arXiv:2603.02433v1 [physics.app-ph] 2 Mar 2026

通过钉扎与脱钉跃迁波实现声子控制的机械存储器

Samuele Ferracin[1], DenggeJin[1], Vincent Tournat[2, 3], * 和 Jordan R. Raney[1†]

[1] *Department of Mechanical Engineering and Applied Mechanics,University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104* [2] *Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Mans (LAUM), Institute d'Acoustique – Graduate School, CNRS, Le Mans Université, France and*

[3] *John A. Paulson School of Engineering and Applied Sciences,Harvard University, Cambridge, MA 02138, USA*

多稳态机械超材料能够通过传播的扭结转变波（TWs），实现离散稳定状态之间的可编程转变。然而，控制这些扭结通常需要局部致动或高能变形，这限制了其可扩展性。在此，我们展示了一种利用局部缺陷和边界声子激励来钉扎及脱钉行波（TWs）的通用策略。受晶体固体中声子–位错相互作用的启发，我们采用一对声子形成拍频包络，使其与钉扎扭结的平移模态发生共振；该模态位于声子带隙内。这种共振耦合能够高效地向扭结传递能量，使其克服缺陷势垒并穿过杂质传播。所提出的机制使这些系统可应用为机械计算中的信息处理单元，具体而言，可作为可扩展且更稳健的机械记忆。

多稳态机械超材料（MMMs）已成为可编程材料的强大平台，能够实现离散的局部或整体状态转换，从而实现形状变形 [1], 可调刚度 [2], 冲击缓解 [3], 和波控制 [4]。这些超材料已用于机械计算 [5–8],，并可取代传统计算架构或与之交互，以创建智能系统 [9, 10]。MMMs 能够感知并根据预编程逻辑计算响应 [11], ，还能够预处理物理信息，减轻电子系统的工作负荷[12]。机械存储单元是这些系统的必要组成部分，它们通过将信息存储为局部变形状态，使超材料的行为取决于加载历史 [13–16]。

在机械超材料中，这些状态之间的转变通常由传播前沿介导，这些前沿称为扭结（及反扭结）跃迁波（TW） [4, 17–19]。各个多稳态单元可以具有对称或不对称的现场势。在前一种情况下，行波传播距离受耗散和有限输入能量的限制，往往导致转变不完全 [20]。这类系统中的静态扭结也可能不够稳定，无法抵御实际应用中的非预期微扰 [21], ，从而限制了对称势作为机械记忆的实用性。相比之下，具有不对称双稳势的晶格即使在耗散环境中也能支持自持传播：势能不对称性释放储存的能量，从而实现稳健传播和完全重构 [4, 17]。然而，这类系统只能达到有限数量的全局构型，其数量由现场势中的稳定平衡态数目决定。为克服这一限制，并设计出可重编程性更强的超材料，可以引入局部缺陷，在指定位置阻止（钉扎）行波传播 [22, 23] ，或改变传播路径 [24]。这些缺陷充当能量势垒，界定可编程的全局状态。尽管钉扎扭结可能比没有杂质的对称情形更稳定，但这类势垒通常“任意”刚硬，妨碍进一步重构。要实现更进一步的重编程，则需要精心设计缺陷，使其既能钉扎扭结，又能对其进行可控脱钉，从而使扭结能够传播越过杂质。

现有机械记忆策略的一项局限是，需要复杂的致动器网络来写入新状态，或需要外围设备来感测这些状态 [25]。通过边界激励控制扭结位置/存储状态，对于实现可扩展的可重编程性至关重要，还可避免复杂度、致动器网络或嵌入式刺激呈指数级增长。此前的研究展示了利用周期性准静态压缩/拉伸等简单边界激励 [26], ，但这类方法需要特定的超材料设计与刚性基底耦合，并需要高能量变形。另一种方法表明，可以从系统边缘发送定制的非线性波，在远程编码任意存储状态，并切换特定的内部比特，而无需局部致动 [27]。然而，由于系统复杂的能量景观使其容易受到输入信号的任何微小偏差影响，这种方法要求波形、振幅和频率都必须精确。

在这项工作中，我们提出一种受晶体固体中相关过程启发的边界激励：声子能够促进或抑制位错迁移率，从而改变塑性和热导率 [28–32], ，而外部超声激励可通过声塑性（布拉哈效应） [33]提高迁移率。我们利用了

*电子邮箱：vincent.tournat@univ-lemans.fr
†电子邮箱：raney@seas.upenn.edu

声子与扭结孤子耦合并控制其位置的能力 [21]，将其应用于机械超材料，并将先前的研究扩展到存在耗散、杂质或不对称性（这些因素对于实现可靠的机械存储器不可或缺）的系统中。我们还提出一种新的声子介导脱钉机制：利用一对声子产生拍频包络，使其与钉扎扭结的平移（T）模共振；该模位于带隙中。这种非线性拍频能够高效地将能量传递给扭结运动，克服缺陷势垒并实现逐步重构，从而极大拓展多稳态晶格可实现的构型空间。该方法可作为一种通用策略，通过在各类双稳态超材料中钉扎和脱钉扭结，以确定性方式写入新的存储状态。由于只有特定的驱动调制才能实现脱钉（下文将对此进行讨论），这一策略能够带来格外稳健的存储效果，因此外部噪声和微扰不会随机改写存储状态。

下面，我们首先概述无杂质的未受扰晶格中的跃迁波动力学。随后，我们确定在不同阻尼状态下钉扎扭结所需的最小缺陷强度。最后，我们分析钉扎扭结的振动模态以及声子与扭结之间的耦合，以建立一个能够捕捉振荡

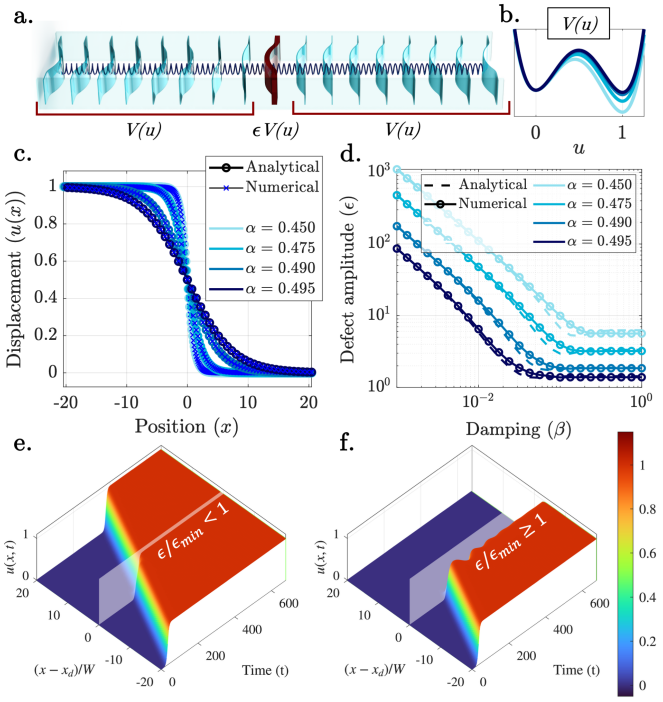

图1。（a）该系统的一种可能机械实现形式：双稳态梁由弹簧耦合，缺陷位于中心。（b）对称势和非对称势 $V(u)$。（c）不同非对称程度 α 下的跃迁波位移剖面。（d）不同 α 下，各种阻尼系数对应的阈值 ϵ_{min}。（e）行波穿过一个 $\epsilon/\epsilon_{min} < 1$ 的缺陷；（f）若 $\epsilon/\epsilon_{min} \geq 1$，则行波被钉扎。

扭结和共振解钉扎动力学的非线性降阶模型（ROM）。

我们研究一种由双稳态单元构成的一维连续周期晶格，单元之间通过线性最近邻相互作用耦合（图1a）。选择该系统，是因为它可作为多种不同且更复杂、能够支持行波 [34–38] 的超材料结构的基础近似模型。位移场 $u(x,\ t)$ 的演化遵循

$$\ddot{u} + \beta\dot{u} - c^2 u_{,xx} + \Big(1 + (\epsilon - 1)\delta(x - x_d)\Big)\frac{dV}{du} = 0, \quad (1)$$

其中，β 是黏性阻尼参数，c 是耦合刚度，而双稳态原位势 $V(u)$（其极小值位于 $u = 0,\ 1$）可表示为：

$$V(u) = \frac{1}{4}u^4 - \frac{\alpha + 1}{3}u^3 + \frac{\alpha}{2}u^2. \quad (2)$$

其中，$0 \leq \alpha \leq 1$决定势的不对称性（$\alpha = 0.5$代表对称的能量景观，见图1b）。我们通过局部修改现场势能，在位置 x_d 处定义一个杂质。δ 是正则化狄拉克δ函数，$\epsilon > 1$ 定义缺陷强度。这种修改会产生有效的排斥相互作用势，使接近的扭结减速；若其强度足够大，还可能使扭结停止传播。也可以考虑其他类型的缺陷，例如质量缺陷或软缺陷（$\epsilon < 1$），但对于我们的研究目的而言，这些方案有一些缺点。质量缺陷可能使扭结短暂减速，但无法实现静态钉扎。软缺陷会促进扭结与局域缺陷模之间的共振能量传递，从而可能捕获扭结，但其行为复杂，且对初始条件（例如扭结速度）十分敏感 [39, 40]，，因此难以可靠地确定缺陷强度阈值。

考虑一个没有杂质的晶格（$\epsilon = 1$），我们解析地确定行波的形式（完整过程见 [41] 和补充信息第三节）：

$$u_k(x,t) = \frac{1}{2}\left[1 - \tanh\left(\frac{(x - x_0) - v_0(t - t_0)}{W}\right)\right]. \quad (3)$$

当 $\alpha < 0.5$时，行波以速度$v_0 = \frac{c}{(1-2\alpha)\sqrt{2\beta^2 + (1-2\alpha)^2}}$ 传播，特征宽度为 $W = 2\sqrt{2(c^2 - v_0^2)}$，其由状态切换过程中释放的能量与系统耗散之间的平衡所决定。图1c展示了不同 α下行波的位移轮廓。重要的是，围绕每个平衡态（$u = 0,1$）进行线性化，可得到两个克莱因–戈登色散关系，分别呈现低频带隙，位置为$\omega < \sqrt{\alpha}$和 $\omega < \sqrt{1 - \alpha}$（见图2a和式S7）。

在本工作中，我们旨在理解过渡波因与局域缺陷相互作用而产生的钉扎与脱钉。我们需要计算足以钉扎扭结、同时仍使其易于脱钉的最小（阈值）值 $\epsilon = \epsilon_{min}$。为了在较宽的参数范围内做到这一点，必须考虑不同的阻尼区间：在低阻尼

区间（$\gamma \ll 1$，其中 $\gamma = \beta \frac{W}{v_0}$ 是一个无量纲参数，用于量化相互作用时间尺度上的有效阻尼），扭结与缺陷的相互作用近乎保守。阈值 ϵ_{min}^{adiab} 通过令扭结的动能 $E_k = \frac{v_0^2}{6W}$（公式 S19）等于缺陷与扭结之间相互作用势 U_d（ξ_0）的峰值（公式 S23）来确定。令$E_k = max(U_d(\xi_0)) = (\epsilon_{min}^{adiab} - 1)\alpha^3(2-\alpha)\,12$ 可得：

$$\epsilon_{min}^{adiab} = 1 + \frac{2v_0^2}{W\alpha^3(2-\alpha)}. \tag{4}$$

在高阻尼区（$\gamma \gg 1$）中，扭结转而与缺陷发生准静态相互作用。在这种情况下，钉扎阈值 ϵ_{min}^{force} 可通过平衡由晶格不对称性产生的驱动力 $F_{driving} = \frac{1-2\alpha}{12}$（公式 S28）与来自缺陷的最大反向力 $F_{barrier}(\xi_0) = \frac{dV}{d\xi}(u(\xi_d - \xi_0 \quad du)) \xi_d - \xi_0) \frac{1}{W}$（公式 S29）得到。$\frac{du}{}$ 当 $F_{driving} + (\epsilon_{min}^{force} - 1)\,\max(F_{barrier}(\xi_0)) = 0$（平衡大小）时，

$$\epsilon_{min}^{force} = 1 - \frac{F_{driving}}{\max(F_{barrier}(\xi_0))}. \tag{5}$$

这两个区间通过指数加权进行融合，其由 γ控制：

$$\epsilon_{min} = \epsilon_{min}^{adiab} e^{-\gamma} + \epsilon_{min}^{force}(1 - e^{-\gamma}). \tag{6}$$

该方法能够很好地捕捉依赖于阻尼的钉扎阈值（图1d），相较于纯能量平衡 [42]提高了准确性。

由于声子辅助脱钉依赖于传播波，因此该机制在中等阻尼下能够有效运行：过度耗散会使声子在到达扭结之前衰减，而过低的阻尼则会提高缺陷的钉扎阈值，使脱钉更加困难。为平衡这些相反的影响，我们选择了 $\gamma \approx 0.5$（图中扭结部分对应的阻尼略低）。本文其余部分的结果均使用 $\alpha = 0.495$、$\beta = 0.02$和$\epsilon = 2.8$获得。对于一系列 α，也可以得到类似结果，具体解释见补充信息第八节。

当扭结被钉扎时，来自晶格和缺陷的对抗力会使其变形成静态形状$u_0(x)$（见补充信息图 S8），满足方程 1 的静态极限。我们采用微扰法分析钉扎变形扭结的动力学。围绕该状态 ($u^* = u_0(x) + \delta u(x,\ t)$) 进行微扰，线性化，并假设解的形式为 $\delta u(x,\ t) = \phi(x)e^{\lambda t}$，由此得到本征模 $\phi_j(x)$ 和本征值 λ_j（见补充信息第 V 节）。所得模态分为三类：有限频率类平移模 ϕ_T、内部模 ϕ_I（扭结中心附近的振荡），以及扩展模（它们位于通带内，频率高于 $\max(\sqrt{\alpha},\ \sqrt{1-\alpha})$）。图 2c-e 展示了这些模态的（无阻尼）频率、形状，以及它们引起的扭结变形。

为研究钉扎扭结的动力学，我们重点关注类平移（T）模，因为它概括了扭结整体的集体位移，实质上决定了扭结穿过缺陷时的运动。具体做法是将微扰分解为 $\delta u(x,\ t) = \sum_J a_J(t)\phi_J(x)$，其中 $J = \{T, I, P1, P2, ...\}$,$a_J(t)$ 是各模态随时间变化的振幅，P_j 表示通过散射分析得到的传播声子模（见补充信息第 VI 节）。随后，将 $\delta u(x,\ t)$ 代入完整的动力学方程（方程 S33），并投影到平移本征模上。由此得到刚度为 ω_T^2 的阻尼线性振子的二阶常微分方程（ODE），

$$\ddot{a}_T(t) + \beta\dot{a}_T(t) + \omega_T^2 a_T(t) = F_T(t), \tag{7}$$

其中，由势能（见式 S38）产生的二次非线性负责声子与 T 模式之间的耦合力$F_T(t)$（补充信息第 7 节），

$$F_T(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} \phi_T(x)\Big(\frac{V_d'''(u_0)}{2}\sum_J \delta u_{PJ}(x,t)^2\Big)dx, \tag{8}$$

