arXiv:2603.02449v1 [math-ph] 2 Mar 2026

主双网的多维一致性

Niklas C. Affolter*, Jan Techter†

2026年3月4日

摘要。 主双网是定义在方格格的顶点和面上的曲率线参数化曲面的离散化 $\mathbb{Z}^2$。它们推广了此前建立的圆网、圆锥网和主接触元网所给出的离散化。我们证明，主双网按照多维一致性的意义构成一个离散可积系统。特别是，它们可以推广到高维方格格 $\mathbb{Z}^N$。我们还讨论了主双网与离散正交坐标系这一概念之间的关系；这一概念此前已针对离散共焦二次曲面建立。

*维也纳工业大学离散数学与几何研究所，奥地利；以及柏林工业大学数学研究所，德国。电子邮件地址：affolter@posteo.net

†柏林工业大学数学研究所，德国。电子邮件地址：techter@tu-berlin.de

目录

1 引言 **3**

2 共轭双网 82.1 技术预备知识.8 2.2 共轭面网与共轭顶点网之间的对应关系 . . 9 2.3 多维一致性.13

3 极共轭双网 14

4 主双网 16

5 圆网、圆锥网与主接触元网 19
5.1 圆网与Ribaucour变换.19 5.2 作为相容约化的圆锥网.19 5.3 主接触元网与直线复形.20

6 离散正交坐标系 21

7 光滑正交坐标系 25

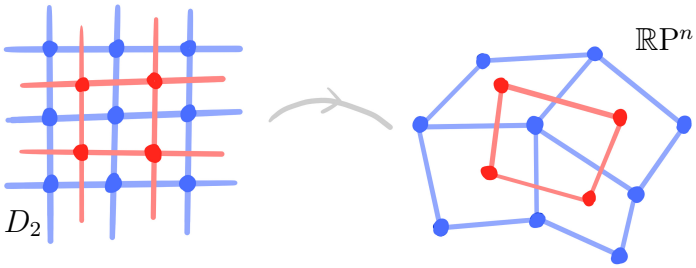

图1. 一个（二维）双网是同时定义在$\mathbb{Z}^2$的顶点与面上的映射。

1 引言

离散微分几何将光滑微分几何的概念转化到离散情形，以保留光滑曲面基本性质的离散网格取代光滑曲面。一种常见做法是将参数化曲面离散化为定义在 $\mathbb{Z}^2$上的映射，称为离散网格 [BS08]。其中，某些特定类型的参数化尤为重要。例如，共轭参数化已离散化为离散共轭网 [Sau33]。而主（曲率线）参数化则分别离散化为圆网 [PB96, Bob99], 圆锥网 [LPW+06]以及主接触元网 [BS07]。最近，研究者提出了双网 这一更通用的方法，用于参数化曲面的离散化 [AT25]。双网定义为同时映射到 $\mathbb{Z}^2$ 的顶点和面上的映射（见图1）。值得注意的是，主双网这一特殊情形使上述已有的主参数化离散化方法得以推广。

在其开创性工作 [BS07], 中，Bobenko与Suris提出了保结构离散化应当遵循的两条主要原理，即变换群原理 与一致性原理。后一原理主张，离散化应当继承其光滑对应物的可积性。这一思想由多维一致性这一概念加以形式化，它涉及将离散曲面理论从 $\mathbb{Z}^2$ 上的映射相容地延拓到 $\mathbb{Z}^N$上的映射的能力。尽管[AT25] 已为主双网确立了变换群原理，本文则聚焦于一致性原理。我们将双网从 $\mathbb{Z}^2$ 推广到 $\mathbb{Z}^N$，将其定义为 $\mathbb{Z}^N$的顶点与（二维）面上的映射。我们的主要结果是主双网的多维一致性。在此过程中，我们还确立了共轭双网 与极共轭双网的相容性。

从光滑理论来看，离散网中 $\mathbb{Z}^N$ 上的附加方向可以有两种解释：作为高维参数化中的新参数，或作为这些参数化的基本变换。对于主双网，这两种视角分别可将其解释为离散正交坐标系或其*Ribaucour*变换。我们探讨这两种观点，尤其讨论它们与此前针对离散共焦二次曲面建立的离散正交坐标系概念之间的关系 [BSST16, BSST18]。

