与之关联的自耦合后代集合 $(X_{n_i,1}, X_{n_i,2})_{i=1}^q$。设 $m_{i,j} \coloneqq \left|(X_{n_i,j})_+\right|$ 为 $X_{n_i,j}$ 内正叶子的基数。满足对所有 $i \in [\![1,q]\!]$ 和 $j = 1, 2$，$X_{n_i,j}$ 都是自耦合的配对数 σ 为

$$\prod_{(i,j) \in [\![1,q]\!] \times \{1,2\}} m_{i,j}! \times \left(2n+1 - \sum_{(i,j) \in [\![1,q]\!] \times \{1,2\}} m_{i,j}\right)!, \tag{3.106}$$

其中$2n+1-\sum_{(i,j)\in[\![1,q]\!]\times\{1,2\}} m_{i,j}$对应于 $\mathrm{L}(C)_+$内部不属于任何$X_{n_i,j}$的正叶子的数目。我们利用如下事实：对于任意正整数序列 $(a_i)_{i \in [\![1,q]\!]}$，我们有

$$\prod_{i=1}^{q} a_i! \leq \left(\sum_{i=1}^{q} a_i - q + 1\right)!. \tag{3.107}$$

由此，我们得到

$$|(3.106)| \leq \left(\sum_{(i,j) \in [\![1,q]\!] \times \{1,2\}} m_{i,j} - 2q + 1\right)! \left(2n+1 - \sum_{(i,j) \in [\![1,q]\!] \times \{1,2\}} m_{i,j}\right)! \leq (2(n-q)+2)! \tag{3.108}$$

在 $2n$ 种可能性中选择 $2q$ 自耦合后代集合，我们得到

$$|\{\sigma \text{ pairing such that } n_{\mathrm{res}}(C) = q\}| \leq \binom{2n}{2q} (2(n-q)+2)! \leq \Lambda_1^n (2(n-q)+2)!. \tag{3.109}$$

Now

$$\left|\bigsqcup_{\substack{\eta,\eta'\in\{0,1\}\\ \iota,\iota'\in\{\pm\}\\ n_1+n_2=n}} \mathcal{T}_{n_1}^{\iota,\eta}\times\mathcal{T}_{n_2}^{\iota',\eta'}\right| \le \Lambda_2^n \tag{3.110}$$

使得

$$c_{n,q} \le (3.108)\cdot(3.110) \le \Lambda^n(2(n-q)+2)!, \tag{3.111}$$

其中 $\Lambda := \Lambda^1\Lambda^2$。 □

命题 3.25。回顾

$$\sup_{t\in[0,\delta]}\left|\mathcal{J}_C^{<'}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right| \le \Lambda^{n+1}L^{-2dn}\int_{\mathbb{R}}\frac{\sum\limits_{\kappa\in\mathcal{D}_k(C)}\prod\limits_{n\in\mathcal{N}(C)}\frac{|Q_n|}{\left|n\delta^{-1}-\mathrm{i}\left(\xi+\epsilon^{-1}\omega_n(<')\right)\right|}}{\kappa(\mathcal{L}(C)_+)\subseteq B_R(0)}\mathrm{d}\xi. \tag{3.112}$$

存在$\mathcal{K}$，$\alpha>0$使得对所有 $n=n(C)$，$2k\le|\ln\epsilon|$

$$\sup_{t\in[0,\delta]}\left|\mathcal{J}_C^{<'}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right| \le \Lambda(\Lambda\delta)^n\epsilon^{\alpha(n-n_{\mathrm{res}})}\frac{L^{\mathcal{K}}}{n^{n+1}}, \tag{3.113}$$

$$\sup_{t\in[0,\delta]}\left|\mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right| \le \Lambda(\Lambda\delta)^n\epsilon^{\alpha(n-n_{\mathrm{res}})}\frac{L^{\mathcal{K}}}{n}, \tag{3.114}$$

$$\sup_{t\in[0,\delta]}\mathbb{E}\left(\left|\widehat{f_k^{\eta}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|\right) \le \Lambda(\Lambda\delta)^{2k}\frac{L^{\mathcal{K}}}{2k} \tag{3.115}$$

证明。我们将式（3.112）中的积分划分到区域$\{|\xi|\le L^{\mathcal{K}}\}$和 $\{|\xi|>L\kappa\}$，并首先考察区域$\{|\xi|\le L^{\mathcal{K}}\}$。设 $p>1$。对装饰求和应用 Hölder不等式可得

$$L^{-2dn}\sum_{\substack{\kappa\in\mathcal{D}_k(C)\\ \kappa(\mathcal{L}(C)_+)\subseteq B_R(0)}}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)}A_n \le \Lambda^n\left(L^{-2dn}\sum_{\substack{\kappa\in\mathcal{D}_k(C)\\ \kappa(\mathcal{L}(C)_+)\subseteq B_R(0)}}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)}A_n^p\right)^{1/p}, \tag{3.116}$$

其中我们再次使用了

$$\left(\sum_{\substack{\kappa\in\mathcal{D}_k(C)\\ \kappa(\mathcal{L}(C)_+)\subseteq B_R(0)}}1\right)^{1-1/p} \le \Lambda^n L^{2dn(1-1/p)}. \tag{3.117}$$

我们可以应用引理3.21和假设 1 以及估计

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{\kappa\in\mathcal{D}_k(C)\\ \kappa(\mathcal{L}(C)_+)\subseteq B_R(0)}}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)}A_n^p\\ &\le \Lambda^n L^{2dn}\left(\frac{\delta}{n}\right)^{pn}\epsilon^{\alpha_0\left((p_1-\tilde{p}_1)+2\left(p_2-p_{\mathrm{res},2}\right)+3p_3+4p_4\right)}\end{aligned} \tag{3.118}$$

我们关键地注意到

$$\begin{aligned}(p_1-\tilde{p}_1)+2\left(p_2-p_{\mathrm{res},2}\right)+3p_3+4p_4&=2\left(n-n_{\mathrm{res}}\right)-\left(\tilde{p}_1-p_{\mathrm{res},1}\right)+p_{\mathrm{res},1}\\&\geq n-n_{\mathrm{res}}\end{aligned}\tag{3.119}$$

使用了$p_i-p_{\mathrm{res},\ i}\leq n-n_{\mathrm{res}}$以及$\tilde{p}_1-p_{\mathrm{res},\ 1}\leq n-n_{\mathrm{res}}$。将其代入方程（3.118）得到

$$|(3.118)|\leq\Lambda^n L^{2dn}\left(\frac{\delta}{n}\right)^{pn}\epsilon^{\alpha_0(n-n_{\mathrm{res}})}.\tag{3.120}$$

将这些估计与对$\left\{|\xi|\leq L^{\mathcal{K}}\right\}$的积分结合，得到

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leq L^{\mathcal{K}}}\Big[\cdots\Big]\mathrm{d}\xi&\leq\Lambda^n\left(\frac{\delta}{n}\right)^n\epsilon^{\frac{\alpha_0}{p}(n-n_{\mathrm{res}})}\int_{|\xi|\leq L^{\mathcal{K}}}\frac{\mathrm{d}\xi}{|n-\mathrm{i}\xi|}\\&\leq\Lambda^n\frac{\delta^n}{n^{n+1}}\epsilon^{\frac{\alpha_0}{p}(n-n_{\mathrm{res}})}L^{\mathcal{K}},\end{aligned}\tag{3.121}$$

wher方程（3.121）中被积函数的分子恰好是方程（3.116）右端的表达式。

对于第二种积分情形，我们考虑$|\Omega_n|\leq\Lambda n^2$，使得$|\omega_n(<')|\leq\Lambda n^3\leq\Lambda|\log\epsilon|^3\leq\Lambda\log(L)^3$对所有$n\in\mathrm{N}$（$C$）均成立。因此，$\epsilon^{-1}|\omega_n(<')|\leq\Lambda L^{\frac{1}{\beta}}\log(L)^3$。首先考虑情形$\{\xi\leq-L^{\mathcal{K}}\}$，提取总和$\sum_{\substack{\kappa\in\mathcal{D}_k(C)\\ \kappa(\mathrm{L}(C)_+)\subseteq B_R(0)}}$提出积分号外，并将剩余的积分写作

$$\int_{-\infty}^{-L^{\mathcal{K}}}\Big[\cdots\Big]\mathrm{d}\xi=\left(\frac{\delta}{n}\right)^{n+1}\int_{-\infty}^{-L^{\mathcal{K}}}\frac{1}{\left|1-\mathrm{i}\delta n^{-1}\xi\right|}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)}\frac{|Q_n|}{\left|1-\mathrm{i}\delta n^{-1}\left(\xi+\epsilon^{-1}\omega_n(<')\right)\right|}\mathrm{d}\xi.\tag{3.122}$$

此外，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left|1-\mathrm{i}\delta n^{-1}\left(\xi+\epsilon^{-1}\omega_n(<')\right)\right|}&\leq\frac{n}{\delta\left|\xi+\epsilon^{-1}\omega_n(<')\right|}\leq\frac{n}{\delta\left(-\xi-\epsilon^{-1}|\omega_n(<')|\right)}\\&\leq\frac{1}{\Lambda L^{\frac{1}{\beta}}\log(L)^3}\frac{n}{\delta\left(-\frac{\xi}{\Lambda L^{\frac{1}{\beta}}\log(L)^3}-1\right)}\end{aligned}\tag{3.123}$$

因此，如果我们选择足够大的$\mathrm{K}>\frac{1}{\beta}$和$L\gg1$，$-\frac{\xi}{\Lambda L^{\frac{1}{\beta}}\underline{\text{对数}(L)^3}}$就会非常大，从而

$$\frac{1}{-\frac{\xi}{\Lambda L^{\frac{1}{\beta}}\log(L)^3}-1}\leq\frac{\Lambda L^{\frac{1}{\beta}}\log(L)^3}{|\xi|}.\tag{3.124}$$

我们有

$$\frac{1}{\left|1-\mathrm{i}\delta n^{-1}\left(\xi+\epsilon^{-1}\omega_n(<')\right)\right|}\leq\frac{n}{\delta}\frac{\Lambda}{|\xi|}\tag{3.125}$$

并得到

$$\int_{-\infty}^{-L^{\mathcal{K}}}\Big[\cdots\Big]\mathrm{d}\xi\leq\Lambda^n\int_{-\infty}^{L^{\mathcal{K}}}\frac{1}{|\xi|^{n+1}}\mathrm{d}\xi\leq\frac{\Lambda^n}{n}L^{-\mathcal{K}n}.\tag{3.126}$$

对于积分区间$\left\{\xi\geq L^{\mathcal{K}}\right\}$，同样可以得出这一结论，因此

$$\int_{|\xi|\geq L^{\mathcal{K}}}\Big[\cdots\Big]\mathrm{d}\xi\leq\frac{\Lambda^n}{n}L^{-\mathcal{K}n}\tag{3.127}$$

这是 L^{-1} 的任意大次幂，因此在这种情形下，估计显然成立。

我们已经证明了式（3.113）。方程（3.114）可直接由此推出

$$\left|\mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|\leq|\mathcal{M}(\mathcal{N}(C))|\left|\mathcal{J}_C^{<'}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|\tag{3.128}$$

以及 $|\mathrm{M}(\mathrm{N}(C))|\leq n!$ 。

最后，利用引理 3.24，

$$\mathbb{E}\left(\left|f_n^{\eta}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|^2\right)\leq\sum_{C\in C_{n,n}^{\eta,\eta,+,-}}\left|\mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|\leq\Lambda(\Lambda\delta)^{2n}\frac{L^{\mathcal{K}}}{2n}\sum_{q=1}^{n}\epsilon^{\alpha(n-q)}c_{n,q}\leq\Lambda(\Lambda\delta)^{2n}\frac{L^{\mathcal{K}}}{2n}\sum_{m=0}^{n-1}\epsilon^{\alpha m}(2m+2)!\tag{3.129}$$

并且我们可以利用 $(2m+2)!\leq(4m)!\leq(4m)^{4m}\leq16^n|\ln\epsilon|^{4m}$，使得

$$\mathbb{E}\left(\left|f_n^{\eta}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|^2\right)\leq\Lambda(\Lambda\delta)^{2n}\frac{L^{\mathcal{K}}}{2n}\sum_{m=0}^{n-1}\left(\epsilon^{\alpha}|\ln\epsilon|^4\right)^m\leq\Lambda(\Lambda\delta)^{2n}\frac{L^{\mathcal{K}}}{2n}\sum_{m=0}^{n-1}\epsilon^{\alpha' m}\leq\Lambda(\Lambda\delta)^{2n}\frac{L^{\mathcal{K}}}{2n},\tag{3.130}$$

对于任意 $\alpha'\in(0,\frac{\alpha}{4})$。 □

3.4 J 的时间导数$\mathcal{J}_T$

回顾，

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{J}_T}(t,k)=&\left(-\frac{\mathrm{i}\epsilon}{L^{2d}}\right)^n\prod_{n\in\mathcal{N}(C)}\iota_n\sum_{\kappa\in\mathcal{D}_k(T)}\prod_{n\in\mathcal{N}(T)}Q_n^T(\kappa)\\&\cdot\int_{I_T(t)}\prod_{n\in\mathcal{N}(T)}e^{\mathrm{i}\iota_n\Omega_n^T(\kappa)t_n}\mathrm{d}t_n\prod_{\ell\in\mathcal{L}(T)}\mu_{\kappa(\ell)}^{\eta_\ell,\iota_\ell}\end{aligned}\tag{3.131}$$

我们将 M(N (A)) 与双射集合 $[\![1,n(A)]\!]\to\mathrm{N}(A)$ 等同，并可像之前一样使用 th at

$$I_A(t)=\mathcal{Z}_A\sqcup\bigsqcup_{\rho\in\mathcal{M}(\mathcal{N}(A))}\left\{(t_n)_{n\in\mathcal{N}(A)}\in[0,t]^{n(A)}\,\middle|\,0\leq t_{\rho(1)}<\cdots<t_{\rho(n(A))}\leq t\right\},\tag{3.132}$$

其中 $\mathcal{Z}_A$ 是 $[0,t]^{n(A)}$的一个零测度子集。它构成了式（3.132）中右侧子集的边界。通常情况下，

$$\int_{I_A(t)}\prod_{n\in\mathcal{N}(A)}f_n(t_n)\mathrm{d}t_n=\sum_{\rho\in\mathcal{M}(\mathcal{N}(A))}\int_{0\leq t_{\rho(1)}<\cdots<t_{\rho(n(A))}\leq t}\prod_{i=1}^{n(A)}f_{\rho(i)}(t_{\rho(i)})\mathrm{d}t_{\rho(i)}\tag{3.133}$$

现在对式（3.133）求时间导数，得到

$$\partial_t \int_{I_A(t)} \prod_{n\in\mathcal{N}(A)} f_n(t_n)\mathrm{d}t_n = \sum_{\rho\in\mathcal{M}(\mathcal{N}(A))} f_{\rho(n(A))}(t) \int_{0\le t_{\rho(1)}<\cdots<t_{\rho(n(A)-1)}\le t} \prod_{i=1}^{n(A)-1} f_{\rho(i)}\left(t_{\rho(i)}\right)\mathrm{d}t_{\rho(i)} \tag{3.134}$$

$$f_{r_A}(t) \sum_{\rho\mathcal{M}(\mathcal{N}(A)\setminus\{r_A\}} \int_{0\le t_{\rho(1)}<\cdots t_{\rho(n(A)-1)}\le t} \prod_{i=1}^{n(A)-1} f_{\rho(i)}(t_{\rho(i)})\mathrm{d}t_{\rho(i)} = f_{r_A}(t) \int_{I'_A(t)} \prod_{n\in\mathcal{N}(A)\setminus\{r_A\}} f_n(t_n)\mathrm{d}t_n, \tag{3.135}$$

其中

$$I'_A(t) := \left\{(t_n)_{n\in\mathcal{N}(A)\setminus\{r_A\}} \in [0,t]^{n(A)-1} \mid n\le n' \text{ implies } t_n \le t_{n'}\right\}. \tag{3.136}$$

这意味着

$$\begin{aligned}\partial_t \widehat{\mathcal{J}_T}(t,k) = \left(-\frac{\mathrm{i}\epsilon}{L^{2d}}\right)^n \prod_{n\in\mathcal{N}(C)} \iota_n \sum_{\kappa\in\mathcal{D}_k(T)} \prod_{n\in\mathcal{N}(T)} Q_n^T(\kappa) e^{\mathrm{i}\iota\Omega^T_{r_A}(\kappa)t} \\ \cdot \int_{I'_A(t)} \prod_{n\in\mathcal{N}(A)\setminus\{r_A\}} e^{\mathrm{i}\iota\Omega_n^T(\kappa)t_n}\mathrm{d}t_n \prod_{\ell\in\mathcal{L}(T)} \mu^{\eta_\ell,\iota_\ell}_{\kappa(\ell)}\end{aligned} \tag{3.137}$$

同样，按照前面的证明方法，可以证明

$$\mathbb{E}\left(\partial_t \widehat{F^{\eta_1,\iota_1}_{n_1}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\partial_t \widehat{F^{\eta_2,\iota_2}_{n_2}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right) = \sum_{C\in\mathcal{C}^{\eta_1,\eta_2,\iota_1,\iota_2}_{n_1,n_2}} \mathcal{J}'_C\left(\epsilon^{-1}t,k\right), \tag{3.138}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{J}'_C\left(\epsilon^{-1}t,k\right) := \left(\frac{-\mathrm{i}}{L^{2d}}\right)^{n(C)} \prod_{n\in\mathcal{N}(C)} \iota_n \sum_{\kappa\in\mathcal{D}_k(C)} \left[\prod_{n\in\mathcal{N}(T)} Q_n\right] e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\iota_{r_1}\Omega_{r_1}t} e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\iota_{r_2}\Omega_{r_2}t} \\ \cdot \int_{I'_C(t)} \prod_{n\in\mathcal{N}(C)\setminus\mathcal{R}(C)} e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\iota_n\Omega_n t_n}\mathrm{d}t_n \cdot \prod_{\ell\in\mathcal{L}(C)_+} M^{\eta_\ell,\eta_{\sigma(\ell)}}(\kappa(\ell))^{\iota_\ell},\end{aligned} \tag{3.139}$$

其中 $I'_C(t) := I'_{T_1}(t) \times I'_{T_2}(t)$。

命题 3.26. 存在 $\mathcal{K}$，$\alpha > 0$ 使得对所有 $n = n(C)$，$2k \le |\ln\epsilon|$

$$\sup_{t\in[0,\delta]} \left|\mathcal{J}'_C\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right| \le \Lambda(\Lambda\delta)^n \epsilon^{\alpha(n-n_{\mathrm{res}})} \frac{L^{\mathcal{K}}}{n}, \tag{3.140}$$

$$\sup_{t\in[0,\delta]} \mathbb{E}\left(\left|\partial_t \widehat{f^\eta_k}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|\right) \le \Lambda(\Lambda\delta)^{2k} \frac{L^{\mathcal{K}}}{2k} \tag{3.141}$$

证明。 证明与命题 3.25 非常相似。 □

3.5 Dyson迭代的一个范数估计

现在可以汇总前面的结果来证明

推论 3.27。 设 $A>0$。存在 Λ、$\mathcal{K}$、$\alpha>0$，使得以大于或等于$1-L^{-A}$的概率，

$$\left\|f_n^\eta\right\|_{C\left([0,\delta\epsilon^{-1}],H^s\left(\mathbb{T}_L^d\right)\right)} \leq \Lambda(\Lambda\delta)^{2n}\delta^2 L^{\mathcal{K}+d+\frac{2}{\beta}+2A} \tag{3.142}$$

对所有 $n \leq |\ln\epsilon|$。

证明。 利用命题 3.25 和 3.26，可得

$$\mathbb{E}\left(\left|\widehat{f_n^\eta}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|^2\right)+\mathbb{E}\left(\left|\partial_t\widehat{f_n^\eta}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|^2\right) \leq \Lambda(\Lambda\delta)^{2n}\frac{L^{\mathcal{K}}}{2n} \tag{3.143}$$

并且，由于 $\mathbb{E}\left(\left|\widehat{f_n^\eta}\left(\epsilon^{-1}t,\cdot\right)\right|^2\right)$ 和 $\mathbb{E}\left(\left|\partial_t\widehat{f_n^\eta}\left(\epsilon^{-1}t,\cdot\right)\right|^2\right)$ 在 $B_{(2n+1)R}(0)$ 内具有紧支撑，因此进一步可得

$$\mathbb{E}\left(\left\|f_n^\eta\left(\epsilon^{-1}t,\cdot\right)\right\|^2_{H^s\left(\mathbb{T}_L^d\right)}\right)+\mathbb{E}\left(\left\|\partial_t f_n^\eta\left(\epsilon^{-1}t,\cdot\right)\right\|^2_{H^s\left(\mathbb{T}_L^d\right)}\right) \leq \Lambda(\Lambda\delta)^{2n}L^{\mathcal{K}+d}n^{2s+d-1} \tag{3.144}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left\|f_n^\eta\right\|^2_{C\left([0,\delta\epsilon^{-1}],H^s\left(\mathbb{T}_L^d\right)\right)}\right) &\leq \frac{\delta}{\epsilon}\mathbb{E}\left(\left\|f_n^\eta\right\|^2_{H^1\left([0,\delta\epsilon^{-1}],H^s\left(\mathbb{T}_L^d\right)\right)}\right)\\ &= \frac{\delta}{\epsilon}\int_0^{\delta\epsilon^{-1}}\left(\mathbb{E}\left(\left\|f^\eta(t,\cdot)\right\|^2_{H^s\left(\mathbb{T}_L^d\right)}\right)+\mathbb{E}\left(\left\|\partial_t f^\eta(t,\cdot)\right\|^2_{H^s\left(\mathbb{T}_L^d\right)}\right)\right)\mathrm{d}t\\ &\leq \Lambda(\Lambda\delta)^{2n}\delta^2 L^{\mathcal{K}+d+\frac{2}{\beta}}n^{2s+d-1}\end{aligned} \tag{3.145}$$

若定义

$$a_n \coloneqq \Lambda(\Lambda\delta)^{2n}\delta^2 L^{\mathcal{K}+d+\frac{2}{\beta}+2A} \tag{3.146}$$

由马尔可夫不等式可得，

$$\mathbb{P}\left(\left\|f_n^\eta\right\|^2_{C\left([0,\delta\epsilon^{-1}],H^s\left(\mathbb{T}_L^d\right)\right)}>a_n\right) \leq a_n^{-1}\mathbb{E}\left(\left\|f_n^\eta\right\|^2_{C\left([0,\delta\epsilon^{-1}],H^s\left(\mathbb{T}_L^d\right)\right)}\right) \leq L^{-A}. \tag{3.147}$$

□

3.6 流树与$\mathcal{L}^m$的傅里叶表示

回顾

$$\widehat{F^\eta}(t,k)=\mu_k^\eta+\int_0^t C^+\left(\tau,F^\eta(\tau),\overline{F^\eta}(\tau),\overline{F^\eta}(\tau),F^{\overline{\eta}}(\tau),F^{\overline{\eta}}(\tau)\right)\mathrm{d}\tau \tag{3.148}$$

并定义

$$\tilde{C}^\eta\left(t,f_1,\ldots,f_5\right) \coloneqq C^+\left(t,f_1^\eta,\overline{f_2^\eta},\overline{f_3^\eta},f_4^{\overline{\eta}},f_5^{\overline{\eta}}\right), \tag{3.149}$$

w这里的 f_i 被视为由颜色 η参数化的二分量函数。此外，s et

$$F^\eta_{\leq N} \coloneqq \sum_{n\leq N}F_n^\eta \tag{3.150}$$

并作出拟设

$$F^\eta = F^\eta_{\leq N}+v^\eta \tag{3.151}$$

使得 $v^\eta = \mathrm{W}^\eta + \mathrm{L}(v)^\eta + \mathrm{R}^1(v)^\eta + \mathrm{R}^2(v)^\eta + \mathrm{R}^3(v)^\eta + \mathrm{R}^4(v)^\eta$，其中

$$\mathcal{W}^\eta := -F^\eta_{\le N} + F^\eta_0 + \int_0^t C^+\left(\tau, F^\eta_{\le N}(\tau), \overline{F^\eta_{\le N}}(\tau), \overline{F^\eta_{\le N}}(\tau), F^{\overline{\eta}}_{\le N}(\tau), F^{\overline{\eta}}_{\le N}(\tau)\right)\mathrm{d}\tau, \tag{3.152}$$

$$= \int_0^t \sum_{\substack{0\le\sum_{i=1}^5 n_i\le N\\ \sum_{i=1}^5 n_i\ge N}} C^+\left(\tau, F^\eta_{n_1}(\tau), \overline{F^\eta_{n_2}}(\tau), \overline{F^\eta_{n_3}}(\tau), F^{\overline{\eta}}_{n_4}(\tau), F^{\overline{\eta}}_{n_5}(\tau)\right)\mathrm{d}\tau \tag{3.153}$$

$$\mathrm{L}(v)^\eta := \int_0^t \sum_{\substack{i\in[\![1,5]\!]\\ f_i=v\wedge f_j=F_{\le N}\,\forall j\neq i}} \tilde{C}^\eta(\tau, f_1, \dots, f_i, \dots, f_5)\mathrm{d}\tau \tag{3.154}$$

$$\mathcal{R}^1(v)^\eta := \int_0^t \sum_{\substack{i<j\in[\![1,5]\!]\\ f_i=f_j=v\wedge f_k=F_{\le N}\,\forall k\notin\{i,j\}}} \tilde{C}^\eta\left(f_1, \dots, f_i, \dots, f_j, \dots, f_5\right)\mathrm{d}\tau, \tag{3.155}$$

$$\mathcal{R}^2(v)^\eta := \int_0^t \sum_{\substack{i<j<k\in[\![1,5]\!]\\ f_i=f_j=F_{\le N}\wedge f_k=v\,\forall v\notin\{i,j\}}} \tilde{C}^\eta\left(f_1, \dots, f_i, \dots, f_j, \dots, f_5\right)\mathrm{d}\tau, \tag{3.156}$$

$$\mathcal{R}^3(v)^\eta := \int_0^t \sum_{\substack{i\in[\![1,5]\!]\\ f_i=F_{\le N}\wedge f_j=v\,\forall j\neq i}} \tilde{C}^\eta(\tau, f_1, \dots, f_i, \dots, f_5)\mathrm{d}\tau, \tag{3.157}$$

$$\mathcal{R}^4(v)^\eta := \int_0^t C^+\left(\tau, v^\eta(\tau), \overline{v^\eta}(\tau), \overline{v^\eta}(\tau), v^{\overline{\eta}}(\tau), v^{\overline{\eta}}(\tau)\right)\mathrm{d}\tau, \tag{3.158}$$

其中，$\mathrm{R}^i(v)^\eta$分别是 v 中阶数为 $i+1$ 的项。

定义 3.28。 我们递归地定义**花树** 这一概念（与五叉树的概念类似）。在花树中，总是指定一个叶节点，并称之为 ℓ。为简洁起见，我们记 $\mathrm{T}^1 := \mathrm{T}^{\iota,\eta}$、$\mathrm{T}^2 = \mathrm{T}^3 := \mathrm{T}^{-\iota,\eta}$ 以及 $\mathrm{T}^4 = \mathrm{T}^5 := \mathrm{T}^{\iota,\overline{\eta}}$，并递归地定义

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{T}_0^{\iota,\eta}\right)^\ell &:= \{(\ell,\iota,\eta)\},\\ \left(\mathcal{T}_{n+1}^{\iota,\eta}\right)^\ell &:= \bigsqcup_{i\in[\![1,5]\!]}\left[\bigsqcup_{T_1\in\mathcal{T}^1_{\le N}}\cdots\bigsqcup_{T_i\in\left(\mathcal{T}^i_n\right)^\ell}\cdots\bigsqcup_{T_5\in\mathcal{T}^5_{\le N}}\{\bullet(T_1,\dots,T_i,\dots,T_5)\}\right],\end{aligned} \tag{3.159}$$

其中 $\mathrm{T}^i_{\le N} := \sqcup_{m=0}^N \mathrm{T}^i_m$。对于任意 $T\in\left(\mathrm{T}_n^{\iota,\eta}\right)^\ell$，从根 $\curlywedge$ 到花 ℓ 都存在一条唯一的路径，我们称之为**主干**。我们用 $\mathrm{S}(T)$ 表示主干的分支节点集合。花树 $T\in\left(\mathrm{T}_n^{\iota,\eta}\right)^\ell$ 的**高度** 定义为 $|\mathrm{S}(T)|$。迭代地，我们定义：高度为 n 的花树由每次附加四棵最大尺度为 N 的子树，并重复 n 次构成，初始为一个单独的节点。

定义 3.29。 为简化记号，我们记 $\mathrm{T}^1 := \mathrm{T}^{\iota,\eta}$、$\mathrm{T}^2 = \mathrm{T}^3 := \mathrm{T}^{-\iota,\eta}$ 以及 $\mathrm{T}^4 = \mathrm{T}^5 := \mathrm{T}^{\iota,\overline{\eta}}$。我们定义函数

$$\mathcal{J}^\ell_T(t) := \begin{cases}\mathcal{J}_T(t) & \text{if } T\in\mathcal{T}^{\iota,\eta}_{\le N},\\ v^{\eta,\iota}(t) & \text{if } T\in\left(\mathcal{T}_0^{\iota,\eta}\right)^\ell,\\ \int_0^t C^\iota\left(\tau,\mathcal{J}^\ell_{T_1}(\tau),\mathcal{J}^\ell_{T_2}(\tau),\mathcal{J}^\ell_{T_3}(\tau),\mathcal{J}^\ell_{T_4}(\tau),\mathcal{J}^\ell_{T_5}(\tau)\right)\mathrm{d}\tau & \text{if } T\in\left(\mathcal{T}_n^{\iota,\eta}\right)^\ell \text{ and } n>0,\end{cases} \tag{3.160}$$

[a]并且，对于所有 $j \neq i$，我们理解 $T = \bullet(T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4,\ T_5)$ 中有一个 $T_i \in \mathrm{T}_n^{\,i}$，其余均为 $T_j \in \mathrm{T}_{\leq N}^{\,j}$.