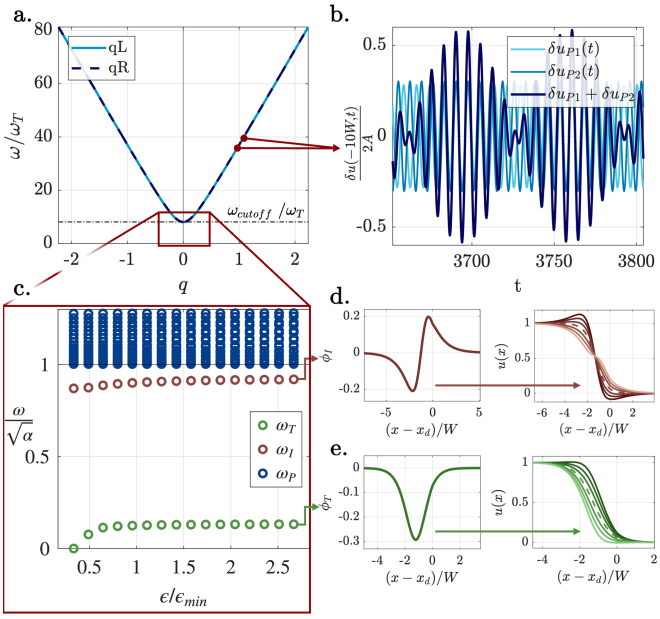

图 2。（a）系统的色散关系。（b）从钉扎扭结前方较远处的一个单元观察到的拍频扰动。浅蓝色表示两个独立的声子，深蓝色表示它们产生的拍频。（c）钉扎扭结的局域模和扩展模的谱。绿色表示平移 T 模（低频），红色表示内部 I 模，深蓝色表示扩展模。$\epsilon < 0.3\epsilon_{min}$ 缺陷无法静态地 удерж住扭结（显示 $\omega_T = 0$）。（d）I 模和（e）T 模的形状（左侧），以及它们在不同强度下产生的位移扰动 a_J（右侧）；虚线表示 $a_J = 0$时未受扰动的扭结。由于缺陷的存在，形状模在 $x - x_d = 0$ 处出现二阶不连续性。

其中 $V_d' = \left(1 + (\epsilon - 1)\delta(x - x_d)\right)\frac{dV}{du}$。

由于这是一个固有频率为ω_T的线性振子，且如图 2c 所示，该频率位于带隙内，因此用传播带中的声子（$\omega > max(\alpha,\ 1-\alpha) \gg \omega_T$）驱动钉扎扭结，并不是通过共振向 T 模式注入能量、克服缺陷的相互作用势以实现脱钉的有效方法。相反，我们通过两个频率分别为 ω_1和 ω_2 的传播声子相互作用，以非线性方式激发 ω_T，从而产生拍频 $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2| = \omega_T$（图 2b）。

将拍频扰动 $\delta u_B(x,\ t) = \delta u_{P1}(x,\ t) + \delta u_{P2}(x,\ t)$ 引入方程 8 的强迫项中，并将由 F_T中的二次非线性产生的不同频率项分离开来，总力可分为静态分量、共振分量和非共振分量：

$$\begin{aligned} F_T(t) &= F_{Tstat} + F_{Tres}(t) + F_{Tnon-res}(t) \\ &\approx \left[a_{P1}^2 K_{\text{stat}}^{11} + a_{P2}^2 K_{\text{stat}}^{22}\right] + \\ &+ a_{P1}a_{P2}\left[K_{\cos,-}^{12}\cos(\Delta\omega t) + K_{\sin,-}^{12}\sin(\Delta\omega t)\right], \end{aligned} \tag{9}$$

其中，a_{P1} 和 a_{P2} 是两个声子的振幅。高频声子（$F_{Tnon-res}(t)$）因远离 ω_T而不再考虑。为获得最大的响应幅值，并以尽可能低的激励能量实现脱钉，应选择使耦合系数（$K_{\cos,\ -}^{12}$）^{2} +($K_{\sin,\ -}^{12}$)^{2}最大化的拍频声子。值得注意的是，静态分量始终为正，因此振荡力 $F_T(t)$ 的平均值为正（如图 S13 所示）；从物理上看，这意味着偏置将扭结拉向激励源的作用强于将其向前推动的作用。尽管这种偏置不利于使扭结从缺陷中脱钉，但它有助于减缓传播行波的速度并促进钉扎，后文将对此进行解释。

从缺陷中脱钉需要扭结在强非线性势（式 S27 中的 $E_p(X_k)$）中发生大幅运动，而采用该势的谐波近似无法对其进行准确描述。事实上，随着激励幅值增大，我们观察到动力学明显软化（见补充信息图 S14）。为解释这一行为，有必要考虑扭结在大范围运动 $X(t)$过程中的位置相关刚度（如图 3a 所示）。

按照补充信息第八节所述的步骤，可以证明 $a_T(t) \approx -\sqrt{m_k}X(t)$，其中 $X(t) = X_k(t) - X_p$, X_p 是钉扎扭结中心的位置，而 $X_k(t)$ 是随时间变化的位置。利用这一关系和方程 S27，可将非线性降阶模型写为：

$$\ddot{a}_T + \beta\dot{a}_T + \frac{1}{\sqrt{m_k}}\frac{dE_p}{dX} = F_T(t). \tag{10}$$

当 a_T 较小时，这就简化为先前的线性降阶模型（方程 S65），其中 $\omega_T^2 = \frac{1}{m_k}\frac{d^2E_p}{dX^2}(X_p)$。

该降阶模型不仅能捕捉振荡畴壁的软化行为，还能同时预测脱钉（见图 3b）以及实现脱钉最高效的频率。图 3c 中的频率响应显示出两个主峰。较低频率的峰反映软化动力学：随着振荡振幅增大，有效固有频率降至约 $0.4\omega_T$。另一峰出现在驱动频率（$\approx 0.8\omega_T$）与软化后固有频率的两倍相匹配时，表明发生超谐共振。图 3d 中的脱钉扎图（由完整晶格模拟获得）证实，这些正是所需激励振幅最小的频率。对于不同的晶格不对称性 α，采用所述半解析方法可得到类似的最优频率

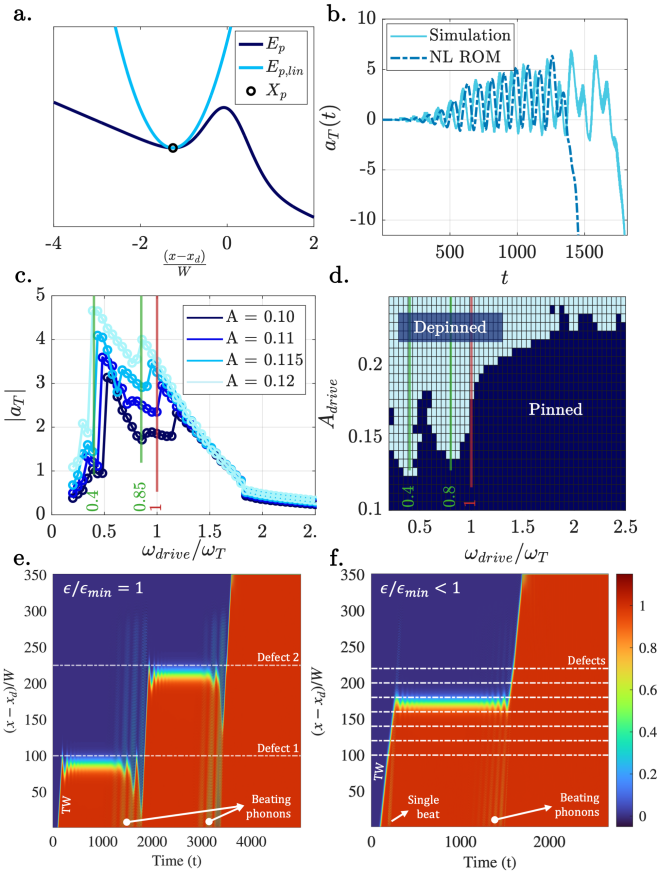

图 3。（a）线性降阶模型的谐势（浅蓝色）与扭结准粒子的势能（深蓝色）对比。（b）模拟与非线性降阶模型的对比，其中高振幅激发导致脱钉。（c）非线性降阶模型在振幅略低于脱钉阈值（0.125）时的软化频率响应，显示出位于 $0.4\omega_T$ 和 $0.85\omega_T$ 的两个峰。（d）展示脱钉对频率和振幅依赖性的模拟。（e）含有两个缺陷（位于单元 100 和 225）的系统，其中一个行波两次被阻止并脱钉。（f）含有缺陷阵列（$\epsilon < \epsilon_{min}$）的系统；行波穿过这些缺陷，直到被一次定时激发（单次拍频）减速，继而被钉扎，随后利用拍频声子使其脱钉。

于补充信息第八节和补充信息图 S16 中给出，表明该降阶模型可在较宽的参数范围内用作预测工具。

最后，我们展示这一机制如何在更复杂的情形中运作。首先，引入多个缺陷，使行波在不同位置停止，随后允许其继续传播（图3e）。强度为 $\epsilon \approx \epsilon_{min}$的缺陷不会强烈反射声子（图S10）。这使得声子能够穿过若干缺陷而不损失显著能量，并反复驱动脱钉，从而有效证明了将声子用作控制策略、对系统中的存储状态进行多次重写的可行性。然而，一个主要局限在于，当耗散或系统尺寸增大时，需要相对较强的激励（极端情况下拍频振幅为 $a_1 + a_2 \approx （1 - \alpha）$）。尽管如此，我们发现对于$\alpha > 0.45$仍可实现稳定的脱钉。为缓解这一局限并扩展参数空间，我们提出当前策略的一种变体，如图3f所示。此处引入一个具有$\epsilon/\epsilon_{min} < 1$ 的缺陷。尽管它无法独立阻止行波传播，但我们利用拍频声子所产生的力的静态分量（图S13）——该分量有效地对作用力施加偏置，将扭结向后拉——来减慢行波并降低其动能。这可通过在扭结与缺陷相互作用之前施加一段持续时间为 $\Delta t = 1/\omega_T$的拍频声子短脉冲来实现。在这些条件下，亚阈值缺陷能够钉扎扭结。由此，脱钉所需的作用力振幅更小，扭结的振荡也更小。

我们以若干评述作结，为本文所提出的策略提供总体背景。首先，尽管该策略是针对多项式势 $V(u)$推导得到的，但其本质上依赖于带隙内存在有限频率平移类模态。因此，这些结果普遍适用于广泛使用的正弦-戈登、$\phi 4$具有外部直流驱动场的系统以及类似模型。

此外，尽管我们分析的是连续系统，该方法也可以扩展到离散晶格。离散性会引入 Peierls-Nabarro 势，从而改变模态频率和有效耗散，但非线性声子-扭结耦合的基本性质仍保持不变。因此，这一策略在不同超材料中都具有实验可行性，包括基于双稳态梁和弹簧的系统（如图1a所示）、Kane-Lubensky链、 [43], 旋转方形超材料等。拍频激励可以通过单个振动器或压电边界处的电动执行器实现，从而降低现有机械存储单元的复杂性、提升可扩展性，并有望实现小型化。

我们以扭结形式存储机械数据这一策略的一个关键优势，是其对外部扰动的稳健性。在实验条件下，环境振动通常覆盖很宽的谱。然而，由于晶格禁止平移共振频率处的波传播，钉扎扭结可有效免受随机环境噪声的影响，且只有借助特定的强迫调制才能实现脱钉。这使得所提出的策略在承受真实世界振动与外部扰动的系统中，对于存储器存储和机械计算尤为可行且具有韧性。

最后，由于穿过扭结的声子会经历相位变化 [21], , 原则上可通过测量拍频声子从驱动位置到系统另一端的相位变化来确定钉扎扭结的位置（见补充信息第八节）。这种自传感可作为机械计算系统中机械本体感觉的一种形式而具有意义 [44]。

总之，本文研究了具有非对称势和局域缺陷的一维双稳态晶格中扭结孤子的钉扎与脱钉。我们采用一种考虑不同阻尼状态的方法，推导出钉扎传播过渡波所需的缺陷强度阈值。随后，我们建立了一个利用一对与扭结平移模态共振的拍频声子实现扭结远程脱钉的通用框架，从而绕过低频带隙带来的限制。考虑振幅依赖软化的非线性降阶模型能够预测扭结的振荡动力学，并确定实现高效脱钉的最佳激励频率。这种机制适用于广泛支持过渡波的双稳态超材料，不受具体结构或尺度的限制。它为扭结孤子提供了一种控制策略，可用于改进机械存储单元，使数据存储更加简单、可靠。

致谢

作者衷心感谢美国空军科学研究办公室通过资助项目 FA9550-23-1-0416 和 FA9550-23-1-0299 提供支持。

[1]K. K. Dudek、M. Kadic、C. Coulais 和 K. Bertoldi，《形状变换超材料》，《自然》材料评论，1（2025）。[2] A. Tahidul Haque、S. Ferracin 和 J. R. Raney，通过可单独切换的方式实现可重新编程的力学预应变手性超材料中的双稳态单胞，Advanced Materials Technologies 9，2400474（2024）。[3] K. Liang、X. Zhang、Q. Zhao、L. Suo、Z. Wei、Y. Wang、Y. Luo、A. Takezawa和 D. Wang，基于自锁双稳态的理想吸能超材料