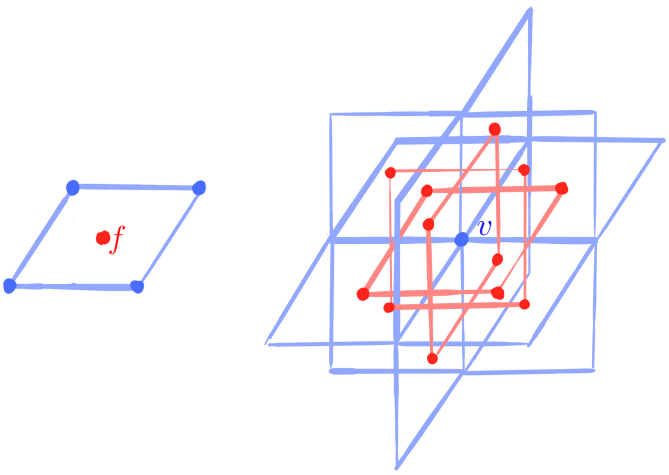

图 2. $\mathbb{Z}^3$中共轭顶点网和共轭面网条件的组合学。左图：一个面 $f \in F_3$ 有四个关联顶点。共轭顶点网中与之对应的点共面。右图：一个顶点 $v \in V_3$ 有十二个关联面。共轭面网中与之对应的点共面。

结果与背景

光滑曲面上共轭参数化最重要的经典离散化是离散共轭网，其特征是所有基本四边形均为平面 [Sau33]。我们如下介绍 $\mathbb{Z}^N$ 上的三种共轭网。

令 V_N, E_N, F_N分别表示 $\mathbb{Z}^N$ 的顶点、边和（二维）面。此外，令 $D_N = V_N \cup F_N$ 表示 $\mathbb{Z}^N$ 的顶点与面的并集。我们称两个顶点 $v, v' \in V_N$（或两个面 $f, f' \in F_N$）为相邻，如果它们共享一条边，即 $(v, v') \in E_N$。若顶点 $v \in V_N$是面 $f \in F_N$的边界顶点，则称顶点 $v \in V_N$与面 $f \in F_N$关联，并记作 v。我们用 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$表示 n 维实射影空间。

De定义 1.1. 我们将共轭网分为以下三种类型（参见图 2）。

(i) 共轭顶点网是一种映射 $g : V_N \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$，使得其张成空间

$$\bigvee_{v \sim f} g(v) \quad \text{is a plane for every } f \in F_N. \tag{1.1}$$

(ii) 共轭面网是一种映射 $h\colon F_N \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$，使得其张成空间

$$\bigvee_{f \sim v} h(f) \quad \text{is a plane for every } v \in V_N. \tag{1.2}$$

(iii) 共轭双网是一种映射 $b : D_N \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$，其在 V_N 上的限制是共轭顶点网，在 F_N 上的限制是共轭面网。∎

第 2.1 节讨论这三种共轭网的一般性条件和非退化性条件。

共轭顶点网的定义与[DS97]中的四边形格以及 [BS08]中的Q-网定义一致。共轭面网的定义可视为Q*-网的一种自然高维推广，而后者仅定义在 $\mathbb{Z}^2$

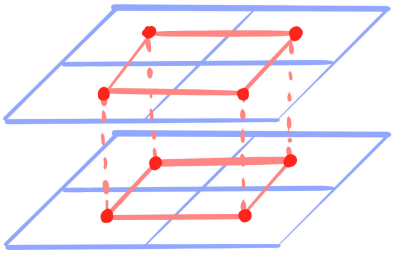

图3. 将 F_3^{12}与 $\mathbb{Z}^3$识别。蓝色部分为 $\mathbb{Z}^3$的两层12-面。红色部分为 $F_3^{12} \simeq \mathbb{Z}^3$。虚线边是与 $\mathbb{Z}^3$识别时缺失的边。

之上。在 [BS08]中。对于 $N = 2$，我们对共轭双网的定义与 [AT25]中的定义一致。在这种情况下，存在一种同构，可交换 $\mathbb{Z}^2$的顶点 V_2 和面 F_2的角色，因此可将 F_2 上的共轭面网视为共轭顶点网。由此， D_2 上的共轭双网可视为一对共轭顶点网。然而，对于 $N > 2$， V_N 与 F_N 之间不存在这样的双射。因此，共轭面网通常不同于共轭顶点网，故本文使用“顶点网”和“面网”这两个术语，以明确区分这两种组合意义上不同的情形。

不过，我们证明，共轭面网与共轭顶点网之间仍然存在密切的对应关系。对于 $1 \leq i < j \leq N$，令 $F_N^{ij} \subset F_N$表示 $\mathbb{Z}^N$的（二维）ij-面，也就是由第 i 个和第 j 个单位向量张成的面。显然，对于任意 i， j， V_N与 F_N^{ij}之间存在自然的双射（参见图3）。因此，我们可以考虑 F_N^{ij}上的共轭顶点网。 F_N上的共轭面网与 F_N^{ij}上的共轭顶点网之间存在一一对应关系，该对应关系在第2.2节中建立，并在以下定理中形式化表述。

定理 1.2。 设 $1 \leq i < j \leq N$。对于定义在 F_N 上的每个共轭面网，其在 F_N^{ij} 上的限制都是一个共轭顶点网。反之，定义在 F_N^{ij} 上的每个共轭顶点网，都是定义在 F_N 上的唯一共轭面网的限制。∎