命题 3.30. 对所有 $n \in \mathbb{N}$、 $\eta \in \{0,1\}$ 以及 $\iota \in \{\pm\}$，我们有

$$\mathcal{L}^n(v)^{\eta,\iota} = \sum_{T \in (\mathcal{T}_n^{\eta,\iota})^\ell} \mathcal{I}_T^\ell \tag{3.161}$$

证明。 我们按花树主干的长度证明该断言。在情形 $n = 0$ 下，该陈述显然成立。现假设 $n > 0$。我们利用第一行中的归纳假设进行计算，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{n+1}(v)^{\eta,\iota} &= \sum_{i \in [\![1,5]\!]} \sum_{T_1 \in \mathcal{T}_{\leq N}^1} \cdots \sum_{T_i \in (\mathcal{T}_n^i)^\ell} \cdots \sum_{T_5 \in \mathcal{T}_{\leq N}^5} \int_0^t C^\iota\left(\tau, \mathcal{I}_{T_1}(\tau), \ldots, \mathcal{I}_{T_i}^\ell(\tau), \ldots, \mathcal{I}_{T_5}(\tau)\right) \mathrm{d}\tau \\
&= \sum_{i \in [\![1,5]\!]} \sum_{T_1 \in \mathcal{T}_{\leq N}^1} \cdots \sum_{T_i \in (\mathcal{T}_n^i)^\ell} \cdots \sum_{T_5 \in \mathcal{T}_{\leq N}^5} \mathcal{I}^\ell_{\bullet(T_1,\ldots,T_i,\ldots,T_5)} \\
&= \sum_{T \in (\mathcal{T}_{n+1}^{\eta,\iota})^\ell} \mathcal{I}_T^\ell
\end{aligned} \tag{3.162}$$

□

对 $T \in (\mathrm{T}_n^{\,\iota\ \eta})^\ell$.，我们将 $\mathrm{D}_{k,k_\ell}(T)$ 定义为 $\mathrm{D}_k(T)$ 的子集，使得 T 的任意 k-装饰 κ 还须满足 $\kappa(\ell) = k_\ell$。由此定义显然可知

$$\mathcal{D}_k(T) = \bigsqcup_{k_\ell \in \mathbb{Z}_L^d} \mathcal{D}_{k,k_\ell}(T) \text{ and thus } \sum_{\kappa \in \mathcal{D}(T)} = \sum_{k_\ell \in \mathbb{Z}_L^d} \sum_{\kappa \in \mathcal{D}_{k,k_\ell}(T)} . \tag{3.163}$$

注 *3.31.* 设 $\tilde{n} \in \mathcal{N}(T)$ 并定义

$$\begin{aligned}
I_T(t, t_{\tilde{n}}) \coloneqq \Big\{ (t_n)_{n \in \mathcal{N}(T) \setminus \{\tilde{n}\}} \in [0,t]^{n(T)-1} \,\Big|\, & n < n' \text{ implies } t_n < t_{n'},\ \tilde{n} < n \\
& \text{implies } t_{\tilde{n}} < t_n \text{ and } n < \tilde{n} \text{ implies } t_n < t_{\tilde{n}} \Big\},
\end{aligned} \tag{3.164}$$

then

$$I_T(t) = \left\{ (t_n)_{n \in \mathcal{N}(T)} \mid t_{\tilde{n}} \in [0,t] \text{ and } (t_n)_{n \in \mathcal{N}(T) \setminus \{\tilde{n}\}} \in I_T(t, t_{\tilde{n}}) \right\}. \tag{3.165}$$

命题 3.32. 对任意 $T \in (\mathcal{T}_n^{\eta\ \iota})^\ell$.，$\mathcal{I}_T^\ell$ 的傅里叶变换为

$$\widehat{\mathcal{I}_T^\ell}(t,k) = \frac{1}{L^d} \sum_{k_\ell \in \mathbb{Z}_L^d} \int_0^t \widehat{v^{\eta_\ell,\iota_\ell}}(t_\ell, k_\ell) \mathcal{G}_T(t, t_\ell, k, k_\ell) \mathrm{d}t_\ell, \tag{3.166}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_T\left(t, t_\ell, k, k_\ell\right) \coloneqq & \frac{(-\mathrm{i}\epsilon)^{n(T)}}{L^{d(2n(T)-1)}} \prod_{n \in \mathcal{N}(T)} \iota_n \sum_{\kappa \in \mathcal{D}_{k,k_\ell}(T)} e^{\mathrm{i}\iota_{P(\ell)} \Omega^T_{P(\ell)} t_\ell} \prod_{n \in \mathcal{N}(T)} Q_n^T(\kappa) \\
& \cdot \int_{I_T(t,t_\ell)} \prod_{n \in \mathcal{N}(T) \setminus \{P(\ell)\}} e^{\mathrm{i}\iota_n \Omega_n^T t_n} \mathrm{d}t_n \prod_{\ell \in \mathcal{L}(T) \setminus \{\ell\}} \mu_{\kappa(\ell)}^{\eta_\ell, \iota_\ell} .
\end{aligned} \tag{3.167}$$

证明。 如前所述，可以通过对 $|\mathbb{N}(T)|$ 进行归纳法证明，并得到

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{T}_T^{\ell}}(t,k) &= \left(\frac{-\mathrm{i}\epsilon}{L^{2d}}\right)^{n(T)} \prod_{n\in\mathcal{N}(T)} \iota_n \sum_{\kappa\in\mathcal{D}_k(T)} \prod_{n\in\mathcal{N}(T)} Q_n^T(\kappa) \\ &\cdot \int_{I_T(t)} \widehat{v^{\eta_\ell,\iota_\ell}}(t_{P(\ell)},\kappa(\ell)) \prod_{n\in\mathcal{N}(T)} e^{\mathrm{i}\iota_n\Omega_n^T(\kappa)t_n}\mathrm{d}t_n \prod_{\ell\in\mathcal{L}(T)\setminus\{\ell\}} \mu_{\kappa(\ell)}^{\eta_\ell,\iota_\ell}.\end{aligned} \tag{3.168}$$

利用注3.31，我们可以改写

$$\begin{aligned}\int_{I_T(t)} \widehat{v^{\eta_\ell,\iota_\ell}}(t_{P(\ell)},\kappa(\ell)) \prod_{n\in\mathcal{N}(T)} e^{\mathrm{i}\iota\Omega_n^T t_n}\mathrm{d}t_n &= \int_0^t \widehat{v^{\eta_\ell,\iota_\ell}}(t_{P(\ell)},\kappa(\ell)) e^{\mathrm{i}\iota\Omega_{P(\ell)}t_{P(\ell)}} \\ &\cdot \int_{I_T(t,t_{P(\ell)})} \prod_{n\in\mathcal{N}(T)\setminus\{P(\ell)\}} e^{\mathrm{i}\iota\Omega_n^T t_n}\mathrm{d}t_n\mathrm{d}t_{P(\ell)}.\end{aligned} \tag{3.169}$$

并再次如式（3.163）那样，通过所有装饰分解该和。将式（3.163）、（3.168）和（3.169）合在一起，即得到式（3.166）。 □

我们现在定义

$$\left(\mathcal{T}_{m,n}^{\iota,\eta}\right)^{\ell} := \left\{T\in\left(\mathcal{T}_m^{\iota,\eta}\right)^{\ell} \,\middle|\, |\mathcal{L}(T)| = n+1\right\}. \tag{3.170}$$

可以相当迅速地证明

$$\min\left\{|\mathcal{L}(T)| \,|\, T\in\left(\mathcal{T}_m^{\iota,\eta}\right)^{\ell}\right\} = 4m, \tag{3.171}$$

$$\max\left\{|\mathcal{L}(T)| \,|\, T\in\left(\mathcal{T}_m^{\iota,\eta}\right)^{\ell}\right\} = 4m(4N+1). \tag{3.172}$$

进一步用 $\left(\mathrm{T}_m^{\iota\ \eta\ \iota_\ell\ \eta_\ell}{}_{,,,,n}\right)^{\ell} \subseteq \left(\mathrm{T}_m^{\iota\ \eta}{}_{,,n}\right)^{\ell}$ 表示其花具有符号ι_ℓ和η_ℓ的花朵树子集。注*3.33.* 注意，若ι_ℓ或η_ℓ不等于由根处的符号和颜色所决定的花的符号或颜色，则我们自动有 $\left(\mathrm{T}_m^{\iota\ \eta\ \iota_\ell\ \eta_\ell}{}_{,,,,n}\right)^{\ell} = \emptyset$。

我们可以分解

$$\left(\mathcal{T}_m^{\iota,\eta}\right)^{\ell} = \bigsqcup_{\substack{\iota_\ell\in\{\pm\}\\ \eta_\ell\in\{0,1\}}} \bigsqcup_{n=4m}^{4m(4N+1)} \left(\mathcal{T}_{m,n}^{\iota,\eta,\iota_\ell,\eta_\ell}\right)^{\ell}. \tag{3.173}$$

这样，我们可以使用命题3.30和3.32 并分解

$$\hat{\mathcal{L}}^m(v)^{\eta,\iota}\left(\epsilon^{-1}t,k\right) = \sum_{\substack{k_\ell\in\mathbb{Z}_L^d\\ \iota_\ell\in\{\pm\}\\ \eta_\ell\{0,1\}}} \sum_{n=4m}^{4m(4N+1)} \frac{1}{L^d}\int_0^t \widehat{v^{\eta_\ell,\iota_\ell}}\left(\epsilon^{-1}t_\ell,k_\ell\right) \mathcal{Y}_{m,n}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell,k,k_\ell\right)\mathrm{d}t_\ell, \tag{3.174}$$

其中

$$\mathcal{Y}_{m,n}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell} := \sum_{T\in\left(\mathcal{T}_{m,n}^{\iota,\eta,\iota_\ell,\eta_\ell}\right)^\ell} \mathcal{G}_T. \tag{3.175}$$

3.7 花朵对

定义 3.34. 花朵对 是由两棵花树组成的一对，其中两朵花互相配对。特别地，它们的符号相反。我们定义 $n_i \in [\![4m_i,\ 4m_i(4N+1)]\!]$

$$\tilde{C}_{m_1,n_1,m_2,n_2}^{\eta,\eta',\iota,\iota'}(\iota_\ell,\eta_\ell) := \left\{(T_0,T_1,\sigma)\in C_{m_1,m_2}^{\eta,\eta',\iota,\iota'} \;\middle|\; T_0\in\left(\mathcal{T}_{m_1,n_1}^{\iota,\eta,\iota_\ell,\eta_\ell}\right)^\ell,\ T_1\in\left(\mathcal{T}_{m_2,n_2}^{\iota,\eta,\iota_\ell,\eta_\ell}\right)^\ell \text{ and } \sigma(\ell_0)=\ell_1\right\}, \tag{3.176}$$

其中，ℓ_0和 ℓ_1分别是 T_0和 T_1的花。对于每个花朵对 $C\in \tilde{\mathbf{C}}_{m_1\ n_1\ m_2,\dots,n_2}^{\eta\ \eta'\ \iota\ \iota'}(\iota_\ell,\ \eta_\ell)$，我们将 $\mathrm{D}_{k,\ k_\ell}(C)$ 定义为所有满足 $\kappa(\ell_0)=k_\ell$ 且 $\kappa(\ell_1)=-k_\ell$的 k-装饰所构成的子集。

注 *3.35.* 请注意，只要根的符号或颜色翻转，花的符号或颜色也会随之翻转。

命题 3.36. 我们可以分解

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\mathcal{Y}_{m_1,n_1}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell,k,k_\ell\right)\mathcal{Y}_{m_2,n_2}^{\eta',\iota',\eta'_\ell,\iota'_\ell}\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell,-k,-k_\ell\right)\right)\\ &\qquad=\sum_{C\in\tilde{C}_{m_1,n_1,m_2,n_2}^{\eta,\eta',\iota,\iota'}(\iota_\ell,\eta_\ell)}\mathcal{G}_C\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell,k,k_\ell\right),\end{aligned} \tag{3.177}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_C\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell,k,k_\ell\right) :=& \frac{(-\mathrm{i})^{n(C)}}{L^{2d(n(C)-1)}}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)}\iota_n\sum_{\kappa\in\mathcal{D}_{k,k_\ell}(C)}e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\left(\iota_{P(\ell_0)}\Omega_{P(\ell_0)}+\iota_{P(\ell_1)}\Omega_{P(\ell_1)}\right)t_\ell}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)}Q_n\\ &\cdot\int_{I_C(t,t_\ell)}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)\setminus\{P(\ell_0),P(\ell_1)\}}e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\iota_n\Omega_n t_n}\mathrm{d}t_n\prod_{\ell\in\mathcal{L}(C)_+\setminus\{\ell_0,\ell_1\}}M^{\eta_\ell,\eta_{\sigma(\ell)}}(\kappa(\ell))^{\iota_\ell}\end{aligned} \tag{3.178}$$

and

$$I_C\left(t,t_\ell\right) := I_{T_0}\left(t,t_\ell\right)\times I_{T_1}\left(t,t_\ell\right) \tag{3.179}$$

对于 $C=(T_0,T_1,\sigma)\in \tilde{C}_{m_1\ n_1\ m_2,\dots,n_2}^{\eta\ \eta'\ \iota\ \iota'}(\iota_\ell,\eta_\ell)$.

证明。 我们可以分解

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\mathcal{Y}_{m_1,n_1}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell,k,k_\ell\right)\mathcal{Y}_{m_2,n_2}^{\eta',\iota',\eta'_\ell,\iota'_\ell}\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell,-k,-k_\ell\right)\right)\\
=&\sum_{\substack{T_0\in\left(\mathcal{T}_{m_1,n_1}^{\iota,\eta,\iota_\ell,\eta_\ell}\right)^\ell\\ T_1\in\left(\mathcal{T}_{m_2,n_2}^{\iota',\eta',\iota'_\ell,\eta'_\ell}\right)^\ell}}\mathbb{E}\left(\mathcal{G}_{T_0}\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell,k,k_\ell\right)\mathcal{G}_{T_1}\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell,-k,-k_\ell\right)\right)\\
=&\sum_{\substack{T_0\in\left(\mathcal{T}_{m_1,n_1}^{\iota,\eta,\iota_\ell,\eta_\ell}\right)^\ell\\ T_1\in\left(\mathcal{T}_{m_2,n_2}^{\iota',\eta',\iota'_\ell,\eta'_\ell}\right)^\ell\\ \sigma\text{ pairing of }\mathcal{L}(T_0)\sqcup\mathcal{L}(T_1)}}\frac{(-\mathrm{i})^{m_1+m_2}}{L^{2d(m_1+m_2-1)}}\prod_{n\in\mathcal{N}(T_0)\sqcup\mathcal{N}(T_1)}\iota_n\\
&\cdot\sum_{\substack{\kappa_0\in\mathcal{D}_{k,k_\ell}(T_0)\\ \kappa_1\in\mathcal{D}_{-k,-k_\ell}(T_1)\\ \kappa(\ell)+\kappa(\sigma(\ell))=0\forall\ell\in(\mathcal{L}(T_0)\sqcup\mathcal{L}(T_1))_+}}e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\left(\iota_{P(\ell_0)}\Omega_{P(\ell_1)}+\iota_{P(\ell_1)}\Omega_{P(\ell_1)}\right)t_\ell}\prod_{n\in\mathcal{N}(T_0)\sqcup\mathcal{N}(T_1)}Q_n\\
&\cdot\int_{I_{T_0}(t,t_\ell)\times I_{T_1}(t,t_\ell)}\prod_{n\in(\mathcal{N}(T_0)\sqcup\mathcal{N}(T_1))\setminus\{P(\ell_0),P(\ell_1)\}}e^{-\mathrm{i}\iota_n\epsilon^{-1}\Omega_n t_n}\mathrm{d}t_n\\
&\cdot\prod_{\ell\in(\mathcal{L}(T_0)\sqcup\mathcal{L}(T_1))_+\setminus\{\ell_0,\ell_1\}}\delta_{\iota_\ell+\iota_{\sigma(\ell)}}M^{\eta_\ell,\eta_{\sigma(\ell)}}(\kappa(\ell))^{\iota_\ell},
\end{aligned}
\tag{3.180}
$$

其中， κ表示 $(\mathbb{Z}_L^d)^{\mathrm{L}(T_0)\sqcup\mathrm{L}(T_1)}$ 中满足 $\kappa|_{\mathrm{L}(T_i)}:=\kappa_i$ 的唯一元素。利用我们可以将 $\{(\kappa_0,\kappa_1)\in\mathrm{D}_{k,k_\ell}(T_0)\times\mathrm{D}_{-k,-k_\ell}(T_1)\mid\kappa(\ell)+\kappa(\sigma(\ell))=0\forall\ell\in(\mathrm{L}(T_0)\sqcup\mathrm{L}(T_1))_+\}\cong\mathrm{D}_{k,k_\ell}(C)$ 视为同一对象这一事实，我们可以重写

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\mathcal{Y}_{m_1,n_1}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell,k,k_\ell\right)\mathcal{Y}_{m_2,n_2}^{\eta',\iota',\eta'_\ell,\iota'_\ell}\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell,-k,-k_\ell\right)\right)\\
=&\frac{(-\mathrm{i})^{n(C)}}{L^{2d(n(C)-1)}}\sum_{C\in\tilde{C}_{m_1,n_1,m_2,n_2}^{\eta,\eta',\iota,\iota'}}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)}\iota_n\sum_{\kappa\in\mathcal{D}_{k,k_\ell}(C)}e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\left(\iota_{P(\ell_0)}\Omega_{P(\ell_0)}+\iota_{P(\ell_1)}\Omega_{P(\ell_1)}\right)t_\ell}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)}Q_n\\
&\cdot\int_{I_C(t,t_\ell)}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)\setminus\{P(\ell_0),P(\ell_1)\}}e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\iota_n\Omega_n t_n}\mathrm{d}t_n\prod_{\ell\in\mathcal{L}(C)_+\setminus\{\ell_0,\ell_1\}}M^{\eta_\ell,\eta_{\sigma(\ell)}}(\kappa(\ell))^{\iota_\ell}
\end{aligned}
\tag{3.181}
$$

由此完成证明。 □

3.8 $\mathcal{L}^m$ 的核估计

回顾， $I_C(t,\ t_\ell)=I_{T_1}(t,\ t_\ell)\times I_{T_2}(t,\ t_\ell)$ 并分解

$$
I_{T_i}(t,t_\ell)=\mathcal{Z}_{T_i}\sqcup\bigsqcup_{\rho\in\mathcal{M}(\mathcal{N}(T_i))}I_{T_i}^{\rho}(t,t_\ell),
\tag{3.182}
$$

其中

$$I_{T_i}^{\rho}(t,t_\ell) \coloneqq \Big\{ (t_n)_{n\in\mathcal{N}(T_i)\setminus\{P(\ell_i)\}} \in [0,t]^{n(T_i)-1},\ 0 \le t_{\rho(1)} < \cdots < t_{\rho(\rho^{-1}(P(\ell_i))-1)} \le t_\ell \le t_{\rho(\rho^{-1}(P(\ell_i))+1)} < \cdots < t_{\rho(n(T_i))} \le t \Big\} \tag{3.183}$$

并记

$$\mathrm{N}^{>\rho}(T_i) \coloneqq \rho\Big(\llbracket \rho^{-1}(P(\ell_i)) + 1, n(T_i) \rrbracket\Big), \tag{3.184}$$

$$\mathcal{N}^{<\rho}(T_i) \coloneqq \rho\Big(\llbracket 1, \rho^{-1}(P(\ell_i)) - 1 \rrbracket\Big), \tag{3.185}$$

$$I_{T_i}^{>\rho}(t,t_\ell) \coloneqq \Big\{ (t_n)_{n\in\mathcal{N}^{>\rho}(T_i)} \in [t_\ell,t]^{n^{>\rho}(T_i)} \,\Big|\, t_\ell \le t_{\rho(\rho^{-1}(P(\ell_i))+1)} < \cdots < t_{\rho(n(T_i))} \le t \Big\}, \tag{3.186}$$

$$I_{T_i}^{<\rho}(t_\ell) \coloneqq \Big\{ (t_n)_{n\in\mathcal{N}^{<\rho}(T_i)} \in [0,t_\ell]^{n^{<\rho}(T_i)} \,\Big|\, 0 \le t_{\rho(1)} < \cdots < t_{\rho(\rho^{-1}(P(\ell_i))-1)} \le t_\ell \Big\}, \tag{3.187}$$

$$n^{>\rho}(T_i) \coloneqq \big|\mathrm{N}^{>\rho}(T_i)\big|, \tag{3.188}$$

$$n^{<\rho}(T_i) \coloneqq \big|\mathrm{N}^{<\rho}(T_i)\big|, \tag{3.189}$$

并注意到 $n^{<\rho}(T_i) + n^{>\rho}(T_i) = n(T_i) - 1$。根据这些定义，我们有

$$I_{T_i}^{\rho}(t,t_\ell) = I_{T_i}^{<\rho}(t_\ell) \times I_{T_i}^{>\rho}(t,t_\ell) \tag{3.190}$$

当然，$I_{T_i}^{>\rho}(t,\ t_\ell) = (t_\ell,\ \cdots,\ t_\ell) + I_{T_i}^{>\rho}(t-t_\ell,\ 0)$，因此我们可以改写为

$$\begin{aligned}
&\int_{I_{T_i}(t,t_\ell)} \prod_{n\in\mathcal{N}(T_i)\setminus\{P(\ell_i)\}} e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\iota_n\Omega_n t_n}\mathrm{d}t_n \\
&= \sum_{\rho\in\mathcal{M}(\mathcal{N}(T_i))} \int_{I_{T_i}^{>\rho}(t,t_\ell)} \prod_{n\in\mathcal{N}^{>\rho}(T_i)} e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\iota_n\Omega_n t_n}\mathrm{d}t_n \int_{I_{T_i}^{<\rho}(t_\ell)} \prod_{n\in\mathcal{N}^{<\rho}(T_i)} e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\iota_n\Omega_n t_n}\mathrm{d}t_n \\
&= \sum_{\rho\in\mathcal{M}(\mathcal{N}(T_i))} \prod_{n\in\mathcal{N}^{>\rho}(T_i)} e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\iota_n\Omega_n t_\ell} \int_{I_{T_i}^{>\rho}(t-t_\ell,0)} \prod_{n\in\mathcal{N}^{>\rho}(T_i)} e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\iota_n\Omega_n t_n}\mathrm{d}t_n \int_{I_{T_i}^{<\rho}(t_\ell)} \prod_{n\in\mathcal{N}^{<\rho}(T_i)} e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\iota_n\Omega_n t_n}\mathrm{d}t_n .
\end{aligned} \tag{3.191}$$

应用预解式恒等式（引理 3.3）两次可得

$$\begin{aligned}
\int_{I_{T_i}(t,t_\ell)} \prod_{n\in\mathcal{N}(T_i)\setminus\{P(\ell_i)\}} e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\iota_n\Omega_n t_n}\mathrm{d}t_n &= \sum_{\rho\in\mathcal{M}(\mathcal{N}(T_i))} e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\omega^{\rho}_{P(\ell_i)}t_\ell} \frac{e^{(n(T_i)-1)t}}{4\pi^2} \\
&\cdot \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{e^{-\mathrm{i}\xi_1(t-t_\ell)}e^{-\mathrm{i}\xi_2 t_\ell}}{(n^{>\rho}(T_i)-\mathrm{i}\xi_1)\,(n^{<\rho}(T_i)-\mathrm{i}\xi_2)} \prod_{n_1\in\mathcal{N}^{>\rho}(T_i)} \frac{1}{n^{>\rho}(T_i)-\mathrm{i}\left(\xi_1+\omega^{\rho}_{n_1}\right)} \\
&\cdot \prod_{n_2\in\mathcal{N}^{<\rho}(T_i)} \frac{1}{n^{<\rho}(T_i)-\mathrm{i}\left(\xi_2+\omega^{\rho}_{n_2}\right)} \mathrm{d}(\xi_1,\xi_2)
\end{aligned} \tag{3.192}$$

其中

$$\omega_\ell^\rho := \sum_{n\in\mathcal{N}^{>\rho}(T_i)} \iota_n \Omega_n, \tag{3.193}$$

$$\omega_n^\rho := \begin{cases} \sum\limits_{\mathcal{N}^{<\rho}(T_i)\ni n'\geq_\rho n} \iota_{n'}\Omega_{n'} & \text{if } n\in\mathcal{N}^{<\rho}(T_i), \\ \sum\limits_{\mathcal{N}^{>\rho}(T_i)\ni n'\geq_\rho n} \iota_{n'}\Omega_{n'} & \text{if } n\in\mathcal{N}^{>\rho}(T_i). \end{cases} \tag{3.194}$$

按照惯例，如果集合 $\mathcal{N}^{>\rho}(T_i)$ 或 $\mathcal{N}^{<\rho}(T_i)$ 为空，则省略方程（3.192）中相应的积分。

然后我们可以分解

$$\mathcal{G}_C\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell,k,k_\ell\right) = \sum_{\substack{\rho_1\in\mathcal{M}(\mathcal{N}(T_1))\\ \rho_2\in\mathcal{M}(\mathcal{N}(T_2))}} \mathcal{G}_C^{\rho_1,\rho_2}\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell,k,k_\ell\right) \tag{3.195}$$

with

$$\begin{aligned} &\left|\mathcal{G}_C^{\rho_1,\rho_2}\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell,k,k_\ell\right)\right| \\ &\leq \Lambda^{n+1}L^{-2d(n-1)}\int_{\mathbb{R}^4} \frac{A_C^{\rho_1,\rho_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,k,k_\ell)\mathrm{d}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)}{\left|n^{>\rho_1}(T_1)-\mathrm{i}\xi_1\right|\left|n^{<\rho_1}(T_1)-\mathrm{i}\xi_2\right|\left|n^{>\rho_2}(T_2)-\mathrm{i}\xi_3\right|\left|n^{<\rho_2}(T_2)-\mathrm{i}\xi_4\right|} \end{aligned} \tag{3.196}$$

and

$$\begin{aligned} A_C^{\rho_1,\rho_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,k,k_\ell) := &\sum_{\substack{\kappa\in\mathcal{D}_{k,k_\ell}(C)\\ \kappa(\mathcal{L}(C)_+)\subseteq B_R(0)}} \prod_{n\in\mathcal{N}^{>\rho_1}(T_1)} \frac{|Q_n|}{\left|n^{>\rho_1}(T_1)-\mathrm{i}\left(\xi_1+\omega_n^{\rho_1}\right)\right|} \\ &\cdot \prod_{n\in\mathcal{N}^{<\rho_1}(T_1)} \frac{|Q_n|}{\left|n^{<\rho_1}(T_1)-\mathrm{i}\left(\xi_2+\omega_n^{\rho_1}\right)\right|} \\ &\cdot \prod_{n\in\mathcal{N}^{>\rho_2}(T_2)} \frac{|Q_n|}{\left|n^{>\rho_2}(T_2)-\mathrm{i}\left(\xi_3+\omega_n^{\rho_2}\right)\right|} \prod_{n\in\mathcal{N}^{<\rho_2}(T_2)} \frac{|Q_n|}{\left|n^{<\rho_2}(T_2)-\mathrm{i}\left(\xi_4+\omega_n^{\rho_2}\right)\right|}. \end{aligned} \tag{3.197}$$

同样，如果集合 $\mathrm{N}^{>\rho_i}(T_i)$ 或 $\mathrm{N}^{<\rho_i}(T_i)$ 为空，我们就省略式 (3.196) 中关于 $\mathbb{R}$ 的相应积分，并且 A^{ρ_1,ρ_2}_C 依赖于至多 3 个 ξ_j。

给定 $\rho_i\in\mathrm{M}(\mathrm{N}(T_i))$，我们可以通过将 $\mathrm{N}(T_i)$ 上的 ρ 的限制设为 ρ_i，并规定第二棵树的节点始终位于第一棵树的节点之下，来定义 $\rho\in\mathrm{M}(\mathrm{N}(C))$。对于任意 $\rho\in\mathrm{M}(\mathrm{N}(C))$，我们可以按照命题 3.6 的要求，在 $(\mathrm{N}(C)\sqcup\mathrm{L}(C))\setminus\{\ell_0,\ell_1\}$ 上构造一个全序关系 $<''$，但这次 $\mathrm{N}_{<''}(C)$ 将具有 $|\mathrm{N}_{<''}(C)|=2n(C)$，因为 ℓ_0、ℓ_1 以及与这些花朵相邻的相应边都从动量图和后续的生成树构造中排除了。特别地，$\sum_{i=1}^4 ip_i = 2n(C)-1$，但 $\sum_{i=0}^4 p_i = n(C)$ 仍然成立。

命题 3.37. 设 $C=(T_0,T_1,\sigma)\in\tilde{C}^{\eta,\ \eta'\ \iota\ \iota',\dots,n_2}_{m_1\ n_1\ m_2}$. 那么存在 Λ、$\mathcal{K}$、$\alpha>0$，使得对所有 $n\leq|\ln\epsilon|$,

$$\sup_{0\leq t_\ell\leq t\leq\delta}\left|\mathcal{G}_C\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell,k,k_\ell\right)\right| \leq \Lambda(\Lambda\delta)^{n(C)}\epsilon^{\alpha(n(C)-n_{\mathrm{res}}(C))}\frac{L^{\mathcal{K}}}{n(C)} \tag{3.198}$$

对所有 $k, k_\ell \in \mathbb{Z}_L^d$（注意， $n(C) = m_1 + m_2$）。

证明。 该证明类似于命题 3.25 中给出的证明。主要区别在于基数$|\mathcal{N}_{<''}(C)| = 2n(C)$（这仅仅具有数值性质），以及必须将命题 3.25 的证明策略应用于式（3.196）中的全部四个积分。也就是说，可经由区域分离 $\{|\xi_i| \le L^{\mathcal{K}}\}$与 $\{|\xi_i| > L\kappa\}$对每个变量 ξ_i 进行。按此方式可得式（3.113），对于$\mathcal{G}_C^{\rho_1\ \rho_2}$，。利用分解（3.195），

$$|\mathcal{M}(\mathcal{N}(T_0))||\mathcal{M}(\mathcal{N}(T_1))| \le n(C)!, \tag{3.199}$$