结构，《材料视野》**12**，4165（2025）。[4] N. Nadkarni、A. F. Arrieta、C. Chong、D. M. Kochmann和C. Daraio，双稳态晶格中的单向转变波，《物理评论快报》**116**，244501（2016）。[5] Y. Song、R. M. Panas、S. Chizari、L. A. Shaw、J. A. Jackson、J. B. Hopkins和A. J. Pascall，可增材制造的微机械逻辑门，《自然·通讯》**10**，882（2019）。[6] H. Yasuda、P. R. Buskohl、A. Gillman、T. D. Murphey、S. Stepney、R. A. Vaia和J. R. Raney，机械计算，《自然》**598**，39（2021）。[7] Q. He、S. Ferracin和J. R. Raney，用于机械计算与机器人学的可编程响应超材料，《自然·计算科学》**4**，567（2024）。[8] Y. Chen、T. Tan和Z. Yan，通过折纸电路重构并结合机器人寻址与激活实现的通用机械计算，《自然·通讯》**16**，10483（2025）。[9] Y. Jiang、L. M. Korpas和J. R. Raney，基于分岔的具身逻辑与自主驱动，《自然·通讯》**10**，128（2019）。[10] Z. Liu、H. Fang、J. Xu和K.-W. Wang，受元胞自动机启发、用于机械学习的多稳态折纸超材料，《先进科学》**10**，2305146（2023）。[11] T. Mei、Z. Meng、K. Zhao和C. Q. Chen，具有可重编程逻辑功能的机械超材料，《自然·通讯》**12**，7234（2021）。[12] J. Byun、A. Pal、J. Ko和M. Sitti，面向自主软体机器的集成机械计算，《自然·通讯》**15**，2933（2024）。[13] H. Yasuda、T. Tachi、M. Lee和J. Yang，用于非易失性机械存储操作的基于折纸的可调桁架结构，《自然·通讯》**8**，962（2017）。[14] T. Jules、A. Reid、K. E. Daniels、M. Mungan和F. Lechenault，折纸开关的精细记忆结构，《物理评论研究》**4**，013128（2022）。[15] N. N. Stenseng、M. M. Samak和O. R. Bilal，具有内禀记忆、可基于频率和振幅进行选择性波滤波的双稳态超材料，《先进科学》**12**，2405146（2025）。[16] M. Bodaghi和W. Liao，具有形状记忆操作的4D打印可调机械超材料，《智能材料与结构》**28**，045019（2019）。[17] J. R. Raney、N. Nadkarni、C. Daraio、D. M. Kochmann、J. A. Lewis和K. Bertoldi，利用储存的弹性能在软介质中稳定传播机械信号，《美国国家科学院院刊》**113**，9722 2016( )。[18] G. Puglisi和L. Truskinovsky，含双稳态单元的离散链力学，《固体力学与物理学杂志》**48**，1（2000）。[19] R. Abeyaratne和J. K. Knowles，*Evolution of phase transitions: a continuum theory*（剑桥大学出版社，2006）。[20] M. Peyrard和M. D. Kruskal，高度离散正弦-戈登系统中的扭结动力学，《物理学D辑：非线性现象》**14**，88（1984）。[21] W. Hasenfratz和R. Klein，孤波解与声子在位移型结构相变一维模型中的相互作用，《物理学A辑：统计力学及其应用》**89**，191（1977）。[22] B. Deng、S. Yu、A. E. Forte、V. Tournat 和 K. Bertoldi，《柔性机械超材料中畴壁的表征、稳定性及应用》，《美国国家科学院院刊》**117**，31002（2020）。[23] C. Wang 和 M. J. Frazier，《多稳态超材料中的相位图案化：转变波稳定与模式转换》，应用物理快报**123**（2023）。[24] L. Jin、R. Khajehtourian、J. Mueller、A. Rafsanjani、V. Tournat、K. Bertoldi 和 D. M. Kochmann，《多稳态机械超材料中的导向转变波》，《美国国家科学院院刊》**117**，2319（2020）。[25] T. Chen、M. Pauly 和 P. M. Reis，《具有稳定记忆的可重编程机械超材料》，《自然》**589**，386（2021）。[26] J. E. Pechac 和 M. J. Frazier，《来自多稳态超材料的机械多级存储》，应用物理快报**122**（2023）。[27] A. A. Watkins、G. Bordiga、M. Mu、V. Tournat 和 K. Bertoldi，《通过双稳态超材料中的非线性波实现任意机械记忆编码》，arXiv预印本 arXiv:2508.20321（2025）。[28] J. Currie、A. Blumen、M. Collins 和 J. Ross，《铁畸变材料中的畴壁动力学 II：在 $Pb_5Ge_3O_{11}$ 型和 SbSI 型铁电体中的应用》，物理评论B**19**，3645（1979）。[29] J. Cuevas-Maraver、P. G. Kevrekidis 和 F. Williams，《正弦-戈登模型及其应用》，《非线性系统与复杂性》**10**（2014）。[30] T. Swinburne、S. Dudarev、S. Fitzgerald、M. Gilbert 和 A. Sutton，《体心立方金属中位错扭结扩散的理论与模拟》，物理评论B—凝聚态与材料物理**87**，064108（2013）。[31] X. Chen、L. Xiong、D. L. McDowell 和 Y. Chen，《声子对位错及位错阵列迁移率的影响》，Scripta Materialia**137**，22（2017）。[32] D. Shilo 和 E. Zolotoyabko，《对 0.58 GHz 声子激发的振动位错进行频闪X射线成像》，《物理评论快报》**91**，115506（2003）。[33] K. Siu 和 A. Ngan，《通过位错动力学模拟理解声塑性》，哲学杂志**91**，4367（2011）。[34] H. Yasuda、H. Shu、W. Jiao、V. Tournat 和 J. R. Raney，《通过弹性矢量孤子碰撞成核转变波》，应用物理快报**123**，051701（2023）。[35] B. Deng、M. Zanaty、A. E. Forte 和 K. Bertoldi，《拓扑孤子使超材料爬行》，Physical Review Applied**17**，014004（2022）。[36] B. Deng、J. R. Raney、K. Bertoldi 和 V. Tournat，《柔性机械超材料中的非线性波》，Journal of Applied Physics**130**（2021）。[37] A. Paliovaios、G. Theocharis、V. Achilleos 和 V. Tournat，《由运动呼吸子碰撞产生的双稳态系统中的转变波》，Extreme Mechanics Letters**71**，102199（2024）。[38] W. Jiao、H. Shu、V. Tournat 和 J. R. Raney，《通过类孤子脉冲碰撞实现二维多稳态机械超材料中的相变》，Nature Communications**15**，333（2024）。[39] B. A. Malomed、D. K. Campbell、N. Knowles 和 R. J. Flesch，《扭结与缺陷模的相互作用》，物理快报A**178**，271（1993）。[40] Z. Fei、Y. S. Kivshar 和 L. V´azquez，《共振扭结-

杂质相互作用在 φ 4 模型中的研究，Physical Review A**46**，5214（1992）。[41] C. Wang 和 M. J. Frazier，《层级多稳态超材料中的相变》，Extreme Mechanics Letters**64**，102068（2023）。[42] B. Malomed，《φ⁴扭结与非均匀性相互作用的微扰分析》，Journal of Physics A: Mathematical and General**25**，755（1992）。[43] K. Qian、N. Cheng、F. Serafin、K. Sun、G. Theocharis、X. Mao 和 N. Boechler，《声子驱动的机械孤子控制与生成的观测》，arXiv预印本 arXiv:2502.16117（2025）。[44] W. Jiao、H. Shu、Q. He 和 J. R. Raney，《迈向自主可重构剪纸启发式机械系统中的机械本体感知》，英国皇家学会哲学汇刊A**382**，20240116（2024）。[45] O. M. Braun 和 Y. S. Kivshar，《Frenkel–Kontorova模型的非线性动力学》，Physics Reports**306**，1（1998）。

补充信息：通过钉扎和脱钉过渡波实现声子控制的机械存储器

Samuele Ferracin、Dengge Jin、Vincent Tournat、Jordan Raney

I. 控制方程

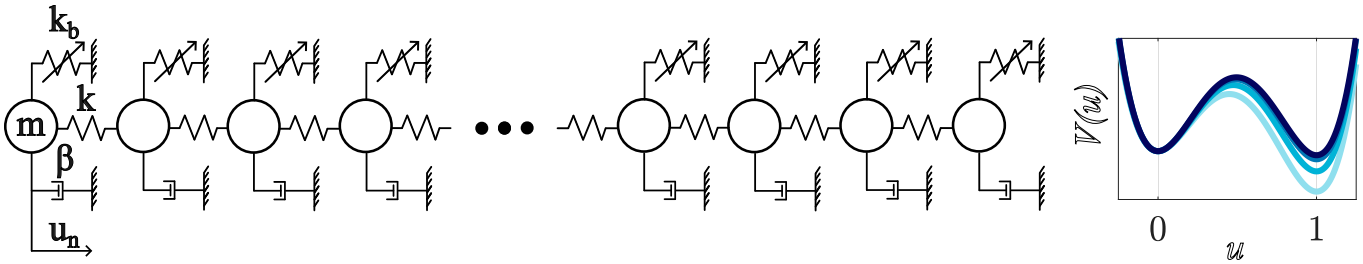

图 S1. 方程 S1 中离散系统的示意图。

离散系统的起始控制方程为 $\forall n$:

$$m\frac{d^2u_n}{dt^2}+\beta\frac{du_n}{dt}=k(u_{n-1}-u_n)+k(u_{n+1}-u_n)-k_bu_n(u_n-\alpha L)(u_n-L), \tag{S1}$$

其中， u_n 是单元 n的位移， m 是其质量， β 是黏性阻尼参数。各质量块通过刚度为 k $[N/m]$ 的线性弹簧与其最近邻相连，并通过刚度为 $k_b[N/m^3]$ 且具有三次非线性的双稳态弹簧接地。这些非线性弹簧可以是不对称的，其中参数 $0<\alpha<1$ 控制不对称性。

A. 连续介质近似

我们设 $x=na$，因此 $u_n(t)=u(na,t)$，其中 a 为晶格间距:

$$u_{n+1}(t)=u(x+a,t)=u(x,t)+a\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{a^2}{2}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{a^3}{6}\frac{\partial^3u}{\partial x^3}+O(a^4),$$

$$u_{n-1}(t)=u(x-a,t)=u(x,t)-a\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{a^2}{2}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{a^3}{6}\frac{\partial^3u}{\partial x^3}+O(a^4),$$

$$u_{n+1}+u_{n-1}-2u=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+O(a^4).$$

忽略高阶项:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=-\frac{\beta}{m}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{ka^2}{m}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{k_b}{m}u(u-\alpha L)(u-L),$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\frac{\beta}{m}\frac{\partial u}{\partial t}-c^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{k_b}{m}u(u-\alpha L)(u-L)=0, \tag{S2}$$

with

$$c^2=\frac{ka^2}{m}.$$

B. 无量纲变量

- $\bar{u}=\frac{u}{a}$，其中 u 表示位移， a 表示质量之间的晶格间距。为方便起见，从此处起我们考虑 $L=a$；
- $\bar{x}=\frac{x}{a}$;
- $\bar{t}=\frac{t}{T}$，其中 T 是特征时间尺度。

于是:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{a}{T}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{a}{T^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2}.$$

代入运动方程:

$$\frac{a}{T^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2}+\frac{a}{T}\frac{\beta}{m}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}-\frac{c^2}{a}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}+\frac{k_b}{m}(\bar{u}a)(\bar{u}a-\alpha a)(\bar{u}a-a)=0.$$

两边除以 $\frac{a}{T^2}$, 得到无量纲量:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2}+T\frac{\beta}{m}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}-c^2\frac{T^2}{a^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}+\frac{k_b}{m}T^2a^2\bar{u}\left(\bar{u}-\alpha\right)\left(\bar{u}-1\right)=0,$$

$$\frac{k_b}{m}T^2a^2=1,\quad T^2=\frac{m}{k_ba^2},$$

$$\frac{c^2T^2}{a^2}=\frac{ka^2}{m}\cdot\frac{m}{k_ba^2}\cdot\frac{1}{a^2}=\frac{k}{k_ba^2}=\bar{c}^2,$$

$$T\frac{\beta}{m}=\sqrt{\frac{m}{k_ba^2}}\frac{\beta}{m}=\sqrt{\frac{1}{k_ba^2}}\beta=\bar{\beta}.$$

最后:

$$\ddot{\bar{u}}+\bar{\beta}\dot{\bar{u}}-\bar{c}^2\bar{u}_{,\bar{x}\bar{x}}+\bar{u}\left(\bar{u}-\alpha\right)\left(\bar{u}-1\right)=0, \tag{S3}$$

$$\ddot{\bar{u}}+\bar{\beta}\dot{\bar{u}}-\bar{c}^2\bar{u}_{,\bar{x}\bar{x}}+\bar{u}^3-(\alpha+1)\bar{u}^2+\alpha\bar{u}=0,$$

$$\ddot{\bar{u}}+\bar{\beta}\dot{\bar{u}}-\bar{c}^2\bar{u}_{,\bar{x}\bar{x}}+\frac{dV}{d\bar{u}}=0. \tag{S4}$$

这是一个具有三次非线性 $\frac{dV}{d\bar{u}}=\bar{u}^3-(\alpha+1)\bar{u}^2+\alpha\bar{u}$ 的克莱因-戈尔登方程，其中 $V(\bar{u})$ 是非线性双稳势。我们可以对非线性力积分，求出势:

$$V(\bar{u})=\int\left(\bar{u}^3-(\alpha+1)u^2+\alpha\bar{u}\right)d\bar{u}=\frac{1}{4}\bar{u}^4-\frac{\alpha+1}{3}\bar{u}^3+\frac{\alpha}{2}\bar{u}^2 \tag{S5}$$

（令积分常数为零）。根为 $\bar{u}=0$ ($V(\bar{u}=0)=0$)、 $\bar{u}=1$ ($V(\bar{u}=1)=\frac{2\alpha-1}{12}$) 和$\bar{u}=\alpha$。对于 $\alpha\in$ (0, 1), 稳定平衡态位于 $\bar{u}=0$ 和 $\bar{u}=1$，不稳定平衡位于 $\bar{u}=\alpha$。从此处开始，为了讨论无量纲单位，我们不再使用 $\bar{}$ 记法。

II. 线性波

根据该控制方程，在无阻尼情况下，我们考虑 $u = 0$和 $u = 1$附近的小振幅。非线性力在第一种情况下线性化为 $F(u) \approx -\alpha u$，在第二种情况下线性化为 $F(u) \approx -(1-\alpha)u$。*a.* 连续极限 我们假设波解的形式为

$$\bar{u} = Ae^{i(qx-\omega t)}, \tag{S6}$$

w波数为 q_0 和 q_1，具体取决于所考虑的平衡态。这给出 s:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= c^2 q_0^2 + \alpha, \\ \omega_1^2 &= c^2 q_1^2 + 1 - \alpha, \end{aligned} \tag{S7}$$

它们是经典的克莱因–戈尔登色散关系 [45]（见图 2a），具有低频带隙，其截止频率ω_{cutoff} 取决于非对称参数 α 和平衡态。相速度如预期始终为$\geq c$:

$$\begin{aligned} v_{p0}(q_0) &= \frac{\omega_0}{q_0} = \sqrt{c^2 + \frac{\alpha}{q_0^2}}, \\ v_{p1}(q_1) &= \frac{\omega_1}{q_1} = \sqrt{c^2 + \frac{1-\alpha}{q_1^2}}. \end{aligned} \tag{S8}$$

群速度为:

$$\begin{aligned} v_{g0}(q_0) &= \frac{d\omega_0}{dq_0} = \frac{1}{2}\frac{2c^2 q_0}{\sqrt{c^2 q_0^2 + \alpha}} = \frac{c^2 q_0}{\omega_0}, \\ v_{g1}(q_1) &= \frac{d\omega_1}{dq_1} = \frac{1}{2}\frac{2c^2 q_1}{\sqrt{c^2 q_1^2 + 1 - \alpha}} = \frac{c^2 q_1}{\omega_1}. \end{aligned} \tag{S9}$$

b. 离散我们假设波解的形式为:

$$u_j = Ae^{i(qja_s-\omega t)}, \tag{S10}$$

其中 a_s 是用于数值模拟该系统的无量纲间距。间距选取得足够小（$a_s = W/10$），以确保连续介质近似仍然有效。将此解代入离散方程

$$u_{j,tt} - \frac{c^2}{a_s^2}(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) - F(u) = 0, \tag{S11}$$

得到:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{2c^2}{a_s^2}(1 - \cos(q_0 a_s)) + \alpha, \\ \omega_1^2 &= \frac{2c^2}{a_s^2}(1 - \cos(q_1 a_s)) + 1 - \alpha. \end{aligned} \tag{S12}$$

群速度为:

$$\begin{aligned} v_{g0}(q_0) &= \frac{d\omega_0}{dq_0} = \frac{2c^2}{\omega_0 a_s}\sin(q_0 a_s), \\ v_{g1}(q_1) &= \frac{d\omega_1}{dq_1} = \frac{2c^2}{\omega_1 a_s}\sin(q_1 a_s). \end{aligned} \tag{S13}$$