因此，在某种程度上，即使对于 $N > 2$，我们也可以将共轭双网视为一对共轭顶点网，只需选定一对方向 i， j。基于这一对应关系，我们将共轭顶点网多维一致性的结果从 [DS97] 推广到共轭面网，进而推广到共轭双网，具体如下文定理所述，并将在第2.3节中证明。

定理 1.3。 共轭顶点网、共轭面网和共轭双网都是多维一致的三维系统。∎

光滑曲面上主参数化（曲率线参数化）的第一种经典离散化是圆网 [PB96, Bob 99], ，它们构成共轭顶点网的一个特殊类别。它们的多维一致性（作为共轭顶点网的约化）已在 [CDS97] 中利用米克尔定理得到证明。另一种方式是注意到，圆网是内接于 M¨obius二次超曲面（ $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n+1}$中的球面）的共轭顶点网的立体投影 [BS08]。随后，该结果可由更一般的定理推出：二次超曲面中的共轭顶点网是共轭顶点网的相容约化[Dol99]。

新颖的在 [AT25] 中提出的主参数化离散化是主双网 *al*



图 4. $\mathbb{Z}^3$中的两类交叉。这相当于 $\mathbb{Z}^3$的每条边上一共有六个交叉。

双网。它们是具有正交对偶边对的共轭双网。与此同时，从不同视角出发， [Del 23]以主棋盘模式之名提出了一种密切相关的离散化。与圆网类似，主双网可以实现为 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n+1}$中共轭顶点网的中心投影，称为*Möbius* 提升；其中，关联顶点与面相对于 Möbius 二次曲面互为极性。主双网的 Möbius 提升是极共轭双网的特例，而极共轭双网是二次曲面中共轭顶点网的推广。类比圆网与二次曲面中共轭顶点网之间的关系，我们对主双网多维一致性的证明建立在极共轭双网的多维一致性之上。

定义 1.4. 设 $\mathcal{Q}$ 为 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$中的二次超曲面。一个极共轭二网 $b\colon D_N \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 是共轭双网，使得对每一对彼此关联的 $v \in V_N$ 与 $f \in F_N$ ，点 $b(v)$与 $b(f)$关于 $\mathcal{Q}$由极性相关联。∎

对于 $N = 2$ ，极共轭双网的定义与 [AT25]中给出的定义一致。在第3节中，我们证明如下定理，它推广了二次曲面中共轭顶点网的相应结果 [Dol99]。

定理 1.5. 极共轭双网是共轭双网的相容约化。 ∎

设 C_N 表示 $\mathbb{Z}^N$的交叉集合，其定义为由两个顶点和两个面组成的元组，且这两个顶点均与这两个面关联（参见图 4）：

$$C_N := \{(v, f, v', f') \mid v, v' \in V_N,\ f, f' \in F_N,\ v, v' \sim f, f'\}. \tag{1.3}$$

定义 1.6. 主双网 $b\colon D_N \to \mathbb{R}^n$ 是满足以下条件的共轭双网：对于每个交叉 $(v,\ f,\ v',\ f') \in C_N$，直线 $b(v) \vee b(v')$ 与直线 $b(f) \vee b(f')$ 互相垂直。∎

对于 $N = 2$，主双网的定义与 [AT25] 中给出的定义一致。我们的主要结果如下。它可以看作是圆网对应结果的推广 [CDS97]。

定理 1.7. 主双网是共轭双网的一种相容约化。 ∎

该定理的证明见第 4 节，其依据是主双网与其 Möbius 提升之间的 1:$\mathbb{R}$ 对应关系，而这些提升是极共轭双网。

一对共轭顶点网可以通过两种方式扩展为共轭双网，分别取决于将哪一个网视为定义在 V_N 或 F_N^{ij} 上。主双网在这种互换下呈现出一种令人惊讶的对称性，我们在定理 4.7 中对此作了说明。

圆网是主双网 [AT25] 的一种特殊情形。这在任意维数下仍然成立，而且事实证明，主双网具有与圆网相似的几何结构，因此可以用*Ribaucour*变换来诠释（第 5.1 节）。

如 [AT25], 所述，主双网不仅可视为圆网的推广，而且在 $n = 3$情形下也可视为圆锥网 [LPW+06]的推广，后者是主参数化的另一种离散化。特别地，与作为共轭顶点网之相容约化的圆网类似，圆锥网可视为共轭面网的相容约化，如定理5.1（第5.2节）所述。

关于圆网与圆锥网的统一观点已借助主接触元网 [BS07], 给出，它们对应于李二次曲面中的各向同性直线复形。主双网的李几何描述自然引出更一般的极线双复形 [AT25]概念。我们将利用关于直线复形的已知结果来确立极线双复形的多维一致性，从而给出主双网多维一致性的另一种证明，至少在 $n = 3$ 情形下（第5.3节）。