并且假设 $n(C) \le |\ln \epsilon|$ 给出所需的估计。 □

3.9 的时间导数：$\mathcal{Y}_m^{\eta\ \iota}{}_{,n}$

设 f_n 是 t 的一个函数。

引理 3.38。 取时间导数可得

$$\partial_t \left(\int_{I_T(t,t_\ell)} \prod_{n \in \mathcal{N}(T)\setminus\{P(\ell)\}} f_n(t_n) \mathrm{d}t_n \right) = f_r(t) \int_{I_T'(t,t_\ell)} \prod_{n \in \mathcal{N}(T)\setminus\{r,P(\ell)\}} f_n(t_n) \mathrm{d}t_n, \tag{3.200}$$

其中

$$\begin{aligned} I_T'(t,t_\ell) := \Big\{ (t_n)_{n \in \mathcal{N}(T)\setminus\{r,P(\ell)\}} \in [0,t]^{n(T)-2} \,\Big|\, & n < n' \text{ implies } t_n < t_{n'},\ n < P(\ell) \\ & \text{implies } t_n < t_\ell \text{ and } P(\ell) < n \text{ implies } t_\ell < t_n \Big\}. \end{aligned} \tag{3.201}$$

证明。 首先改写

$$\begin{aligned} \int_{I_T(t,t_\ell)} \prod_{n \in \mathcal{N}(T)\setminus\{P(\ell)\}} f_n(t_n) \mathrm{d}t_n = & \sum_{\substack{\rho \in \mathcal{M}(\mathcal{N}(T)) \\ \rho^{-1}(P(\ell)) \le n(T)-1}} \int_{I_T^{<\rho}(t_\ell)} \prod_{n \in \mathcal{N}^{<\rho}(T)} f_n(t_n) \mathrm{d}t_n \\ & \cdot \int_{t_\ell \le t_{\rho(\rho^{-1}(P(\ell))+1)} < \cdots < t_{\rho(n(T))} \le t} \prod_{i=\rho(\rho^{-1}(P(\ell))+1)}^{n(T)} f_{\rho(i)}(t_{\rho(i)}) \mathrm{d}t_{\rho(i)} \\ & + \sum_{\substack{\rho \in \mathcal{M}(\mathcal{N}(T)) \\ \rho^{-1}(P(\ell))=n(T)}} \int_{0 \le t_{\rho(1)} < \cdots < t_{\rho(n(T)-1)} \le t_\ell} \prod_{i=1}^{n(T)-1} f_{\rho(i)}(t_{\rho(i)}) \mathrm{d}t_{\rho(i)}. \end{aligned} \tag{3.202}$$

因为 $I_T^\rho(t,t_\ell) = I_T^{<\rho}(t_\ell) \times I_T^{>\rho}(t,t_\ell)$。

$$\begin{aligned}\partial_t\left(\int_{I_T(t,t_\ell)}\prod_{n\in\mathcal{N}(T)\setminus\{P(\ell)\}}f_n(t_n)\mathrm{d}t_n\right)&=\sum_{\substack{\rho\in\mathcal{M}(\mathcal{N}(T))\\ \rho^{-1}(P(\ell))\le n(T)-1}}\int_{I_T^{<\rho}(t_\ell)}\prod_{n\in\mathcal{N}^{<\rho}(T)}f_n(t_n)\mathrm{d}t_n\\ &\cdot f_r(t)\int_{t_\ell\le t_{\rho(\rho^{-1}(P(\ell))+1)}<\cdots<t_{\rho(n(T)-1)}\le t}\prod_{n\in\mathcal{N}^{>\rho}(T)\setminus\{r\}}f_n(t_n)\mathrm{d}t_n\\ &=f_r(t)\sum_{\substack{\rho\in\mathcal{M}(\mathcal{N}(T))\\ \rho^{-1}(P(\ell))\le n(T)-1}}\int_{(I_T^\rho)'(t,t_\ell)}\prod_{n\in\mathcal{N}(T)\setminus\{r,P(\ell)\}}f_n(t_n)\mathrm{d}t_n\\ &=f_r(t)\sum_{\rho\in\mathcal{M}(\mathcal{N}(T))}\int_{(I_T^\rho)'(t,t_\ell)}\prod_{n\in\mathcal{N}(T)\setminus\{r,P(\ell)\}}f_n(t_n)\mathrm{d}t_n\\ &=f_r(t)\int_{I_T'(t,t_\ell)}\prod_{n\in\mathcal{N}(T)\setminus\{r,P(\ell)\}}f_n(t_n)\mathrm{d}t_n,\end{aligned}\tag{3.203}$$

其中

$$\begin{aligned}(I_T^\rho)'(t,t_\ell):=\Big\{&(t_n)_{n\in\mathcal{N}(T)\setminus\{r,P(\ell)\}}\in[0,t]^{n(T)-1},\ 0\le t_{\rho(1)}<\cdots<t_{\rho(\rho^{-1}(P(\ell))-1)}\\ &\le t_\ell\le t_{\rho(\rho^{-1}(P(\ell))+1)}<\cdots<t_{\rho(n(T)-1)}\le t\Big\}\end{aligned}\tag{3.204}$$

并且我们使用 $\mathrm{N}^{<\rho}(T)\sqcup\mathrm{N}^{>\rho}(T)=\mathrm{N}(T)\setminus\{P(\ell)\}$。注意，若 $|\mathrm{S}(T)|=1$，则 $P(\ell)=r$；若 $|\mathrm{S}(T)|\ge 2$，则 $P(\ell)<r$；特别地，对于所有 $\rho\in\mathrm{M}(\mathrm{N}(T))$，都有 $\rho^{-1}(P(\ell))\le n(T)-1$。□

将这些关于 $f_n(t_n):=e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\iota_n\Omega_n t_n}$ 的公式代入，得到

$$\partial_t\mathcal{Y}^{\eta,\iota}_{m,n}=\sum_{T\in(\mathcal{T}^{\iota,\eta}_{m,n})^\ell}\partial_t\mathcal{G}_T\tag{3.205}$$

with

$$\begin{aligned}\partial_t\mathcal{G}_T\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell,k,k_\ell\right)&=\frac{(-\mathrm{i})^{n(T)}}{L^{d(2n(T)-1)}}\prod_{n\in\mathcal{N}(T)}\iota_n\sum_{\kappa\in\mathcal{D}_{k,k_\ell}(T)}e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\iota_{P(\ell)}\Omega_{P(\ell)}t_\ell}e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\iota\Omega_r t}\\ &\cdot\prod_{n\in\mathcal{N}(T)}Q_n^T(\kappa)\int_{I_T'(t,t_\ell)}\prod_{n\in\mathcal{N}(T)\setminus\{r,P(\ell)\}}e^{\mathrm{i}\iota\epsilon^{-1}\Omega_n t_n}\mathrm{d}t_n\prod_{\ell\in\mathcal{L}(T)\setminus\{\ell\}}\mu^{\eta_\ell,\iota_\ell}_{\kappa(\ell)}\end{aligned}\tag{3.206}$$

可以像之前一样重复分析，并得到以下结果。

命题 3.39。我们可以分解

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\partial_t\mathcal{Y}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}_{m_1,n_1}\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell,k,k_\ell\right)\partial_t\mathcal{Y}^{\eta',\iota',\eta'_\ell,\iota'_\ell}_{m_2,n_2}\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell,-k,-k_\ell\right)\right)\\ &\qquad=\sum_{C\in\tilde{\mathcal{C}}^{\eta,\eta',\iota,\iota'}_{m_1,n_1,m_2,n_2}(\iota_\ell,\eta_\ell)}\mathcal{G}'_C\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell,k,k_\ell\right),\end{aligned}\tag{3.207}$$

其中

$$\mathcal{G}'_C\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell,k,k_\ell\right) := \frac{(-\mathrm{i})^{n(C)}}{L^{2d(n(C)-1)}}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)}\iota_n\sum_{\kappa\in\mathcal{D}_{k,k_\ell}(C)} e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\left(\iota_{P(\ell_0)}\Omega_{P(\ell_0)}+\iota_{P(\ell_1)}\Omega_{P(\ell_1)}\right)t_\ell}$$
$$\cdot e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}(\iota\Omega_r+\iota'\Omega_{r'})t}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)}Q_n\int_{I'_C(t,t_\ell)}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)\setminus\{r,r',P(\ell_0),P(\ell_1)\}} e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\iota_n\Omega_n t_n}\mathrm{d}t_n \tag{3.208}$$
$$\cdot\prod_{\ell\in\mathcal{L}(C)_+\setminus\{\ell_0,\ell_1\}} M^{\eta_\ell,\eta_{\sigma(\ell)}}(\kappa(\ell))^{\iota_\ell},$$

其中

$$I'_C(t,t_\ell) := I'_{T_0}(t,t_\ell)\times I'_{T_1}(t,t_\ell) \tag{3.209}$$

对于 $C=(T_0,\ T_1,\ \sigma)\ \in\ \tilde{C}^{\eta\ \eta'\ \iota\ \iota'}_{m_1\ n_1\ m_2,\ldots,n_2}$

证明。 利用式（3.206），可以重复式（3.206）的证明并得到该结果。 □

最后，我们得到

命题 n3.40. 设 $C\in\tilde{C}^{\eta}_{m_1\ n_1\ m_2}{}^{\eta'\ \iota\ \iota',\ldots,n_2}(\iota_\ell,\eta_\ell)$。存在 Λ，$\mathcal{K}$，$\alpha>0$，使得对所有 $n(C)\le|\ln\epsilon|$，

$$\sup_{0\le t_\ell\le t\le\delta}\left|\partial_t\mathcal{G}_C\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell,k,k_\ell\right)\right|\le\Lambda\,(\Lambda\delta)^{n(C)}\,\epsilon^{\alpha(n(C)-n_{\mathrm{res}}(C))}\frac{L^{\mathcal{K}}}{n(C)} \tag{3.210}$$

对所有 $k,k_\ell\in\mathbb{Z}^d_L$。

证明。 证明与命题 3.37的证明完全类似。 □

3.10 关于$\mathcal{Y}^{\eta\ \iota}_{m}{}_{,,n}$的范数估计

现在我们可以将命题 3.37 和 3.40 的结果合并为

推论 3.41。 存在 Λ，$\mathcal{K}>0$，使得对于任意固定的 $A>0$，以概率 $\ge 1-L^{-A}$，且对所有 $n\le|\ln\epsilon|$，有

$$\left\|\mathcal{Y}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}_{m,n}\right\|_{L^\infty_t L^1_{t_\ell}L^\infty_{k,k_\ell}}\le\Lambda(\Lambda\delta)^{\frac{n(C)}{2}}L^{\mathcal{K}+\frac{4}{\beta}+d+2A} \tag{3.211}$$

证明。 结合命题 3.37 和 3.40，我们首先得到存在 Λ，$\mathcal{K}$ 使得对所有 $n(C)\le|\ln\epsilon|$，有

$$\sup_{0\le t_\ell\le t\le\lambda}\left(\mathbb{E}\left(\left|\mathcal{Y}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}_{m,n}\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell k,k_\ell\right)\right|^2\right)+\mathbb{E}\left(\left|\partial_t\mathcal{Y}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}_{m,n}\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell k,k_\ell\right)\right|^2\right)\right)$$
$$\le\Lambda(\Lambda\delta)^{n(C)}\frac{L^{\mathcal{K}}}{n(C)} \tag{3.212}$$

对所有 k_ℓ，$k\in\mathbb{Z}^d_L$，并且根据高斯超收缩性（引理 A.2）以及任意 $p\ge 2$ 存在 $c(p)>0$

使得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left|\mathcal{Y}_{m,n}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell k,k_\ell\right)\right|^p\right)+\mathbb{E}\left(\left|\partial_t\mathcal{Y}_{m,n}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell k,k_\ell\right)\right|^p\right)\\
\leq c(p)^{pn}&\left[\left(\mathbb{E}\left(\left|\mathcal{Y}_{m,n}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell k,k_\ell\right)\right|^2\right)\right)^{p/2}+\left(\mathbb{E}\left(\left|\partial_t\mathcal{Y}_{m,n}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}\left(\epsilon^{-1}t,\epsilon^{-1}t_\ell k,k_\ell\right)\right|^2\right)\right)^{p/2}\right]\\
&\leq c(p)^{pn}\Lambda^{\frac{p}{2}}(\Lambda\delta)^{\frac{pn(C)}{2}}\frac{L^{\frac{p\mathcal{K}}{2}}}{n(C)^{\frac{p}{2}}}
\end{aligned}\tag{3.213}$$

对时间区间 $[0,\delta\epsilon^{-1}]$积分可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left\|\mathcal{Y}_{m,n}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}(\cdot,\cdot,k,k_\ell)\right\|_{L^p_{t,t_\ell}}^p\right)+\mathbb{E}\left(\left\|\partial_t\mathcal{Y}_{m,n}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}(\cdot,\cdot,k,k_\ell)\right\|_{L^p_{t,t_\ell}}^p\right)\\
&\leq c(p)^{pn}\Lambda^{\frac{p}{2}}(\Lambda\delta)^{\frac{pn(C)}{2}}\delta^2\frac{L^{\frac{p\mathcal{K}}{2}+\frac{2}{\beta}}}{n(C)^{\frac{p}{2}}}
\end{aligned}\tag{3.214}$$

我们进行估计

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,\delta\epsilon^{-1}]}\sup_{k,k_\ell\in\mathbb{Z}_L^d}\left\|\mathcal{Y}_{m,n}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}(t,\cdot,k,k_\ell)\right\|_{L^1_{t_\ell}}^p\right)&\leq\Lambda\epsilon^{1-p}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,\delta\epsilon^{-1}]}\sup_{k,k_\ell\in\mathbb{Z}_L^d}\left\|\mathcal{Y}_{m,n}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}(t,\cdot,k,k_\ell)\right\|_{L^p_{t_\ell}}^p\right)\\
&\leq\epsilon^{1-p}\sum_{k,k_\ell\in\mathbb{Z}_L^d}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,\delta\epsilon^{-1}]}\left\|\mathcal{Y}_{m,n}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}\left(t,\cdot,k,k_\ell\right)\right\|_{L^p_{t_\ell}}^p\right)
\end{aligned}\tag{3.215}$$

现在利用 Gagliardo-Nirenberg不等式和 Hölder不等式，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,\delta\epsilon^{-1}]}\sup_{k,k_\ell\in\mathbb{Z}_L^d}\left\|\mathcal{Y}_{m,n}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}(t,\cdot,k,k_\ell)\right\|_{L^1_{t_\ell}}^p\right)\\
\leq\sum_{k,k_\ell\in\mathbb{Z}_L^d}&\left(\epsilon^{1-p}\mathbb{E}\left(\left\|\partial_t\mathcal{Y}_{m,n}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}\left(\cdot,\cdot,k,k_\ell\right)\right\|_{L^p_{t,t_\ell}}^p\right)^{1/p}\mathbb{E}\left(\left\|\mathcal{Y}_{m,n}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}\left(\cdot,\cdot,k,k_\ell\right)\right\|_{L^p_{t,t_\ell}}^p\right)^{1-\frac{1}{p}}\right.\\
&\left.+\epsilon^{2-p}\mathbb{E}\left(\left\|\mathcal{Y}_{m,n}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}\left(\cdot,\cdot,k,k_\ell\right)\right\|_{L^p_{t,t_\ell}}^p\right)\right)\\
&\leq c(p)^{pn}\Lambda^{\frac{p}{2}}(\Lambda\delta)^{\frac{pn(C)}{2}}\delta^2\frac{L^{\frac{p\mathcal{K}}{2}+\frac{2}{\beta}}}{n(C)^{\frac{p}{2}}}(nL)^d\left(\epsilon^{-1-p}+\epsilon^{-p}\right)\\
&\leq c(p)^{pn}\Lambda^{\frac{p}{2}}(\Lambda\delta)^{\frac{pn(C)}{2}}\delta^2L^{\frac{p\mathcal{K}}{2}+\frac{2}{\beta}+d+\frac{1+p}{\beta}+2pA}L^{-pA}
\end{aligned}\tag{3.216}$$

[1]其中我们使用了 $\epsilon=L^{-\beta}$和 $n\leq\Lambda|\ln\epsilon|$。现在令

$$a_n:=c(p)^n\Lambda^{\frac{1}{2}}(\Lambda\delta)^{\frac{n(C)}{2}}\delta^{\frac{2}{p}}L^{\frac{\mathcal{K}}{2}+\frac{3}{p\beta}+\frac{d}{p}+\frac{1}{\beta}+2A}\tag{3.217}$$

并利用马尔可夫不等式得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,\delta\epsilon^{-1}]}\sup_{k,k_\ell\in\mathbb{Z}_L^d}\left\|\mathcal{Y}_{m,n}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}(t,t_\ell,k,k_\ell)\right\|_{L^1_{t_\ell}}>a_n\right)\\&\leq a_n^{-1}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,\delta\epsilon^{-1}]}\sup_{k,k_\ell\in\mathbb{Z}_L^d}\left\|\mathcal{Y}_{m,n}^{\eta,\iota,\eta_\ell,\iota_\ell}(t,\cdot,k,k_\ell)\right\|_{L^1_{t_\ell}}\right)\leq L^{-A}\end{aligned}\tag{3.218}$$

由此完成证明。 □

3.11 关于 $\mathcal{L}^m$ 的范数估计

现在我们终于可以给出关于 L^m 的范数估计。为此，令 $\mathrm{X}:=\mathrm{C}\left([0,\delta\epsilon^{-1}],\ H^s(\mathbb{T}_L^d)\right)$ 并令 $I_m^N:=[\![4m,4m(4N+1)]\!]$。

注 *3.42.* </style>若 是一个范数为 · 的巴拿赫空间，我们将 上的范数 · 定义为 $(,\ \ldots\ldots,\ b_n)\|_n:=\max_{1\leq i\leq n}\|b_i\|$。

定理 3.43. 我们可以估计

$$\|\mathcal{L}^m\|_{\mathcal{X}^2\to\mathcal{X}^2}\leq\Lambda\left(\Lambda\sqrt{\delta}\right)^m N(L)^{2(s+d)}L^{\frac{\varkappa}{2}+\frac{1}{\beta}+\frac{d}{2}+A}\tag{3.219}$$

证明。 回顾一下，$Y^{\tilde\eta,\ m\ \iota',\ n}(\eta,\ \iota,\ \eta_\ell,\ \iota_\ell)=Y^{\tilde\eta,\ n}_{m,}(\eta,\ \iota'\iota,\ \eta_\ell,\ \iota_\ell)$。我们有

$$\begin{aligned}\|\mathcal{L}^m(v)(t,\cdot)\|^2_{H^s(T_L^d)}&=\sum_{k\in\mathbb{Z}_L^d}\langle k\rangle^{2s}\left|\widehat{\mathcal{L}^m(v)\eta}(t,k)\right|^2\\&=\frac{\epsilon^2}{L^{2d}}\sum_{\substack{k,k_\ell,k'_\ell\in\mathbb{Z}_L^d\\n,n'\in I_m^N\\\iota_\ell\in\{\pm\}\\\eta_\ell\in\{0,1\}}}\langle k\rangle^{2s}\int_{[0,t]^2}\Big(\widehat{v^{\eta_\ell,\iota_\ell}}(t_\ell,k_\ell)\,\mathcal{Y}_{m,n}^{\eta,+,\eta_\ell,\iota_\ell}(t,t_\ell,k,k_\ell)\\&\qquad\cdot\widehat{v^{\eta'_\ell,-\iota'_\ell}}\left(t'_\ell,-k'_\ell\right)\mathcal{Y}_{m,n'}^{\eta,-,\eta_\ell,-\iota_\ell}\left(t,t'_\ell,-k,-k'_\ell\right)\Big)\mathrm{d}t_\ell\mathrm{d}t'_\ell.\end{aligned}\tag{3.220}$$

容易证明，对于所有 $k,k_\ell,k'_\ell\in\mathbb{Z}_L^d$，都有 $k^{2s}\leq\Lambda\left\langle k-k_\ell\right\rangle^s\left\langle k_\ell\right\rangle^s\left\langle k-k'_\ell\right\rangle^s\left\langle k'_\ell\right\rangle^s$。现在需要注意的是，$k-k_\ell$ 和 $k-k'_\ell$ 分别支撑在以该点为中心、半径为 O (*n*) 和 O (*n*′) 的球内

原点。Th 因此，若我们进行坐标变换 $k_\ell \mapsto k_\ell - k$ 和 $k'_\ell \mapsto k'_\ell - k$，便得到

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{L}^m(v)^\eta(t,\cdot)\right\|^2_{H^s(T_L^d)} \leq \Lambda\frac{\epsilon^2}{L^{2d}} \sum_{\substack{n,n'\in I_m^N\\ \iota_\ell\in\{\pm\}\\ \eta_\ell\in\{0,1\}}} \sum_{k\in\mathbb{Z}_L^d} \sum_{\substack{|k_\ell|\lesssim n\\ |k'_\ell|\lesssim n'}} \left\langle k-k_\ell\right\rangle^s \left\langle k_\ell\right\rangle^s \left\langle k-k'_\ell\right\rangle^s \left\langle k'_\ell\right\rangle^s \\
\cdot \int_{[0,t]^2} \left(\left|\widehat{v^{\eta_\ell,\iota_\ell}}\left(t_\ell, k_\ell-k\right)\right| \left|\mathcal{Y}_{m,n}^{\eta,+,\eta_\ell,\iota_\ell}\left(t,t_\ell,k,k_\ell-k\right)\right| \left|\widehat{v^{\eta'_\ell,-\iota'_\ell}}\left(t'_\ell,k-k'_\ell\right)\right| \left|\mathcal{Y}_{m,n'}^{\eta,-,\eta_\ell,-\iota_\ell}\left(t,t'_\ell,-k,k-k'_\ell\right)\right|\right) \mathrm{d}t_\ell \mathrm{d}t'_\ell. \\
\leq \Lambda\frac{\epsilon^2}{L^{2d}} \sum_{\substack{n,n'\in I_m^N\\ \iota_\ell\in\{\pm\}\\ \eta_\ell\in\{0,1\}}} n^s\left(n'\right)^s \left\|Y_{m,n}^{\eta,+,\eta_\ell,\iota_\ell}\right\|_{L_t^\infty L_{t_\ell}^1 L_{k,k_\ell}^\infty} \left\|Y_{m,n'}^{\eta,-,\eta'_\ell,-\iota'_\ell}\right\|_{L_t^\infty L_{t_\ell}^1 L_{k,k_\ell}^\infty} \\
\cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}_L^d} \sum_{\substack{|k_\ell|\lesssim n\\ |k'_\ell|\lesssim n'}} \left\langle k-k_\ell\right\rangle^s \left\langle k-k'_\ell\right\rangle^s \left\|\widehat{v^{\eta_\ell,\iota_\ell}}(\cdot,k_\ell-k)\right\|_{L_{t_\ell}^\infty} \left\|\widehat{v^{\eta'_\ell,-\iota'_\ell}}(\cdot,k-k'_\ell)\right\|_{L_{t_\ell}^\infty}.
\end{aligned} \tag{3.221}$$

利用柯西-施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{Z}_L^d} \sum_{\substack{|k_\ell|\lesssim n\\ |k'_\ell|\lesssim n'}} \langle k-k_\ell\rangle^s \langle k-k'_\ell\rangle^s \left\|\widehat{v^{\eta_\ell,\iota_\ell}}\left(\cdot,k_\ell-k\right)\right\|_{L_{t_\ell}^\infty} \left\|\widehat{v^{\eta'_\ell,-\iota'_\ell}}\left(t,k-k'_\ell\right)\right\|_{L_{t_\ell}^\infty} \\
&\qquad \leq \Lambda \sum_{\substack{|k_\ell|\lesssim n\\ |k'_\ell|\lesssim n'}} \left\|v^{\eta_\ell}(t,\cdot)\right\|_{H^s(T_L^d)} \left\|v^{\eta'_\ell}(t,\cdot)\right\|_{H^s(T_L^d)} \\
&\qquad \leq \Lambda n^d \left(n'\right)^d L^{2d} \|v(t,\cdot)\|^2_{H^s(T_L^d)^2}
\end{aligned} \tag{3.222}$$

因此

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{L}^m(v)^\eta(t,\cdot)\right\|^2_{H^s(T_L^d)} \leq \Lambda\|v\|^2_{\mathcal{X}^2}\epsilon^2 \\
\cdot \sum_{\substack{n,n'\in I_m^N\\ \iota_\ell\in\{\pm\}\\ \eta_\ell\in\{0,1\}}} n^{s+d}\left(n'\right)^{s+d} \left\|\mathcal{Y}_{m,n}^{\eta,+,\eta_\ell,\iota_\ell}\right\|_{L_t^\infty L_{t_\ell}^1 L_{k,k_\ell}^\infty} \left\|\mathcal{Y}_{m,n}^{\eta,-,\eta'_\ell,-\iota'_\ell}\right\|_{L_t^\infty L_{t_\ell}^1 L_{k,k_\ell}^\infty}
\end{aligned} \tag{3.223}$$

推论 3.41 于是得到

$$\left\|\mathcal{L}^m(v)^\eta(t,\cdot)\right\|^2_{H^s(T_L^d)} \leq \Lambda\|v\|^2_{\mathcal{X}^2}\epsilon^2 \left(\sum_{n\in I_m^N} n^{s+d}\left(\Lambda\sqrt{\delta}\right)^{\frac{n}{4}-m}\right)^2 (\Lambda\delta)^m L^{\mathcal{K}+\frac{4}{\beta}+d+2A}. \tag{3.224}$$

现在利用 $n^{s+d} \leq \Lambda N^{2(s+d)}$ 并选择足够小的 δ，使得 $\Lambda\sqrt{\delta} < 1$

$$\sum_{n\in I_m^N} n^{s+d}\left(\Lambda\sqrt{\delta}\right)^{\frac{n}{4}-m} \leq \Lambda N^{2(s+d)} \tag{3.225}$$

从而

$$\|\mathcal{L}^m(v)\|_{\mathcal{X}^2} \leq \Lambda\left(\Lambda\sqrt{\delta}\right)^m N(L)^{2(s+d)} L^{\frac{\mathcal{K}}{2}+\frac{1}{\beta}+\frac{d}{2}+A}\|v\|_{\mathcal{X}^2} \tag{3.226}$$

□

3.12 压缩论证

T以下命题确立了解的存在唯一性 f^η 对于 (qNL S).