III. 过渡波解析解

这里我们遵循 [41] 中 S3节的步骤，解析地求出传播过渡波的形式。根据公式 S4：

$$\ddot{u} + \beta\dot{u} - c^2 u_{,xx} + \frac{dV}{du} = 0,$$

我们假设存在一个行波： $u(x,\ t) = u(z)$，其中

$$z = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

导数为： $\dot{u} = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\frac{du}{dz}$，$\ddot{u} = \left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right)^2 \frac{d^2u}{dz^2}$，$u_{,\ xx} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)^2 \frac{d^2u}{dz^2}$。代入运动方程：

$$\frac{(c^2 - v^2)}{1 - v^2}\frac{d^2u}{dz^2} + \beta\frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}\frac{du}{dz} - \frac{dV}{du} = 0.$$

现在通过变量替换可将方程化简为一阶方程： $p = \frac{du}{dz}$，因此 $\frac{d^2u}{dz^2} = p\frac{dp}{du}$：

$$\frac{(c^2 - v^2)}{1 - v^2}p\frac{dp}{du} + \beta\frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}p = u^3 - (\alpha + 1)u^2 + \alpha u.$$

由于非线性力是三次的，$p(u)$ 必须是二次多项式。由于不动点为 $u = 0$ 和 $u = 1$，我们可以假设 $p(u)$ 的形式如下：

$$p = Au(u - 1), \quad \frac{dp}{du} = A(2u - 1).$$

代入：

$$\frac{(c^2 - v^2)}{1 - v^2}A^2u(u - 1)(2u - 1) + \beta\frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}Au(u - 1) = u^3 - (\alpha + 1)u^2 + \alpha u = u(u - \alpha)(u - 1).$$

我们可以提出因子 $u(u - 1)$：

$$\frac{(c^2 - v^2)}{1 - v^2}A^2(2u - 1) + \beta\frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}A = u - \alpha.$$

令相同阶数的系数相等：

$$2\frac{(c^2 - v^2)}{1 - v^2}A^2 = 1, \quad A = \sqrt{\frac{1 - v^2}{2(c^2 - v^2)}},$$

$$v = \frac{c|1 - 2\alpha|}{\sqrt{2\beta^2 + (1 - 2\alpha)^2}}.$$

行波的传播速度 v 取决于非对称参数 α 和阻尼 β。图 S4 展示了不同 β 和 α 取值时该速度的变化趋势；当阻尼非常小时，扭结的传播速度趋于 c。我们还可以注意到，对于有限阻尼， α 越接近 0，行波的速度就越快。如果 $alpha > 0.5$，不对称性就会反转，行波可以沿负方向传播；如果 $\alpha = 0.5$，并且存在阻尼，行波就会减速并停止。将 A 代入 p： $\frac{du}{dz} = \sqrt{2\frac{1-v^2}{c^2-v^2()}}u(u - 1)$，并分离变量：

$$\frac{du}{u(u - 1)} = \sqrt{\frac{1 - v^2}{2(c^2 - v^2)}}dz.$$

利用部分分式：$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}$，我们可以积分得到：

$$\ln\left|\frac{u-1}{u}\right| = \sqrt{\frac{1-v^2}{2(c^2-v^2)}}(z-z_0),$$

$$\frac{u-1}{u} = e^{\frac{(z-z_0)\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{2(c^2-v^2)}}},$$

$$u(z) = \frac{1}{1+e^{\frac{(z-z_0)\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{2(c^2-v^2)}}}}.$$

我们利用恒等式 $e^x = \frac{1+\text{双曲正切}(x/2)}{1-\text{双曲正切}(x/2)}$，将 $u(z) = \frac{1}{1+e^{\frac{(z-z_0)\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{2(c^2-v^2)}}}}$ 转化，其中 $x = \frac{(z-z_0)\sqrt{1-v^2})}{\sqrt{2(c^2-v^2}}$，因此：

$$e^{\frac{(z-z_0)\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{2(c^2-v^2)}}} = \frac{1+\tanh\left(\frac{(z-z_0)\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{2(c^2-v^2)}}\right)}{1-\tanh\left(\frac{(z-z_0)\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{2(c^2-v^2)}}\right)},$$

代入：

$$u(z) = \frac{1-\tanh\left(\frac{(z-z_0)\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{2(c^2-v^2)}}\right)}{2}.$$

我们可以得到跃迁波的解析形式：

$$u(z) = \frac{1}{2}\left[1-\tanh\left(\frac{(z-z_0)\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{2(c^2-v^2)}}\right)\right] = u(x,t) = \frac{1}{2}\left[1-\tanh\left(\frac{(x-x_0)-v(t-t_0)}{W}\right)\right], \tag{S14}$$

$$v = \sqrt{\frac{c^2(1-2\alpha)^2}{2\beta^2+(1-2\alpha)^2}}, \tag{S15}$$

$$W = 2\sqrt{2(c^2-v^2)}. \tag{S16}$$

这是跃迁波的经典双曲正切剖面，以速度 v 传播，其特征无量纲宽度为 W。图 S5 展示了该宽度对 β 和 α 的依赖关系：阻尼较小时（速度较高），剖面变得更加陡峭，并趋近于阶跃函数。相反，阻尼较高时，宽度则收敛至有限值 $W = 2e\sqrt{2}$。

1. Analytical expressions of the kinetic and elastic energies of the kink

动能为：

$$E_k = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}^2\, dx, \tag{S17}$$

弹性能为：

$$E_e = \frac{c^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_{,x}^2\, dx. \tag{S18}$$

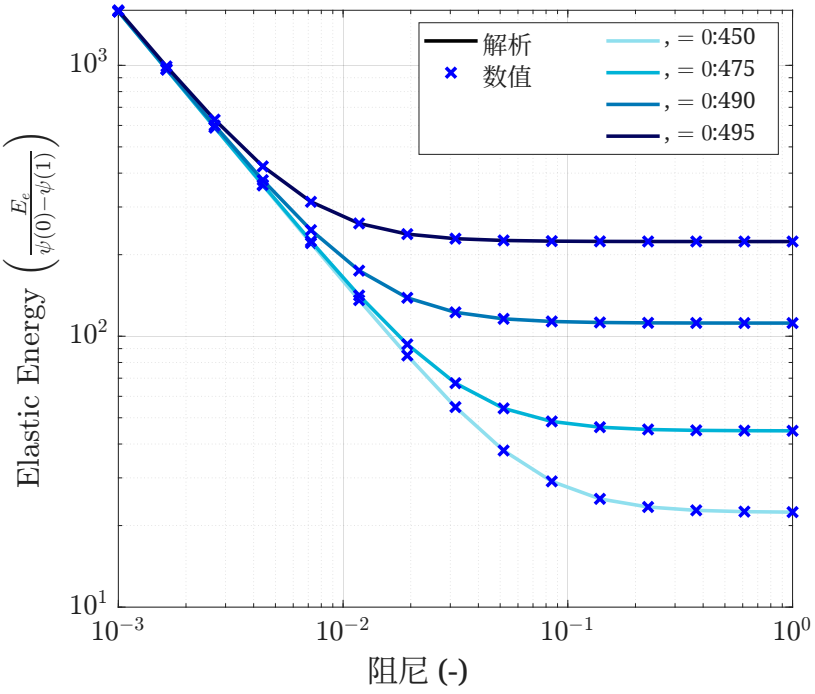

图 S2. 弹性能：由公式 S20 得出的解析形式与完整模拟结果的对比（使用 Matlab 的 $ode45$）。可以看到，如前文在 SI 第 2 节所述，通过提高点的密度来细化模拟（减小间距 a_s），模拟结果始终吻合良好，不会出现强离散系统所导致的差异。

将变量从 x 改为 $\xi = \frac{x-vt}{W}$：

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{W},$$

$$u_{,t} = \frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{2}\mathrm{sech}^2(\xi)(-\frac{v}{W}),$$

$$u_{,x} = \frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{2}\mathrm{sech}^2(\xi)(\frac{1}{W}).$$

将这些代入能量关系式，动能变为：

$$E_k = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4}\mathrm{sech}^4(\xi)\frac{v^2}{W^2}\,W d\xi = \frac{v^2}{8W}\frac{4}{3} = \frac{v^2}{6W}, \tag{S19}$$

弹性能为：

$$E_e = \frac{c^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4}\mathrm{sech}^4(\xi)\frac{1}{W^2}\,W d\xi = \frac{c^2}{8W}\frac{4}{3} = \frac{c^2}{6W}. \tag{S20}$$

图 S3 展示了不同 α 和 β下动能的变化趋势。对于无阻尼的情况，E_k 会发散，此时扭结趋近于传播速度 c。而在阻尼较大的情况下，动能则随 v 降低（如前文所述），趋近于 0。弹性能（图 S2）则呈现出不同的变化：在低阻尼下会发散（宽度 $W \to 0$），而在高阻尼下则达到渐近值（宽度收敛至有限值）。

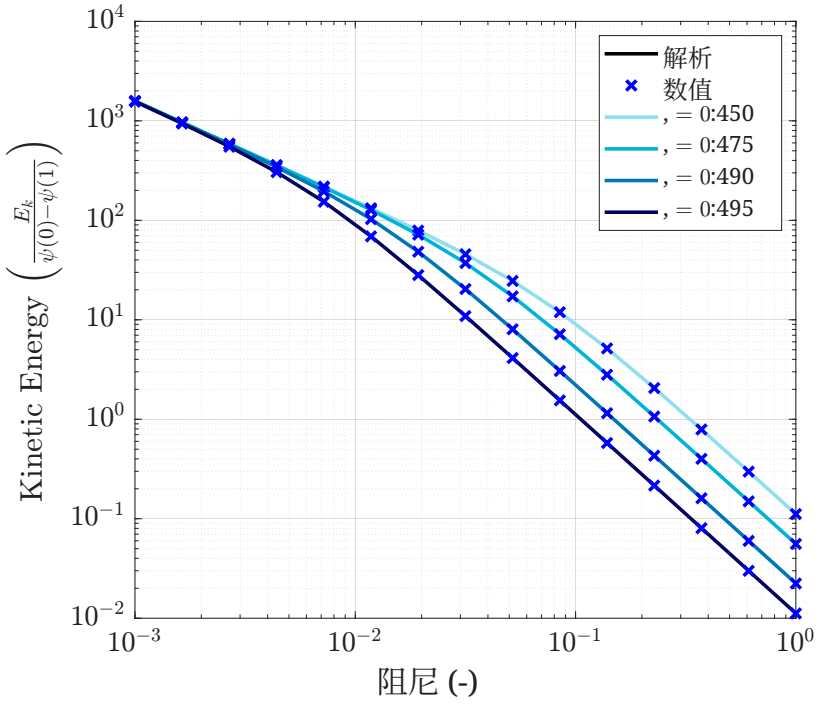

图 S3. 动能，公式 S19 给出的解析形式与完整模拟对比（使用 Matlab 的 *ode45*）。

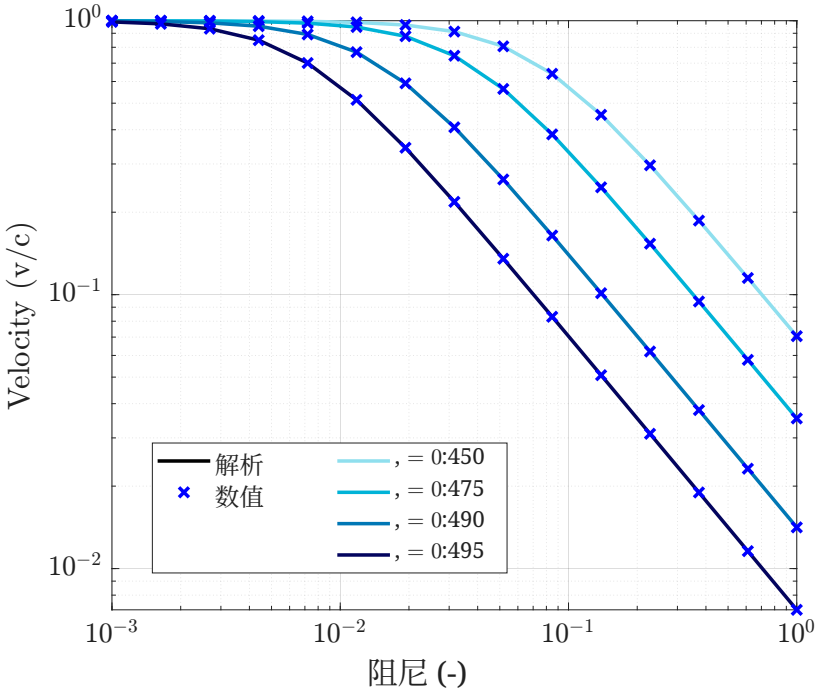

图 S4. 传播扭结的速度 v，公式 S15 给出的解析形式与完整模拟对比（使用 Matlab 的 *ode45*）。

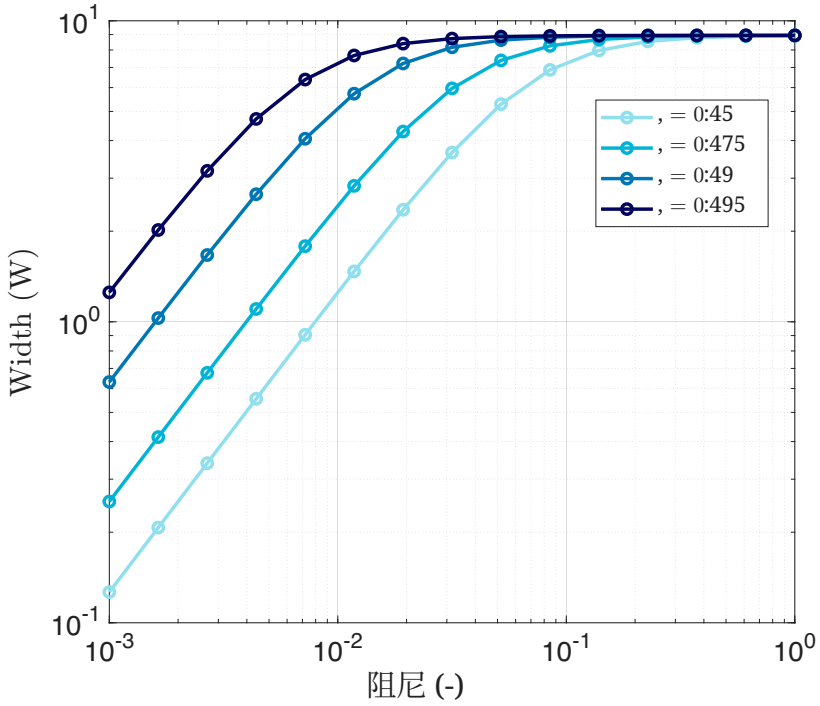

图 S5. 传播扭结的特征宽度 W，式 S16 的解析形式与完整模拟（使用 Matlab 的 *ode45*）的比较。

IV. 含缺陷的晶格：钉扎跃迁波的临界缺陷

我们考虑与前文相同的系统，但现在在位置 x_d 引入一个局域杂质，其势为基准单元势的 ϵ 倍：

$$\ddot{u} + \beta\dot{u} - c^2 u_{,xx} + (1 + (\epsilon - 1)\delta(x - x_d))\,\frac{dV(u)}{du} = 0, \tag{S21}$$