在 [AT25] 中，引入主双网的动机之一是离散共焦二次曲面，该概念由 [BSST16, BSST18] 提出（见图 9 左图）。然而，对于 $N > 2$，离散共焦二次曲面背后的组合结构与主双网的组合结构不同。特别是，对于 $N = 3$，构造离散共焦二次曲面时所用离散正交坐标系 的点定义在 $\mathbb{Z}^3$ 的顶点和基本立方体上，而非像主双网那样定义在顶点和面上。第 6 节中，我们建立了主双网与离散正交坐标系之间的直接对应关系，并在定理6.4中将其形式化。

通过在 $\mathbb{Z}^2$ 中沿第三个坐标方向扩展主双网的定义，我们可以将其视为主参数化的一系列 Ribaucour变换，也可以将其视为向正交坐标系的扩展。采用后一种解释，并与光滑理论相比较后，我们得出一种自然的理解：只有主双网中一个特定子集的点，才应被视为光滑正交坐标系中各点的离散化。其余点则可视为该坐标系中某些焦点的离散化。第 7 节中，我们证明，对主双网施加的正交条件与光滑正交坐标系的正交条件相对应。事实证明，即使在光滑情形下，也可以通过对三重共轭系统的焦点施加适当的正交条件来刻画正交坐标系（定理 7.1）。

致谢

两位作者均得到德国研究联合会（DFG）协作研究中心 TRR 109“几何与动力系统中的离散化”的资助。本文中的图像由 `Krita`、 `GeoGebra` 和 `Blender` 制作。

2 共轭双网

2.1 技术预备知识

我们在定义 1.1 中将共轭顶点网、共轭面网和共轭双网 引入为映射至 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$。在全文中，我们假设 $n \geq 3$，从而定义这三类共轭网的约束是有意义的。

我们进一步假设所有共轭网均满足以下意义下的非退化 .

定义 2.1。

(i) 若任意一个四边形中三个顶点的像张成一个平面，则称共轭顶点网非退化。
(ii) 若与一个顶点关联的任意三个面的像张成一个平面，且任意一个四边形中三个顶点以此方式关联的平面恰好交于一点，则称共轭面网非退化。■

由于共轭双网是共轭顶点网与共轭面网的并集，因此本节中引入的这些概念以及后续所有概念，也都可以直接应用于共轭双网。在非退化性的假设下，我们引入以下记号，用以表示共轭网中出现的平面。

定义 2.2。

(i) 设 $g\colon V_N \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 是一个共轭顶点网。那么，对于每个面 $f \in F_N$，我们用以下符号表示由关联顶点的像张成的平面：

$$\square g(f) \coloneqq \bigvee_{v \sim f} g(v). \tag{2.1}$$

(ii) 设 $h\colon F_N \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 是一个共轭面网。那么，对于每个顶点 $v \in V_N$，我们用以下符号表示由关联面的像张成的平面：

$$\square h(v) \coloneqq \bigvee_{f \sim v} h(f). \tag{2.2}$$

■

注 2.3。 也可以不把共轭面网的点视为基本对象，而将定义在顶点上的平面视为基本对象。这便得到一个映射

$$\square h : V_N \to \mathrm{Planes}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n), \tag{2.3}$$

该映射在 [AT25] 中被称为共轭 * 网 。在这种表述下，定义 2.1 (ii) 中的非退化性条件可简化为：任意一个四边形的三个顶点所关联的平面恰好交于一点，因此条件 (i) 和 (ii) 完全对称。此外，在这种描述中，共轭双网由一对对象构成：一个共轭顶点网和一个共轭 * 网，二者都定义在 $\mathbb{Z}^N$ 的顶点上。

■

为了确保我们的证明适用于 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 并具有 $n \geq 3$，我们要求共轭网满足某些额外的一般性条件。若给定的网不满足这些条件，那么将其提升 到更高维的射影空间后，仍会满足这些条件，

并且我们将看到，用这样的提升替换共轭网不会影响证明。

定义 2.4。

(i) 设 $g:\ V_N \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 是一个共轭顶点网。若映射 $\hat{}g : V_N \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n+m}$ 满足 $\hat{}g$ 是共轭顶点网，且存在中心为 C 的中心投影 $\pi :\mathbb{R}\mathrm{P}^{n+m} \setminus C \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$，使得

$$\pi \circ \hat{g} = g, \tag{2.4}$$

其中 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 作为射影子空间嵌入 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n+m}$，$C \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{n+m}$ 是一个与 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 不相交的 $m-1$ 维射影子空间，而 π 定义为

$$\pi : X \mapsto (X \vee C) \cap \mathbb{R}\mathrm{P}^n. \tag{2.5}$$

(ii) 共轭面网的提升定义类似。 ∎

定义 2.5。 若子集 $A \subset \mathbb{Z}^N$ 具有如下形式，则称其为一个块

$$A = \mathbb{Z}^N \cap \bigotimes_{i=1}^{N} [0, a_i], \tag{2.6}$$

$a_1 \ \dots$ $=$

对于某些 $\sum_{i=1}^N a_i$ ∎,, $a_N \in \mathbb{Z}$。

我们将块 A 的边长之和记为 $\delta(A)$: 。

引理 2.6. 设 $g:\ A \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 是共轭顶点网在块$A \subset V_N$上的限制。那么 g 存在一个提升 $\hat{}g$，使得$\hat{}g$ 在每个块 $B \subset A$ 上的像所张成空间的维数等于 $\delta(B)$。 ∎