命题 3.44. 存在 Λ_0、$\tilde{\alpha} > 0$，使得算子

$$\mathcal{X}^2 \ni v \mapsto (\mathrm{Id} - \mathcal{L})^{-1} \left(\mathcal{W} + \mathcal{R}^1(v) + \mathcal{R}^2(v) + \mathcal{R}^3(v) + \mathcal{R}^4(v) \right) \in \mathcal{X}^2, \tag{3.227}$$

在闭球上限制为一个压缩映射

$$\mathcal{Z} := \left\{ (v_1, v_2) \in \mathcal{X}^2 \mid \|(v_1, v_2)\|_{\mathcal{X}^2} \leq \Lambda_0 L^{-\tilde{\alpha}} \right\}. \tag{3.228}$$

证明. 根据推论3.41，我们有

$$\|\mathcal{L}^m\|_{\mathcal{X}^2 \to \mathcal{X}^2} \leq \Lambda \left(\Lambda \sqrt{\delta} \right)^m N(L)^{2(s+d)} L^{\frac{\mathcal{K}}{2} + \frac{1}{\beta} + \frac{d}{2} + A} \leq L^{\frac{\log(\Lambda)}{\log(L)} + m \frac{\log(\Lambda)}{\log(L)} - \frac{m}{2} \frac{\log(\delta)}{\log(L)} + \frac{\mathcal{K}}{2} + \frac{1}{\beta} + \frac{d}{2} + 2A}, \tag{3.229}$$

其中我们令 $N = N(L) := \lfloor \log(L) \rfloor$。对于 $m = N(L)$，我们得到

$$\left\| \mathcal{L}^{N(L)} \right\|_{\mathcal{X}^2 \to \mathcal{X}^2} \leq L^{\frac{\log(\Lambda)}{\log(L)} + \log(\Lambda) - \frac{1}{2}\log(\delta) + \frac{\mathcal{K}}{2} + \frac{1}{\beta} + \frac{d}{2} + 2A}. \tag{3.230}$$

当 δ 足够小时，我们得到

$$\frac{\log(\Lambda)}{\log(L)} + \log(\Lambda) - \frac{1}{2}\log(\delta) + \frac{\mathcal{K}}{2} + \frac{1}{\beta} + \frac{d}{2} + 2A < 0 \tag{3.231}$$

且当 L 足够大时，

$$\left\| \mathcal{L}^{N(L)} \right\|_{\mathcal{X}^2 \to \mathcal{X}^2} < 1. \tag{3.232}$$

在这种情 况下，算子 $\mathrm{Id} - \mathrm{L}^{N(L)}$ 变为可逆。由此可得 $\mathrm{Id} - \mathrm{L}$ 的可逆性，因为

$$\left(\mathrm{Id} - \mathcal{L}^{N(L)} \right)^{-1} \sum_{n \leq N(L)-1} \mathcal{L}^n = (\mathrm{Id} - \mathcal{L})^{-1}. \tag{3.233}$$

利用

$$\left\| \left(\mathrm{Id} - \mathcal{L}^{N(L)} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{X}^2 \to \mathcal{X}^2} \leq \frac{1}{1 - \left\| \mathcal{L}^{N(L)} \right\|_{\mathcal{X}^2 \to \mathcal{X}^2}} \leq \Lambda, \tag{3.234}$$

以及式（3.229），得到

$$\begin{aligned} &\left\| (\mathrm{Id} - \mathcal{L})^{-1} \right\|_{\mathcal{X}^2 \to \mathcal{X}^2} \\ &\leq \left\| \left(\mathrm{Id} - \mathcal{L}^{N(L)} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{X}^2 \to \mathcal{X}^2} \sum_{0 \leq m \leq N(L)-1} \|\mathcal{L}^m\|_{\mathcal{X}^2 \to \mathcal{X}^2} \leq \Lambda N(L)^{2(s+d)} L^{\frac{\mathcal{K}}{2} + \frac{1}{\beta} + \frac{d}{2} + A} \\ &\leq \Lambda L^{\frac{\mathcal{K}}{2} + \frac{1}{\beta} + \frac{d}{2} + 2A}. \end{aligned} \tag{3.235}$$

我们首先估计 W^η 并回顾

$$\mathcal{W}^\eta = \int_0^t \sum_{\substack{0 \leq \sum_{i=1}^5 n_i \leq N(L) \\ \sum_{i=1}^5 n_i \geq N(L)}} C^+ \left(\tau, F_{n_1}^\eta(\tau), \overline{F_{n_2}^\eta}(\tau), \overline{F_{n_3}^\eta}(\tau), F_{n_4}^{\overline{\eta}}(\tau), F_{n_5}^{\overline{\eta}}(\tau) \right) \mathrm{d}\tau. \tag{3.236}$$

由于 $s>\frac{d}{2}$，我们有

$$\begin{aligned}\left\|C^{+}(t,f,g,h,u,v)\right\|_{H^s(T_L^d)}^2 &\le \frac{\epsilon^2}{L^{4d}}\sum_{k\in\mathbb{Z}_L^d}\langle k\rangle^{2s}\left|\sum_{\sum_{i=1}^5 k_i=k}\hat{f}(k_1)\hat{g}(k_2)\hat{h}(k_3)\hat{u}(k_4)\hat{v}(k_5)\right|^2\\ =\epsilon^2\sum_{k\in\mathbb{Z}_L^d}\langle k\rangle^{2s}\left|\widehat{fghuv}(k)\right|^2 &= \epsilon^2\|fghuv\|_{H^s(T_L^d)}^2 \lesssim \epsilon^2\|f\|_{H^s(T_L^d)}^2\|g\|_{H^s(T_L^d)}^2\|h\|_{H^s(T_L^d)}^2\|u\|_{H^s(T_L^d)}^2\|v\|_{H^s(T_L^d)}^2.\end{aligned} \tag{3.237}$$

由此可得推论3.27

$$\begin{aligned}\|\mathcal{W}^\eta\|_{\mathcal{X}} &\le \int_0^t \sum_{\substack{0\le n_1,n_2,n_3,n_4,n_5\le N(L)\\ n_1+n_2+n_3+n_4+n_5\ge N(L)}}\left\|C^{+}\left(\tau,F_{n_1}^{\eta}(\tau),\overline{F_{n_2}^{\eta}}(\tau),F_{n_3}^{\overline{\eta}}(\tau),\overline{F_{n_4}^{\overline{\eta}}}(\tau),F_{n_5}^{\overline{\eta}}(\tau)\right)\right\|_{H^s(T_L^d)}\mathrm{d}\tau\\ &\lesssim \epsilon\int_0^t \sum_{\substack{0\le n_1,n_2,n_3,n_4,n_5\le N(L)\\ n_1+n_2+n_3+n_4+n_5\ge N(L)}}\left\|f_{n_1}^{\eta}(\tau)\right\|_{H^s(T_L^d)}\left\|f_{n_2}^{\eta}(\tau)\right\|_{H^s(T_L^d)}\left\|f_{n_3}^{\overline{\eta}}(\tau)\right\|_{H^s(T_L^d)}\left\|f_{n_4}^{\overline{\eta}}(\tau)\right\|_{H^s(T_L^d)}\left\|f_{n_5}^{\overline{\eta}}(\tau)\right\|_{H^s(T_L^d)}\\ &\lesssim \Lambda\delta^{10}L^{5\mathcal{K}+5d+\frac{9}{\beta}+10A}\sum_{\substack{0\le n_1,n_2,n_3,n_4,n_5\le N(L)\\ n_1+n_2+n_3+n_4+n_5\ge N(L)}}(\Lambda\delta)^{2(n_1+n_2+n_3+n_4+n_5)}\\ &\le \Lambda(\Lambda\delta)^{N(L)}\delta^{10}L^{5\mathcal{K}+5d+\frac{9}{\beta}+10A}\left(\sum_{n\ge 0}(\Lambda\delta)^{2n}\right)^5\\ &\le \Lambda(\Lambda\delta)^{N(L)}\delta^{10}L^{5\mathcal{K}+5d+\frac{9}{\beta}+10A}.\end{aligned} \tag{3.238}$$

此外，

$$\begin{aligned}\left\|(\mathrm{Id}-\mathcal{L})^{-1}\mathcal{W}\right\|_{\mathcal{X}^2} &\le \Lambda\delta^{10}(\Lambda\delta)^{N(L)}\delta^{10}L^{\frac{\mathcal{K}}{2}+\frac{1}{\beta}+\frac{d}{2}+2A+5\mathcal{K}+5d+\frac{9}{\beta}+10A}\\ &\le \Lambda\delta^{10}L^{\log(\Lambda)+\log(\delta)+\frac{\mathcal{K}}{2}+\frac{1}{\beta}+\frac{d}{2}+2A+5\mathcal{K}+5d+\frac{9}{\beta}+10A}\end{aligned} \tag{3.239}$$

我们用 $\mathrm{R}(v)^{\eta}:=\mathrm{R}^1(v)^{\eta}+\mathrm{R}^2(v)^{\eta}+\mathrm{R}^3(v)^{\eta}+\mathrm{R}^4(v)^{\eta}$ 表示所有关于 v 至少为二次的项。对于这些项，我们计算（利用算子 $\tilde{C}^{\eta,+}$ 的有界性）

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}(v)\|_{\mathcal{X}^2} &\le \Lambda\epsilon\|v\|_{\mathcal{X}}^2\Bigg(\sum_{n_1,n_2,n_3\le N}\left\|f_{n_1}\right\|_{\mathcal{X}^2}\left\|f_{n_2}\right\|_{\mathcal{X}^2}\left\|f_{n_3}\right\|_{\mathcal{X}^2}\\ &\quad+\|v\|_{\mathcal{X}^2}\sum_{n_1,n_2\le N}\left\|f_{n_1}\right\|_{\mathcal{X}^2}\left\|f_{n_2}\right\|_{\mathcal{X}^2}+\|v\|_{\mathcal{X}^2}^2\sum_{n\le N}\|f_n\|_{\mathcal{X}^2}+\|v\|_{\mathcal{X}^2}^3\Bigg)\\ &\le \Lambda\epsilon\|v\|_{\mathcal{X}^2}^2\Bigg(L^{3\mathcal{K}+3d+\frac{6}{\beta}+6A}\left(\sum_{n\le N(L)}(\Lambda\delta)^{2n}\right)^3+\|v\|_{\mathcal{X}^2}L^{2\mathcal{K}+2d+\frac{4}{\beta}+4A}\left(\sum_{n\le N(L)}(\Lambda\delta)^{2n}\right)^2\\ &\quad+\|v\|_{\mathcal{X}^2}^2L^{\mathcal{K}+d\frac{2}{\beta}+2A}\sum_{n\le N(L)}(\Lambda\delta)^{2n}+\|v\|_{\mathcal{X}^2}^3\Bigg)\\ &\le \Lambda\|v\|_{\mathcal{X}^2}^2\left(L^{3\mathcal{K}+3d+\frac{5}{\beta}+6A}+\|v\|_{\mathcal{X}^2}L^{2\mathcal{K}+2d+\frac{3}{\beta}+4A}+\|v\|_{\mathcal{X}^2}^2L^{\mathcal{K}+d\frac{1}{\beta}+2A}+\|v\|_{\mathcal{X}^2}^3\right).\end{aligned} \tag{3.240}$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\left\|(\mathrm{Id}-\mathcal{L})^{-1}\mathcal{R}(v)\right\|_{\mathcal{X}^2}\\&\leq\Lambda\|v\|_{\mathcal{X}^2}^2\left(L^{\frac{7}{2}\mathcal{K}+\frac{7}{2}d+\frac{6}{\beta}+8A}+\|v\|_{\mathcal{X}^2}L^{\frac{5}{2}\mathcal{K}+\frac{5}{2}d+\frac{4}{\beta}+6A}+\|v\|_{\mathcal{X}^2}^2L^{\frac{3}{2}\mathcal{K}+\frac{3}{2}d+\frac{2}{\beta}+4A}+\|v\|_{\mathcal{X}^2}^3\right).\end{aligned}\tag{3.241}$$

˜我们现在假设 $\|v\|_{\mathcal{X}^2}\leq\Lambda_0L^{-\alpha}$对某个 $\Lambda_0,\tilde{\alpha}>0$成立，具体取值将在下文确定。同时，我们希望上述表达式有界于 $\Lambda_0L^{-\alpha}$。我们可以选择

$$\tilde{\alpha}:=2\left(\frac{7}{2}\mathcal{K}+\frac{7}{2}d+\frac{6}{\beta}+8A\right)\tag{3.242}$$

并首先估计

$$\begin{aligned}\left\|(\mathrm{Id}-\mathcal{L})^{-1}(\mathcal{W}+\mathcal{R}(v))\right\|_{\mathcal{X}^2}&\leq\left\|(\mathrm{Id}-\mathcal{L})^{-1}\mathcal{W}\right\|_{\mathcal{X}^2}+\left\|(\mathrm{Id}-\mathcal{L})^{-1}\mathcal{R}(v)\right\|_{\mathcal{X}^2}\\&\leq\Lambda\delta^{10}L^{\log(\Lambda)+\log(\delta)+\frac{\mathcal{K}}{2}+\frac{1}{\beta}+\frac{d}{2}+2A+5\mathcal{K}+5d+\frac{9}{\beta}+10A}+4\Lambda\Lambda_0^2L^{-\frac{3}{2}\tilde{\alpha}}\end{aligned}\tag{3.243}$$

因此，我们可以选择 $\Lambda_0:=\Lambda$，并将 δ 取得足够小，使得

$$\log(\Lambda)+\log(\delta)+\frac{\mathcal{K}}{2}+\frac{1}{\beta}+\frac{d}{2}+2A+5\mathcal{K}+5d+\frac{9}{\beta}+10A\leq-\frac{3}{2}\tilde{\alpha}\tag{3.244}$$

且若 L 足够大，我们可以将式（3.243）估计为

$$\left\|(\mathrm{Id}-\mathcal{L})^{-1}(\mathcal{W}+\mathcal{R}(v))\right\|_{\mathcal{X}^2}\leq\frac{\Lambda}{2}L^{-\tilde{\alpha}}+\frac{\Lambda}{2}L^{-\tilde{\alpha}}=\Lambda L^{-\tilde{\alpha}}.\tag{3.245}$$

我们已经证明

$$(\mathrm{Id}-\mathcal{L})^{-1}(\mathcal{W}+\mathcal{R})(\mathcal{Z})\subseteq\mathcal{Z}.\tag{3.246}$$

现在我们证 ove 可缩性。一般而言，值得注意的是，我们将处理如下形式的项 m

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{\sum_{i=1}^5k_i=k}\left(\widehat{v_i^{\iota_1}}(k_1)\widehat{v_j^{\iota_2}}(k_2)-\widehat{w_i^{\iota_1}}(k_1)\widehat{w_j^{\iota_2}}(k_2)\right)\hat{f}(k_3)\hat{g}(k_4)\hat{h}(k_5)\right|\\&=\left|\left(\left(\widehat{v_i^{\iota_1}}*\widehat{v_j^{\iota_2}}-\widehat{w_i^{\iota_1}}*\widehat{w_j^{\iota_2}}\right)*\hat{f}*\hat{g}*\hat{h}\right)(k)\right|\\&\leq\left|\left(\widehat{v_i^{\iota_1}}*\widehat{v_j^{\iota_2}-w_j^{\iota_2}}*\hat{f}*\hat{g}*\hat{h}\right)(k)\right|+\left|\left(\widehat{v_i^{\iota_1}-w_i^{\iota_1}}*\widehat{w_j^{\iota_2}}*\hat{f}*\hat{g}*\hat{h}\right)(k)\right|\\&=L^{2d}\left|\widehat{v_i^{\iota_1}\left(v_j^{\iota_2}-w_j^{\iota_2}\right)fgh}(k)\right|+L^{2d}\left|\widehat{\left(v_i^{\iota_1}-w_i^{\iota_1}\right)w_j^{\iota_2}fgh}(k)\right|,\end{aligned}\tag{3.247}$$

其中 $i,\ j\in\{1,\ 2\}$ 和 $\iota_1,\ \iota_2\in\{\pm\}$。由此可得以下估计。

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathcal{R}^k(v_1,v_2)^\eta-\mathcal{R}^k(w_1,w_2)^\eta\right\|_{\mathcal{X}}^2\\
\leq&\frac{\epsilon^2}{L^{4d}}\sum_{k\in\mathbb{Z}_L^d}\langle k\rangle^{2s}\left|\sum_{\sum_{i=1}^5k_i=k}\left(\widehat{v_i^{\iota_1}}(k_1)\widehat{v_j^{\iota_2}}(k_2)-\widehat{w_i^{\iota_1}}(k_1)\widehat{w_j^{\iota_2}}(k_2)\right)\hat{f}(k_3)\hat{g}(k_4)\hat{h}(k_5)\right|^2\\
\lesssim&\epsilon^2\left\|v_i^{\iota_1}\left(v_j^{\iota_2}-w_j^{\iota_2}\right)fgh\right\|_{\mathcal{X}}^2+\epsilon^2\left\|\left(v_i^{\iota_1}-w_i^{\iota_1}\right)w_j^{\iota_2}fgh\right\|_{\mathcal{X}}^2\\
\lesssim&\epsilon^2\|f\|_{\mathcal{X}}^2\|g\|_{\mathcal{X}}^2\|h\|_{\mathcal{X}}^2\left(\left\|v_i^{\iota_1}\right\|_{\mathcal{X}}^2\left\|v_j^{\iota_2}-w_j^{\iota_2}\right\|_{\mathcal{X}}^2+\left\|w_j^{\iota_2}\right\|_{\mathcal{X}}^2\left\|v_i^{\iota_1}-w_i^{\iota_1}\right\|_{\mathcal{X}}^2\right)\\
\lesssim&\epsilon^2L^{-2\tilde{\alpha}}\|f\|_{\mathcal{X}}^2\|g\|_{\mathcal{X}}^2\|h\|_{\mathcal{X}}^2\left(\left\|v_j^{\iota_2}-w_j^{\iota_2}\right\|_{\mathcal{X}}+\left\|v_i^{\iota_1}-w_i^{\iota_1}\right\|_{\mathcal{X}}\right)^2\\
\lesssim&\epsilon^2L^{-2\tilde{\alpha}}\|f\|_{\mathcal{X}}^2\|g\|_{\mathcal{X}}^2\|h\|_{\mathcal{X}}^2\|(v_1-w_1,v_2-w_2)\|_{\mathcal{X}^2}^2,
\end{aligned}\tag{3.248}$$

其中 $f,\ g,\ h\in\bigsqcup_{\iota_i\in\{\pm\}}\left\{v_1^{\iota_1}\right\},\ v_2^{\iota_2},\ w_1^{\iota_3},\ w_2^{\iota_4},\ F^{\eta,\ \iota_5}_{\leq N},\ F^{\eta,\ \iota_6}_{\leq N}\right\}$。更准确地说，$k-1$函数中，$f$、$g$和$h$属于 v_i^ι或 w_j^ι类型，其余函数属于 $F^{\eta,\ \iota}_{\leq N}$或 $E^{\eta,\ \iota}_{\leq N}$类型。最后，

$$\left\|\mathcal{R}^k(v_1,v_2)^\eta-\mathcal{R}^k(w_1,w_2)^\eta\right\|_{\mathcal{X}}\lesssim\epsilon L^{-\tilde{\alpha}}\|f\|_{\mathcal{X}}\|g\|_{\mathcal{X}}\|h\|_{\mathcal{X}}\|(v_1-w_1,v_2-w_2)\|_{\mathcal{X}^2}.\tag{3.249}$$

我们进一步估计

$$\begin{aligned}
&\left\|(\mathrm{Id}-\mathcal{L})^{-1}(\mathcal{W}+\mathcal{R}(v))-(\mathrm{Id}-\mathcal{L})^{-1}(\mathcal{W}+\mathcal{R}(w))\right\|_{\mathcal{X}^2}=\left\|(\mathrm{Id}-\mathcal{L})^{-1}(\mathcal{R}(v)-\mathcal{R}(w))\right\|_{\mathcal{X}^2}\\
\leq&\left\|(\mathrm{Id}-\mathcal{L})^{-1}\right\|_{\mathcal{X}^2\to\mathcal{X}^2}\|\mathcal{R}(v)-\mathcal{R}(w)\|_{\mathcal{X}^2}\\
\lesssim&L^{\frac{\mathcal{K}}{2}+\frac{1}{\beta}+\frac{d}{2}+2A}\sum_{i=1}^4\left\|\mathcal{R}^i(v)-\mathcal{R}^i(w)\right\|_{\mathcal{X}^2}\\
\lesssim&\epsilon L^{\frac{\mathcal{K}}{2}+\frac{1}{\beta}+\frac{d}{2}+2A-\tilde{\alpha}}\sum_{i=0}^3\left(L^{\mathcal{K}+d+\frac{2}{\beta}+2A}\sum_{n\leq N(L)}(\Lambda\delta)^{2n}\right)^i\left(\Lambda L^{-\tilde{\alpha}}\right)^{3-i}\|v-w\|_{\mathcal{X}^2}\\
\lesssim&L^{-\frac{\tilde{\alpha}}{2}}\sum_{i=0}^3\left(\Lambda L^{-\left(\tilde{\alpha}+\mathcal{K}+d+\frac{2}{\beta}+2A\right)}\right)^i\|v-w\|_{\mathcal{X}^2}
\end{aligned}\tag{3.250}$$

并且正如我们所看到的，如果 L 足够大，我们得到

$$\mathcal{Z}\ni v\mapsto(\mathrm{Id}-\mathcal{L})^{-1}(\mathcal{W}+\mathcal{R}(v))\in\mathcal{Z}\tag{3.251}$$

确实是一个压缩映射。最后，将巴拿赫不动点定理应用于式（3.251）中的映射，证明即告完成。□

定理证明的第二部分1.2

定义 4.1。 为方便起见，我们定义

$$\begin{aligned}
\tilde{\zeta}^{\eta}_{1,\iota}(\xi_1,\xi_2,\xi) &:= Q^{\eta}_{\iota}(\xi,\xi_1,\xi_2,-\xi_1,-\xi_2),\\
\tilde{\zeta}^{\eta}_{2,\iota}(\xi_1,\xi_2,\xi) &:= Q^{\eta}_{\iota}(\xi,\xi_1,\xi_2,-\xi_2,-\xi_1),\\
\tilde{\zeta}^{\eta}_{3,\iota}(\xi_1,\xi_2,\xi) &:= Q^{\eta}_{\iota}(\xi_1,-\xi_1,\xi_2,\xi,-\xi_2),\\
\tilde{\zeta}^{\eta}_{4,\iota}(\xi_1,\xi_2,\xi) &:= Q^{\eta}_{\iota}(\xi_1,\xi_2,-\xi_1,\xi,-\xi_2),\\
\tilde{\zeta}^{\eta}_{5,\iota}(\xi_1,\xi_2,\xi) &:= Q^{\eta}_{\iota}(\xi_1,-\xi_1,\xi_2,-\xi_2,\xi),\\
\tilde{\zeta}^{\eta}_{6,\iota}(\xi_1,\xi_2,\xi) &:= Q^{\eta}_{\iota}(\xi_1,\xi_2,-\xi_1,-\xi_2,\xi).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

我们定义以下映射序列

$$\rho^{\eta}_0 := M^{\eta,\eta},\ \rho^{\times}_0 := M^{0,1},$$

$$\begin{aligned}
\rho^{\eta}_n(t,\xi) := 2\sum_{n_1+n_2+n_3=n-1}\Bigg[&\sum_{l=1}^{2}\int_0^t \rho^{\eta}_{n_3}(s,\xi)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Im}\left(\rho^{\times,\overline{\eta}}_{n_1}(s,-\xi_1)\tilde{\zeta}^{\eta}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)\,\rho^{\times,\overline{\eta}}_{n_2}(s,-\xi_2)\right)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}s\\
&+\sum_{l=3}^{6}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Im}\left(\rho^{\times,\overline{\eta}}_{n_3}(s,\xi)\tilde{\zeta}^{\eta}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)\,\rho^{\times,\overline{\eta}}_{n_2}(s,-\xi_2)\right)\rho^{\eta}_{n_1}(s,\xi_1)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s\Bigg].
\end{aligned} \tag{4.2}$$

and

$$\begin{aligned}
\rho^{\times}_n(t,\xi) = -\mathrm{i}\tau\sum_{n_1+n_2+n_3=n-1}&\\
\Bigg[\sum_{l=1}^{2}\int_0^t \rho^{\times}_{n_3}(s,\xi)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}&\left(\tilde{\zeta}^{0}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)-\overline{\tilde{\zeta}^{1}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)}\right)\overline{\rho^{\times}_{n_1}(s,-\xi_1)\rho^{\times}_{n_2}(s,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s\\
+\sum_{l=3}^{6}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}&\left(\rho^{1}_{n_3}(s,\xi)\tilde{\zeta}^{0}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)\,\rho^{0}_{n_1}(s,\xi_1)-\rho^{0}_{n_3}(s,\xi)\overline{\tilde{\zeta}^{1}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)}\rho^{1}_{n_1}(s,\xi_1)\right)\overline{\rho^{\times}_{n_2}(s,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s\Bigg].
\end{aligned} \tag{4.3}$$

由于 $M^{\eta,\,\eta}$ 是实值的，因此 ρ^{η} 也是实值的。这一点通过归纳法证明。

4.1 有效系统

我们希望收敛到方程 (宏观系统) 的一个解，其形式应为

$$\begin{aligned}
\rho^{\eta}(t,\xi) = M^{\eta,\eta}(\xi)+2\sum_{l=1}^{2}\int_0^t \rho^{\eta}(s,\xi)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Im}\left(\tilde{\zeta}^{\eta}_{l,\iota}(\xi_1,\xi_2,\xi)\,\rho^{\times,\overline{\eta}}(s,-\xi_1)\rho^{\times,\overline{\eta}}(s,-\xi_2)\right)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}s\\
+2\sum_{l=3}^{6}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Im}\left(\rho^{\times,\overline{\eta}}(s,\xi)\tilde{\zeta}^{\eta}_{l,\iota}(\xi_1,\xi_2,\xi)\,\rho^{\times,\overline{\eta}}(s,-\xi_2)\right)\rho^{\eta}(s,\xi_1)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{4.4}$$

and

$$\rho^{\times}(t,\xi)=M^{0,1}(\xi)-\mathrm{i}\sum_{l=1}^{2}\int_0^t\rho^{\times}(s,\xi)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\tilde{\zeta}^0_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)-\overline{\tilde{\zeta}^1_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)}\right)\overline{\rho^{\times}(s,-\xi_1)\rho^{\times}(s,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s$$
$$-\mathrm{i}\sum_{l=3}^{6}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\rho^1(s,\xi)\tilde{\zeta}^0_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)\rho^0(s,\xi_1)-\rho^0(s,\xi)\overline{\tilde{\zeta}^1_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)}\rho^1(s,\xi_1)\right)\overline{\rho^{\times}(s,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s. \tag{4.5}$$

若定义向量场 V: $\left(W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^d\right)\cap W^{1,1}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)^3\to\left(W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^d\right)\cap W^{1,1}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)^3$，使得 $V(\rho^0,\rho^1,\rho^{\times})$是方程(宏观系统) 的右端（忽略时间依赖性），很容易看出 V 是局部利普希茨连续的。因此，系统方程 (4.4) 在有限时间区间 $[0,\delta]$ 上具有局部适定性，其中 $\delta>0$ 足够小。

V 的各个分量均可估计为

$$\begin{aligned}\left\|V\left(\rho^0,\rho^1,\rho^{\times}\right)^{\eta}\right\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}}&\le 4\|\rho^{\eta}\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}}\left\|Q^{\eta}_{+}\right\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}}\left\|\rho^{\times}\right\|^2_{L^1}\\&+8\left\|\rho^{\times}\right\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}}\left\|Q^{\eta}_{+}\right\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}}\left\|\rho^{\times}\right\|_{L^1}\|\rho^{\eta}\|_{L^1}\end{aligned} \tag{4.6}$$

and

$$\begin{aligned}\left\|V\left(\rho^0,\rho^1,\rho^{\times}\right)^{\times}\right\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}}&\le 4\left\|\rho^{\times}\right\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}}\max_{\eta}\left\|Q^{\eta}_{+}\right\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}}\left\|\rho^{\times}\right\|^2_{L^1}\\&+4\left\|\rho^1\right\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}}\max_{\eta}\left\|Q^{\eta}_{+}\right\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}}\left\|\rho^0\right\|_{L^1}\left\|\rho^{\times}\right\|_{L^1}\\&+4\left\|\rho^0\right\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}}\max_{\eta}\left\|Q^{\eta}_{+}\right\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}}\left\|\rho^1\right\|_{L^1}\left\|\rho^{\times}\right\|_{L^1}\end{aligned} \tag{4.7}$$

定义 4.2. 我们通过递归关系 $c_0:=1$ 定义卡塔兰三重卷积，并且对所有 $n>0$,

$$c_n:=\sum_{n_1+n_2+n_3=n-1}c_{n_1}c_{n_2}c_{n_3}=\frac{3}{2n+3}\binom{2n+3}{n}\le(5e)^n. \tag{4.8}$$

*Rem*注 *4.3.* 对于度为 $2k+1$ 的高阶非线性项，应使用 k-卡塔兰卷积 .

命题 4.4. 该结论成立

$$\max_{\star}\left\|\rho^{\star}_n\right\|_{L^{\infty}\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)}\le\Lambda(\Lambda\delta)^n c_n. \tag{4.9}$$

特别地，级数 $\sum_{n\ge0}\rho^{\star}_n$ 在 $L^{\infty}\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)$ 中绝对收敛。

证明。 我们通过归纳法证明方程（4.9），且初始情形 $n=0$ 显然成立，因为 $M^{\star}$ 有界。现在假设 $n>0$，并且该命题对所有 $0\le m\le n-1$均成立。于是得到:

$$\begin{aligned}\left\|\rho_n^\eta\right\|_{L^\infty(W^{1,\infty}\cap W^{1,1})} \le \delta \sum_{n_1+n_2+n_3=n-1} \Big[& 4\left\|\rho_{n_3}^\eta\right\|_{L^\infty(W^{1,\infty}\cap W^{1,1})}\left\|Q_+^\eta\right\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}}\left\|\rho_{n_1}^\times\right\|_{L^\infty L^1}\left\|\rho_{n_2}^\times\right\|_{L^\infty L^1} \\ & +4\left\|\rho_{n_3}^\times\right\|_{L^\infty\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)}\left\|Q_+^\eta\right\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}}\left\|\rho_{n_2}^\times\right\|_{L^\infty L^1}\left\|\rho_{n_1}^\eta\right\|_{L^\infty L^1} \\ & +4\left\|\rho_{n_3}^\times\right\|_{L^\infty\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)}\left\|Q_+^\eta\right\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}}\left\|\rho_{n_2}^\times\right\|_{L^\infty L^1}\left\|\rho_{n_1}^\eta\right\|_{L^\infty L^1}\Big] \\ & \le \Lambda^2\delta\,(\Lambda\delta)^{n-1}\sum_{n_1+n_2+n_3=n-1} c_{n_1}c_{n_2}c_{n_3} \\ & = \Lambda(\Lambda\delta)^n c_n,\end{aligned} \tag{4.10}$$

这里用到了 Q_l^η及其梯度的有界性。同理

$$\begin{aligned}\left\|\rho_n^\times\right\|_{L^\infty(W^{1,\infty}\cap W^{1,1})} \le 4\max_\eta \left\|Q_+^\eta\right\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}}\delta \sum_{n_1+n_2+n_3=n-1} \Big[& \left\|\rho_{n_3}^\times\right\|_{L^\infty\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)}\left\|\rho_{n_1}^\times\right\|_{L^\infty L^1}\left\|\rho_{n_2}^\times\right\|_{L^\infty L^1} \\ & +\left\|\rho_{n_3}^1\right\|_{L^\infty\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)}\left\|\rho_{n_1}^0\right\|_{L^\infty L^1}\left\|\rho_{n_2}^\times\right\|_{L^\infty L^1}+\left\|\rho_{n_3}^0\right\|_{L^\infty\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)}\left\|\rho_{n_1}^1\right\|_{L^\infty L^1}\left\|\rho_{n_2}^\times\right\|_{L^\infty L^1}\Big] \\ & \le \Lambda(\Lambda\delta)^n c_n\end{aligned} \tag{4.11}$$

由于 $c_n \le (5e)^n$，我们通过增大 Λ，得到较粗略的估计 $\max^\star \left\|\rho_n^\star\right\|_{L^\infty(W^{1,\infty}\cap W^{1,1})} \le \Lambda(\Lambda\delta)^n$。因此，

$$\sum_{n\ge 0}\left\|\rho_n^\star\right\|_{L^\infty\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)} \le \Lambda\sum_{n\ge 0}(\Lambda\delta)^n < \infty \tag{4.12}$$

通过减小 δ 使得 $\Lambda\delta < 1$，该式变为几何级数。 □

4.2 有效系统的解作为不动点

我们回顾 $N = N(L) = \lfloor \log(L) \rfloor$ 并定义

$$v^\star := \rho^\star - \rho_{\le N}^\star, \tag{4.13}$$

其中

$$\rho_{\le N}^\star := \sum_{n\le N}\rho_n^\star. \tag{4.14}$$

那么显然，

$$v^\star = \Sigma^\star + \mathcal{L}(v)^\star + Q(v,v)^\star + R(v,v,v)^\star, \tag{4.15}$$