其中， δ 是正则化狄拉克δ函数。为计算停止扭结孤子所需的缺陷强度阈值 ϵ_{min}，我们采用一种混合方法，在两种极限情形之间进行插值：绝热（能量平衡）极限，适用于扭结-缺陷相互作用期间阻尼效应较弱的情况；以及力平衡极限，适用于阻尼强到足以使扭结轮廓进行准静态调整的情况。这种混合由无量纲参数 γ 控制，该参数量化相互作用时间尺度内的有效阻尼。无量纲阻尼参数定义如下：

$$\gamma = \beta\frac{W}{v}, \tag{S22}$$

它表示阻尼系数 β 与相互作用时间尺度 $\tau = W/v$ 的乘积（即扭结穿过自身宽度所需的时间，近似表示缺陷相互作用持续时间）。

A. 绝热极限

在低阻尼区间（$\gamma \ll 1$）且仍处于连续区间时，扭结与缺陷近乎保守地相互作用。阈值 ϵ_{min}^{adiab}由将扭结的动能 E_k 与缺陷和扭结之间的相互作用势 $U_d(\xi_0)$ [42]的峰值相等来确定。 $U_d(\xi_0)$表示扭结（视为准粒子）因缺陷而经历的有效相互作用势；该势随扭结质心与杂质之间距离的变化而变化。

$$U_d(\xi_0) = \int_{-\infty}^{\infty} (\epsilon_{min}^{adiab} - 1)\delta(\xi - \xi_d)V(u(\xi - \xi_0))d\xi = (\epsilon_{min}^{adiab} - 1)V(u(\xi_d - \xi_0)), \tag{S23}$$

其中 $\xi_d = \frac{x_d - vt}{W}$ 为缺陷位置， $\xi_0 = \frac{x_0 - vt_0}{W}$为扭结位置。由上述方程可知，当 $\xi_0 \ll \xi_d$ （或$\xi_0 \gg \xi_d$）时， $u(\xi_d - \xi_0) \approx 0$ （或1），因此 $\frac{dV(u)}{du} \approx 0$，表明扭结与缺陷之间没有相互作用力。当 ξ_0 接近 ξ_d 时，缺陷对扭结施加排斥力。$U_d(\xi_0)$的最大值简单地由非线性势 $V(u)$的最大值给出。这发生在 $u = \alpha$时。因此， $U_d(\xi_0)$的最大值为：

$$max(U_d(z)) = (\epsilon_{min}^{adiab} - 1)V(u = \alpha) = (\epsilon_{min}^{adiab} - 1)\frac{\alpha^3(2 - \alpha)}{12}.$$

如前计算，动能为

$$E_k = \frac{v^2}{6W}. \tag{S24}$$

令 $E_k = max(U_d(\xi_0))$，可得

$$\epsilon_{min}^{adiab} = 1 + \frac{2v^2}{W\alpha^3(2 - \alpha)}. \tag{S25}$$

含缺陷晶格中的势能（如图 S6 所示）为：

$$E_p(\xi_0) = E_e(\xi_0) + \int_{-\infty}^{\infty} V(u(\xi - \xi_0))W d\xi + U_d(\xi_0). \tag{S26}$$

弹性能部分为常数，因为缺陷并不改变弹性耦合弹簧。而第二项则很容易计算，因为已知低态与高态之间的势能差为$V(0) - V(1) = -\frac{2\alpha - 1}{12}$。因此，系统势能将随扭结的平移而线性减小。

势能变为：

$$E_p(\xi_0) = E_e - \frac{2\alpha - 1}{12}\xi_0 + U_d(\xi_0). \tag{S27}$$

B. 力平衡极限

在高阻尼区（$\gamma \gg 1$），扭结会准静态地适应缺陷，而阈值 ϵ_{min}^{force} 则通过平衡势能不对称性产生的驱动力与缺陷产生的最大反向力来确定。

不对称驱动力为:

$$F_{driving} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dV(u)}{du} \frac{du}{d\xi_0} W d\xi_0 = \frac{1-2\alpha}{12} \tag{S28}$$

当 $\alpha < 0.5$ 时，该力为正（推动扭结向前）。

缺陷对扭结施加的力也可以用类似的方法计算,

$$\begin{aligned} F_{barrier}(\xi_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - \xi_d) \frac{dV(u(\xi-\xi_0))}{du} \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{W} = \\ = \frac{dV(u(\xi_d-\xi_0))}{du} \frac{du(\xi_d-\xi_0)}{d\xi} \frac{1}{W}. \end{aligned} \tag{S29}$$

我们真正关心的是函数 $F_{barrier}$的最大值。如果它低于驱动力 $F_{driving}$，那么扭结就能缓慢穿过缺陷。梯度 $\frac{du}{d\xi} = -\frac{1}{2}\text{sech}^2(\xi_d - \xi_0)$ 在 $\xi_0 = \xi_d$ 处达到最大值，而双稳态力 $^{dV}/_{(u)du}$ 在 $u = \frac{1}{3}(\pm\sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1} + \alpha + 1)$ 时达到最大值（我们将使用符号 $-$，因为从 0 移动到 1 的扭结最初会以较小的位移与缺陷相互作用）。因此，必须通过数值方法计算 $F_{barrier}$ 的最大值。

最大反向力为 $max(F_{barrier}(\xi_0))$（正峰值，因为它抵抗负向驱动力）。

当 $F_{driving} + (\epsilon_{min}^{force} - 1) max(F_{barrier}(\xi_0)) = 0$ （平衡大小）时,

$$\epsilon_{min}^{force} = 1 - \frac{F_{driving}}{max(F_{barrier}(\xi_0))}. \tag{S30}$$

C. 混合阈值

为在不同状态之间进行插值，我们采用如下形式的指数混合:

$$\epsilon_{min} = \epsilon_{min}^{adiab} e^{-\gamma} + \epsilon_{min}^{force}(1 - e^{-\gamma}), \tag{S31}$$

其中，$e^{-\gamma}$ 是绝热极限的权重（γ 较小时权重较高），随着 γ 增大，逐渐过渡到力。

这种方法能够捕捉阻尼相关钉扎，相较于单纯的能量平衡提高了准确性，尤其适用于中间 β。

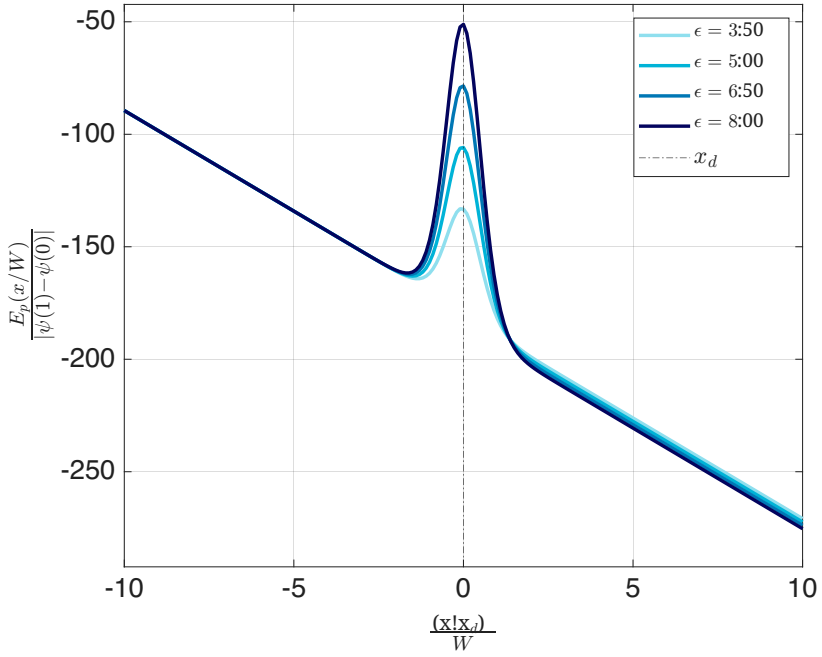

图 S6. 根据公式 S26，扭结与缺陷相互作用的势能 E_p。 $\alpha = 0.495$。

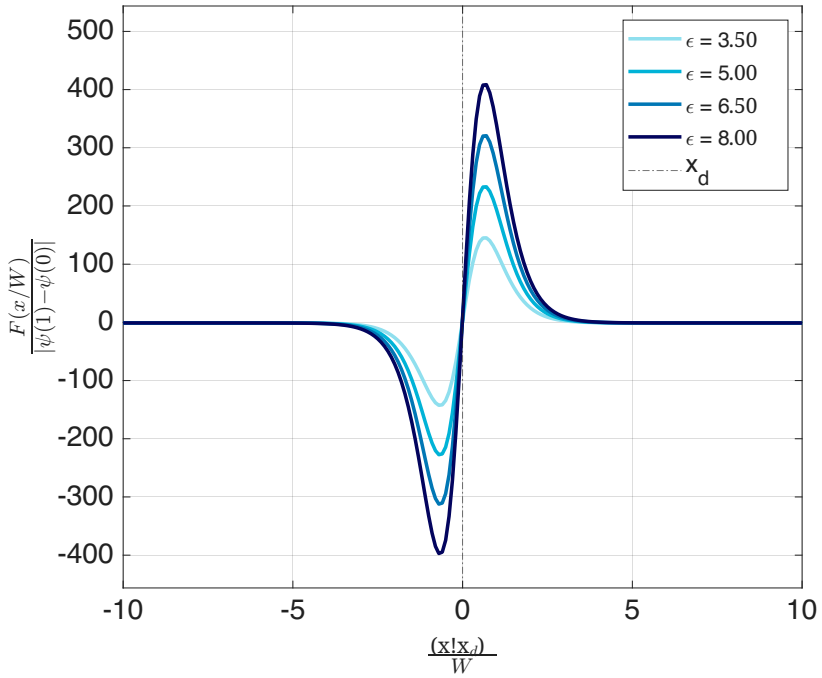

图 S7. 根据公式 S29，扭结与缺陷相互作用的力 $F_{barrier}$。 $\alpha = 0.495$。

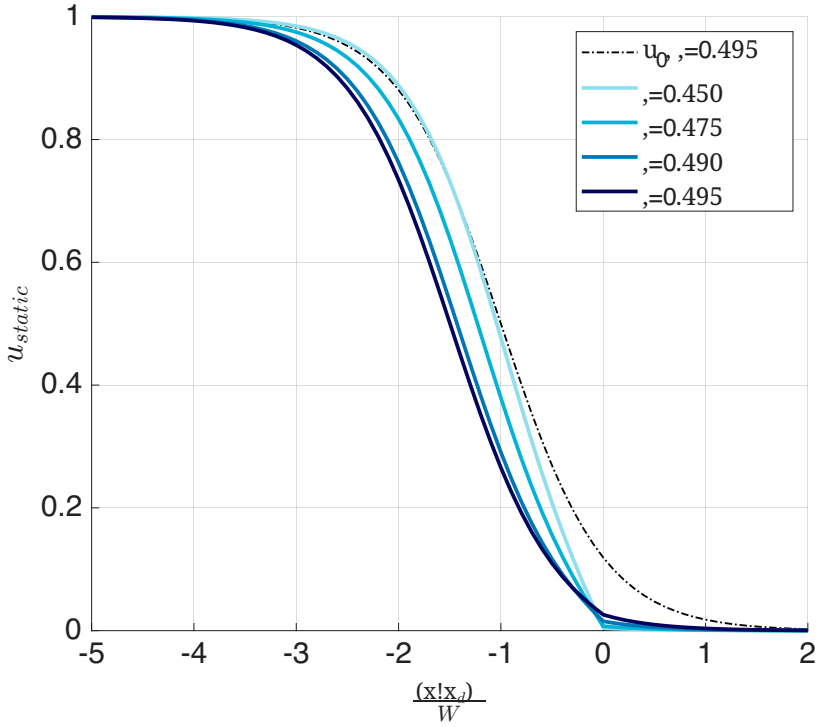

图 S8. 缺陷 $\epsilon = \epsilon_{min}$ 上钉扎扭结的位移轮廓，对应 α 的不同取值。虚线表示数值求解器的初始猜测，该求解器以此前针对不存在不完美性的系统计算得到的解析形状作为初始试探形状；扭结的中心位于 $\epsilon_k = -W$。将扭结中心设在缺陷位置并不能确保求解器实现数值收敛（此时扭结将处于不稳定平衡态）。

V. 钉扎扭结的微扰分析

A. 钉扎静态扭结的形状

我们考虑前述系统，其中局域杂质位于 x_d 处，其势为基准单元势的 ϵ 倍。当扭结被缺陷钉扎时，可通过静态方程数值计算其变形后的形状 $u_0(x)$,

$$-c^2 u_{0,xx} + (1 + (\epsilon - 1)\delta(x - x_d))V'(u_0) = 0. \tag{S32}$$

这是通过 Matlab 函数 $fsolve()$ 完成的，初始猜测取为 $u_k(x + W)$；其中 u_k 是先前解析计算得到的扭结形状。

B. 线性微扰分析

考虑完整的动力学方程,

$$\ddot{u} + \beta\dot{u} - c^2 u_{,xx} + (1 + (\epsilon - 1)\delta(x - x_d))V'(u_0) = 0, \tag{S33}$$

我们可以研究一个微扰解 $u^* = u_0(x) + \delta u(x,\ t)$。因此，该解的导数为

$$\dot{u}^* = \frac{\partial u_0(x)}{\partial t} + \dot{\delta u} = \dot{\delta u}, \tag{S34}$$

$$\ddot{u}^* = \ddot{\delta u}, \tag{S35}$$

$$u^*_{,xx} = u_{0,xx} + \delta u_{,xx}. \tag{S36}$$

非线性势 $V'(u^*)$ 可展开为

$$\begin{aligned} V'(u^*) = V'(u_0 + \delta u) = (u_0 + \delta u)^3 - (\alpha + 1)(u_0 + \delta u)^2 + \alpha(u_0 + \delta u), \\ (u_0 + \delta u)^3 = u_0^3 + 3u_0^2\delta u + 3u_0\delta u^2 + \delta u^3, \\ (u_0 + \delta u)^2 = u_0^2 + 2u_0\delta u + \delta u^2. \end{aligned} \tag{S37}$$

将高次项视为小量:

$$\begin{aligned} V'(u^*) = (u_0^3 - (\alpha + 1)u_0^2 + \alpha u_0) + \\ (3u_0^2 - 2(\alpha + 1)u_0 + \alpha)\delta u + (3u_0 - (\alpha + 1))\delta u^2 + \delta u^3 = \\ = V'(u_0) + V''(u_0)\delta u + \cancel{\frac{V'''(u_0)}{2!}\delta u^2} + \cancel{\frac{V^{IV}(u_0)}{3!}\delta u^3} = V'(u_0) + V''(u_0)\delta u + \cancel{N(u_0, \delta u)}. \end{aligned} \tag{S38}$$

将这些结果代入方程 S33，并消去扭结的平衡态，得到:

$$\ddot{\delta u} - c^2\delta u_{,xx} + \beta\dot{\delta u} + (1 + (\epsilon - 1)\delta(x - x_d))V''(u_0)\delta u = 0. \tag{S39}$$

假设解的形式为 $\delta u(x,\ t) = \phi(x)e^{\lambda t}$，则前面的方程变为:

$$\lambda^2\phi - c^2\phi_{,xx} + \lambda\beta\phi + V_d''(u_0)\phi = 0, \tag{S40}$$

其中 $V_d''(u_0) = (1 + (\epsilon - 1)\delta(x - x_d))V''(u_0)$。为数值求得本征模 ϕ_i 和本征值 λ_i，我们按照求离散色散关系时所采用的方法，将系统离散为 N 个部分。二阶空间导数为:

$$\phi_{j,xx} = \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{a_s^2}, \tag{S41}$$