证明。 根据共轭网的非退化假设，相邻两个点的像张成一维空间。利用这一点，我们可以选择 $\hat{}g$，使得对于所有除一条边长外其余边长均为零的子集 $B \subset A$，即沿着 $\mathbb{Z}^N$ 的坐标轴时，所述条件都成立。这意味着 $\hat{}g$ 在任意块 $B \subset A$ 上的像张成的空间维数至少为 $\delta(B)$。由于其余所有点都包含在坐标轴张成的空间中，故等号成立。

□

引理2.7. 设 $\square h:\ A \to$ 平面$(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ 是共轭$\hat{}$面网的平面在块 $A \subset V_N$上的限制。那么 $\square h$ 存在一个提升 $\square h$，使得$\hat{}\ \square h$ 在每个块 $B \subset A$ 上的像所张成空间的维数等于 $2 + \delta(B)$。 ∎

证明。 证明与引理 2.6 的证明完全类似，只是非退化性假设意味着两个相邻平面的像所张成的空间是三维的。

□

2.2 共轭面网与共轭顶点网之间的对应关系

如引言中简要解释的那样，尽管共轭顶点网和共轭面网的定义相对于 $V_N \leftrightarrow F_N$ 看起来非常对称，但对于 $N > 2$，顶点集与面集并不同构。因此，共轭面网

先验地不同于共轭顶点网。对于 $1 \le i < j \le N$，回想一下，F_N^{ij} 表示 $\mathbb{Z}^N$ 的（二维）ij 面。我们可以通过以下方式将 F_N^{ij} 与 V_N 等同起来

$$F_N^{ij} \ni f = (r, r+e_i, r+e_i+e_j, r+e_j) \longleftrightarrow r \in V_N. \tag{2.7}$$

注意，这种识别在 $\mathbb{Z}^N$ 中原本不相邻的 ij-面之间引入了边（参见图3）。对于定义在 F_N 上的映射 h，我们将其在 ij-面上的限制记为 h^{ij}。

命题 2.8. 共轭面网 $h\colon F_N \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 在 $F_N^{ij} \simeq V_N$ 上的限制 $h^{ij}\colon F_N^{ij} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 是共轭顶点网。 ∎

证明。 不失一般性，设 $i=1, j=2$。我们验证 F_N^{12} 的所有面类型的平面性。

- 12-面：显然，h^{12} 的 12-面都是平面的。事实上，考虑 F_N^{12} 的一个 12-面 (f, f_1, f_{12}, f_2)，其关联顶点为 $v \in V_N$（见图5左图），即

$$r + e_1 + e_2 = v \ \sim\ f,\ f_1,\ f_{12},\ f_2 \ \longleftrightarrow\ r,\ r+e_1,\ r+e_1+e_2,\ r+e_2 \tag{2.8}$$

  其中有某个 $r \in V_N$。由于 h 是共轭顶点网，这四个点位于平面 $\square h(v)$ 内，

$$h^{12}(f),\ h^{12}(f_1),\ h^{12}(f_{12}),\ h^{12}(f_2) \in \square h(v). \tag{2.9}$$

- 13-面（类似地，$k=1,2$ 和 $l \ge 3$ 的 kl-面）：
  考虑 $\mathbb{Z}^N$ 的一个 13-面 (f, f_1, f_{13}, f_3)（见图5右图），其关联的 23-面

$$\begin{aligned} f,\ f_1,\ f_{13},\ f_3 \quad &\longleftrightarrow \quad r,\ r+e_1,\ r+e_1+e_3,\ r+e_3 \\ v,\ v_2,\ v_{23},\ v_3 \quad &= \quad r+e_1,\ r+e_1+e_2,\ r+e_1+e_2+e_3,\ r+e_1+e_3 \\ v, v_2 \sim f, f_1, \qquad & v_3, v_{23} \sim f_3, f_{13}, \qquad v, v_2, v_{23}, v_3 \sim \tilde{f} \end{aligned} \tag{2.10}$$

  其中有一些 $r \in V_N$。考虑两条直线

$$L := h^{12}(f) \vee h^{12}(f_1) = \square h(v) \cap \square h(v_2), \tag{2.11}$$

$$L_3 := h^{12}(f_3) \vee h^{12}(f_{13}) = \square h(v_3) \cap \square h(v_{23}). \tag{2.12}$$