其中

$$\begin{aligned}\Sigma^{\eta} :=& -\rho^{\eta}_{\leq N} + M^{\eta,\eta} + 2\sum_{l=1}^{2}\int_0^t \rho^{\eta}_{\leq N}(s,\xi)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Im}\left(\tilde{\zeta}^{\eta}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)\rho^{\times,\overline{\eta}}_{\leq N}(s,-\xi_1)\rho^{\times,\overline{\eta}}_{\leq N}(s,-\xi_2)\right)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s\\ &+2\sum_{l=3}^{6}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Im}\left(\rho^{\times,\overline{\eta}}_{\leq N}(s,\xi)\tilde{\zeta}^{\eta}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)\rho^{\times,\overline{\eta}}_{\leq N}(s,-\xi_2)\right)\rho^{\eta}_{\leq N}(s,\xi_1)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s\\ &=2\sum_{\substack{0\leq n_1,n_2,n_3\leq N\\ N\leq n_1+n_2+n_3\leq 3N}}\Bigg[\sum_{l=1}^{2}\int_0^t \rho^{\eta}_{n_3}(s,\xi)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Im}\left(\tilde{\zeta}^{\eta}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)\rho^{\times,\overline{\eta}}_{n_1}(s,-\xi_1)\rho^{\times,\overline{\eta}}_{n_2}(s,-\xi_2)\right)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s\\ &+\sum_{l=3}^{6}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Im}\left(\rho^{\times,\overline{\eta}}_{n_3}(s,\xi)\tilde{\zeta}^{\eta}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)\rho^{\times,\overline{\eta}}_{n_1}(s,-\xi_2)\right)\rho^{\eta}_{n_2}(s,\xi_1)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s\Bigg],\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}\Sigma^{\times} :=& -\rho^{\times}_{\leq N} + M^{0,1} - \mathrm{i}\sum_{l=1}^{2}\int_0^t \rho^{\times}_{\leq N}(s,\xi)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\tilde{\zeta}^{0}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)-\overline{\tilde{\zeta}^{1}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)}\right)\overline{\rho^{\times}_{\leq N}(s,-\xi_1)\rho^{\times}_{\leq N}(s,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s\\ &-\mathrm{i}\sum_{l=3}^{6}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\rho^{1}_{\leq N}(s,\xi)\tilde{\zeta}^{0}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)\rho^{0}_{\leq N}(s,\xi_1)-\rho^{0}_{\leq N}(s,\xi)\overline{\tilde{\zeta}^{1}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)}\rho^{1}_{\leq N}(s,\xi_1)\right)\overline{\rho^{\times}_{\leq N}(s,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s\\ &=-\mathrm{i}\sum_{\substack{0\leq n_1,n_2,n_3\leq N\\ N\leq n_1+n_2+n_3\leq 3N}}\Bigg[\sum_{l=1}^{2}\int_0^t \rho^{\times}_{n_3}(s,\xi)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\tilde{\zeta}^{0}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)-\overline{\tilde{\zeta}^{1}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)}\right)\overline{\rho^{\times}_{n_1}(s,-\xi_1)\rho^{\times}_{n_2}(s,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s\\ &-\mathrm{i}\sum_{l=3}^{6}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\rho^{1}_{n_3}(s,\xi)\tilde{\zeta}^{0}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)\rho^{0}_{n_1}(s,\xi_1)-\rho^{0}_{n_3}(s,\xi)\overline{\tilde{\zeta}^{1}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)}\rho^{1}_{n_1}(s,\xi_1)\right)\overline{\rho^{\times}_{n_2}(s,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s\Bigg],\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\eta}(v) :=& 2\sum_{l=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{f_i=v\\ f_j=\rho_{\leq N}\forall j\neq i}}\int_0^t f^{\eta}_1(s,\xi)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Im}\left(\tilde{\zeta}^{\eta}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)f^{\times,\overline{\eta}}_2(s,-\xi_1)f^{\times,\overline{\eta}}_3(s,-\xi_2)\right)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s\\ &+2\sum_{l=3}^{6}\sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{f_i=v\\ f_j=\rho_{\leq N}\forall j\neq i}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Im}\left(f^{\times,\overline{\eta}}_1(s,\xi)\tilde{\zeta}^{\eta}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)f^{\times,\overline{\eta}}_2(s,-\xi_2)\right)f^{\eta}_3(s,\xi_1)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\times}(v) :=& -\mathrm{i}\sum_{l=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{f_i=v\\ f_j=\rho_{\leq N}\forall j\neq i}}\int_0^t f^{\times}_1(s,\xi)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\tilde{\zeta}^{0}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)-\overline{\tilde{\zeta}^{1}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)}\right)\overline{f^{\times}_2(s,-\xi_1)f^{\times}_3(s,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s\\ &-\mathrm{i}\sum_{l=3}^{6}\sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{f_i=v\\ f_j=\rho_{\leq N}\forall j\neq i}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(f^{1}_1(s,\xi)\tilde{\zeta}^{0}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)f^{0}_2(s,\xi_1)-f^{0}_1(s,\xi)\tilde{\zeta}^{1}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,\xi)f^{1}_2(s,\xi_1)\right)\overline{f^{\times}_3(s,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$
\begin{aligned}
Q^{\eta}(v) \coloneqq 2\sum_{l=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{f_i=\rho\\ f_j=v\forall j\neq i}}\int_0^t f_1^{\eta}(s,\xi)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Im}\left(\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(\xi_1,\xi_2,\xi)f_2^{\times,\overline{\eta}}(s,-\xi_1)f_3^{\times,\overline{\eta}}(s,-\xi_2)\right)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s\\
+2\sum_{l=3}^{6}\sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{f_i=\rho\\ f_j=v\forall j\neq i}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Im}\left(f_1^{\times,\overline{\eta}}(s,\xi)\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(\xi_1,\xi_2,\xi)f_2^{\times,\overline{\eta}}(s,-\xi_2)\right)f_3^{\eta}(s,\xi_1)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s,
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

$$
\begin{aligned}
Q^{\times}(v) \coloneqq -\mathrm{i}\sum_{l=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{f_i=\rho\\ f_j=v\forall j\neq i}}\int_0^t f_1^{\times}(s,\xi)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\tilde{\zeta}_{l,+}^{0}(\xi_1,\xi_2,\xi)-\overline{\tilde{\zeta}_{l,+}^{1}(\xi_1,\xi_2,\xi)}\right)\overline{f_2^{\times}(s,-\xi_1)f_3^{\times}(s,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s\\
-\mathrm{i}\sum_{l=3}^{6}\sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{f_i=\rho\\ f_j=v\forall j\neq i}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(f_1^{1}(s,\xi)\tilde{\zeta}_{l,+}^{0}(\xi_1,\xi_2,\xi)f_2^{0}(s,\xi_1)-f_1^{0}(s,\xi)\tilde{\zeta}_{l,+}^{1}(\xi_1,\xi_2,\xi)f_2^{1}(s,\xi_1)\right)\overline{f_3^{\times}(s,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s,
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

$$
\begin{aligned}
R^{\eta}(v) \coloneqq 2\sum_{l=1}^{2}\int_0^t v^{\eta}(s,\xi)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Im}\left(\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(\xi_1,\xi_2,\xi)v^{\times,\overline{\eta}}(s,-\xi_1)v^{\times,\overline{\eta}}(s,-\xi_2)\right)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s\\
+2\sum_{l=3}^{6}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Im}\left(v^{\times,\overline{\eta}}(s,\xi)\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(\xi_1,\xi_2,\xi)v\times,\overline{\eta}(s,-\xi_2)\right)v^{\eta}(s,\xi_1)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

and

$$
\begin{aligned}
R^{\times}(v) \coloneqq -\mathrm{i}\sum_{l=1}^{2}\int_0^t v^{\times}(s,\xi)\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\tilde{\zeta}_{l,+}^{0}(\xi_1,\xi_2,\xi)-\overline{\tilde{\zeta}_{l,+}^{1}(\xi_1,\xi_2,\xi)}\right)\overline{v^{\times}(s,-\xi_1)v^{\times}(s,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s\\
-\mathrm{i}\sum_{l=3}^{6}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(v^{1}(s,\xi)\tilde{\zeta}_{l,+}^{0}(\xi_1,\xi_2,\xi)v^{0}(s,\xi_1)-v^{0}(s,\xi)\overline{\tilde{\zeta}_{l,+}^{1}(\xi_1,\xi_2,\xi)}v^{1}(s,\xi_1)\right)\overline{v^{\times}(s,-\xi_2)}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

利用命题4.4,

$$
\begin{aligned}
&\|\Sigma^{\eta}\|_{L^{\infty}\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)}+\left\|\Sigma^{\times}\right\|_{L^{\infty}\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)}\\
&\leq \delta\max_{\eta}\left\|Q_{+}^{\eta}\right\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}}\sum_{\substack{0\leq n_1,n_2,n_3\leq N\\ N\leq n_1+n_2+n_3\leq 3N}}\Big[2\left\|\rho_{n_3}^{\eta}\right\|_{L^{\infty}\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)}\left\|\rho_{n_1}^{\times}\right\|_{L^1}\left\|\rho_{n_2}^{\times}\right\|_{L^1}\\
&+4\left\|\rho_{n_3}^{\times}\right\|_{L^{\infty}\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)}\left\|\rho_{n_1}^{\times}\right\|_{L^1}\left\|\rho_{n_2}^{\eta}\right\|_{L^1}+4\left\|\rho_{n_3}^{\times}\right\|_{L^{\infty}\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)}\left\|\rho_{n_1}^{\times}\right\|_{L^1}\left\|\rho_{n_2}^{\times}\right\|_{L^1}\\
&+4\left\|\rho_{n_3}^{1}\right\|_{L^{\infty}\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)}\left\|\rho_{n_1}^{0}\right\|_{L^1}\left\|\rho_{n_2}^{\times}\right\|_{L^1}+4\left\|\rho_{n_3}^{0}\right\|_{L^{\infty}\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)}\left\|\rho_{n_1}^{1}\right\|_{L^1}\left\|\rho_{n_2}^{\times}\right\|_{L^1}\Big]\\
&\leq 14\Lambda\delta\max_{\eta}\left\|Q_{+}^{\eta}\right\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}}\sum_{\substack{0\leq n_1,n_2,n_3\leq N\\ N\leq n_1+n_2+n_3\leq 3N}}(\Lambda\delta)^{n_1+n_2+n_3}\\
&\leq \Lambda\delta(\Lambda\delta)^{N}\sum_{\substack{0\leq n_1,n_2,n_3\leq N\\ 0\leq n_1+n_2+n_3\leq 2N}}(\Lambda\delta)^{n_1+n_2+n_3}\\
&\leq (\Lambda\delta)^{N+1}\left(\sum_{n\geq 0}(\Lambda\delta)^{n}\right)^{3}\leq(\Lambda\delta)^{N+1}
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

b逐步增大 Λ 并同时逐步减小 δ。类似地，我们得到 n

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{L}^{\eta}(v)\|_{L^{\infty}\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)}+\left\|\mathcal{L}^{\times}(v)\right\|_{L^{\infty}\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)}\\
&\leq 72\max_{\eta}\left\|Q_{+}^{\eta}\right\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}}\Lambda\delta\left(\sum_{n=0}^{N}(\Lambda\delta)^{n}\right)^{2}\max_{\star}\left\|v^{\star}\right\|_{L^{\infty}\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)}\\
&\leq \Lambda\delta\|v\|_{\left(L^{\infty}\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)\right)^{3}}.
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

二次项可类似地估计为

$$
\begin{aligned}
&\|Q(v,v)^{\eta}\|_{L^{\infty}\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)}+\left\|Q(v,v)^{\times}\right\|_{L^{\infty}\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)}\\
&72\max_{\eta}\left\|Q_{+}^{\eta}\right\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}}\Lambda\delta\left[\sum_{n=0}(\Lambda\delta)^{n}\right]\|v\|^{2}_{\left(L^{\infty}\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)\right)^{3}}
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

最后，三次项给出

$$
\begin{aligned}
&\|R^{\eta}(v,v,v)\|_{L^{\infty}\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)}+\left\|R^{\times}(v,v,v)\right\|_{L^{\infty}\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)}\\
&\leq 24\max_{\eta}\left\|Q_{+}^{\eta}\right\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}}\delta\|v\|^{3}_{\left(L^{\infty}\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)\right)^{3}}.
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

选取 δ 足够小时，由式（4.25）可知

$$
\|\mathcal{L}\|_{\left(L^{\infty}\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)\right)^{3}\to\left(L^{\infty}\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)\right)^{3}}\leq\frac{1}{3}
\tag{4.28}
$$

从而 Id – L 可利用 Neumann 反演级数获得可逆性，并且

$$
\left\|(\mathrm{Id}-\mathcal{L})^{-1}\right\|_{\mathrm{op}}\leq\frac{1}{1-\|\mathcal{L}\|_{\mathrm{op}}}\leq\frac{3}{2}\leq\Lambda.
\tag{4.29}
$$

我们刚刚证明，以下不动点方程的改写形式

$$v = (\mathrm{Id} - \mathcal{L})^{-1}(\Sigma + Q(v,v) + R(v,v,v)) \tag{4.30}$$

是良定的。

命题 4.5. 算子

$$\left(L^\infty\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)\right)^3 \ni v \mapsto (\mathrm{Id} - \mathcal{L})^{-1}(\Sigma + Q(v,v) + R(v,v,v)) \in \left(L^\infty\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)\right)^3 \tag{4.31}$$

在闭球上限制为一个压缩映射

$$\left\{v \in \left(L^\infty\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)\right)^3 \,\middle|\, \|v\|_{\left(L^\infty\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)\right)^3} \le (\Lambda\delta)^N\right\}. \tag{4.32}$$

证明。 由上述估计可直接证明，该算子将球映射到其自身（4.25),(4.26), (4.27), 以及 (4.29). 只需简单计算即可证明其压缩性

$$\begin{aligned}&\left\|(\mathrm{Id} - \mathcal{L})^{-1}(\Sigma + Q(v,v) + R(v,v,v)) + (\mathrm{Id} - \mathcal{L})^{-1}(\Sigma + Q(w,w) + R(w,w,w))\right\|_{\left(L^\infty\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)\right)^3}\\ &\le \Lambda\left(\|Q(v,v) - Q(w,w)\|_{\left(L^\infty\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)\right)^3} + \|R(v,v,v) - R(w,w,w)\|_{\left(L^\infty\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)\right)^3}\right).\end{aligned} \tag{4.33}$$

可以估计

$$\begin{aligned}\|Q(v,v) - Q(w,w)\|_{\left(L^\infty\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)\right)^3} &\le \Lambda\delta\sum_{n=0}^{N}(\Lambda\delta)^n(\Lambda\delta)^N\|v-w\|_{\left(L^\infty\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)\right)^3}\\ &\le (\Lambda\delta)^{N+1}\|v-w\|_{\left(L^\infty\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)\right)^3}\end{aligned} \tag{4.34}$$

and

$$\begin{aligned}\|R(v,v,v) - R(w,w,w)\|_{\left(L^\infty\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)\right)^3} &\le \Lambda\delta(\Lambda\delta)^{2N}\|v-w\|_{\left(L^\infty\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)\right)^3}\\ &(\Lambda\delta)^{2N+1}\|v-w\|_{\left(L^\infty\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)\right)^3},\end{aligned} \tag{4.35}$$

于是

$$\begin{aligned}&\left\|(\mathrm{Id} - \mathcal{L})^{-1}(\Sigma + Q(v,v) + R(v,v,v)) + (\mathrm{Id} - \mathcal{L})^{-1}(\Sigma + Q(w,w) + R(w,w,w))\right\|_{\left(L^\infty\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)\right)^3}\\ &\le \Lambda(\Lambda\delta)^{N+1}\left(1 + (\Lambda\delta)^N\right)\|v-w\|_{\left(L^\infty\left(W^{1,\infty}\cap W^{1,1}\right)\right)^3}\end{aligned} \tag{4.36}$$

并且当 δ 足够小时且 L 足够大时，可得 $\Lambda(\Lambda\delta)^{N_{(L)}+1}\left(1 + (\Lambda\delta)^{N_{(L)}}\right) < 1$，从而得到压缩性质。

□

5 定理证明的第三部分1.2

5.1 关于共振的节点

引理 *5.1.* 若 $n \in N(C)$ 是共振的，则若 $n \in N(C)$ 是共振的，则它只能是 *1*、*4*- 或 *5*-共振的。此外，若 $n \in N(C)$ 使得 $\{n' \le n \mid n' \in N(C)\}$ 仅包含共振节点，并且若我们用 $C(n) = \{n_1, \ldots, n_5\}$ 表示 n 的子节点（如定义 *3.18* ），则存在

$\mathcal{L}(C) \ni \ell < n$ 使得 $K_C(n) = K_C(n_5) = K_C(\ell)$，并且 $(K_C(n_i),\ K_C(n_5))$ 对所有 $i \in [\![1、\ 4]\!]$ 都是线性无关的。

证明。 第一条结论显然由五次薛定谔方程的非线性项得出：若节点 n的符号和颜色为（ι，η），则其子节点的符号和颜色分别为（ι，η）、（$-\iota$，η）、（$-\iota$，η）、（ι，η）和（ι，η）。

我们先对 n的高度使用归纳法来证明第一条断言。当 $h(n) = 1$时，由于 n 的子节点全是叶节点，结论显然成立。现在假设 $h(n) > 1$。若 n_5 是叶节点，则证明完成；否则，它是共振的，由归纳假设可知，存在 $\mathrm{L}(C) \ni \ell < n_5$ 使得$K_C(n_5) = K_C(\ell)$。

现在我们可以用第一条结论证明第二条结论。存在 $\ell_i \in \mathrm{L}(C)$ 使得 $K_C(n_i) = K_C(\ell_i)$，因此 $K_C(\ell_1) + K_C(\ell_2) = 0$, $K_C(\ell_3) + K_C(\ell_4) = 0$ 以及 $K_C(n) = K_C(\ell_5)$。这意味着$\sigma(\ell_1) = \ell_2$ 且 $\sigma(\ell_3) = \ell_4$。假设它们不是线性无关的，等价于假设 $\sigma(\ell_5) \in \{\ell_1, \ell_2\} \sqcup \{\ell_3, \ell_4\}$。在这种情况下，我们将得到矛盾的陈述 $K_C(\ell_i) = 0$，其中某些 $i \in [\![1,4]\!]$。□

引理 5.2。 设 C是一个配对，并假设 $n \in \mathcal{N}(C)$满足：$\mathcal{N}_n(C) := \{n' \leq n \mid n' \in \mathcal{N}(C)\}$ 中的所有元素都是共振节点。那么， $\Omega_{n'} = 0$ 对于所有 $n' \in \mathcal{N}_n(C)$，并且

$$\int_{I_n(t)} \prod_{n' \in \mathcal{N}_n(C)} e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\iota_{n'}\Omega_{n'}t_{n'}} \mathrm{d}t_{n'} = |\mathcal{M}(\mathcal{N}_n(C))| \frac{t^{|\mathcal{N}_n(C)|}}{|\mathcal{N}_n(C)|!}, \tag{5.1}$$

其中

$$I_n(t) := \left\{ \left(t_{\mathcal{N}(C) \ni n' \leq n}\right) \in [0,t]^{|\mathcal{N}_n(C)|} \;\middle|\; n_1 < n_2 \Rightarrow t_{n_1} < t_{n_2} \right\}. \tag{5.2}$$

证明。 由共振节点的定义可直接得到断言 $\Omega_{n'} = 0$ 对于所有 $n' \in \mathrm{N}_n(C)$ 成立，因此

$$\int_{I_n(t)} \prod_{n' \in \mathcal{N}_n(C)} e^{\mathrm{i}\iota\epsilon^{-1}\Omega_{n'}t_{n'}} \mathrm{d}t_{n'} = \sum_{\rho \in \mathcal{M}(\mathcal{N}_n(C))} \int_{0 \leq t_{\rho(1)} < \cdots < t_{\rho(n_n)} \leq t} \mathrm{d}\boldsymbol{t} = |\mathcal{M}(\mathcal{N}_n(C))| \frac{t^{n_n}}{n_n!}, \tag{5.3}$$

其中我们简记 $n_n := |\mathrm{N}_n(C)|$。 □

引理 5.3。 设 C 是一个配对，且 $n \in \mathcal{N}(C)$ 满足 $\mathcal{N}(C) \ni n' < n$ 蕴含 n' 是共振的。我们有

$$\left| \int_{I_n(t)} \prod_{n' \leq n} e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\Omega_{n'}t_{n'}} \mathrm{d}t_{n'} \right| \leq \begin{cases} \frac{t^{n_n}}{n_n} & \text{if } |\Omega_n| \leq 3\epsilon\delta^{-1}, \\ 3t^{n_n - 1}\frac{\epsilon}{|\Omega_n|} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5.4}$$

证明。 参见 [27]中的引理 5.3。 □

引理 5.4. 设 $C \in \mathcal{C}_{n_1,n_2}$ 满足：存在 $n \in \mathcal{N}(C)$，使得若 $\mathcal{N}(C) \ni n' < n$，则 n' 是共振的。因此，对所有 $t \in [0,\delta]$,

$$\left| \int_{I_C(t)} \prod_{n' \in \mathcal{N}(C)} e^{\mathrm{i}\epsilon^{-1}\iota_{n'}\Omega_{n'}t_{n'}} \mathrm{d}t_{n'} \right| \leq \begin{cases} t^{n(C)} & \text{if } |\Omega_n| \leq 3\epsilon\delta^{-1}, \\ 3t^{n(C)-1}\frac{\epsilon}{|\Omega_n|} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5.5}$$

证明。 这是对 [27] 中引理 5.4 的一个小幅改编。 □

5.2 关于非共振节点

定理 5.5。 存在 $\Lambda, \alpha > 0$，使得对于所有至少包含一个非共振节点的偶对 C，我们有

$$\sup_{t\in[0,\lambda]} \left|\mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t, k\right)\right| \le \Lambda^{n(C)+1}\epsilon^{\alpha} \tag{5.6}$$

对所有 $k \in \mathbb{Z}^d_L$。

证明。 我们假设 $n \in \mathcal{N}(C)$ 是非共振的，并且不失一般性地假设 $n \in \mathcal{N}(A)$，且对所有 $\mathcal{N}(A) \ni n' < n$，都有 n' 是共振的。我们应用引理 5.4 并使用 $\min\left(1, \frac{a}{b}\right) \le \frac{\sqrt{2}a}{|a+\mathrm{i}b|}$ 对所有 $a \ge 0$ 以及将 $a := 3\delta^{-1}$ 和 $b := \epsilon^{-1}|\Omega_n|$ 应用于 $b > 0$，从而

$$\left|\int_{I_C(t)} \prod_{n'\in\mathcal{N}(C)} e^{\mathrm{i}\iota\epsilon^{-1}\Omega_{n'}t_{n'}}\,\mathrm{d}t_{n'}\right| \le \frac{3\sqrt{2}\delta^{n(C)-1}}{\left|3\delta^{-1}+\mathrm{i}\epsilon^{-1}\Omega_n\right|}. \tag{5.7}$$

结合通常的界，我们因此得到

$$\left|\mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t, k\right)\right| \le \Lambda^{2n(C)+1}\delta^{n(C)-1}L^{-2n(C)d} \sum_{\substack{\kappa\in\mathcal{D}_k(C)\\ \kappa(\mathcal{L}(C)_+)\subseteq B_R(0)}} \frac{1}{\left|3\delta^{-1}+\mathrm{i}\epsilon^{-1}\Omega_n\right|}, \tag{5.8}$$

这里我们用到了 $|Q_{n'}|$ 的有界性。记 $C(n) = \{n_1, \dots, n_5\}$，并回顾集合 $C(n) \cap \mathrm{N}(C)$ 只包含共振节点或叶子。由引理 5.1 可知，存在 $\ell_1, \dots, \ell_5 \in \mathrm{L}(C)$，使得对所有 i，$K_C(n_i) = K_C(\ell_i)$。由于 n 不是共振的，我们可以假设 $K_C(n_1) + K_C(n_2)$ 不恒等于零。我们可以将 $(K_C(n_1), K_C(n_2))$ 补充为 $V(C)$ 的一组基，并得到

$$\left|\mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t, k\right)\right| \le \Lambda\Lambda^{n(C)}\delta^{n(C)-1}L^{-2d} \sum_{k_1,k_2\in B_R^{\mathbb{Z}^d_L}(0)} \frac{1}{\left|3\delta^{-1}+\mathrm{i}\epsilon^{-1}\left(\left|\sum_{i=1}^2 k_i\right|^2 - \sum_{i=1}^2 \iota_{n_i}|k_i|^2\right)\right|}. \tag{5.9}$$

利用定理 3.14 和 $n(C) \le |\ln\epsilon|$，我们得到 $\alpha > 0$ 使得

$$\sum_{k_1,k_2,k_3\in B_R^{\mathbb{Z}^d_L}(0)} \frac{1}{\left|3\delta^{-1}+\mathrm{i}\epsilon^{-1}\left(\left|\sum_{i=1}^3 k_i\right|^2 - \sum_{i=1}^3 \iota_{n_i}|k_i|^2\right)\right|} \le \Lambda L^{3d}\epsilon^{\alpha} \tag{5.10}$$

从而确实有

$$\left|\mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t, k\right)\right| \le \Lambda\Lambda^{n(C)}\delta^{n(C)-1}\epsilon^{\alpha} \tag{5.11}$$

并且，通过增大 Λ、减小 δ，即可得到所需的估计。 □

5.3 共振偶对的类型

我们将 $\mathrm{Res}_{n_1+n_2}(\iota,\iota',\eta,\eta') \subseteq \mathrm{C}^{\ \iota\ \iota'\ \eta\ \eta'}_{n_1\ n_2}$,,,定义为尺度为 n_1+n_2 且其所有节点均为共振节点的带符号且带颜色的偶对的子集。

利用

$$|I_C(t)| = |\mathcal{M}(\mathcal{N}(C))|\frac{t^n}{n!}, \tag{5.12}$$

我们对任意 $C\in\mathrm{Res}_n(\iota,\ \iota',\ \eta,\ \eta')$，得到

$$\mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t,k\right)=|\mathcal{M}(\mathcal{N}(C))|\frac{t^n}{n!}(-\mathrm{i})^nL^{-2dn}\sum_{\kappa\in\mathcal{D}_k(C)}\prod_{n\in\mathcal{N}(C)}\iota_nQ_n\prod_{\ell\in\mathcal{L}(C)_+}M^{\eta_\ell,\eta_{\sigma(\ell)}}(\kappa(\ell)).\tag{5.13}$$

引理 *5.6*。设 $n>0$和 $C\in Res_n(\iota,\iota',\eta,\eta')$。存在偶对 $C_i\in Res_{n_i}\left(\iota_i,\iota_i',\eta_i,\eta_i'\right)$, $i=1$、*2*、*3*，使得若记 $C_i=:\left(A_i、\ A_i'、\ \sigma_i\right)$并定义 $\sigma:L\left(C_1\right)\sqcup L\left(C_2\right)\sqcup L\left(C_3\right)\to L\left(C_1\right)\sqcup L\left(C_2\right)\sqcup L\left(C_3\right)$ 为 $\sigma|_{L(C_i)}:=\sigma_i$，那么只能出现以下构型（所有可能的共振根示意图见图 *5.1*）。

$$\begin{aligned}
C&=\left(\bullet\left(((A_3,\iota,\eta),(A_1',-\iota,\eta),(A_2',-\iota,\eta),(A_1,\iota,\overline{\eta}),(A_2,\iota,\overline{\eta})),\iota,\eta\right),(A_3',-\iota,\eta'),\sigma\right),\\
C&=\left(\bullet\left(((A_3,\iota,\eta),(A_2',-\iota,\eta),(A_1',-\iota,\eta),(A_1,\iota,\overline{\eta}),(A_2,\iota,\overline{\eta})),\iota,\eta\right),(A_3',-\iota,\eta'),\sigma\right),\\
C&=\left(\bullet\left(((A_1,\iota,\eta),(A_1',-\iota,\eta),(A_2',-\iota,\eta),(A_3,\iota,\overline{\eta}),(A_2,\iota,\overline{\eta})),\iota,\eta\right),(A_3',-\iota,\eta'),\sigma\right),\\
C&=\left(\bullet\left(((A_1,\iota,\eta),(A_2',-\iota,\eta),(A_1',-\iota,\eta),(A_3,\iota,\overline{\eta}),(A_2,\iota,\overline{\eta})),\iota,\eta\right),(A_3',-\iota,\eta'),\sigma\right),\\
C&=\left(\bullet\left(((A_1,\iota,\eta),(A_1',-\iota,\eta),(A_2',-\iota,\eta),(A_2,\iota,\overline{\eta}),(A_3,\iota,\overline{\eta})),\iota,\eta\right),(A_3',-\iota,\eta'),\sigma\right),\\
C&=\left(\bullet\left(((A_1,\iota,\eta),(A_2',-\iota,\eta),(A_1',-\iota,\eta),(A_2,\iota,\overline{\eta}),(A_3,\iota,\overline{\eta})),\iota,\eta\right),(A_3',-\iota,\eta'),\sigma\right),\\
C&=\left((A_3',\iota,\eta),\bullet\left(((A_3,-\iota,\eta'),(A_1',\iota,\eta'),(A_2',\iota,\eta'),(A_1,-\iota,\overline{\eta}'),(A_2,-\iota,\overline{\eta}')),-\iota,\eta'\right),\sigma\right),\\
C&=\left((A_3',\iota,\eta),\bullet\left(((A_3,-\iota,\eta'),(A_2',\iota,\eta'),(A_1',\iota,\eta'),(A_1,-\iota,\overline{\eta}'),(A_2,-\iota,\overline{\eta}')),-\iota,\eta'\right),\sigma\right),\\
C&=\left((A_3',\iota,\eta),\bullet\left(((A_1,-\iota,\eta'),(A_1',\iota,\eta'),(A_2',\iota,\eta'),(A_3,-\iota,\overline{\eta}'),(A_2,-\iota,\overline{\eta}')),-\iota,\eta'\right),\sigma\right),\\
C&=\left((A_3',\iota,\eta),\bullet\left(((A_1,-\iota,\eta'),(A_2',\iota,\eta'),(A_1',\iota,\eta'),(A_3,-\iota,\overline{\eta}'),(A_2,-\iota,\overline{\eta}')),-\iota,\eta'\right),\sigma\right),\\
C&=\left((A_3',\iota,\eta),\bullet\left(((A_1,-\iota,\eta'),(A_1',\iota,\eta'),(A_2',\iota,\eta'),(A_2,-\iota,\overline{\eta}'),(A_3,-\iota,\overline{\eta}')),-\iota,\eta'\right),\sigma\right),\\
C&=\left((A_3',\iota,\eta),\bullet\left(((A_1,-\iota,\eta'),(A_2',\iota,\eta'),(A_1',\iota,\eta'),(A_2,-\iota,\overline{\eta}'),(A_3,-\iota,\overline{\eta}')),-\iota,\eta'\right),\sigma\right)
\end{aligned}\tag{5.14}$$