将其代入公式 S40 后，得到：

$$(\lambda^2 I + \beta\lambda I + A)\vec{\phi} = 0, \tag{S42}$$

其中 I 是一个 $N \times N$ 单位矩阵， $A = -c^2 D + diag(V_d''(u_0))$，而 D 是二阶导数算子矩阵。$\vec{}$ $\vec{}$我们需要降低这个特征值问题的阶数，以得到 $M\phi = \lambda N\phi$：

$$\phi* = \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}. \tag{S43}$$

公式 S42 变为：

$$\begin{cases} \phi_2 = \lambda\phi_1 \\ \lambda I\phi_2 + \beta I\phi_2 + A\phi_1 = 0 \end{cases}, \tag{S44}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & -\beta I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}. \tag{S45}$$

从现在起，数值推导出的本征值和特征向量将分别记为 λ_j 和 $\phi_j(x)$。此计算得到的特征向量和本征值分为三种：有限频率的戈德斯通平移模 ϕ_T、内部模 ϕ_I，以及离域（声子）模。这些模的典型形态及其对扭结形状的影响如图 2d、e 所示。

VI. 散射分析

我们想研究声子如何激发钉扎扭结并使其解钉扎。为此，我们需要求出声子的行波形式。我们围绕静态 kink 作扰动： $u(x,\ t) = u_0(x) + \Re(\phi_P(x)e^{-i\omega t})$，其中 $\phi_P(x)$ 是一个很小的复振幅。代入完整的偏微分方程（忽略阻尼（$\beta = 0$），因为在所考虑的弱阻尼条件下，阻尼只会引入微小的虚频移）：

$$-\omega^2\phi_P - c^2\phi_{P,xx} + (1 + (\epsilon - 1)\delta(x - x_d))V''(u_0)\phi_P = 0, \tag{S46}$$

声子方程为：

$$\phi_{P,xx} + \frac{\omega^2 - V_d''(u_0)}{c^2}\phi_P = 0. \tag{S47}$$

A. 定义包络 $\Phi(x)$

定　　义包络 $\Phi(x)$，方法是对向右传播的载波（从左侧入射）进行因式分解：

$$\phi_P(x) = \Phi(x)e^{iq_L x}. \tag{S48}$$

为了分析声子在离散晶格中被钉扎扭结散射的过程，我们采用传递矩阵方法。该方法使我们能够计算入射声子的反射系数和透射系数，以及扰动场的空间包络。

势 $V_{dn} = V_d(n)$ 在每个离散位置处取样。离散扰动振幅为 ϕ_n，因此完整的微扰为 $u_n(t) = u_{0n} + \Re(\phi_n e^{-i\omega_P t})$。$\phi_n$ 的离散方程为：

$$\omega_P^2\phi_n = -c^2(\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}) + V_{dn}''\phi_n. \tag{S49}$$

其中 $V_{dn}'' = V_d''(u_0(x = na_s))$。重新排列得：

$$\phi_{n+1} = \left(2 - \frac{\omega_P^2 - V_{dn}''}{c^2}\right)\phi_n - \phi_{n-1}. \tag{S50}$$

这可以写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix}\phi_{n+1}\\ \phi_n\end{pmatrix} = M_n\begin{pmatrix}\phi_n\\ \phi_{n-1}\end{pmatrix}, \tag{S51}$$

其中

$$M_n = \begin{pmatrix}m_n & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad m_n = 2 - \frac{\omega_P^2 - V_{dn}''}{c^2}. \tag{S52}$$

总传递矩阵 M_{total} 是乘积 $M_L \cdots M_{-L}$。我们考虑从左侧入射的声子（$x \to -\infty$），其渐近行为呈波动形式，波数 q_L 满足

$$q_L = \frac{1}{a_s}\arccos\left(1 - \frac{\omega_P^2 - (1 - \alpha)}{2c^2}\right). \tag{S53}$$

右侧的情况类似，只需将 q_R 和 $1 - \alpha$ 替换为 α。

左边界处的入射波（$n = -L$）由入射、反射和透射部分的向量表示。我们求解全场系统：

$$M_{\text{total}}\begin{pmatrix}e^{iq_L(-L)}\\ e^{iq_L(-L-1)}\end{pmatrix} + M_{\text{total}}R\begin{pmatrix}e^{-iq_L(-L)}\\ e^{-iq_L(-L-1)}\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}e^{iq_R(L+1)}\\ e^{iq_R L}\end{pmatrix}, \tag{S54}$$

从而得到复数透射系数 T 和反射系数 R。

现在，我们将所有指标 $k = n + 1, n, n - 1$ 替换为 $\phi_k = \Phi_k e^{iq_L k}$：

$$\Phi_{n+1}e^{iq_L(n+1)} = m_n\Phi_n e^{iq_L n} - \Phi_{n-1}e^{iq_L(n-1)}, \tag{S55}$$

然后将等式两边除以公因子 $e^{iq_L(n+1)}$，以分离出包含 Φ 的项：

$$\Phi_{n+1} = m_n \Phi_n \frac{e^{iq_L n}}{e^{iq_L(n+1)}} - \Phi_{n-1} \frac{e^{iq_L(n-1)}}{e^{iq_L(n+1)}}. \tag{S56}$$

该方程简化为：

$$\Phi_{n+1} = m_n \Phi_n e^{-i\theta_L} - \Phi_{n-1} e^{-2i\theta_L}, \tag{S57}$$

得到：

$$\begin{pmatrix} \Phi_{n+1} \\ \Phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta_L} m_n & -e^{-2i\theta_L} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_n \\ \Phi_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{S58}$$

B. 阻尼修正

这些声子可能从边界传播很长距离到达扭结，因此会因阻尼而衰减。我们可以通过在初始偏微分方程中加入阻尼项来改写式 S7：$u_j(t) = \Re\left[A e^{i(\tilde{q} j a_s - \omega t)}\right]$，其中$\tilde{q} = q + i\gamma$为复数。该方程变为：

$$-\omega^2 - i\beta\omega + \frac{2c^2}{a_s^2}(1 - \cos(\tilde{q_L} a_s)) + (1 - \alpha) = 0. \tag{S59}$$

当 β 较小时，$\cos(\tilde{q_L} a_s) = \cos(q_L a_s + i\gamma_L a_s) \approx \cos(q_L a_s) - i \sin(q_L a_s)\gamma_L a_s$。第三项变为 $\frac{2c^2}{a_s^2}(1 - \cos(q_L a_s)) + i\frac{2c^2}{a_s^2}\gamma_L a_s \sin(q_L a_s)$。该方程的虚部为：

$$-\beta\omega + \frac{2c^2}{a_S^2}\gamma_L a_s \sin(q_L a_s) = 0, \tag{S60}$$

从而得到 $\gamma_L = \frac{\beta\omega a_s}{2c^2 \sin(q_L a_s)}$ 和 $\gamma_R = \frac{\beta\omega a_s}{2c^2 \sin(q_R a_s)}$。

利用连续介质近似，ead:

$$q_{L\beta}^2 = \frac{\omega_P^2 + i\omega_P\beta - (1 - \alpha)}{c^2} = q_L + \frac{i\omega_P\beta}{c^2}. \tag{S61}$$

当 β 较小时，我们可以近似 $q_{L\beta} \approx q_L + i\frac{\omega_P\beta}{2c^2 q_L} = q_L + i\gamma_L$。因此，振幅会乘以系数$e^{\frac{-\omega_P\beta}{2c^2 q_L} x}$而减小。由于扭结被钉扎在缺陷旁，振幅的减小将为 $\approx e^{\frac{-\omega_P\beta}{2c^2 q_L} x_d}$。在左侧（$x < x_d$），我们将包络 Φ 的入射分量和反射分量分开：入射部分（向右传播）乘以 $e^{-\gamma_L x}$，反射部分（向左衰减）乘以 $e^{\gamma_L x}$。在右侧（$x \geq 0$），透射波乘以 $e^{-\gamma_R x}$（向右衰减）。阻尼包络 Φ^{damped} 经过归一化，使得$|\Phi_{-L}^{\text{damped}}| = 1$ 位于左边界。

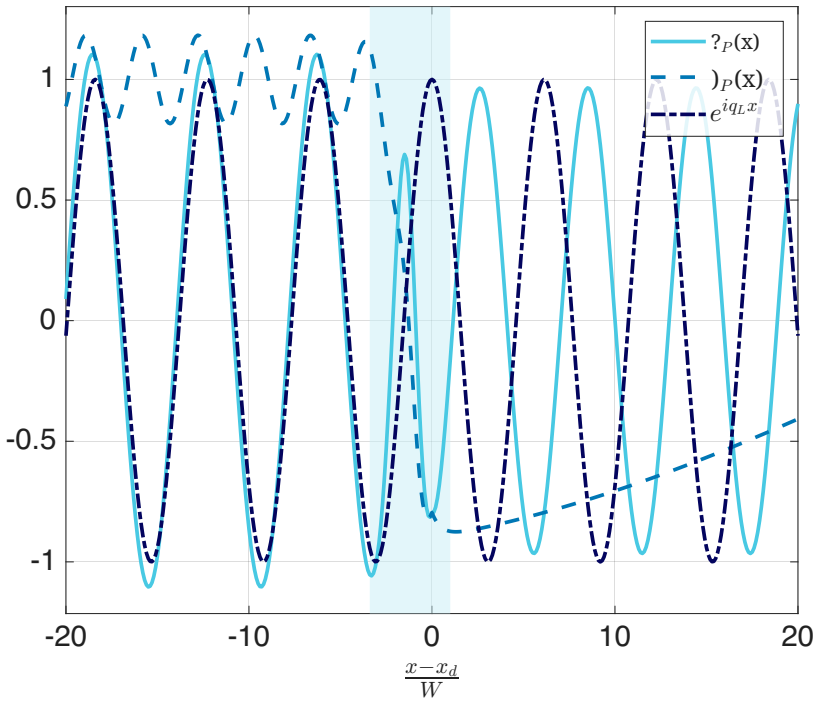

图 S9. 含有钉扎扭结和缺陷的晶格中的声子调制。浅蓝色阴影表示扭结所在的位置（$0.01 < u < 0.99$）

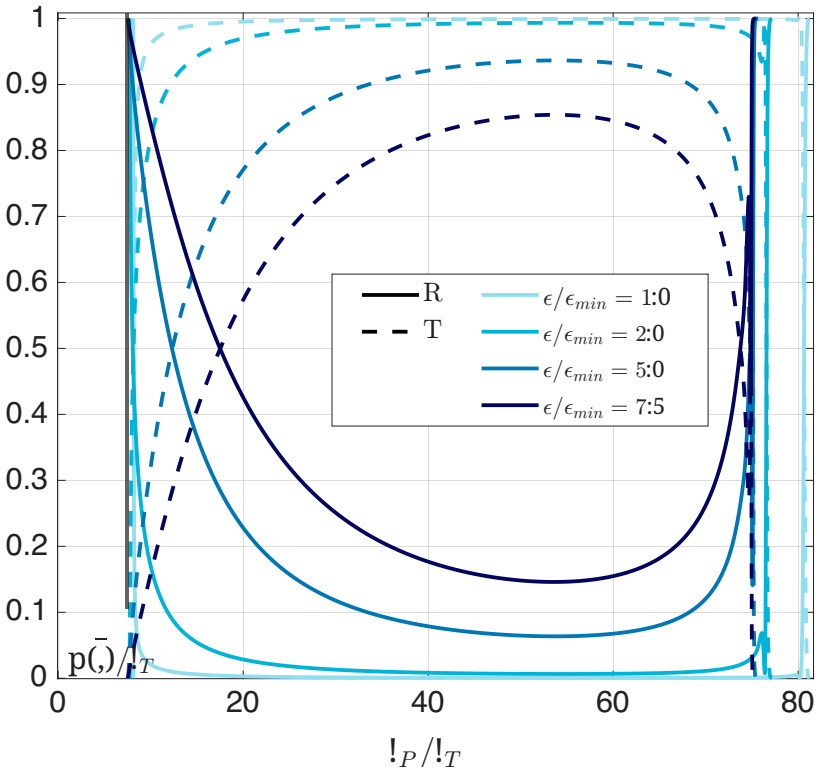

图 S10. 不同缺陷强度下的反射 R 和透射 T 系数。

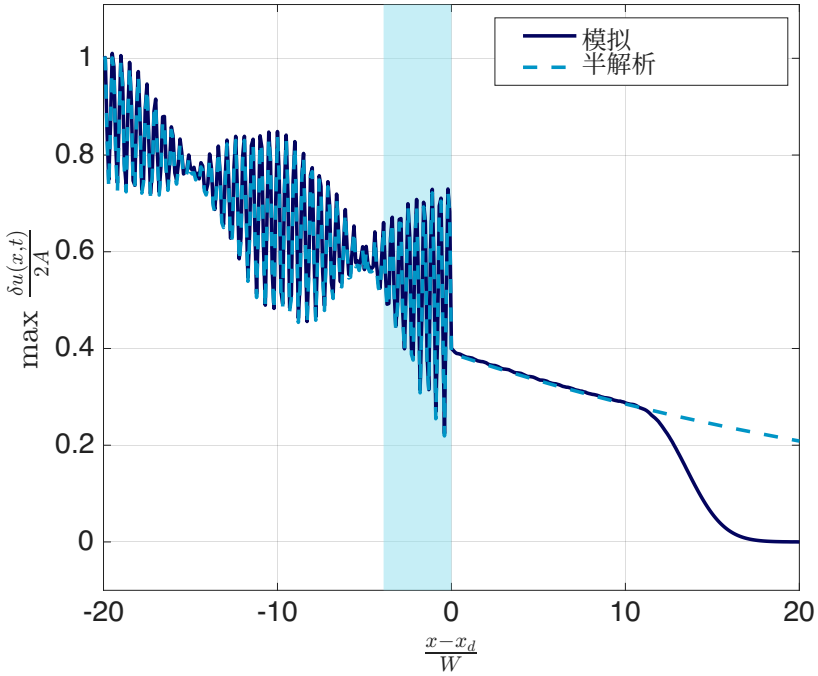

图 S11. 拍频声子与扭结和缺陷相互作用并进行阻尼修正的验证。在此，扰动 $\delta u(x,t)$ 被引入模拟中并随时间演化，随后绘制每个单元的最大振幅并与解析形式进行比较。此处使用 A =5e-4 和 $\epsilon = 7.5\epsilon_{min}$。 $\frac{x-x_d}{W} > 10$ 的衰减差异是由完整模拟中使用的海绵层造成的，该海绵层用于避免边界反射波。

VII. T 模式的降阶模型

A. 声子对T 模式的影响

为研究钉扎扭结的动力学，我们聚焦于类平移（T）模式，因为它概括了扭结整体的集体位移，实际上决定了扭结如何穿过缺陷运动。由式 S39 可得，

$$[-c^2\partial,xx+(1+(\epsilon-1)\delta(x-x_d))V''(u_0)]\phi_j=-\lambda_j^2\phi_j-\lambda_j\beta\phi_j, \tag{S62}$$

其中 t 本征值 λ_j 与各模式的无阻尼固有频率 ω_j 之间的关系为：

$$\lambda_j=-\frac{\beta}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\omega_j^2}, \tag{S63}$$

Re（λ_j）为衰减率，Im（λ_j）为阻尼模式的实际振荡频率。

我们利用先前通过稳定性和散射分析得到的这些空间特征向量 $\phi(x)$，展开扰动 $\delta u(x,t)$：

$$\delta u(x,t)=\sum_J\delta u_J(x,t)=a_T(t)\phi_T(x)+a_I(t)\phi_I(x)+\sum_j Re(a_{Pj}\Phi_{Pj}(x)e^{i(q_{Lj}x-\omega_j t)}), \tag{S64}$$