  四个平面 $\square h(v)$ $\square h(v_2)$ $\square h(v_3)$ $\square h(v_{23})$ 相交于点 $h(f)$，因此两条直线 L 与 L_3 共面。

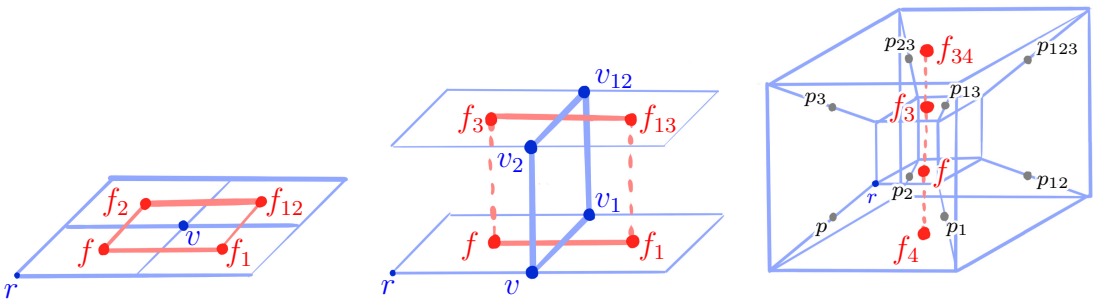

图5。 $F_N^{12} \cong V_N$ 的不同面类型。图中的标记对应于命题 2.8 证明中使用的记号。 左： F_N^{12} 的 12-面。 中： F_N^{12} 的 13- 面及其关联的 $\mathbb{Z}^N$ 的 23- 面。 右： F_N^{12} 的 34- 面及其周围的 $\mathbb{Z}^N$ 的 4- 立方体。

- 34-面（类似地，带有 $3 \le k < l$的 kl-面）：考虑F_N^{12}的一个34-面（f, f_3, f_{34}, f_4），即

$$f,\ f_3,\ f_{34},\ f_4 \ \longleftrightarrow\ r,\ r+e_3,\ r+e_3+e_4,\ r+e_4 \tag{2.13}$$

带有一些 $r \in V_N$。 f， f_3， f_{34}， f_4是 $\mathbb{Z}^N$ 中由下式给出的 4-立方体 C 的四个面

$$\left\{ r + a\cdot e_1 + b\cdot e_2 + c\cdot e_3 + d\cdot e_4 \;\middle|\; (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}_2^4 = \{0,1\}^4 \right\} \tag{2.14}$$

（见图5右侧）。

下文中，我们假设 h 满足引理2.7的维数陈述。^ 否则，我们可以用提升 h 替换 h。不难验证，^ 以下针对 h 得出的任何结论在中心投影 π 下均保持不变，因此对 h 也成立。因此，我们可以假设 $\square h$ 的两个相邻平面张成一个三维空间，一个四边形的四个平面张成一个四维空间，一个立方体的八个平面张成一个五维空间，而一个 4-立方体的十六个平面张成一个六维空间。

考虑这八个三维空间

$$A_{abc} \coloneqq \square h(r + a\cdot e_1 + b\cdot e_2 + c\cdot e_3) \vee \square h(r + a\cdot e_1 + b\cdot e_2 + c\cdot e_3 + e_4), \tag{2.15}$$

其中 $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{Z}_2^3 = \{0,1\}^3$。由此，我们将这八个三维空间 A_{abc} 与一个三维立方体的顶点对应起来，而每个顶点又可以与 4-立方体 C中沿第四方向的一条边对应。

令 $q^{12} = (p,\ p_1,\ p_{12},\ p_2)$ 表示三维立方体 $\mathbb{Z}_2^3$ 中一个四边形的顶点。交集 $A_p \cap A_{p_1}$ 是一个平面，因为这两个三维空间属于 4-立方体 C 的一个四边形。因此， $A_p \cap A_{p_1} \cap A_{p_2}$ 是一条直线。特别地，我们有

$$h^{12}(f) \vee h^{12}(f_4) = A_{000} \cap A_{100} \cap A_{010} = A_{000} \cap A_{100} \cap A_{010} \cap A_{110}, \tag{2.16}$$

$$h^{12}(f_3) \vee h^{12}(f_{34}) = A_{001} \cap A_{101} \cap A_{011} = A_{001} \cap A_{101} \cap A_{011} \cap A_{111}. \tag{2.17}$$

类似地，对于任意四边形 q^{12}，我们可以得到

$$B_{q^{12}} \coloneqq A_p \cap A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap A_{p_{12}}, \tag{2.18}$$