如果属于前六种情形中的任意一种，我们就说配对 C的左树上发生了共振分支；否则，我们就说共振分支发生在右树上。在记号中，我们将 $\left(A_i、\ A_i'、\ \sigma_i\right)$视为子耦合对，其中 $\sigma_i:=\sigma|_{\mathcal{L}(A_i)\sqcup\mathcal{L}(A_i')}$。此外，$\mathrm{Res}^n(\iota,\iota,\eta,\eta')=\emptyset$。

证明。由于 $n>0$，$\mathrm{R}(C)\cap\mathrm{N}(C)\neq\emptyset$。根据引理 5.1，每个节点只能是 1、4 或 5-共振节点；在每种情形下，左树或右树的子树都可以与 C的右树或左树配对。也就是说，如果 $\mathrm{R}(C)\cap\mathrm{N}(C)$ 中的某个元素是一个 i-共振节点（其中 $i\in\{1,4,5\}$），那么就有四种可能。共振分支可能发生在 C的左树或右树上；无论发生在哪里，其余的上耦合对彼此配对都有两种方式（见图 5.1）。式 (5.14) 的前六种情形涵盖了共振分支发生在C 的左树上的所有可能性，其余情形则对应共振分支发生在 C的右树上。式 (5.14) 的第一、二、七、八行描述 1-共振根。第三、四、九、十行描述 4-共振根，其余四行描述 5-共振根。

最后，假设 $\mathrm{Res}_n(\iota,\iota',\eta,\eta')\neq\emptyset$。若 $n=0$，显然有 $\iota=-\iota'$。现在假设 $n>0$，且 $C\in\mathrm{Res}_n(\iota,\iota',\eta,\eta')$。前述断言意味着 $C_1\in\mathrm{Res}^{n_1+n_1'}(\iota,-\iota,\eta,\eta)$、 $C_2\in\mathrm{Res}^{n_2+n_2'}(\iota,-\iota,\eta,\eta)$，以及 $C_3\in\mathrm{Res}^{n_3+n_3'}(\iota,\iota',\eta,\eta')$。又由于 $n_3+n_3'<n$，我们得到 $\iota'=-\iota$，从而完成归纳步骤。□

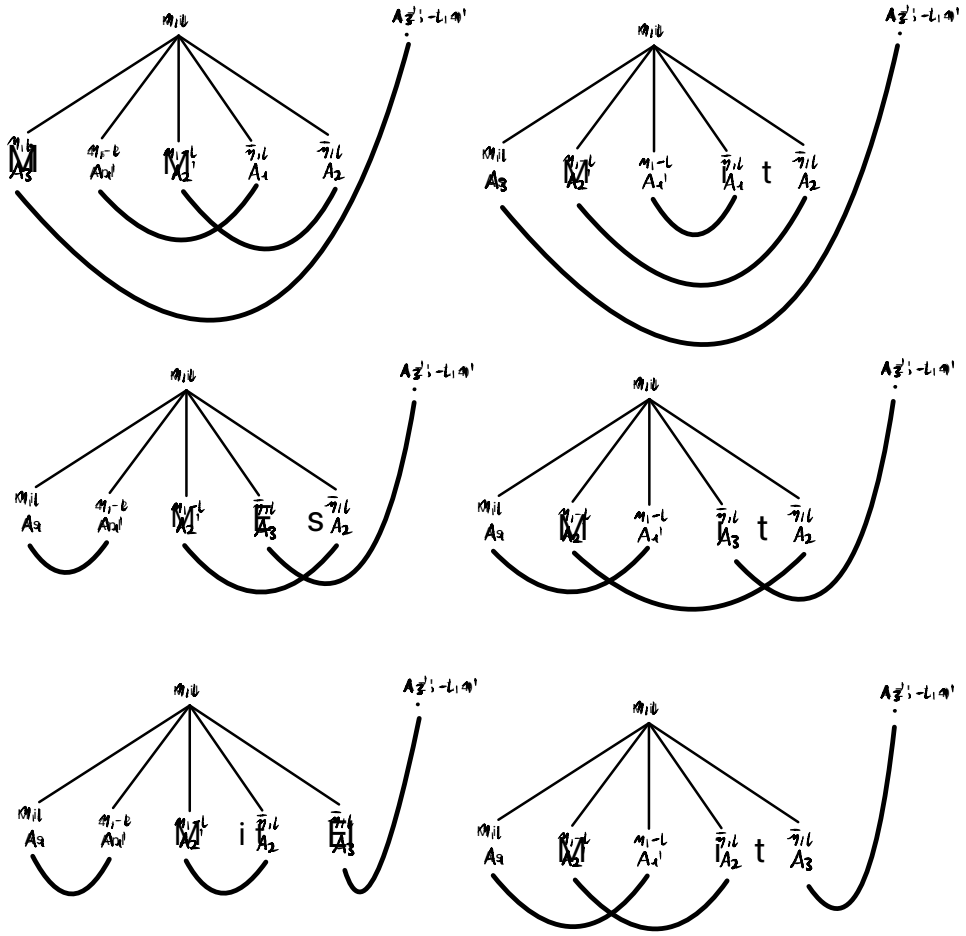

图5.1：这是（5.14）的前六种情形，其中共振分支发生在左树上。其余六种情形可通过将左树与右树互换，并交换符号$\iota \leftrightarrow -\iota$和颜色$\eta \leftrightarrow \eta'$绘出。

从现在起，我们记$\mathrm{Res}_n(\iota,\eta,\eta') = \mathrm{Res}_n(\iota,-\iota,\eta,\eta')$。我们通过查看子树的指标，为等式(5.14)的每种情况标注一个编码。前六个偶对分别编码为$(3,1',2',1,2)$、$(3,2',1',1,2)$、$(1,1',2',3,2)$、$(1,2',1',3,2)$、$(1,1',2',2,3)$和$(1,2',1',2,3)$。利用指标集$\{l,r\}$区分共振分支发生在左树(l)还是右树(r)中，便可为等式(5.14)中的所有可能情况唯一命名。

引理5.7 。对于任意共振对（所有情形见引理5.6），存在一个典范双射 *on*

$$\mathrm{D}_k(C) \cong \{(k_1,\ k_2,\ \kappa_1,\ \kappa_2,\ \kappa_3)\,|\,(k_1,\ k_2) \in \mathbb{Z}_L^d \times \mathbb{Z}_L^d,\ (\kappa_1,\ \kappa_2,\ \kappa_3) \in \mathrm{D}_{-k_1}(C_1) \times \mathrm{D}_{-k_2}(C_2) \times \mathrm{D}_k(C_3)\} =: \tilde{\mathrm{D}}_k(C)。 \tag{5.15}$$

此外，

$$\mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t,k\right) = |\mathcal{M}(\mathcal{N}(C))|\frac{t^n}{n!}\tilde{\mathcal{J}}_C(k), \tag{5.16}$$

其中

$$\tilde{\mathcal{J}}_C(k) \coloneqq (-\mathrm{i})^n L^{-2dn(C)} \sum_{\kappa \in \mathcal{D}_k(C)} \prod_{n \in \mathcal{N}(C)} \iota_n Q_n \prod_{\ell \in \mathcal{L}(C)_+} M^{\eta_\ell, \eta_{\sigma(\ell)}}(\kappa(\ell)) \tag{5.17}$$

可递归地写为

$$\tilde{\mathcal{J}}_C(k) = -\mathrm{i}\iota_{r_A} L^{-2d} \left[\sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_L^d} Q_{r_A} \tilde{\mathcal{J}}_{C_1}(-k_1) \tilde{\mathcal{J}}_{C_2}(-k_2) \right] \tilde{\mathcal{J}}_{C_3}(k). \tag{5.18}$$

˜证明。 我们定义映射 $\psi\colon \mathrm{D}_k(C) \to \mathrm{D}_k(C)$ 如下

$$\psi(\kappa) \coloneqq \left(K_C(r_{A_1})(\kappa), K_C(r_{A_2})(\kappa), \kappa|_{\mathcal{L}(C_1)_+}, \kappa|_{\mathcal{L}(C_2)_+}, \kappa|_{\mathcal{L}(C_3)_+} \right). \tag{5.19}$$

由于 $\mathrm{L}(C_1)_+ \sqcup \mathrm{L}(C_2)_+ \sqcup \mathrm{L}(C_3)_+ = \mathrm{L}(C)_+$，映射 ψ 是良定义的单射。现在取 $(k_1, k_2, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \in \tilde{\mathrm{D}}_k(C)$，并定义 $\kappa \in \left(\mathbb{R}^d\right)^{\mathcal{L}(C)^+}$如下

$$\kappa(\ell) \coloneqq \begin{cases} \kappa_1(\ell) & \text{if } \ell \in \mathcal{L}(C_1), \\ \kappa_2(\ell) & \text{if } \ell \in \mathcal{L}(C_2), \\ \kappa_3(\ell) & \text{if } \ell \in \mathcal{L}(C_3). \end{cases} \tag{5.20}$$

因此，根据定义，$\operatorname{Im}\kappa \subseteq \mathbb{Z}_L^d$和 $K_C(r_A)(\kappa) = k_1 - k_1 + k_2 - k_2 + k = k$。这表明，确实有$\kappa \in \mathrm{D}_K(C)$，且 $\psi(\kappa) = (k_1, k_2, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$，这是由 κ 的构造得到的。方程 (5.20) 正是使ψ 成为典范映射的原因。现在我们可以利用双射 ψ 来改写

$$\begin{aligned} &\sum_{\kappa \in \mathcal{D}_k(C)} \prod_{n \in \mathcal{N}(C)} \iota_n Q_n \prod_{\ell \in \mathcal{L}(C)_+} M^{\eta_\ell, \eta_{\sigma(\ell)}}(\kappa(\ell)) \\ &= \iota_{r_A} \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_L^d} Q_{r_A} \sum_{\kappa_1 \in \mathcal{D}_{-k_1}(C_1)} \prod_{n \in \mathcal{N}(C_1)} \iota_n Q_n \prod_{\ell \in \mathcal{L}(C_1)_+} M^{\eta_\ell, \eta_{\sigma(\ell)}}(\kappa_1(\ell)) \\ &\quad \cdot \sum_{\kappa_2 \in \mathcal{D}_{-k_2}(C_2)} \prod_{n \in \mathcal{N}(C_2)} \iota_n Q_n \prod_{\ell \in \mathcal{L}(C_2)_+} M^{\eta_\ell, \eta_{\sigma(\ell)}}(\kappa_2(\ell)) \\ &\quad \cdot \sum_{\kappa_3 \in \mathcal{D}_k(C_3)} \prod_{n \in \mathcal{N}(C_3)} \iota_n Q_n \prod_{\ell \in \mathcal{L}(C_3)_+} M^{\eta_\ell, \eta_{\sigma(\ell)}}(\kappa_3(\ell)). \end{aligned} \tag{5.21}$$

将式（5.21）代入定义式（5.17），证明即告完成。 □

5.4 从共振对到三叉树

我们记

$$\begin{aligned} &\mathrm{Res}_n^{\mathrm{map}}(\iota, \eta, \eta') \coloneqq \{(C, \rho) \mid C \in \mathrm{Res}_n(\iota, \eta, \eta') \text{ and } \rho\colon \mathrm{N}(C) \to \mathbb{N}^* \text{严格递增且单射}\}, \mathrm{Res}_n^{\mathrm{map}}(\iota, \\ &\eta, \eta', M) \coloneqq \{(C, \rho) \in \mathrm{Res}_n^{\mathrm{map}}(\iota, \eta, \eta') \mid \text{最大 } \operatorname{Im}\rho = M\}, \\ &\mathrm{Res}_n^{\mathrm{ord}}(\iota, \eta, \eta') \coloneqq \{(C, \rho) \mid C \in \mathrm{Res}_n(\iota, \eta, \eta') \text{ and } \rho \in \mathrm{M}(\mathrm{N}(C))\}, \\ &\mathrm{Res}_n^{\mathrm{ord}}(\iota, \eta, \eta', M) \coloneqq \{(C, \rho) \in \mathrm{Res}_n^{\mathrm{ord}}(\iota, \eta, \eta') \mid \max \operatorname{Im}\rho = M\}。 \end{aligned} \tag{5.22}$$

定义 5.8。 我们定义三叉树。

$$\tilde{\mathcal{G}}_0 := \{\perp\}, \tag{5.23}$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{n+1} := \bigsqcup_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ i,j\in\{1,\dots,6\}}} \{\bullet_{il}(G_1,G_2,G_3), \bullet_{jl}(G_1,G_2,G_3) \mid (G_1,G_2,G_3) \in \tilde{\mathcal{G}}_{n_1}\times\tilde{\mathcal{G}}_{n_2}\times\tilde{\mathcal{G}}_{n_3}\}, \tag{5.24}$$

其中，节点 $\bullet_{il}$ 表示引理5.6 中的前六种情况，而 $\bullet_{ir}$ 表示其余六种情况。下标 l 和 r 分别表示左和右，并表示共振对中的左树或右树是否按照引理5.6的含义分支为子树。记

$$\mathrm{G}_n^{\mathrm{map}}(\iota,(\eta,\eta')) := \{(G,\rho) \mid G\in \mathrm{G}_n(\iota,(\eta,\eta')),\ \text{且}\ \rho\mid \mathrm{N}(C)\to\mathbb{N}^*\ \text{严格递增且单射}\},\ \mathrm{G}_n^{\mathrm{ord}}(\iota,(\eta,\eta')) := \{(G,\rho) \mid G\in \mathrm{G}_n(\iota,(\eta,\eta')),\ \text{且}\ \rho\in \mathrm{M}(\mathrm{N}(G))\},$$

$$\mathrm{G}_n^{\mathrm{map}}(\iota,(\eta,\eta'),M) := \{(B,\rho)\in \mathrm{G}_n^{\mathrm{map}}(\iota,(\eta,\eta')) \mid \max \mathrm{Im}\,\rho = M\}。 \tag{5.25}$$

注 *5.9*。 注意，$\mathrm{Res}_n^{\mathrm{ord}}(\iota,\eta,\eta') = \mathrm{Res}_n^{\mathrm{map}}(\iota,\eta,\eta',n)$，且 $\mathrm{G}_n^{\mathrm{ord}}(\iota,(\eta,\eta')) = \mathrm{G}_n^{\mathrm{map}}(\iota,(\eta,\eta'),n)$。

定义 5.10。递归地定义映射 $\Upsilon\colon \mathrm{G}_n^{\mathrm{map}}(\iota,(\eta,\eta'),M)\to \mathrm{Res}_n^{\mathrm{map}}(\iota,\eta,\eta',M)$。若 $n=0$ then $G\in \mathrm{G}_0^{\mathrm{map}}(\iota,(\eta,\eta'),M)$ 具有形式 $G=(\perp,\iota,(\eta,\eta'))$，则令 $\Upsilon(G) := ((\perp,\iota,\eta),(\perp,-\iota,\eta'),\sigma)$，其中 σ 是显然的配对。若 $n>0$，则任意 $(G,\rho)\in \mathrm{G}_n^{\mathrm{map}}(\iota,(\eta,\eta'),M)$ 都可唯一分解为 $G=(\bullet_\star(G_1,G_2,G_3),\iota,(\eta,\eta'))$，其中 $(G_i,\rho_i)\in \mathrm{G}_{n_i}^{\mathrm{map}}(\iota_i,(\eta_i,\eta_i'))$，且 $n_1+n_2+n_3=n-1$、$\bigstar\in\{1l,\dots,6l,1r,\dots,6r\}$ 和 $\rho_i := \rho|_{N(G_i)}$。我们的三叉树的符号和颜色规则如下：

$$\iota_i = \begin{cases} \iota & \text{if } \star\in\{1l,\dots,6l\}, \\ -\iota & \text{if } \star\in\{1r,\dots,6r\}, \end{cases} \quad (\eta_i,\eta_i') = \begin{cases} (\overline{\eta},\eta) & \text{if } i=1,2,\ \star\in\{1l,2l\}, \\ (\eta,\eta') & \text{if } i=3,\ \star\in\{1l,2l\}, \\ (\eta,\eta) & \text{if } i=1,\ \star\in\{3l,\dots,6l\}, \\ (\overline{\eta},\eta) & \text{if } i=2,\ \star\in\{3l,\dots,6l\}, \\ (\overline{\eta},\eta') & \text{if } i=3,\ \star\in\{3l,\dots,6l\}, \\ (\overline{\eta}',\eta') & \text{if } i=1,2,\ \star\in\{1r,2r\}, \\ (\eta',\eta) & \text{if } i=3,\ \star\in\{1r,2r\}, \\ (\eta',\eta') & \text{if } i=1,\ \star\in\{3r,\dots,6r\}, \\ (\overline{\eta}',\eta') & \text{if } i=2,\ \star\in\{3r,\dots,6r\}, \\ (\overline{\eta}',\eta) & \text{if } i=3,\ \star\in\{3r,\dots,6r\} \end{cases} \tag{5.26}$$

令 $\rho_i := \rho|_{N(G_i)}$，我们可以假设 $(C_i,\tilde{\rho}_i) := \Upsilon(G_i,\rho_i)\in \mathrm{Res}_{n_i}(\iota_i,\eta_i,\eta_i')$（从左到右）已经

定义完毕，并设定 $C_i = (A_i, A_i', \sigma_i)$，从而我们可以定义

$$\Upsilon(G,\rho) \coloneqq \begin{cases} ((\bullet(((A_3,\iota,\eta),(A_1',-\iota,\eta),(A_2',-\iota,\eta),(A_1,\iota,\overline{\eta}),(A_2,\iota,\overline{\eta})),\iota,\eta),(A_3',-\iota,\eta'),\sigma),\tilde{\rho}) & \text{if } \star = 1l,\\ ((\bullet(((A_3,\iota,\eta),(A_2',-\iota,\eta),(A_1',-\iota,\eta),(A_1,\iota,\overline{\eta}),(A_2,\iota,\overline{\eta})),\iota,\eta),(A_3',-\iota,\eta'),\sigma),\tilde{\rho}) & \text{if } \star = 2l,\\ ((\bullet(((A_1,\iota,\eta),(A_1',-\iota,\eta),(A_2',-\iota,\eta),(A_3,\iota,\overline{\eta}),(A_2,\iota,\overline{\eta})),\iota,\eta),(A_3',-\iota,\eta'),\sigma),\tilde{\rho}) & \text{if } \star = 3l,\\ ((\bullet(((A_1,\iota,\eta),(A_2',-\iota,\eta),(A_1',-\iota,\eta),(A_3,\iota,\overline{\eta}),(A_2,\iota,\overline{\eta})),\iota,\eta),(A_3',-\iota,\eta'),\sigma),\tilde{\rho}) & \text{if } \star = 4l,\\ ((\bullet(((A_1,\iota,\eta),(A_1',-\iota,\eta),(A_2',-\iota,\eta),(A_2,\iota,\overline{\eta}),(A_3,\iota,\overline{\eta})),\iota,\eta),(A_3',-\iota,\eta'),\sigma),\tilde{\rho}) & \text{if } \star = 5l,\\ ((\bullet(((A_1,\iota,\eta),(A_2',-\iota,\eta),(A_1',-\iota,\eta),(A_2,\iota,\overline{\eta}),(A_3,\iota,\overline{\eta})),\iota,\eta),(A_3',-\iota,\eta'),\sigma),\tilde{\rho}) & \text{if } \star = 6l,\\ ((A_3',\iota,\eta),\bullet(((A_3,-\iota,\eta'),(A_1',\iota,\eta'),(A_2',\iota,\eta'),(A_1,-\iota,\overline{\eta}'),(A_2,-\iota,\overline{\eta}')),-\iota,\eta'),\sigma),\tilde{\rho}) & \text{if } \star = 1r,\\ ((A_3',\iota,\eta),\bullet(((A_3,-\iota,\eta'),(A_2',\iota,\eta'),(A_1',\iota,\eta'),(A_1,-\iota,\overline{\eta}'),(A_2,-\iota,\overline{\eta}')),-\iota,\eta'),\sigma),\tilde{\rho}) & \text{if } \star = 2r,\\ ((A_3',\iota,\eta),\bullet(((A_1,-\iota,\eta'),(A_1',\iota,\eta'),(A_2',\iota,\eta'),(A_3,-\iota,\overline{\eta}'),(A_2,-\iota,\overline{\eta}')),-\iota,\eta'),\sigma),\tilde{\rho}) & \text{if } \star = 3r,\\ ((A_3',\iota,\eta),\bullet(((A_1,-\iota,\eta'),(A_2',\iota,\eta'),(A_1',\iota,\eta'),(A_3,-\iota,\overline{\eta}'),(A_2,-\iota,\overline{\eta}')),-\iota,\eta'),\sigma),\tilde{\rho}) & \text{if } \star = 4r,\\ ((A_3',\iota,\eta),\bullet(((A_1,-\iota,\eta'),(A_1',\iota,\eta'),(A_2',\iota,\eta'),(A_2,-\iota,\overline{\eta}'),(A_3,-\iota,\overline{\eta}')),-\iota,\eta'),\sigma),\tilde{\rho}) & \text{if } \star = 5r,\\ ((A_3',\iota,\eta),\bullet(((A_1,-\iota,\eta'),(A_2',\iota,\eta'),(A_1',\iota,\eta'),(A_2,-\iota,\overline{\eta}'),(A_3,-\iota,\overline{\eta}')),-\iota,\eta'),\sigma),\tilde{\rho}) & \text{if } \star = 6r, \end{cases} \tag{5.27}$$

其中 $\tilde{\rho}|_{\mathcal{N}(C_i)} \coloneqq \tilde{\rho}_i$ 和 $\tilde{\rho}(\curlywedge_A) \coloneqq M$。映射 Υ 确实是良定义的。

定义 5.11。现在我们递归地定义映射 $\tilde{\Upsilon}\colon \mathrm{Res}_n^{\mathrm{map}}(\iota,\eta,\eta',M) \to \mathrm{G}_n^{\mathrm{map}}(\iota,(\eta,\eta'),M)$。若 $n=0$，则 $C \in \mathrm{Res}_n^{\mathrm{map}}(\iota,\eta,\eta',M)$ 将具有唯一可能的形式 $C = ((\perp,\iota,\eta),(\perp,-\iota,\eta'),\sigma)$，其中 σ 是显然的配对。在这种情况下，我们令 $\tilde{\Upsilon}(C) \coloneqq (\perp,\iota,(\eta,\eta'))$。若 $n>0$ 且 $(C,\rho) \in \mathrm{Res}_n^{\mathrm{map}}(\iota,\eta,\eta')$，则我们可以写作 $C = (A,A',\sigma)$，并按照引理 5.6 中的写法提取 C_1、C_2 和 C_3，并记为 $\rho_i \coloneqq \rho|_{\mathcal{N}(C_i)}$。更准确地说，

$$C_1 = \begin{cases} ((A_1,\iota,\overline{\eta}),(A_1',-\iota,\eta),\sigma_1) & \text{if } \texttt{line} = 1,2 \ \&\ \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_A),\\ ((A_1,\iota,\eta),(A_1',-\iota,\eta),\sigma_1) & \text{if } \texttt{line} = 3,4,5,6 \ \&\ \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_A),\\ ((A_1,-\iota,\overline{\eta}'),(A_1',\iota,\eta'),\sigma_1) & \text{if } \texttt{line} = 7,8 \ \&\ \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_{A'}),\\ ((A_1,-\iota,\eta'),(A_1',\iota,\eta'),\sigma_1) & \text{if } \texttt{line} = 9,10,11,12 \ \&\ \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_{A'}). \end{cases} \tag{5.28}$$

$$C_2 = \begin{cases} ((A_2,\iota,\overline{\eta}),(A_2',-\iota,\eta),\sigma_2) & \text{if } \texttt{line} = 1,2 \ \&\ \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_A),\\ ((A_2,\iota,\overline{\eta}),(A_2',-\iota,\eta),\sigma_2) & \text{if } \texttt{line} = 3,4,5,6 \ \&\ \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_A),\\ ((A_2,-\iota,\overline{\eta}'),(A_2',\iota,\eta'),\sigma_2) & \text{if } \texttt{line} = 7,8 \ \&\ \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_{A'}),\\ ((A_2,-\iota,\overline{\eta}'),(A_2',\iota,\eta'),\sigma_2) & \text{if } \texttt{line} = 9,10,11,12 \ \&\ \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_{A'}). \end{cases} \tag{5.29}$$

$$C_3 = \begin{cases} ((A_3,\iota,\eta),(A_3',-\iota,\eta'),\sigma_3) & \text{if } \texttt{line} = 1,2 \ \&\ \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_A),\\ ((A_3,\iota,\overline{\eta}),(A_3',-\iota,\eta'),\sigma_3) & \text{if } \texttt{line} = 9,10,11,12 \ \&\ \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_A),\\ ((A_3,-\iota,\eta'),(A_3',\iota,\eta),\sigma_3) & \text{if } \texttt{line} = 1,2 \ \&\ \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_{A'}),\\ ((A_3,-\iota,\overline{\eta}'),(A_3',\iota,\eta),\sigma_3) & \text{if } \texttt{line} = 9,10,11,12 \ \&\ \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_{A'}) \end{cases} \tag{5.30}$$

˜其中，line 表示方程 (5.14) 中的各行以及 $\sigma_i \coloneqq \sigma|_{\mathcal{L}(C_i)}$。我们可以假设 $(G_i,\tilde{\rho}_i) \coloneqq \Upsilon(C_i,\rho_i)$

已定义并设定

$$\tilde{\Upsilon}(C,\rho) \coloneqq \begin{cases} ((\bullet_{1l}(G_1,G_2,G_3),\iota,(\eta,\eta')),\tilde{\rho}) & \text{if } \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_A) \ \&\ \mathrm{code} = (31'2'12), \\ ((\bullet_{2l}(G_1,G_2,G_3),\iota,(\eta,\eta')),\tilde{\rho}) & \text{if } \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_A) \ \&\ \mathrm{code} = (32'1'12), \\ ((\bullet_{3l}(G_1,G_2,G_3),\iota,(\eta,\eta')),\tilde{\rho}) & \text{if } \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_A) \ \&\ \mathrm{code} = (11'2'32), \\ ((\bullet_{4l}(G_1,G_2,G_3),\iota,(\eta,\eta')),\tilde{\rho}) & \text{if } \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_A) \ \&\ \mathrm{code} = (12'1'32), \\ ((\bullet_{5l}(G_1,G_2,G_3),\iota,(\eta,\eta')),\tilde{\rho}) & \text{if } \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_A) \ \&\ \mathrm{code} = (11'2'23), \\ ((\bullet_{6l}(G_1,G_2,G_3),\iota,(\eta,\eta')),\tilde{\rho}) & \text{if } \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_A) \ \&\ \mathrm{code} = (12'1'23), \\ ((\bullet_{1r}(G_1,G_2,G_3),\iota,(\eta,\eta')),\tilde{\rho}) & \text{if } \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_{A'}) \ \&\ \mathrm{code} = (31'2'12), \\ ((\bullet_{2r}(G_1,G_2,G_3),\iota,(\eta,\eta')),\tilde{\rho}) & \text{if } \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_{A'}) \ \&\ \mathrm{code} = (32'1'12), \\ ((\bullet_{3r}(G_1,G_2,G_3),\iota,(\eta,\eta')),\tilde{\rho}) & \text{if } \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_{A'}) \ \&\ \mathrm{code} = (11'2'32), \\ ((\bullet_{4r}(G_1,G_2,G_3),\iota,(\eta,\eta')),\tilde{\rho}) & \text{if } \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_{A'}) \ \&\ \mathrm{code} = (12'1'32), \\ ((\bullet_{5r}(G_1,G_2,G_3),\iota,(\eta,\eta')),\tilde{\rho}) & \text{if } \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_{A'}) \ \&\ \mathrm{code} = (11'2'23), \\ ((\bullet_{6r}(G_1,G_2,G_3),\iota,(\eta,\eta')),\tilde{\rho}) & \text{if } \max \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\curlywedge_{A'}) \ \&\ \mathrm{code} = (12'1'23), \end{cases} \tag{5.31}$$

其中 $\tilde{\rho}|_{\mathcal{N}(G_i)} \coloneqq \tilde{\rho}_i$ 和 $\tilde{\rho}(\curlywedge_G) \coloneqq M$。

命题 5.12. 映射 Υ 和 $\tilde{\Upsilon}$ 实际上是双射，且 $\Upsilon^{-1} = \tilde{\Upsilon}$。

证明。由于所有定义都具有递归结构，我们可以通过归纳法证明 $\Upsilon \circ \Upsilon = \mathrm{Id}_{\mathrm{Res}_n^{\mathrm{map}}(\iota,\eta,\eta',M)}$。证明 $\Upsilon \circ \Upsilon = \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_n^{\mathrm{map}}(\iota,(\eta,\eta'),M)}$ 完全类似。对于 $n=0$，结论显然成立。现在假设 $n>0$，并设 $(C,\rho) \in \mathrm{Res}_n^{\mathrm{map}}(\iota,\eta,\eta',M)$，其中 $C=(A,A',\sigma)$，且先假设 $\rho(\curlywedge_A) = \max \mathrm{Im}\ \rho = M$。这使我们进入引理 5.6 中列出的前六种情形。为处于第一种情形，我们进一步假设，即

$$C = \left(\bullet\left(((A_3,\iota,\eta),(A_1',-\iota,\eta),(A_2',-\iota,\eta),(A_1,\iota,\overline{\eta}),(A_2,\iota,\overline{\eta})),\iota,\eta\right),(A_3',-\iota,\eta'),\sigma\right). \tag{5.32}$$