其中 $J=\{T,I,P1,P2,...\}$。假设 $\phi_J(x)$ 构成完备正交基，使得$\int\phi_j(x)\phi_k(x)dx=\delta_{jk}$（归一化后）。若将式 (S64) 代入线性化偏微分方程式 (S39)，乘以 $\phi_T(x)$，并在 x 上积分（利用正交性），则可得到一组关于扰动分解中不同模态的常微分方程（ODE）。仅考虑平移模态 $a_T(t)$，

$$\ddot{a}_T(t)+\beta\dot{a}_T(t)+(-\lambda_T^2-\lambda_T\beta)a_T(t)=\ddot{a}_T(t)+\beta\dot{a}_T(t)+\omega_T^2a_T(t)=0, \tag{S65}$$

该方程是带线性阻尼的线性振子的自由振动常微分方程。由于我们希望研究声子模与平移（T）模态之间的耦合/影响，因此必须考虑$N(u_0,\delta u)$中的非线性项（即式 S38 中先前舍弃的项）。这里我们只考虑二阶的第一项，

$$N(u_0,\delta u)=\frac{V'''(u_0)}{2}\delta u^2+O(\epsilon^3)\approx\frac{V'''(u_0)}{2}\big(\sum_J\delta u_J(x,t)\big)^2, \tag{S66}$$

将它们投影到平移模态上，得到非线性强迫项 $F_T(t)$.

$$\ddot{a}_T(t)+\beta\dot{a}_T(t)+\omega_T^2a_T(t)=F_T(t), \tag{S67}$$

其中，$F_T(t)$ 通过投影得到：

$$F_T(t)=-\int_{-\infty}^{\infty}\phi_T(x)N\big(u_0(x),\sum_J\delta u_{PJ}(x,t)\big)dx. \tag{S68}$$

从该方程可以看出，由于强迫项是 $O(\epsilon^2)$，因此 $a_T(t)$ 也是 $O(\epsilon^2)$；平方微扰产生的高阶项（$\propto a_Pa_T$和 $\propto a_T^2$）分别是 $O(\epsilon^3)$ 和 $O(\epsilon^4)$。$\propto a_Pa_I$和 $\propto a_I^2$项也同样如此。因此，在近似 $O(\epsilon^2)$ 下，$F_T(t)$ 仅取决于声子，从而得到的运动方程仍是线性常微分方程。

还应注意，尽管我们考虑了微扰势的二阶非线性项 δV，T 模式的运动方程方程（S67）仍是线性常微分方程，因为 F_T 不再依赖于 a_T。

B. 利用拍频激发 T 模式

从本文第 2 节中，我们可以找到 q_{Lj} 和 q_{Rj}（左侧（$u=1$）与右侧（$u=0$）的波矢）及其与频率 ω_j 的关系。由色散关系可知，T 模的本征频率远低于最低允许频率 $\omega_{min}=min(\sqrt{1-\alpha},\sqrt{\alpha})$。因此，要用声子激发这一低频模，我们需要对能够在系统中传播的允许声子施加一个

与 T 模频率相匹配的低频调制。这可以直接通过使用两个具有 $\Delta\omega = |\omega_{j_1} - \omega_{j_2}| \approx \omega_T$ 的拍频声子来实现。每个声子模分解为:

$$\begin{aligned}\delta u_{Pk}(x,t) = \mathfrak{Re}(a_{Pk}\Phi_{Pk}(x)e^{i(q_{Lk}x-\omega_k t)}) = \\ a_{Pk}[G_k(x)\cos\theta_k - U_k(x)\sin\theta_k],\end{aligned} \tag{S69}$$

其中, $k = 1, 2$ 指声子 j_1 和 j_2。$\theta_k = q_{Lk}x - \omega_k t$, $G_k(x) = \mathfrak{Re}(\Phi(x))$ 是余弦调制包络, 而 $U_k(x) = \mathfrak{Im}(\Phi(x))$ 是正弦调制包络。

总微扰为:

$$\delta u_B(x,t) = a_{P1}[G_1\cos\theta_1 - U_1\sin\theta_1] + a_{P2}[G_2\cos\theta_2 - U_2\sin\theta_2]. \tag{S70}$$

为计算 $F_T(t)$, 我们需要计算 δu_B^2, 并将其展开为自项和交叉项。对于每个 $k = 1, 2$, 其自项为:

$$[G_k\cos\theta_k - U_k\sin\theta_k]^2 = G_k^2\cos^2\theta_k + U_k^2\sin^2\theta_k - 2G_kU_k\cos\theta_k\sin\theta_k.$$

利用三角恒等式可得:

$$\frac{1}{2}(G_k^2 + U_k^2) + \frac{1}{2}(G_k^2 - U_k^2)\cos 2\theta_k - G_kU_k\sin 2\theta_k.$$

我们可以将时间依赖性与空间依赖性分离:

$$\cos 2\theta_k = \cos(2q_{Lk}x)\cos(2\omega_k t) + \sin(2q_{Lk}x)\sin(2\omega_k t),$$

$$\sin 2\theta_k = \sin(2q_{Lk}x)\cos(2\omega_k t) - \cos(2q_{Lk}x)\sin(2\omega_k t).$$

自项展开中 $\cos(2\omega_k t)$ 的系数为 $\frac{1}{2}(G_k^2 - U_k^2)\cos(2q_{Lk}x) - G_kU_k\sin(2q_{Lk}x)$, 而 $\sin(2\omega_k t)$ 的系数为 $\frac{1}{2}(G_k^2 - U_k^2)\sin(2q_{Lk}x) + G_kU_k\cos(2q_{Lk}x)$。因此,

$$F_T^{\mathrm{self},k}(t) = a_{Pk}^2\left[K_{\mathrm{stat}}^{kk} + K_{\cos}^{kk}\cos(2\omega_k t) + K_{\sin}^{kk}\sin(2\omega_k t)\right], \tag{S71}$$

其中

$$K_{\mathrm{stat}}^{kk} = -\int \frac{1}{2}\phi_T V_d''' \frac{1}{2}(G_k^2 + U_k^2)\,dx,$$

$$K_{\cos}^{kk} = -\int \frac{1}{2}\phi_T V_d''' \left[\frac{1}{2}(G_k^2 - U_k^2)\cos(2q_{Lk}x) - G_kU_k\sin(2q_{Lk}x)\right]dx,$$

$$K_{\sin}^{kk} = -\int \frac{1}{2}\phi_T V_d''' \left[\frac{1}{2}(G_k^2 - U_k^2)\sin(2q_{Lk}x) + G_kU_k\cos(2q_{Lk}x)\right]dx.$$

交叉项为:

$$2a_{P1}a_{P2}[G_1\cos\theta_1 - U_1\sin\theta_1][G_2\cos\theta_2 - U_2\sin\theta_2].$$

利用 Werner 恒等式展开乘积可得:

$$\begin{aligned}a_{P1}a_{P2}\Big[&(G_1G_2 - U_1U_2)\cos(\theta_1+\theta_2) + (-G_1U_2 - U_1G_2)\sin(\theta_1+\theta_2) + \\ &+(G_1G_2 + U_1U_2)\cos(\theta_1-\theta_2) + (G_1U_2 - U_1G_2)\sin(\theta_1-\theta_2)\Big].\end{aligned}$$

这里, $\theta_1 + \theta_2 = (q_{L1} + q_{L2})x - (\omega_1 + \omega_2)t$ 是一个高频项, $\theta_1 - \theta_2 = \Delta q_L x - \Delta\omega t$ 是一个低频, 且 $\Delta q_L = q_{L1} - q_{L2}$、$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 > 0$。展开后:

$$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos((q_{L1} \pm q_{L2})x)\cos((\omega_1 \pm \omega_2)t) + \sin((q_{L1} \pm q_{L2})x)\sin((\omega_1 \pm \omega_2)t),$$

$$\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin((q_{L1} \pm q_{L2})x)\cos((\omega_1 \pm \omega_2)t) - \cos((q_{L1} \pm q_{L2})x)\sin((\omega_1 \pm \omega_2)t).$$

交叉贡献为：

$$F_T^{\text{cross}}(t) = a_{P1}a_{P2}\Big[K^{12}_{\cos,+}\cos((\omega_1+\omega_2)t) + K^{12}_{\sin,+}\sin((\omega_1+\omega_2)t) + K^{12}_{\cos,-}\cos(\Delta\omega t) + K^{12}_{\sin,-}\sin(\Delta\omega t)\Big], \quad \text{(S72)}$$

高频项的系数为：

$$K^{12}_{\cos,+} = -\int \frac{1}{2}\phi_T V_d'''(G_1G_2 - U_1U_2)\cos((q_{L1}+q_{L2})x)\,dx - \int \frac{1}{2}\phi_T V_d'''(-G_1U_2 - U_1G_2)\sin((q_{L1}+q_{L2})x)\,dx,$$

$$K^{12}_{\sin,+} = -\int \frac{1}{2}\phi_T V_d'''(G_1G_2 - U_1U_2)\sin((q_{L1}+q_{L2})x)\,dx + \int \frac{1}{2}\phi_T V_d'''(-G_1U_2 - U_1G_2)\cos((q_{L1}+q_{L2})x)\,dx,$$

低频项为：

$$K^{12}_{\cos,-} = -\int \frac{1}{2}\phi_T V_d'''(G_1G_2 + U_1U_2)\cos(\Delta q_L x)\,dx - \int \frac{1}{2}\phi_T V_d'''(G_1U_2 - U_1G_2)\sin(\Delta q_L x)\,dx,$$

$$K^{12}_{\sin,-} = -\int \frac{1}{2}\phi_T V_d'''(G_1G_2 + U_1U_2)\sin(\Delta q_L x)\,dx + \int \frac{1}{2}\phi_T V_d'''(G_1U_2 - U_1G_2)\cos(\Delta q_L x)\,dx.$$

将驱动力代回运动方程，并将其分为三项（静态驱动力、非共振（高频）驱动力、共振驱动力（拍频 $\Delta\omega$）），得到：

$$\ddot{a}_T(t) + \beta\dot{a}_T(t) + \omega_T^2 a_T(t) = F_{Tstat} + F_{Tres}(t) + F_{Tnon-res}(t) = \quad \text{(S73)}$$

$$= \Big[a_{P1}^2 K^{11}_{\text{stat}} + a_{P2}^2 K^{22}_{\text{stat}}\Big] + \quad \text{(S74)}$$

$$+ \Big[a_{P1}^2 K^{11}_{\cos}\cos(2\omega_1 t) + a_{P1}^2 K^{11}_{\sin}\sin(2\omega_1 t) + a_{P2}^2 K^{22}_{\cos}\cos(2\omega_2 t) + a_{P2}^2 K^{22}_{\sin}\sin(2\omega_2 t) + \quad \text{(S75)}$$

$$+ a_{P1}a_{P2}K^{12}_{\cos,+}\cos((\omega_1+\omega_2)t) + a_{P1}a_{P2}K^{12}_{\sin,+}\sin((\omega_1+\omega_2)t)\Big] + \quad \text{(S76)}$$

$$+ a_{P1}a_{P2}\Big[K^{12}_{\cos,-}\cos(\Delta\omega t) + K^{12}_{\sin,-}\sin(\Delta\omega t)\Big]. \quad \text{(S77)}$$

上述常微分方程描述了具有线性阻尼的线性振子的受迫振荡。系统的稳态振幅可使用 $X(\omega_F) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega_F^2)^2+(\beta\omega_F)^2}}$，计算，其中 X 为响应幅值，ω_F 为驱动频率，ω_n 为系统的固有频率。要使系统的响应达到最大，需要使驱动频率（此处为拍频 $\Delta\omega$）与系统的固有频率（平移模频率 ω_T）相匹配。因此，选择两个拍频声子（1 和 2）组成的声子对时，需要找出所有能产生拍频 $\Delta\omega = \omega_T$ 的声子对，并从中选出使 $(K^{12}_{\cos,-})^2 + (K^{12}_{\sin,-})^2$ 最大的声子对。稳态解为：

$$a_T(t) \approx \frac{a_{P1}^2 K^{11}_{\text{stat}} + a_{P2}^2 K^{22}_{\text{stat}}}{\omega_T^2} + \frac{a_{P1}a_{P2}\sqrt{(K^{12}_{\cos,-})^2 + (K^{12}_{\sin,-})^2}}{\beta\omega_T}\cos(\omega_T t + \phi + \psi), \quad \text{(S78)}$$

其中 $\phi = \tan^{-1}(K^{12}_{\sin,-}/K^{12}_{\cos,-})$，$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{\beta\omega_T}{\omega_T^2-\omega_T^2}\right) = \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$。由于 $(\omega_i+\omega_j)^2 \gg \omega_T^2$，因此不考虑高频分量。

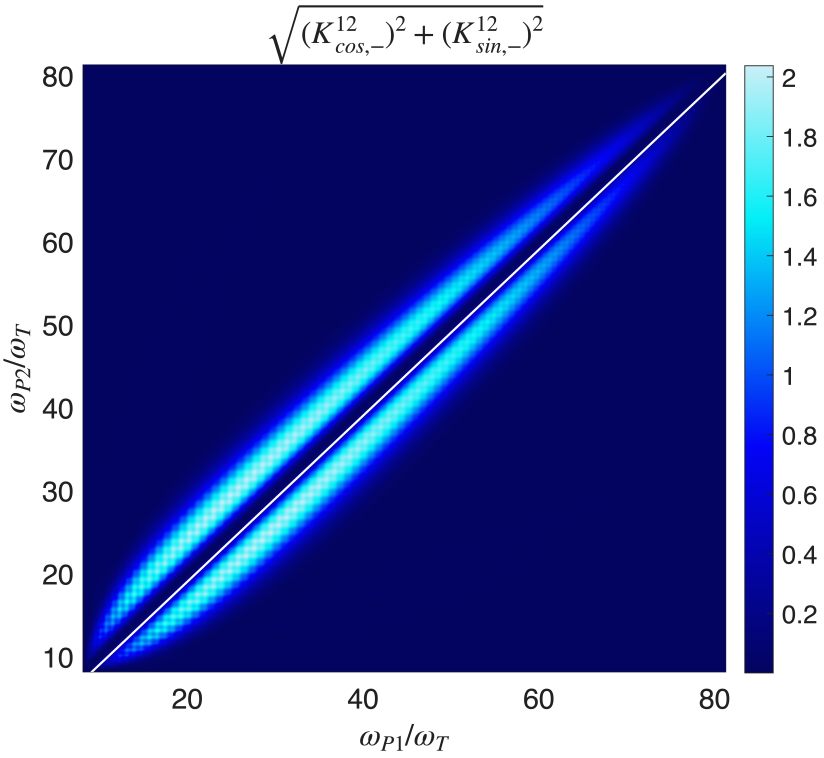

图 S12. 如何选择拍频声子对。所有可能的声子对都与扭结耦合，色条表示耦合强度。为确定最佳声子对，我们固定一个拍频（例如，白线对应 $\Delta\omega = \omega_T$），然后沿着这条线找到使系数 $\sqrt{(K^{12}_{\cos,\ -})^2+(K^{12}_{\sin,\ -})^2}$ 最大的声子对。该图采用了 $\epsilon = \epsilon_{min}$, $\alpha = 0.495$, $\beta = 0.02$。