也是一条直线。

接下来，令 $q^{13} \coloneqq (p,\ p_1,\ p_{13},\ p_3)$ 为三维立方体 $\mathbb{Z}_2^3$ 中另一个四边形的顶点，它与 q^{12} 共用一条边。由于直线 $B_{q^{12}}$、 $B_{q^{13}}$ 都包含在平面 $A_p \cap A_{p_1}$ 中，因此这两条直线交于一点。此外，交集

$$A_p \cap A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap A_{p_3} = \bigcap_{m=1}^{3} (A_p \cap A_{p_m}), \tag{2.19}$$

是一个点，因为它是三维空间 A_p 中三个平面的交集。因此，交集 $B_{q^{12}} \cap B_{q^{13}} \cap B_{q^{23}}$ 也是一个点。换言之，与三维立方体中三个两两相邻的四边形相关联的直线交于一点。重复应用这一论证可得，与三维立方体中任意两个四边形相关联的直线交于一点。特别地，我们得到交集

$$(h^{12}(f) \vee h^{12}(f_4)) \cap (h^{12}(f_3) \vee h^{12}(f_{34})) \tag{2.20}$$

是一个点。这等价于 34-面的平面性，从而完成证明。

□

接下来我们证明前一个命题的逆命题，说明每个共轭顶点网都可以扩展为一个共轭面网。

命题 2.9. 对于每个定义在 $F_N^{ij} \simeq V_N$ 上的共轭顶点网 $h\colon F_N^{ij} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$，都存在唯一的共轭面网 $\lceil h \rceil\colon F_N \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$，使得 $\lceil h \rceil$ 在 F_N^{ij} 上限制为 h。∎

证明。不失一般性，设 $i = 1, j = 2$。我们断言，h 的扩展由下式给出

$$\lceil h \rceil(f) \coloneqq \bigcap_{v \sim f} \square h(v). \tag{2.21}$$

如果定义 $\lceil h \rceil(f)$ 的四个平面交于一点，那么根据构造，$\lceil h \rceil$ 是一个限制到 h 的共轭面网，唯一性显然成立。接下来，我们将证明方程 (2.21) 对所有类型的面 $f \in F_N$ 都定义了点。

- 12-面：对于一个 12-面 f，交集 $\lceil h \rceil(f)$ 是点 $h(f)$。

- 23-面（类似地，kl-面，其中 $k = 1,2$ 和 $l \geq 3$）：
  考虑 $\mathbb{Z}^N$ 的一个 23-面 $\tilde{f} = (v,\ v_2,\ v_{23},\ v_3)$，以及 (2.10) 中所示的 F_N^{12} 的一个“关联”13-面 $(f,\ f_1,\ f_{13},\ f_2)$（见图 5，中间）。其交集为

  $$\begin{aligned} \lceil h \rceil(\tilde{f}) &= \square h(v) \cap \square h(v_2) \cap \square h(v_{23}) \cap \square h(v_3) \\ &= (h(f) \vee h(f_1)) \cap (h(f_3) \vee h(f_{13})). \end{aligned} \tag{2.22}$$

  由于 h 是一个共轭顶点网，这两条直线位于同一平面内，因此相交于唯一一点（称为 h 的焦点）。
- 34-面（类似地，$3 \leq k < l$ 对应的 kl-面）：考虑 $\mathbb{Z}^N$ 的一个 34- 面 $f = (v,\ v_3,\ v_{34},\ v_4)$，即

  $$v,\, v_3,\, v_{34},\, v_4 \ = \ r,\, r + e_3,\, r + e_3 + e_4,\, r + e_4 \tag{2.23}$$

  其中 $r \in V_N$ 为某个值。在这种情况下，交集 $\lceil h \rceil(f)$ 是以下四个平面的交集

  $$P_1 \coloneqq \square h(v), \qquad P_2 \coloneqq \square h(v_3), \qquad P_3 \coloneqq \square h(v_{34}), \qquad P_4 \coloneqq \square h(v_4). \tag{2.24}$$

  这四个平面的张成空间是 4 维的，因为它们张成了共轭网的一个 4-立方体像中的点。请注意，与命题 2.8 的证明类似，在非一般情形下，可以改用提升来处理，即应用引理 2.6。我们还定义以下四个三维空间

  $$H_1 \coloneqq P_1 \vee P_2, \qquad H_2 \coloneqq P_2 \vee P_3, \qquad H_3 \coloneqq P_3 \vee P_4, \qquad H_4 \coloneqq P_4 \vee P_1. \tag{2.25}$$

  显然，这四个三维空间的交集与四个平面 P_1、P_2、P_3、P_4 的交集重合。此外，四维空间中四个三维空间的交集是一个点，这就证明了该结论。

□

作为前两个命题的推论，共轭顶点网与共轭面网之间存在双射，这两个命题共同证明定理 1.2，即：

定理 *1.2* 的证明。 该结论可直接由命题 2.8 和命题 2.9 得出。

□

注 2.10。 应用于双网，并给定两个方向 $1 \leq i < j \leq N$，我们可以将共轭双网 $b \cong (g, \lceil h \rceil)$ 视为一对共轭顶点网 $(g,\ h)$ 的延拓，它们分别定义在 V_N 和 F_N^{ij} 上。注意，由于 V_N 和 F_N^{ij} 的对称性，我们可以交换它们的角色。这就引出延拓一对共轭顶点网的第二种方式。我们可以将 $(g,\ h)$ 视为一对共轭网，它们分别定义在 F_N^{ij} 和 V_N 上，从而“以另一种方式”将其延拓为共轭双网 $(\lceil g \rceil,\ h)$。