当然，Υ 的构造告诉我们，令 $C_i = (A_i, A_i', \sigma_i)$、$\sigma_i \coloneqq \sigma|_{\mathrm{L}(A_i)\sqcup\mathrm{L}(A_i')}$ 和 $\rho_i \coloneqq \rho|_{\mathcal{N}(C_i)}$，使得 $(C_1,\rho_1) \in \mathrm{Res}_{n_1}^{\mathrm{map}}(\iota,\eta,\eta,\max \mathrm{Im}\ \rho_1)$、$(C_2,\rho_2) \in \mathrm{Res}_{n_2}^{\mathrm{map}}(\iota,\eta,\eta,\max \mathrm{Im}\ \rho_2)$、以及 $(C_3,\rho_3) \in \mathrm{Res}_{n_3}^{\mathrm{map}}(\iota,\eta,\eta',\max \mathrm{Im}\ \rho_3)$，其中 $n_1+n_2+n_3 = n-1$。构造还指示我们令 $(B_1,\tilde{\rho}_1) \coloneqq \Upsilon(C_1,\rho_1) \in \mathrm{G}^{n_1}(\iota,(\eta,\eta),\max \mathrm{Im}\ \rho_1)$、$(B_2,\tilde{\rho}_2) \coloneqq \Upsilon(C_2,\rho_2) \in \mathrm{G}^{n_2}(\iota,(\eta,\eta),\max \mathrm{Im}\ \rho_2)$，以及 $(B_3,\tilde{\rho}_3) \coloneqq \Upsilon(C_3,\rho_3) \in \mathrm{G}^{n_3}(\iota,(\eta,\eta'),\max \mathrm{Im}\ \rho_1)$，从而使得 $\Upsilon(C,\rho) = ((\bullet_{1l}(G_1,G_2,G_3),\iota,(\eta,\eta'),M),\tilde{\rho})$，其中 $\tilde{\rho}|_{\mathcal{N}(G_i)} \coloneqq \tilde{\rho}_i$ 且 $\tilde{\rho}(\curlywedge_G) \coloneqq M$。根据归纳假设，我们有 $\Upsilon(G_i,\tilde{\rho}_i) = \Upsilon \circ \Upsilon(C_i,\rho_i) = (C_i,\rho_i)$。这恰好推出 $\Upsilon \circ \Upsilon(C,\rho) = (C,\rho)$。当然，这个归纳论证对其余 11 种情形也同样适用。□

5.5 三叉树重新呈现递归结构

定义 5.13. 我们定义 $(C,\rho_C) \in \mathrm{Res}_n^{\mathrm{map}}(\iota,\eta,\eta')$，

$$\mathcal{J}_{(C,\rho_C)}(t,k) \coloneqq (-\mathrm{i})^n L^{-2dn} \sum_{\kappa \in \mathcal{D}_k(C)} \prod_{n \in \mathcal{N}(C)} \iota_n Q_n \prod_{\ell \in \mathcal{L}(C)_+} M^{\eta_\ell,\eta_{\sigma(\ell)}}(\kappa(\ell)) \frac{t^n}{n!}. \tag{5.33}$$

对于任意的 $(G,\rho_G)\in \mathsf{G}_n^{\mathrm{map}}(\iota,(\eta,\eta'))$，我们令 $(C,\rho_C)=\Upsilon(G,\rho_G)$ 且 $\mathrm{H}_G^{\rho_G}:=\mathrm{J}_{\Upsilon(G,\rho_G)}$，并对任意 $G\in\mathsf{G}_n(\iota,(\eta,\eta'))$，令

$$\mathcal{H}_G:=\sum_{\rho_G\in\mathcal{M}(\mathcal{N}(G))}\mathcal{H}_G^{\rho_G}. \tag{5.34}$$

注记 *5.14.* 注意，对于满足以下条件的所有 $\rho_C\in\mathrm{M}(\mathrm{N}(C))$，均有 $\mathrm{J}_C(\epsilon^{-1}t,k)=|\mathrm{M}(\mathrm{N}(C))|\mathrm{J}_{(C,\rho_C)}(t,k)$：

$$\mathcal{J}_C(\epsilon^{-1}t,k)=\sum_{\rho_C\in\mathcal{M}(\mathcal{N}(C))}\mathcal{J}_{(C,\rho_C)}(t,k). \tag{5.35}$$

此外，若 $G\in\mathcal{G}_n(\iota,(\eta,\eta'))$ 且 $\rho_1,\rho_2\in\mathcal{M}(\mathcal{N}(G))$ 并且令 $(C_i,\tilde{\rho}_i):=\Upsilon(G,\rho_i)$，那么实际上~有 $C_1=C_2$。对于 Υ，类似的陈述实际上并不成立，因为共振对的左树或右树上可能出现共振分支（按引理 5.6的含义）。

引理 5.15. 假设 $n>0$ 和 $G\in\mathcal{G}_n(\iota,(\eta,\eta'))$ 可写为 $G=\bullet_\star(G_1,G_2,G_3)$，其中 G_i 分别具有尺度 n_i，使得 $n_1+n_2+n_3=n-1$。那么

$$|\mathcal{M}(\mathcal{N}(G))|=\frac{(n_1+n_2+n_3)!}{n_1!n_2!n_3!}|\mathcal{M}(\mathcal{N}(G_1))||\mathcal{M}(\mathcal{N}(G_2))||\mathcal{M}(\mathcal{N}(G_3))| \tag{5.36}$$

证明。如果 $(\rho_1,\rho_2,\rho_3)\in\mathrm{M}(\mathrm{N}(G_1))\times\mathrm{M}(\mathrm{N}(G_2))\times\mathrm{M}(\mathrm{N}(G_3))$，那么我们选取某个严格递增单射 $\mu_1\colon[\![1,n_1]\!]\to[\![1,n_1+n_2+n_3]\!]$，以及另一个严格递增单射 $\mu_2\colon[\![1,n_2]\!]\to[\![1,n_1+n_2+n_3]\!]$，使得 $\mathrm{Im}\,\mu_1\cap\mathrm{Im}\,\mu_2=\emptyset$。然后令 $\mu_3\colon[\![1,n_3]\!]\to[\![1,n_1+n_2+n_3]\!]$ 为唯一的严格递增单射，使得对 $i=1,2$，两者均有 $\mathrm{Im}\,\mu_3\cap\mathrm{Im}\,\mu_i=\emptyset$。现在，任意阶 $\rho\in\mathrm{M}(\mathrm{N}(G))$ 都可以表示为如下形式

$$\rho(n):=\begin{cases}\mu_1(\rho_1(n)) & \text{if } n\in\mathcal{N}(G_1),\\ \mu_3(\rho_2(n)) & \text{if } n\in\mathcal{N}(G_2),\\ \mu_3(\rho_3(n)) & \text{if } n\in\mathcal{N}(G_3).\end{cases} \tag{5.37}$$

因此显然，

$$|\mathcal{M}(\mathcal{N}(G))|=c|\mathcal{M}(\mathcal{N}(G_1))||\mathcal{M}(\mathcal{N}(G_2))||\mathcal{M}(\mathcal{N}(G_3))|, \tag{5.38}$$

其中 c 编码了不同的可能性，μ_1 和 μ_2 可以定义。最初，直接计数选择 μ_1 的方式数，得到 $(n_1+n_2+n_3)\cdots(n_2+n_3+1)=\frac{(n_1+n_2+n_3)!}{(n_2+n_3)!}$，但这个~~数量包含~~了 μ_1 像集的内部排列；这是错误的，因为 μ_1 应当是严格递增的。因此，我们必须将这个数除以 $n_1!$，从而得到 μ_1 的选择方式数为 $\binom{n_1+n_2+n_3}{n_1}$。选定 μ_1 后，我们选择 μ_2，并再次以朴素方式计数可能性，得到 $(n_2+n_3)\cdots(n_3+1)=\frac{(n_2+n_3)!}{n_3!}$；这个数同样包含了 μ_2 像点的所有可能排列，因此必须将它们除去~~，从~~而得到 $\binom{n_2+n_3}{n_2}$。于是，

$$c=\binom{n_1+n_2+n_3}{n_1}\binom{n_2+n_3}{n_2}=\frac{(n_1+n_2+n_3)!}{n_1!n_2!n_3!}=\binom{n_1+n_2+n_3}{n_1,n_2,n_3}. \tag{5.39}$$

□

命题 *5.16.* 设 $G\in\mathcal{G}_n(\iota,(\eta,\eta'))$。那么，若 $n=0$，$H_G(t,k)=M^{\eta,\eta',\iota}(k)$，且若 $n>0$，我们可以唯一地分解为 $G=(\bullet_\star(G_1,G_2,G_3),\iota,(\eta,\eta'))$，其中 $G_i\in\mathcal{G}_{n_i}(\iota_i,(\eta_i,\eta_i'))$，且 $n_1+n_2+n_3=n-1$

且 ι_i，η_i，η_i'取决于$\star\in\{1l$、……、$6l$，$1r$、……、$6r\}$。所有可能性均已列于式(5.26)。接下来得到递归结构

$$\mathcal{H}_G(t,k)=\begin{cases}-\mathrm{i}\iota\int_0^t\mathcal{H}_{G_3}(s,k)L^{-2d}\sum\limits_{k_1,k_2}\tilde{\zeta}^{\eta}_{j,\iota}(k_1,k_2,k)\mathcal{H}_{G_1}(s,-k_1)\mathcal{H}_{G_2}(s,-k_2)\mathrm{d}s & \text{if }\star\in\{1l,2l\}\\ -\mathrm{i}\iota\int_0^t\mathcal{H}_{G_3}(s,k)L^{-2d}\sum\limits_{k_1,k_2}\tilde{\zeta}^{\eta}_{3,\iota}(k_1,k_2,k)\mathcal{H}_{G_1}(s,k_1)\mathcal{H}_{G_2}(s,-k_2)\mathrm{d}s & \text{if }\star=\in\{3l,\dots,6l\}\\ \mathrm{i}\iota\int_0^t\mathcal{H}_{G_3}(s,-k)L^{-2d}\sum\limits_{k_1,k_2}\tilde{\zeta}^{\eta'}_{j,-\iota}(k_1,k_2,-k)\mathcal{H}_{G_1}(s,-k_1)\mathcal{H}_{G_2}(s,-k_2)\mathrm{d}s & \text{if }\star\in\{1r,2r\},\\ \mathrm{i}\iota\int_0^t\mathcal{H}_{G_3}(s,-k)L^{-2d}\sum\limits_{k_1,k_2}\tilde{\zeta}^{\eta'}_{j,-\iota}(k_1,k_2,-k)\mathcal{H}_{G_1}(s,k_1)\mathcal{H}_{G_2}(s,-k_2)\mathrm{d}s & \text{if }\star\in\{3r,\dots,6r\}.\end{cases}\tag{5.40}$$

证明。 </style}情形 根据定义成立。现在假设 。如果 $M(N())$ 且 $(,\rho_C)$ $=\Upsilon(G,\rho)$。当然，

$$\mathcal{H}_G=|\mathcal{M}(\mathcal{N}(G))|\mathcal{H}^{\rho}_G=|\mathcal{M}(\mathcal{N}(G))|\mathcal{J}^{\rho_C}_C=|\mathcal{M}(\mathcal{N}(G))|\frac{t^n}{n!}\tilde{\mathcal{J}}_C=:|\mathcal{M}(\mathcal{N}(G))|\frac{t^n}{n!}\tilde{\mathcal{H}}_G\tag{5.41}$$

从而 $\tilde{}\mathcal{H}_G:=\tilde{}\mathcal{J}_C$ 且这个定义是良定义的，因为若 $(C_i,\rho_i)=\Upsilon(G,\tilde{\rho}_i)$ 对于 $\tilde{\rho}_i\in\mathcal{M}(\mathcal{N}(G))$成立，则 $C_1=C_2$ 这是由 Υ的构造所致，见注 5.14。

令 $\star=1l$。在此情形下，$G_i\in\mathcal{G}^{\overline{n}_i}(\iota,(\eta,\eta))$ 对于 $i=1,2$ 以及 $G_3\in\mathcal{G}^{n_3}(\iota,(\eta,\eta'))$。此外，等式 (5.27) 蕴含

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}_G(k)=\tilde{\mathcal{J}}_C(k)&=-\mathrm{i}\iota_{\mathscr{r}_A}\tilde{\mathcal{J}}_{C_3}(k)L^{-2d}\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}^d_L}Q_{\mathscr{r}_A}\tilde{\mathcal{J}}_{C_1}(-k_1)\tilde{\mathcal{J}}_{C_2}(-k_2)\\&=-\mathrm{i}\iota_{\mathscr{r}_A}\tilde{\mathcal{J}}_{C_3}(k)L^{-2d}\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}^d_L}\tilde{\zeta}^{\eta}_{1,\iota}(k_1,k_2,k)\tilde{\mathcal{J}}_{C_1}(-k_1)\tilde{\mathcal{J}}_{C_2}(-k_2)\\&=-\mathrm{i}\iota_{\mathscr{r}_A}\tilde{\mathcal{H}}_{G_3}(k)L^{-2d}\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}^d_L}\tilde{\zeta}^{\eta}_{1,\iota}(k_1,k_2,k)\tilde{\mathcal{H}}_{G_1}(-k_1)\tilde{\mathcal{H}}_{G_2}(-k_2).\end{aligned}\tag{5.42}$$

现在可以通过归纳法证明

$$\mathcal{H}_G(t,k)=-\mathrm{i}\iota_{\mathscr{r}_A}\int_0^t\mathcal{H}_{G_3}(s,k)L^{-2d}\sum_{k_1,k_2}\tilde{\zeta}^{\eta}_{1,\iota}(k_1,k_2,k)\mathcal{H}_{G_1}(s,-k_1)\mathcal{H}_{G_2}(s,-k_2)\mathrm{d}s.\tag{5.43}$$

归纳过程如下。若 $n=0$，则无需证明。若 $n>0$，由引理 5.15，可得

$$\begin{aligned}&-\mathrm{i}\iota_{\mathscr{r}_A}\int_0^t\mathcal{H}_{G_3}(s,k)L^{-2d}\sum_{k_2,k_3}\tilde{\zeta}^{\eta}_{1,\iota}(k_1,k_2,k)\mathcal{H}_{G_1}(s,-k_1)\mathcal{H}_{G_2}(s,-k_2)\mathrm{d}s\\&=\tilde{\mathcal{H}}_G(k)\int_0^t\frac{s^{n_1+n_2+n_3}}{n_1!n_2!n_3!}\mathrm{d}s|\mathcal{M}(\mathcal{N}(G_1))||\mathcal{M}(\mathcal{N}(G_2))||\mathcal{M}(\mathcal{N}(G_3))|\\&=\tilde{\mathcal{H}}_G(k)\frac{t^n}{nn_1!n_2!n_3!}|\mathcal{M}(\mathcal{N}(G_1))||\mathcal{M}(\mathcal{N}(G_2))||\mathcal{M}(\mathcal{N}(G_3))|\\&=|\mathcal{M}(\mathcal{N}(G))|\tilde{\mathcal{H}}_G(k)\frac{t^n}{n!}=\mathcal{H}_G(t,k).\end{aligned}\tag{5.44}$$

证明其余 11 种情形的方法类似。 □

现在令

$$\rho_{L,n}^{(\eta,\eta'),\iota}(t) := \sum_{C\in \mathrm{Res}_n(\iota,\eta,\eta')} \mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t\right) = \sum_{(C,\rho)\in \mathrm{Res}_n^{\mathrm{ord}}(\iota,\eta,\eta')} \mathcal{J}_{(C,\rho)}(t) = \sum_{(G,\rho)\in \mathcal{G}_n^{\mathrm{ord}}(\iota,(\eta,\eta'))} \mathcal{H}_G^{\rho}(t)$$
$$\sum_{G\in\mathcal{G}_n(\iota,(\eta,\eta'))}\sum_{\rho\in\mathcal{M}(\mathcal{N}(G))} \mathcal{H}_G^{\rho}(t) = \sum_{G\in\mathcal{G}_n(\iota,(\eta,\eta'))} \mathcal{H}_G(t). \tag{5.45}$$

注 *5.17*。 如果（五次非线性薛定谔方程）的非线性项的度为 $2k+1$，那么对每个共振对，都会形成 $k+1$ 子偶对。类似地，可以构造共振对集合与 $(k+1)$元树之间的双射。

我们可以利用这样一个事实：如果 $n>0$，就能将 $G=(\bullet_\star(G_1,\ G_2,\ G_3),\ \iota,\ (\eta,\ \eta'))$ 分解为若干项e

$$G_1 \in \begin{cases} \mathcal{G}_{n_1}(\iota,(\overline{\eta},\eta)) & \text{if } \star = 1l,2l,\\ \mathcal{G}_{n_1}(\iota,(\eta,\eta)) & \text{if } \star = 3l,\dots,6l,\\ \mathcal{G}_{n_1}(-\iota,(\overline{\eta}',\eta')) & \text{if } \star = 1r,2r,\\ \mathcal{G}_{n_1}(-\iota,(\eta',\eta')) & \text{if } \star = 3r,\dots,6r, \end{cases} \quad G_2 \in \begin{cases} \mathcal{G}_{n_2}(\iota,(\overline{\eta},\eta)) & \text{if } \star = 1l,\dots,6l,\\ \mathcal{G}_{n_2}(-\iota,(\overline{\eta}',\eta')) & \text{if } \star = 1r,\dots,6r, \end{cases} \tag{5.46}$$

$$G_3 \in \begin{cases} \mathcal{G}_{n_3}(\iota,(\eta,\eta')) & \text{if } \star = 1l,2l,\\ \mathcal{G}_{n_3}(\iota,(\overline{\eta},\eta')) & \text{if } \star = 3l,\dots,6l,\\ \mathcal{G}_{n_3}(-\iota,(\eta',\eta)) & \text{if } \star = 1r,2r,\\ \mathcal{G}_{n_3}(-\iota,(\overline{\eta}',\eta)) & \text{if } \star = 3r,\dots,6r, \end{cases} \tag{5.47}$$

其中 $n_1+n_2+n_3=n-1$。

我们引入如下记号

$$\iota^\dagger := \begin{cases} \iota & \text{if } \dagger = r,\\ -\iota & \text{if } \dagger = l. \end{cases}, \ \eta^\dagger := \begin{cases} \eta & \text{if } \dagger = r,\\ \eta' & \text{if } \dagger = l \end{cases}, \ \overline{\dagger} := \begin{cases} l & \text{if } \dagger = r,\\ r & \text{if } \dagger = l. \end{cases} \text{ and } \tilde{\iota}^\dagger := \begin{cases} + & \text{if } \dagger = r,\\ - & \text{if } \dagger = l. \end{cases} \tag{5.48}$$

将其分解

$$\rho_{L,n}^{(\eta,\eta'),\iota} = \sum_{n_1+n_2+n_3=n-1}\sum_{\dagger\in\{l,r\}} \Bigg(\sum_{\substack{G_1\in\mathcal{G}_{n_1}(\iota^\dagger,(\overline{\eta^\dagger},\eta^\dagger))\\ G_2\in\mathcal{G}_{n_2}(\iota^\dagger,(\overline{\eta^\dagger},\eta^\dagger))\\ G_3\in\mathcal{G}_{n_3}(\iota^\dagger,(\eta^\dagger,\eta^{\overline{\dagger}}))}} \left(\mathcal{H}_{\bullet_{1\dagger}(G_1,G_2,G_3)} + \mathcal{H}_{\bullet_{2\dagger}(G_1,G_2,G_3)}\right)$$
$$+ \sum_{\substack{G_1\in\mathcal{G}_{n_1}(\iota^\dagger,(\eta^\dagger,\eta^\dagger))\\ G_2\in\mathcal{G}_{n_2}(\iota^\dagger,(\overline{\eta^\dagger},\eta^\dagger))\\ G_3\in\mathcal{G}_{n_3}(\iota^\dagger,(\overline{\eta^\dagger},\eta^{\overline{\dagger}}))}} \left(\mathcal{H}_{\bullet_{3\dagger}(G_1,G_2,G_3)} + \mathcal{H}_{\bullet_{4\dagger}(G_1,G_2,G_3)} + \mathcal{H}_{\bullet_{5\dagger}(G_1,G_2,G_3)} + \mathcal{H}_{\bullet_{6\dagger}(G_1,G_2,G_3)}\right)\Bigg) \tag{5.49}$$

利用命题5.16，我们得到

$$\rho_{L,n}^{(\eta,\eta'),\iota}(t,k)=\sum_{G\in\mathcal{G}_n(\iota,(\eta,\eta'))}\mathcal{H}_G=-\mathrm{i}\sum_{n_1+n_2+n_3=n-1}\sum_{\dagger\in\{l,r\}}\iota^{\dagger}$$
$$\Bigg[\sum_{\substack{G_1\in\mathcal{G}_{n_1}(\iota^{\dagger},(\overline{\eta^{\dagger}},\eta^{\dagger}))\\ G_2\in\mathcal{G}_{n_2}(\iota^{\dagger},(\overline{\eta^{\dagger}},\eta^{\dagger}))\\ G_3\in\mathcal{G}_{n_3}(\iota^{\dagger},(\eta^{\dagger},\overline{\eta^{\dagger}}))}}\sum_{l=1}^{2}\int_0^t\mathcal{H}_{G_3}(s,\tilde{\iota}^{\dagger}k)L^{-2d}\sum_{k_1,k_2}\tilde{\zeta}_{l,\iota^{\dagger}}^{\eta^{\dagger}}(k_1,k_2,\tilde{\iota}^{\dagger}k)\mathcal{H}_{G_1}(s,-k_1)\mathcal{H}_{G_2}(s,-k_2)\mathrm{d}s$$
$$+\sum_{\substack{G_1\in\mathcal{G}_{n_1}(\iota^{\dagger},(\eta^{\dagger},\eta^{\dagger}))\\ G_2\in\mathcal{G}_{n_2}(\iota^{\dagger},(\overline{\eta^{\dagger}},\eta^{\dagger}))\\ G_3\in\mathcal{G}_{n_3}(\iota^{\dagger},(\overline{\eta^{\dagger}},\overline{\eta^{\dagger}}))}}\sum_{l=3}^{6}\int_0^t\mathcal{H}_{G_3}(s,\tilde{\iota}^{\dagger}k)L^{-2d}\sum_{k_1,k_2}\tilde{\zeta}_{l,\iota^{\dagger}}^{\eta^{\dagger}}(k_1,k_2,\tilde{\iota}^{\dagger}k)\mathcal{H}_{G_1}(s,k_1)\mathcal{H}_{G_2}(s,-k_2)\mathrm{d}s\Bigg] \tag{5.50}$$

$$=-\mathrm{i}\sum_{n_1+n_2+n_3=n-1}\sum_{\dagger\in\{l,r\}}\iota^{\dagger}\Bigg[\sum_{l=1}^{2}\int_0^t\rho_{L,n_3}^{(\eta^{\dagger},\overline{\eta^{\dagger}}),\iota^{\dagger}}(s,\tilde{\iota}^{\dagger}k)L^{-2d}\sum_{k_1,k_2}\tilde{\zeta}_{l,\iota^{\dagger}}^{\eta^{\dagger}}(k_1,k_2,\tilde{\iota}^{\dagger}k)\rho_{L,n_1}^{(\overline{\eta^{\dagger}},\eta^{\dagger}),\iota^{\dagger}}(s,-k_1)\rho_{L,n_2}^{(\overline{\eta^{\dagger}},\eta^{\dagger}),\iota^{\dagger}}(s,-k_2)\mathrm{d}s$$
$$+\sum_{l=3}^{6}\int_0^t\rho_{L,n_3}^{(\overline{\eta^{\dagger}},\overline{\eta^{\dagger}}),\iota^{\dagger}}(s,\tilde{\iota}^{\dagger}k)L^{-2d}\sum_{k_1,k_2}\tilde{\zeta}_{l,\iota^{\dagger}}^{\eta^{\dagger}}(k_1,k_2,\tilde{\iota}^{\dagger}k)\rho_{L,n_1}^{(\eta^{\dagger},\eta^{\dagger}),\iota^{\dagger}}(s,k_1)\rho_{L,n_2}^{(\overline{\eta^{\dagger}},\eta^{\dagger}),\iota^{\dagger}}(s,-k_2)\mathrm{d}s\Bigg] \tag{5.51}$$

引理 5.18。 有 $\rho^{(\eta,\eta'),L\,n\quad -\iota},(t,k)=\rho(L\,n\quad \overline{\eta\qquad\iota},\eta'),,(t,-k)$。

证明。断言对 $n=0$ 成立，因为在此情况下 $\rho^{(\eta,\eta')},\ L\quad\ ^{\iota},\ _0\quad=M^{\eta},\ _{\eta',}\ ^{\iota}$ 和 $M^{\eta,\ \eta',\ \overline{-\iota}(k)}=M^{\eta,\ \eta',\ \iota}(-k)$。现在假设 $n>0$，并且该陈述对所有 $0\le m<n$ 都成立。归纳假设以及 $Q_{-\iota}^{\eta}(k_1,k_2,\ k_3,\ k_4,\ k_5)=Q_{\iota}^{\eta}(\overline{k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4,\ k_5})$ 这一事实通过归纳法完成证明。 □

引理 5.19。 进一步有，

$$\rho_{L,n}^{(\eta',\eta),\iota}=\overline{\rho_{L,n}^{(\eta,\eta'),\iota}}. \tag{5.52}$$

特别地，$\rho^{(\eta,\eta),\ L\,n\quad\ ^{\iota},}$ 是实值的。

证明。 我们通过归纳法证明该陈述，归纳起点 $n=0$ 由M^{η}的性质成立，$^{\eta'}$因为 $M^{\eta',\ \eta}=M^{\eta,\ \eta'}$。现在假设 $n>0$。令 $\eta'=\overline{\eta}$。事实上，$M^{\eta,\ \eta}$是实值的，并且由于$n>0$，利用归纳假设并对 $\dagger\in\{l,\ r\}$在公式（5.51）中求和，我们得到：

$$\rho_{L,n}^{(\eta,\eta),\iota}(t,k)=2\iota\sum_{n_1+n_2+n_3=n-1}\Bigg[\sum_{l=1}^{2}\int_0^t\rho_{L,n_3}^{(\eta,\eta),\iota}(s,k)\frac{1}{L^{2d}}\sum_{k_1,k_2}\mathrm{Im}\left(\rho_{L,n_1}^{(\overline{\eta},\eta),\iota}(s,-k_1)\tilde{\zeta}_{l,\iota}^{\eta}(k_1,k_2,k)\rho_{L,n_2}^{(\overline{\eta},\eta),\iota}(s,-k_2)\right)\mathrm{d}s$$
$$+\sum_{l=3}^{6}\int_0^t L^{-2d}\sum_{k_1,k_2}\mathrm{Im}\left(\rho_{L,n_3}^{(\overline{\eta},\eta),\iota}(s,k)\tilde{\zeta}_{l,\iota}^{\eta}(k_1,k_2,k)\rho_{L,n_2}^{(\overline{\eta},\eta),\iota}(s,-k_2)\right)\rho_{L,n_1}^{(\eta,\eta),\iota}(s,k_1)\mathrm{d}s\Bigg] \tag{5.53}$$

这是一个实值表达式。在 $\eta'=\eta$ 的情况下，我们得到

$$\rho_{L,n}^{(\eta,\overline{\eta}),\iota}(t,k) = -\iota \mathrm{i} \sum_{n_1+n_2+n_3=n-1}$$
$$\Bigg[\sum_{l=1}^{2} \int_0^t \rho_{L,n_3}^{(\eta,\overline{\eta}),\iota}(s,k) L^{-2d} \sum_{k_1,k_2} \left(\tilde{\zeta}_{l,\iota}^{\eta}(k_1,k_2,k) - \overline{\tilde{\zeta}_{l,\iota}^{\overline{\eta}}(k_1,k_2,k)} \right) \rho_{L,n_1}^{(\overline{\eta},\eta),\iota}(s,-k_1) \rho_{L,n_2}^{(\overline{\eta},\eta),\iota}(s,-k_2) \mathrm{d}s$$
$$+ \sum_{l=3}^{6} \int_0^t L^{-2d} \sum_{k_1,k_2} \Big(\rho_{L,n_3}^{(\overline{\eta},\overline{\eta}),\iota}(s,k) \tilde{\zeta}_{l,\iota}^{\eta}(k_1,k_2,k) \rho_{L,n_1}^{(\eta,\eta),\iota}(s,k_1)$$
$$- \rho_{L,n_3}^{(\eta,\eta),\iota}(s,k) \overline{\tilde{\zeta}_{l,\iota}^{\overline{\eta}}(k_1,k_2,k)} \rho_{L,n_1}^{(\overline{\eta},\overline{\eta}),\iota}(s,k_1) \Big) \rho_{L,n_2}^{(\overline{\eta},\eta),\iota}(s,-k_2) \mathrm{d}s \Bigg]$$
$$= \overline{\rho_{L,n}^{(\overline{\eta},\eta),\iota}(t,k)}, \tag{5.54}$$

其中在最后一个等号处，我们使用了归纳假设。 □

由前述结论可知，唯一相关的量是

$$\rho_{L,n}^{\eta} := \rho_{L,n}^{(\eta,\eta),+} \text{ and } \rho_{L,n}^{\times} := \rho_{L,n}^{(0,1),+} \tag{5.55}$$

而所有其他量都可以由这三个量推导得出。

5.6 大盒子极限

对于 A，$L > 0$，我们将 $\mathcal{E}_{L,\,A}$ 测度为 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_{L,\,A}) \geq 1 - L^{-A}$ 称为概率集，在该集合上推论 3.27 成立。将范围限制在此集合上，解 f^{η} 在时间区间 $[0, \delta\epsilon^{-1}]$ 上唯一存在。

现在我们可以比较

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}_{L,A}} \left| \widehat{f^{\eta}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right) \right|^2 \right) \text{ and } \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}_{L,A}} \widehat{f^{0}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right) \overline{\widehat{f^{1}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)} \right) \tag{5.56}$$

to

$$\rho^{\eta}(t,k) \text{ and } \rho^{\times}(t,k). \tag{5.57}$$

并记

$$[\eta,\eta'] := \begin{cases} \eta & \text{if } \eta = \eta', \\ \times & \text{if } (\eta,\eta') = (0,1). \end{cases} \tag{5.58}$$