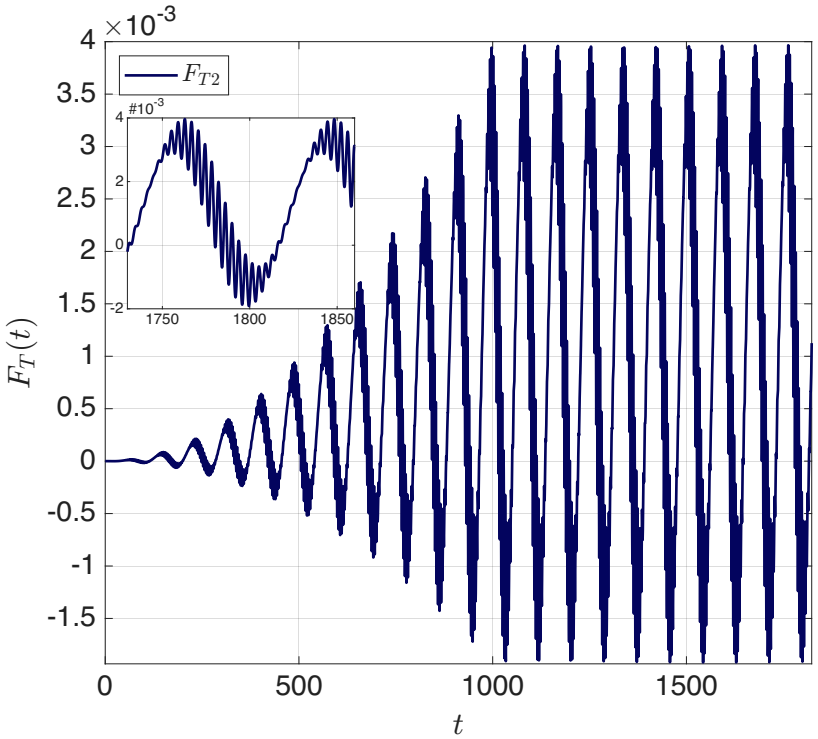

图 S13. 声子施加于钉扎扭结上的力 F_T（根据公式 S78）。该图采用了 $\epsilon = \epsilon_{min}$, $\alpha = 0.495$, $\beta = 0.02$
。

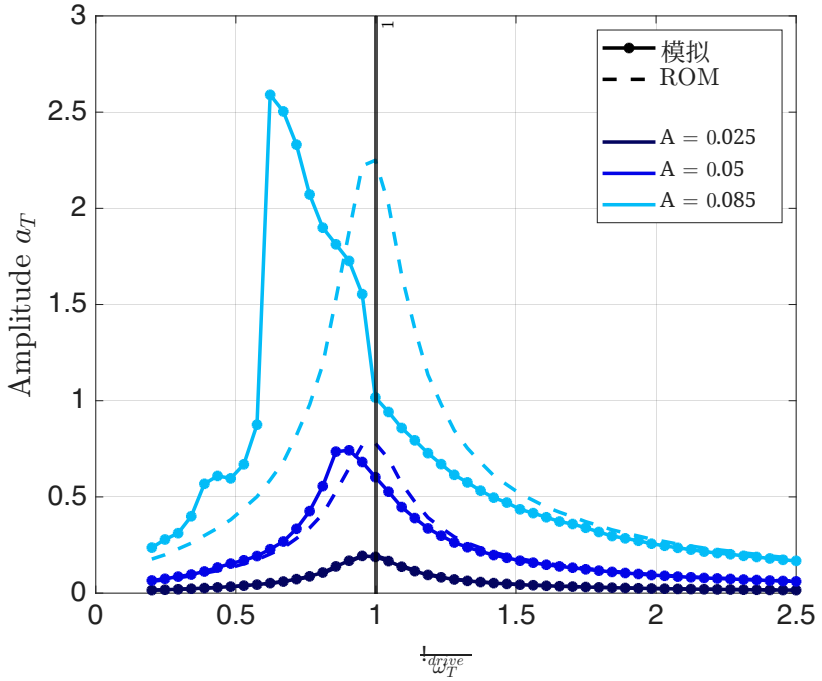

图 S14. 振荡钉扎扭结的软化行为。线性降阶模型无法预测这一行为。此图使用了 $\epsilon = \epsilon_{min}$, $\alpha = 0.495$, $\beta = 0.02$。

第八. 对 T 模式降阶模型的非线性修正

为了解释由式 S27 中有效钉扎势 $E_p(\xi_k)$ 所观察到的位置相关刚度（其中 $X_k = \xi_k W$ 为 kink 位置），我们扩展了平移（T）模态的降阶模型。该方法能够刻画大位移 $X(t)$ 下非对称且变化的作用力 $\frac{dE_p}{dX_k}$，超出了局部非线性修正的适用范围。

模态振幅 a_T 与 kink 位置偏移 $X(t) = X_k - X_p$相关，其中 X_p 为静态钉扎 kink 位置。平移模态振幅 $a_T(t)$ 定义为:

$$a_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_T \left[u(x,t) - u_0(x - X_p)\right] dx,$$

其中 $u(x,t)$ 为完整位移场， $u_0(x - X_p)$ 为静态（钉扎）kink 轮廓的解析形状（而非数值计算得到的形状）。我们现在假设 kink 移动到新位置 $X(t)$，同时保持其形状 $(u(x,t) \approx u_0(x - X(t) - X_p))$。对于小的位置偏移 $X(t) = \Delta X$，我们可以展开为 $u_0(x - X(t) - X_p) = u_0(x - X_p) + \Delta X \frac{du_0}{dX}\big|_{x-X_p} + \mathcal{O}((\Delta X)^2)$。因此 $u(x,t) - u_0(x - X_p) \approx X(t) \frac{du_0}{dX}\big|_{x-X_p}$。

代回模态振幅中，我们可以得到:

$$a_T(t) \approx X(t) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_T \frac{du_0}{dX}\big|_{x-X_p} dx.$$

平移模态与轮廓导数成正比，其归一化因子为 $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_T^2 \, dx = 1$，并且 $m_k = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{du_0}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{3W}$ 来自扭结的动能。因此 $\phi_T = -\frac{1}{\sqrt{m_k}} \frac{du_0}{dX}\big|_{x-X_p}$。由此我们可以得出:

$$a_T(t) \approx -\sqrt{m_k} X(t),$$

其中有 $\frac{dE_p}{da_T} = \frac{dE_p}{dX}\frac{da_T}{dX} = -\sqrt{m_k}\frac{dE_p}{dX}$。用 a_T 表示时，模型变为:

$$\ddot{a_T} + \beta \dot{a_T} + \frac{\frac{dE_p}{dX}}{\sqrt{m_{\text{kink}}}} = F_T(t).$$

当 a_T 较小时，这简化为线性模型 $\ddot{a_T} + \beta\dot{a_T} + \omega_T^2 a_T = F_T(t)$，其中 $\omega_T^2 = \frac{d^2E_P}{dX^2}(0)/m_{\text{kink}}$。

虽然前述结果是在由 250个单元组成的链上得到的，且 $\alpha = 0.495$, $\beta = 0.02$，但为了着重展示该方法的巨大潜力，如图 S16 所示，采用其他参数也能得到非常相似的结果。当不对称性 α 降低时，为了保持缺陷强度较低，所需的 β 会增加。因此，较高的耗散和较高的 ϵ 意味着需要在边界处采用更大的声子振幅，才能使扭结脱钉。缩短系统长度有助于将更多能量传递给钉扎扭结。我们发现，对于 $\alpha = 0.45$ 和 $N = 65$，采用可行的（$A < (1-\alpha)/2$）即可使扭结脱钉。进一步缩短长度后，还可以采用更高的不对称性。

还可以通过计算扭结从位置 X^- 振荡到位置 X^+时的自由振荡周期，近似确定最佳激励频率；其中， X^+ 是发生脱钉的鞍点位置， X^- 是在与 X^+相同总能量水平上的另一个位置。假设系统是保守的（阻尼较低时，这仍能近似描述系统），我们可以定义 X^+ 处的能量 E_T:

$$E_T = \frac{1}{2}m_k\dot{X}^2 + E_P(X). \tag{S79}$$

我们可以将振荡的半周期写为 $t_{1/2} = \int_{X^-+\delta}^{X^+-\delta} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m_k}[E_T - E_P(X)]}}$，其中 $\delta \ll 1$ 是一个较小的值，用于避免渐近接近鞍点。由此可得振荡频率为 $\omega_n = \frac{2\pi}{2t_{1/2}}$。这表明，在所考虑的 α范围内，扭结软化后的固有振荡频率趋近于 $0.5/0.4\omega_T$。

有趣的是，我们预测并验证了所需的最佳频率保持不变（$\approx 0.4/0.5\omega_T$）。我们想再次强调，通过采用较小的缺陷强度，并在扭结与缺陷相互作用之前施加一个声子短脉冲使扭结减速（如正文图 3f 所示），可以持续降低使扭结脱钉所需的振幅，从而适用于具有更强不对称性的大型系统。

A. 通过拍频声子相移感测扭结位置

正如正文所述，通过测量拍频声子从驱动位置到系统另一端的相位变化，可以感测钉扎扭结的位置。这一机制利用了声子穿过拓扑孤子时会经历特定相移 $\delta(\omega)$ 这一事实。

考虑在左边界 ($x = 0$) 引入的两个入射声子，其频率为 ω_1, ω_2 振幅为a_{P1}, a_{P2}，则扭结左侧远处的位移 ($x \ll x_d$) 为:

$$\delta u_{inc}(x,t) = \mathfrak{Re}[a_{P1}e^{i(q_{L1}x - \omega_1 t)} + a_{P2}e^{i(q_{L2}x - \omega_2 t)}], \tag{S80}$$

其中， q_{L1} 和 q_{L2} 是对应于状态 $u = 1$的波数；对于所用的频率范围和缺陷强度，系数 $R_k \approx 0$ ，因此忽略反射波。

每个声子经过位置为 x_d 的扭结时，其相移为 $\delta_k(\omega_k)$。对于 $x > x_d$，透射波为:

$$\delta u_{trans}(x,t) = \mathfrak{Re}[a_{P1}T_1e^{i(q_{R1}x - \omega_1 t + \delta_1)} + a_{P2}T_2e^{i(q_{R2}x - \omega_2 t + \delta_2)}], \tag{S81}$$

其中， T_k 为透射系数， q_{Rk} 为状态 $u = 0$对应的波数。在任意位置 $x > x_d$ 处，拍频包络 $\Psi(x)$ 的总相位由两个透射波的相位差决定:

$$\Psi(x) = (q_{R1} - q_{R2})x + (\delta_1 - \delta_2). \tag{S82}$$

考虑左侧状态（x_d）和右侧状态（$L - x_d$）中的传播距离后，长度为 L 的畴远端累积的总相位为:

$$\Psi_{total} = \Delta q_L x_d + \Delta\delta + \Delta q_R(L - x_d), \tag{S83}$$

其中， $\Delta q_L = q_{L1} - q_{L2}$、 $\Delta q_R = q_{R1} - q_{R2}$和 $\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2$。重新整理此表达式，可解析确定扭结位置 x_d :

$$x_d = \frac{\Psi_{total} - \Delta\delta - \Delta q_R L}{\Delta q_L - \Delta q_R}. \tag{S84}$$

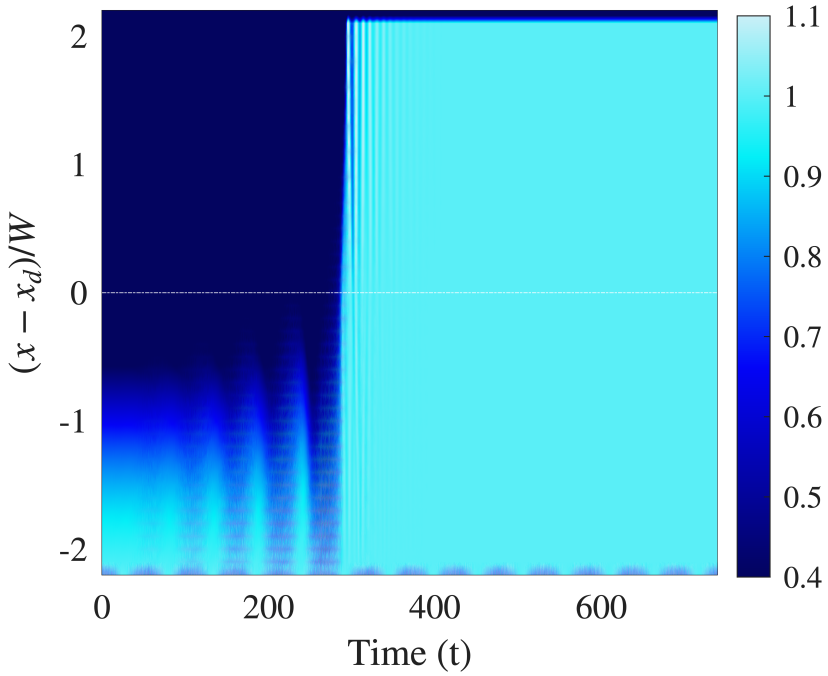

图 S15. 对具有不对称性 $\alpha = 0.45$ 的系统进行脱钉。

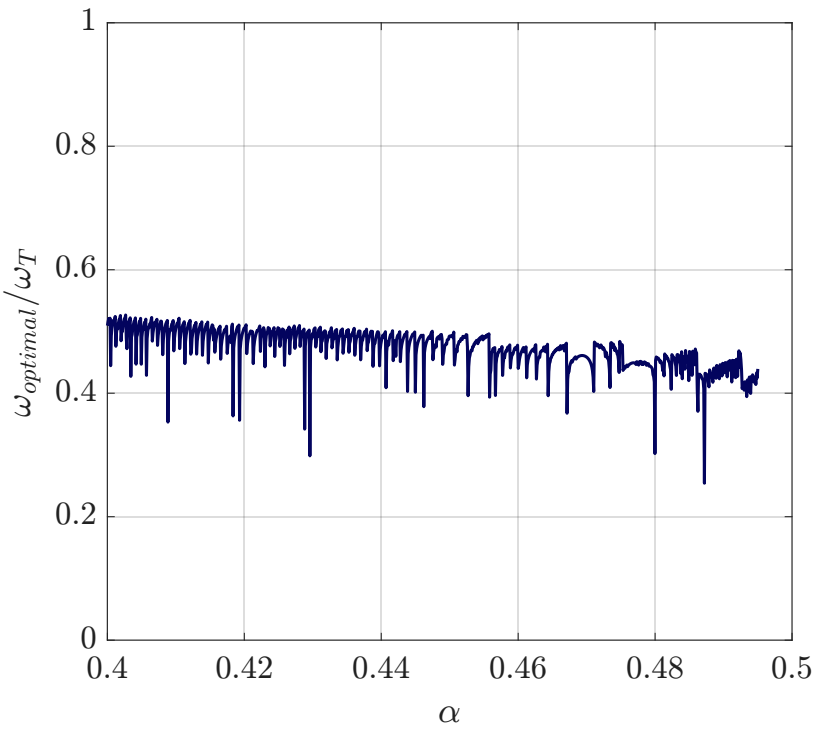

图 S16. 对于不同的 α，最佳频率仍保持在 $0.4\omega_T$ 与 $0.5\omega_T$ 之间。