从而

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}_{L,A}}\widehat{f^{\eta}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\overline{\widehat{f^{\eta'}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)}\right)-\rho^{[\eta,\eta']}(t,k) \tag{5.59}$$

$$=\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}_{L,A}}\widehat{f^{\eta}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\overline{\widehat{f^{\eta'}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)}\right)-\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}_{L,A}}\widehat{f^{\eta}_{\leq N(L)}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\overline{\widehat{f^{\eta'}_{\leq N(L)}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)}\right) \tag{5.60}$$

$$+\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}_{L,A}}\widehat{f^{\eta}_{\leq N(L)}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\overline{\widehat{f^{\eta'}_{\leq N(L)}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)}\right)-\mathbb{E}\left(\widehat{f^{\eta}_{\leq N(L)}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\overline{\widehat{f^{\eta'}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)}\right) \tag{5.61}$$

$$+\mathbb{E}\left(\widehat{f^{\eta}_{\leq N(L)}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\overline{\widehat{f^{\eta'}_{\leq N(L)}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)}\right)-\sum_{n_1,n_2\leq N(L)}\rho^{[\eta,\eta']}_{L,n_1+n_2}(t,k) \tag{5.62}$$

$$+\sum_{n_1,\ n_2\leq N(L)}\rho^{[\eta,\eta']}_{L,n_1+n_2}(t,k)-\sum_{n_1,n_2\leq N(L)}\rho^{[\eta,\eta']}_{n_1+n_2}(t,k) \tag{5.63}$$

$$+\sum_{n_1,n_2\leq N(L)}\rho^{[\eta,\eta']}_{n_1+n_2}(t,k)-\rho^{[\eta,\eta']}(t,k). \tag{5.64}$$

将 $F^{\eta}=F^{\eta}_{\leq N}+v^{\eta}$ 代入方程（5.60），我们得到（利用 $H^s\left(T^d_L\right)$ 是巴拿赫代数这一事实）

$$\begin{aligned}
&|eq.\ (5.60)|\\
&\leq\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}_{L,A}}\left|\widehat{f^{\eta}_{\leq N(L)}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|\left|\widehat{v^{\eta'}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|\right)+\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}_{L,A}}\left|\widehat{v^{\eta}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|\left|\widehat{f^{\eta'}_{\leq N(L)}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|\right)\\
&\quad+\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}_{L,A}}\left|\widehat{v^{\eta}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|\left|\widehat{v^{\eta'}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|\right)\\
&\leq\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}_{L,A}}\left\|f^{\eta}_{\leq N(L)}v^{\eta'}\right\|_{L^{\infty}H^s\left(\mathbb{T}^d_L\right)}\right)+\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}_{L,A}}\left\|v^{\eta}f^{\eta'}_{\leq N(L)}\right\|_{L^{\infty}H^s\left(\mathbb{T}^d_L\right)}\right)+\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}_{L,A}}\left\|v^{\eta}v^{\eta'}\right\|_{L^{\infty}H^s\left(H^s\left(\mathbb{T}^d_L\right)\right)}\right)\\
&\leq\sum_{n=0}^{N(L)}\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}_{L,A}}\left\|f^{\eta}_{n}\right\|_{L^{\infty}H^s\left(T^d_L\right)}\left\|v^{\eta'}\right\|_{L^{\infty}H^s\left(\mathbb{T}^d_L\right)}\right)+\sum_{n=0}^{N}\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}_{L,A}}\left\|f^{\eta'}_{n}\right\|_{L^{\infty}H^s\left(\mathbb{T}^d_L\right)}\|v^{\eta}\|_{L^{\infty}H^s\left(\mathbb{T}^d_L\right)}\right)\\
&\quad+\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}_{L,A}}\|v^{\eta}\|_{L^{\infty}H^s\left(H^s\left(\mathbb{T}^d_L\right)\right)}\left\|v^{\eta'}\right\|_{L^{\infty}H^s\left(H^s\left(\mathbb{T}^d_L\right)\right)}\right)\\
&\leq 2\left(1-L^{-A}\right)\Lambda L^{2\left(\mathcal{K}+d+\frac{2}{\beta}+2A-\tilde{\alpha}\right)}\sum_{n\leq N(L)}(\Lambda\delta)^{2n}\\
&\quad+\left(1-L^{-A}\right)\Lambda^2L^{-2\tilde{\alpha}}\xrightarrow{L\longrightarrow\infty}0.
\end{aligned} \tag{5.65}$$

对于方程（5.61），我们将两次使用霍尔德不等式和高斯超收缩性，得到

$$
\begin{aligned}
&|eq.\ (5.61)| \\
&\leq \sum_{0\leq n_1,n_2\leq N(L)} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}^c_{L,A}}\left|\widehat{f^{\eta}_{n_1}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|\left|\widehat{f^{\eta'}_{n_2}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{E}^c_{L,A}}\right) \sum_{0\leq n_1,n_2\leq N(L)} \mathbb{E}\left(\left|\widehat{f^{\eta}_{n_1}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|^2\left|\widehat{f^{\eta'}_{n_2}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|^2\right)^{1/2} \\
&\leq L^{-A/2} \sum_{0\leq n_1,n_2\leq N(L)} \mathbb{E}\left(\left|\widehat{f^{\eta}_{n_1}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|^4\right)^{1/4} \mathbb{E}\left(\left|\widehat{f^{\eta'}_{n_2}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|^4\right)^{1/4} \\
&\leq \Lambda L^{-\frac{A}{2}} \sum_{n_1,n_2=0}^{N(L)} c^{n_1}c^{n_2}\mathbb{E}\left(\left|\widehat{f^{\eta}_{n_1}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|^2\right)^{1/2} \mathbb{E}\left(\left|\widehat{f^{\eta'}_{n_2}}\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|^2\right)^{1/2} \\
&\qquad \Lambda L^{-\frac{A}{2}+\mathcal{K}}\left(\sum_{n\leq N(L)}\left(\Lambda\sqrt{\delta}\right)^{2n}\right)^2 \\
&\qquad \leq \Lambda L^{-\frac{A}{2}+\mathcal{K}} \xrightarrow{L\longrightarrow\infty} 0,
\end{aligned}
\tag{5.66}
$$

对所有 $A > A_0 \geq 2\mathcal{K}$，这里我们用到了命题 3.25。

现在我们将方程（5.62）改写为

$$
\begin{aligned}
&eq.\ (5.62) \\
&= \sum_{n_1,n_2\leq N(L)} \sum_{C\in C^{\eta,\eta',+,-}_{n_1,n_2}} \mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t,k\right) - \sum_{n_1,n_2\leq N(L)} \sum_{C\in \mathrm{Res}_{n_1+n_2}(+,\eta,\eta')} \mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t,k\right) \\
&= \sum_{n_1,n_2\leq N(L)} \sum_{\substack{C\in C^{\eta,\eta',+,-}_{n_1,n_2} \\ n_{\mathrm{res}}(C)\geq 1}} \mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t,k\right)
\end{aligned}
\tag{5.67}
$$

Let $\mathcal{W} > 0$ 待定。我们现在可以利用命题 3.25 和定理 5.5 ,

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{n_1,n_2\le N(L)}\sum_{\substack{C\in\mathcal{C}^{\eta,\eta',-,+}_{n_1,n_2}\\ n_{\mathrm{res}}(C)\ge 1}}\mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|\\
&\le\left|\sum_{\substack{n_1,n_2\le N(L)\\ n_1+n_2\le\mathcal{W}}}\sum_{\substack{C\in\mathcal{C}^{\eta,\eta',-,+}_{n_1,n_2}\\ n_{\mathrm{res}}(C)\ge 1}}\mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|\\
&+\left|\sum_{\substack{n_1,n_2\le N(L)\\ \mathcal{W}<n_1+n_2\le N(L)}}\sum_{0<q\le n_1+n_2-\mathcal{W}}\sum_{\substack{C\in\mathcal{C}^{\eta,\eta',-,+}_{n_1,n_2}\\ n_{\mathrm{res}}(C)=q\ge 1}}\mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|\\
&+\left|\sum_{\substack{n_1,n_2\le N(L)\\ \mathcal{W}<n_1+n_2\le N(L)}}\sum_{n_1+n_2-\mathcal{W}<q\le n_1+n_2}\sum_{\substack{C\in\mathcal{C}^{\eta,\eta',-,+}_{n_1,n_2}\\ n_{\mathrm{res}(C)}=q\ge 1}}\mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right| \qquad (5.68)\\
&+\left|\sum_{\substack{n_1,n_2\le N(L)\\ n_1+n_2>N(L)}}\sum_{\substack{C\in\mathcal{C}^{\eta,\eta',-,+}_{n_1,n_2}\\ n_{\mathrm{res}}(C)\ge 1}}\mathcal{J}_C\left(\epsilon^{-1}t,k\right)\right|\\
&\le\Lambda(\Lambda\delta)^{\mathcal{W}}L^{-\frac{\alpha}{\beta}}\\
&+\Lambda L^{K-\frac{\alpha'}{\beta}\mathcal{W}}\sum_{\mathcal{W}<n_1+n_2\le N(L)}(\Lambda\delta)^{2(n_1+n_2)}\sum_{0<q\le n_1+n_2-\mathcal{W}}\epsilon^{\alpha'(n_1+n_2-q-\mathcal{W})}\\
&+\Lambda L^{-\frac{\alpha}{\beta}}\sum_{\substack{n_1,n_2\le N(L)\\ \mathcal{W}<n_1+n_2\le N(L)}}(\Lambda\delta)^{2(n_1+n_2)}\\
&+\Lambda(\Lambda\delta)^{2N(L)}L^{\mathcal{K}}\sum_{\substack{n_1,n_2\le N(L)\\ n_1+n_2>N(L)}}(\Lambda\delta)^{2(n_1+n_2-N(L))}\xrightarrow{L\longrightarrow\infty}0,
\end{aligned}
$$

其中我们可以自由选择 $\alpha'\in\left(0,\ \frac{\alpha}{4}\right)$ 并看出我们应当要求

$$
\mathcal{W}>\frac{\beta}{\alpha'}\mathcal{K}. \qquad (5.69)
$$

当然，要使观察式 $(\Lambda\delta)^{2N(L)}L^{\mathcal{K}}\xrightarrow{L\to\infty}0$ 成立，需要 δ 足够小，这只取决于 Λ 和 K。

注记 *5.20*。对于所有 $n\in\mathbb{N}$ 和 $L>0$，我们也有

$$
\sup_{t\in[0,\delta]}\sup_{k\in\mathbb{Z}^d_L}\left|\rho^{[\eta,\eta']}_{L,n}(t,k)\right|\le\Lambda(\Lambda\delta)^n c_n \qquad (5.70)
$$

证明再次采用归纳性质，如命题 4.4 中所述。主要区别在于，这次利用了 $\rho^{[\eta,\eta']}_{L\ n},(t,\cdot)$ 的紧支撑。

引理 5.21。 映射 $\xi \mapsto \rho_{L\,n}^{[\eta,\eta']}(t,\xi)$ 和 $\xi \mapsto \rho_n^{[\eta,\eta']}(t,\xi)$ 在 $B_R(0)$ 中是紧支撑的。此外，存在 Λ, $\alpha > 0$，使得对所有 $n \le N$:

$$\sup_{t\in[0,\delta]} \sup_{k\in\mathbb{Z}_L^d} \left|\rho_{L,n}^{[\eta,\eta']}(t,k) - \rho_n^{[\eta,\eta']}(t,k)\right| \le \Lambda L^{-\alpha} c_n (\Lambda\delta)^n \tag{5.71}$$

证明。我们通过对 n 进行归纳法来证明这一点。如果 $n = 0$，左边实际上为 0；如果 $n > 0$，这只是由于这些函数的递归结构所致。回顾

$$\begin{aligned}\rho_n^{[\eta,\eta']}(t,k) \coloneqq 2 \sum_{n_1+n_2+n_3=n-1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{l=1}^{2} \Big[&\mathrm{Im}\left(\rho_{n_3}^{[\eta,\eta']}(s,k)\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(\xi_1,\xi_2,\xi)\rho_{n_1}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-\xi_1)\rho_{n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-\xi_2)\right) \\ &+ \sum_{l=3}^{6} \mathrm{Im}\left(\rho_{n_3}^{[\overline{\eta},\eta']}(s,k)\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(\xi_1,\xi_2,\xi)\rho_{n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-\xi_2)\right)\rho_{n_1}^{[\eta,\eta]}(s,\xi_1)\Big] \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}s\end{aligned} \tag{5.72}$$

并估计

$$\begin{aligned}&\left|\rho_{L,n}^{[\eta,\eta']}(t,k) - \rho_n^{[\eta,\eta']}(t,k)\right| \\ =\Bigg| \sum_{n_1+n_2+n_3=n-1} \Bigg[&\int_0^t L^{-2d} \sum_{k_1,k_2} \Bigg[\sum_{l=1}^{2} \Big[\mathrm{Im}\left(\left(\rho_{L,n_3}^{[\eta,\eta']}(s,k) - \rho_{n_3}^{[\eta,\eta']}(s,k)\right)\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(k_1,k_2,k)\rho_{L,n_1}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_1)\rho_{L,n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_2)\right) \\ &+\mathrm{Im}\left(\rho_{n_3}^{[\eta,\eta']}(s,k)\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(k_1,k_2,k)\left(\rho_{L,n_1}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_1) - \rho_{n_1}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_1)\right)\rho_{L,n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_2)\right) \\ &+\mathrm{Im}\left(\rho_{n_3}^{[\eta,\eta']}(s,k)\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(k_1,k_2,k)\rho_{n_1}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_1)\left(\rho_{L,n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_2) - \rho_{n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_2)\right)\right)\Big] \\ &+\sum_{l=3}^{6} \Big[\mathrm{Im}\left(\left(\rho_{L,n_3}^{[\overline{\eta},\eta']}(s,k) - \rho_{n_3}^{[\overline{\eta},\eta']}(s,k)\right)\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(k_1,k_2,k)\rho_{L,n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_2)\right)\rho_{L,n_1}^{[\eta,\eta]}(s,k_1) \\ &+\mathrm{Im}\left(\rho_{n_3}^{[\overline{\eta},\eta']}(s,k)\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(k_1,k_2,k)\left(\rho_{L,n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_2) - \rho_{n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_2)\right)\right)\rho_{L,n_1}^{[\eta,\eta]}(s,k_1) \\ &+\mathrm{Im}\left(\rho_{n_3}^{[\overline{\eta},\eta']}(s,k)\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(k_1,k_2,k)\rho_{n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_2)\right)\left(\rho_{L,n_1}^{[\eta,\eta]}(s,k_1) - \rho_{n_1}^{[\eta,\eta]}(s,k_1)\right)\Big] \\ &+\sum_{l=1}^{2} \Bigg[\int_0^t L^{-2d} \sum_{k_1,k_2} \mathrm{Im}\left(\rho_{n_3}^{[\eta,\eta']}(s,k)\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(k_1,k_2,k)\rho_{n_1}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_1)\rho_{n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_2)\right) \\ &\quad - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Im}\left(\rho_{n_3}^{[\eta,\eta']}(s,k)\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(\xi_1,\xi_2,k)\rho_{n_1}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-\xi_1)\rho_{n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-\xi_2)\right)\Bigg] \\ &+\sum_{l=3}^{6} \Bigg[\int_0^t L^{-2d} \sum_{k_1,k_2} \mathrm{Im}\left(\rho_{n_3}^{[\overline{\eta},\eta']}(s,k)\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(k_1,k_2,k)\rho_{n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_2)\right)\rho_{n_1}^{[\eta,\eta]}(s,k_1) \\ &- \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Im}\left(\rho_{n_3}^{[\overline{\eta},\eta']}(s,k)\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(\xi_1,\xi_2,k)\rho_{n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-\xi_2)\right)\rho_{n_1}^{[\eta,\eta]}(s,\xi_1)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}s\Bigg]\Bigg]\Bigg|.\end{aligned} \tag{5.73}$$

诸如此类的项

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{n_1+n_2+n_3=n-1}\int_0^t L^{-2d}\sum_{k_1,k_2}\mathrm{Im}\left(\left(\rho_{L,n_3}^{[\eta,\eta']}(s,k)-\rho_{n_3}^{[\eta,\eta']}(s,k)\right)\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(k_1,k_2,k)\rho_{L,n_1}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_1)\rho_{L,n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_2)\right)\right|\\&\leq\sum_{n_1+n_2+n_3=n-1}\int_0^t L^{-2d}\sum_{k_1,k_2}\left|\rho_{L,n_3}^{[\eta,\eta']}(s,k)-\rho_{n_3}^{[\eta,\eta']}(s,k)\right|\left|\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(k_1,k_2,k)\right|\left|\rho_{L,n_1}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_1)\right|\left|\rho_{L,n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_2)\right|\end{aligned}\tag{5.74}$$

利用归纳假设进行估计

$$\left|\rho_{L,n_3}^{[\eta,\eta']}(s,k)-\rho_{n_3}^{[\eta,\eta']}(s,k)\right|\leq\Lambda L^{-\alpha}c_{n_3}(\Lambda\delta)^{n_3}\tag{5.75}$$

以及注5.20。剩余项

$$\begin{aligned}&L^{-2d}\sum_{k_1,k_2}\left|\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(k_1,k_2,k)\right|\left|\rho_{L,n_1}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_1)\right|\left|\rho_{L,n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_2)\right|\\&\leq\Lambda(\Lambda\delta)^{n_1+n_2}c_{n_1}c_{n_2}L^{-2d}\sum_{k_1,k_2\in B_R^{\mathbb{Z}_L^d}(0)}1\leq\Lambda(\Lambda\delta)^{n_1+n_2}c_{n_1}c_{n_2}\end{aligned}\tag{5.76}$$

利用命题4.4 以及函数$\rho_{L,\ n}^{\star}$的紧支撑进行估计。最后,

$$|eq.\ (5.74)|\leq(\Lambda\delta)^n L^{-\alpha}\sum_{n_1+n_2+n_3=n-1}c_{n_1}c_{n_2}c_{n_3}=(\Lambda\delta)^n L^{-\alpha}c_n.\tag{5.77}$$

形如.....的项

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{n_1+n_2+n_3=n-1}\left[\int_0^t L^{-2d}\sum_{k_1,k_2}\mathrm{Im}\left(\rho_{n_3}^{[\eta,\eta']}(s,k)\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(k_1,k_2,k)\rho_{n_1}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_1)\rho_{n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_2)\right)\right.\right.\\&\qquad\left.\left.-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Im}\left(\rho_{n_3}^{[\eta,\eta']}(s,k)\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(\xi_1,\xi_2,k)\rho_{n_1}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-\xi_1)\rho_{n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-\xi_2)\right)\right]\right|\\&=\left|\sum_{n_1+n_2+n_3=n-1}\left[\int_0^t\mathrm{Im}\left[L^{-2d}\sum_{k_1,k_2}\rho_{n_3}^{[\eta,\eta']}(s,k)\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(k_1,k_2,k)\rho_{n_1}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_1)\rho_{n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_2)\right.\right.\right.\\&\qquad\left.\left.\left.-\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\rho_{n_3}^{[\eta,\eta']}(s,k)\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(\xi_1,\xi_2,k)\rho_{n_1}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-\xi_1)\rho_{n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-\xi_2)\right]\mathrm{d}s\right]\right|\\&\leq\sum_{n_1+n_2+n_3=n-1}\left|\int_0^t\mathrm{Im}\left[L^{-2d}\sum_{k_1,k_2}\rho_{n_3}^{[\eta,\eta']}(s,k)\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(k_1,k_2,k)\rho_{n_1}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_1)\rho_{n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_2)\right.\right.\\&\qquad\left.\left.-\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\rho_{n_3}^{[\eta,\eta']}(s,k)\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(\xi_1,\xi_2,k)\rho_{n_1}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-\xi_1)\rho_{n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-\xi_2)\right]\mathrm{d}s\right|\\&\leq\sum_{n_1+n_2+n_3=n-1}\int_0^t\left|\rho_{n_3}^{[\eta,\eta']}(s,k)\right|\left|L^{-2d}\sum_{k_1,k_2}\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(k_1,k_2,k)\rho_{n_1}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_1)\rho_{n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_2)\right.\\&\qquad\left.-\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\tilde{\zeta}_{l,+}^{\eta}(k,\xi_1,\xi_2)\rho_{n_1}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-\xi_1)\rho_{n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-\xi_2)\right|\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{5.78}$$

N现在利用引理3.11 以及函数 $\rho_n^\star$ 具有紧支撑这一事实，我们得到 th at

$$\begin{aligned}
&\left| L^{-2d} \sum_{k_1,k_2} \tilde{\zeta}^{\eta}_{l,+}(k_1,k_2,k) \rho_{n_1}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_1)\rho_{n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_2) \right. \\
&\qquad \left. - \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\zeta}^{\eta}_{l,+}(\xi_1,\xi_2,k) \rho_{n_1}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-\xi_1)\rho_{n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-\xi_2) \right| \\
&\leq \frac{\Lambda}{L^{2d+1}} \sum_{k_1,k_2 \in B_R^{\mathbb{Z}^d_L}(0)} \sup_{Q_{k_1,\frac{1}{2L}}\times Q_{k_2,\frac{1}{2L}}} \left| \nabla_{k_1,k_2} \left(\tilde{\zeta}^{\eta}_{l,+}(k_1,k_2,k) \rho_{n_1}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_1)\rho_{n_2}^{[\overline{\eta},\eta]}(s,-k_2) \right) \right| \\
&\leq \frac{\Lambda}{L^{2d+1}} \left\| Q^{\eta}_{+} \right\|_{\left(W^{1,\infty}\right)^5} (\Lambda\delta)^{n_1+n_2} c_{n_1} c_{n_2} \Lambda L^{2d} \leq (\Lambda\delta)^{n_1+n_2} c_{n_1} c_{n_2} L^{-1}
\end{aligned} \tag{5.79}$$

通过增大 Λ 并减小 δ。最后，

$$|eq.\ (5.78)| \leq \Lambda\delta \sum_{n_1+n_2+n_3=n-1} (\Lambda\delta)^{n_1+n_2+n_3} c_{n_1} c_{n_2} c_{n_3} L^{-1} = (\Lambda\delta)^n L^{-1} c_n \tag{5.80}$$

至此证明完成。 □

现在，引理5.21可得

$$|eq.\ (5.63)| \leq \sum_{n\leq 2N(L)} \left| \rho_{L,n}^{[\eta,\eta']}(t,k) - \rho_n^{[\eta,\eta']}(t,k) \right| \leq \Lambda L^{-\alpha} \sum_{n=0}^{2N(L)} (\Lambda\delta)^n c_n \xrightarrow{L\longrightarrow\infty} 0. \tag{5.81}$$

对于最后一行（5.64），我们利用命题 4.5 注意到

$$|eq.\ (5.64)| \leq (\Lambda\delta)^{N(L)} \xrightarrow{L\longrightarrow\infty} 0. \tag{5.82}$$

预备引理

引理 A.1（伊瑟利斯定理）。设 $k_j \in \mathbb{Z}^d_L$， $\iota_j \in \{\pm\}$ 对于 $1 \leq j \leq n$，则

$$\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{n} \mu_{k_j}^{\eta_j,\iota_j} \right] = \sum_{\mathcal{P}} \prod_{\{j,j'\}\in\mathcal{P}} \delta_{\iota_j+\iota_{j'}} \delta_{k_j-k_{j'}} M^{\eta_j,\eta_{j'}}(k_j)^{\iota_j} \tag{A.1}$$

证明。 这是对 [8, 引理 A.2] 的一个小幅改写。 □

引理 A.2（高斯超收缩性）。 设 $\{g_k\}$ 为独立同分布高斯变量或随机相位， $\iota_j \in \{\pm\}$，且 X 为随机变量

$$X(\omega) \coloneqq \sum_{k_1,\dots,k_n} a_{k_1,\dots,k_n} \prod_{j=1}^{n} g_{k_j}^{\zeta_j}(\omega). \tag{A.2}$$

那么对于 $p \geq 2$,

$$\mathbb{E}|X|^p \leq (p-1)^{\frac{np}{2}} \mathbb{E}\left(|X|^2 \right)^{\frac{p}{2}}. \tag{A.3}$$

证明。 参见引理 2.6，出自 [23]。 □

利益冲突声明。 作者声明不存在需要披露的利益冲突。

数据可用性声明。 由于本研究未创建或分析任何新数据，数据共享不适用于本文。

参考文献

[1] D. J. Benney 和 P. G. Saffman. 色散介质中随机波的非线性相互作用. 伦敦皇家学会会刊：A辑，数学与物理科学 289.141（1966年1月），301–320. ISSN：0080-4630. DOI：8 10.1098/rspa.1966.0013.[2] R. Brout 和 I. Prigogine. 不可逆过程的统计力学，第VIII部分：弱耦合系统的一般理论. 《物理学》22.6（1956），621–636. ISSN：0031-8914. DOI：https ://doi.org/10.1016/S0031-8914(56)90009-X.[3] T. Buckmaster 等. 大区域上非线性薛定谔方程的有效动力学. 《纯粹与应用数学通讯》71.7（2018），1407–1460. DOI：https: //doi.org/10.1002/cpa.21749. 电子版：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/cpa.21749. URL：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/ cpa.21749.[4] C. Collot、H. Dietert 和 P. Germain. 波湍流 Kolmogorov–Zakharov 谱的稳定性与级联. 《数学分析档案》248.7（2024）. DOI：https://doi.org/10. 1007/s00205-023-01953-x.[5] C. Collot 和 P. Germain. 齐次波动力学方程的推导：更长时间尺度. 《泛函分析杂志》290.1（2026），111179. ISSN：0022-1236. DOI：https : //doi.org/10.1016/j.jfa.2025.111179.[6] C. Collot 和 P. Germain. 关于齐次波动力学方程的推导. 《纯粹与应用数学通讯》78.4（2025），856–909. DOI：https://doi.org/10. 1002/cpa.22232.[7] Y. Deng 和 Z. Hani. 波动力学方程的推导：标度律的完整范围. 2023. arXiv：2301.07063 [math.AP].[8] Y. Deng 和 Z. Hani. 波动力学方程的完整推导. 《数学创立》233（2021），543–724. URL：https://api.semanticscholar.org/CorpusID:233346836.[9] Y. Deng 和 Z. Hani. 关于非线性薛定谔方程波动力学方程的推导. Forum of Mathematics, Pi 9（2021）. ISSN：2050-5086. DOI：10.1017/fmp.2021.6.[10] Y. Deng、Z. Hani 和 X. Ma. 希尔伯特第六问题：通过玻尔兹曼动理学理论推导流体方程. 2025. arXiv：2503.01800 [math.AP]. URL：https://arxiv.org/abs/ 2503.01800.[11] Y. Deng、Z. Hani 和 X. Ma. 从硬球动力学长期推导玻尔兹曼方程. 2025. arXiv：2408.07818 [math.AP].

[12] Y. Deng、A. Ionescu 和 F. Pusateri. 关于二维重力波波湍流理论，II：随机性的传播. 2025. arXiv：2504.14304 [math.AP].[13] Y. Deng、A. D. Ionescu 和 F. Pusateri. 关于二维重力波波湍流理论，I：确定性能量估计. 《纯粹与应用数学通讯》78.2（2025），211–322. DOI：https://doi.org/10.1002/cpa.22224.[14] A. Dymov 和 S. Kuksin. 波湍流随机模型中的形式展开 1：动力学极限. Commun. Math. Phys. 382（2021），951–1014. DOI：https : / / doi . org / 10 . 1007 / s00220-021-03955-w.[15] A. Dymov 和 S. Kuksin. 波湍流随机模型中的形式展开 2：图分解方法. J Stat Phys 190.3（2023）. DOI：https : / / doi . org / 10 . 1007/ s10955-022-02998-0.[16] E. Faou、P. Germain 和 Z. Hani. 二维三次非线性薛定谔方程的弱非线性大盒极限. 《美国数学会杂志》29.4（2016），915–982. DOI：10.1090/jams/845.[17] K. Hasselmann. 重力波谱中的非线性能量传递，第二部分：守恒定理；波粒二象性；不可逆性. 《流体力学杂志》15.2（1963），273–281. DOI：10.1017/S0022112063000239.[18] K. Hasselmann. 重力波谱中的非线性能量传递，第一部分：一般理论. 《流体力学杂志》12.4（1962），481–500. DOI：10.1017/S0022112062000373.[19] E. Kartashova. 离散水波湍流中的精确共振与准共振. Phys. Rev. Lett. 98（2007年5月21日），214502. DOI：10.1103/PhysRevLett.98.214502.[20] V. S. L’vov 和 S. Nazarenko. 有限尺寸波湍流的离散与介观区间. Phys. Rev. E 82（2010年11月5日），056322. DOI：10.1103/PhysRevE.82.056322.[21] J. Lukkarinen 和 H. Spohn. 带随机初始数据的弱非线性薛定谔方程. 《数学创立》183.1（2010年8月），79–188. ISSN：1432-1297. DOI：10.1007/s00222- 010-0276-5.[22] S. Nazarenko. 波湍流. 《物理学讲义》. 施普林格·柏林·海德堡，2011. ISBN：9783642159411.[23] T. Oh 和 L. Thomann. 构造散焦非线性薛定谔方程不变吉布斯测度的简明方法. 《随机偏微分方程：分析与计算》6（2018），397–445. DOI：https://doi.org/10.1007/s40072-018-0112-2. $2 - d$R. Peierls. 晶体热传导的动理论. 《物理学年鉴》395.8（1929），1055–1101. DOI：https://doi.org/10.1002/andp.19293950803.[24] G. Staffilani 和 M.-B. Tran. 关于随机 KdV 型方程的波湍流理论. 2024. arXiv：2106.[25] math.AP09819 [.]A.-S. de Suzzoni. 五次薛定谔方程弱湍流区间中的奇异性. Doc. Math. 27（2022），2491–2561.[26] A.-S. de Suzzoni、A. Stingo 和 A. Touati. 半线性 Klein-Gordon 系统中的波湍流. 2025. arXiv：2503.[27] math.AP24222 [.

[28] K. D. Vassilev. 一维波动力学理论。《数学物理通讯》**406**.12（2025年10月）。 ISSN: 1432-0916. DOI:10.1007/s00220-025-05455-7。[29] A. A. Vedenov. 弱湍流等离子体理论。《等离子体物理评论》 **3** （1967年1月），229。[30] G. Zaslavskii 与 R. Sagdeev. 非线性波场统计描述的局限。《苏联物理学 *JETP*》**25** （1967年），718–724。

洛朗-施瓦茨数学中心，巴黎综合理工学院，91120 帕莱索，法国电子邮箱：
shayan.zahedi@polytechnique.edu