如果我们将共轭双网视为二维离散共轭网的基本变换，那么这一观察便揭示了离散曲面各方向上顶点与面之间的对称性。在这种解释下，对称性仅在变换的方向上被打破。■

注 2.11. 如命题 2.9 的证明中 (2.22) 所示，对于 $N > 2$，将共轭顶点网 h 扩展为共轭面网 $\lceil h \rceil$ 时，会包含 h的焦点。反过来说，尤其是与共轭系统的光滑理论相比较时，我们可以将共轭面网（因而也包括共轭双网）视为共轭系统中的点与其部分焦点所构成的集合（另见图 10 和第 7 节）。■

2.3 多维一致性

本节将说明共轭双网的多维一致性。多维一致性是离散可积性的一种形式， [BS08], 其基础是将对象的定义从 $\mathbb{Z}^2$ 推广到具有 $N > 2$的 $\mathbb{Z}^N$。为此，需要为这种推广找到合适的定义，并证明它不会导致矛盾，也就是说，这类广义对象的空间非空。更具体地说，$\mathbb{Z}^N$ 上的一个系统若由 $(k-1)$ 维初始数据唯一确定（也称为柯西数据），则称为-维系统。初始数据通常定义在坐标平面上，由此即可唯一确定 $\mathbb{Z}^k \subset \mathbb{Z}^N$上的其余数据。此外，如果 $(k-1)$ 维初始数据也能唯一且无矛盾地确定 $\mathbb{Z}^m$ 上 $m > k$的解，则称该系统具有多维相容性。只需对 $m = k+1$证明这一点。

将共轭网推广到 $\mathbb{Z}^N$ 四边形格的形式，即本文所称的共轭顶点网，是由 Doliwa 和 Santini [DS97], 提出的，他们还证明了其多维一致性。为便于后文引用，我们在下面的命题中重述他们的结果。

命题 2.12 ([DS97])。 共轭顶点网是多维一致的三维系统。■

现在，我们利用上一节建立的共轭面网与共轭顶点网之间的双射，推导共轭面网的多维一致性。

命题 2.13. 共轭面网是多维一致的三维系统。

■

证明. 由于共轭面网与共轭顶点网之间存在双射（定理 1.2），且共轭网具有多维一致性（命题 2.12），因此共轭面网同样具有多维一致性。

□

注 2.14. 共轭面网的三维系统的传播最好用其平面表示来描述（参见定义 2.2 (ii) 与注 2.3）。对于一个基本三维立方体，对应于第八个顶点的平面由补全其余七个平面所构成的八面体来确定。■

综合起来，这就得到了共轭双网的多维一致性。

命题 2.15. 共轭双网是多维一致的三维系统。■

证明。 由于共轭双网的共轭顶点网与共轭面网是相互独立的，这是命题 2.12 与命题 2.13 的直接推论。

□

最后，综合前面三个命题，我们证明了主要结果之一，即定理 1.3。

定理 *1.3* 的证明。 综合命题 2.12、命题 2.13 与命题 2.15。

□

3 极共轭双网

在本节中，我们建立极共轭双网的多维一致性，该概念已在定义 1.4 中引入。由于极共轭双网构成共轭双网的一个特殊类，这可以借助离散可积性的另一概念，即相容约化来实现。约化是施加于 k维系统的附加约束。若该约束只需在初始数据上给定，并随后在整个 $\mathbb{Z}^k$上自动得到满足，则称其为相容的。若基础系统具有多维一致性，则任何相容约化亦然。

我们接着证明，极共轭双网是共轭双网的一种相容约化，即定理 1.5。

定理 *1.5* 的证明。 设 $\mathcal{Q}$ 为 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 中的二次超曲面，并设 $b\colon\ D_N \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 为共轭双网。极共轭二网由极性约束刻画

$$b(v) \in b(f)^{\perp} \quad \text{for all incident } v \in V_N,\ f \in F_N, \tag{3.1}$$

或等价地，由

$$\square b(d) \subset b(d)^{\perp} \quad \text{for all } d \in D_N, \tag{3.2}$$

其中，$(\cdot)^{\perp}$ 表示相对于 $\mathcal{Q}$的极子空间。下文中，我们采用后一种刻画方式，并传播该双网及其相关平面（见注 2.14）。

考虑这八个顶点

$$v,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_{12},\ v_{23},\ v_{13},\ v_{123} \tag{3.3}$$

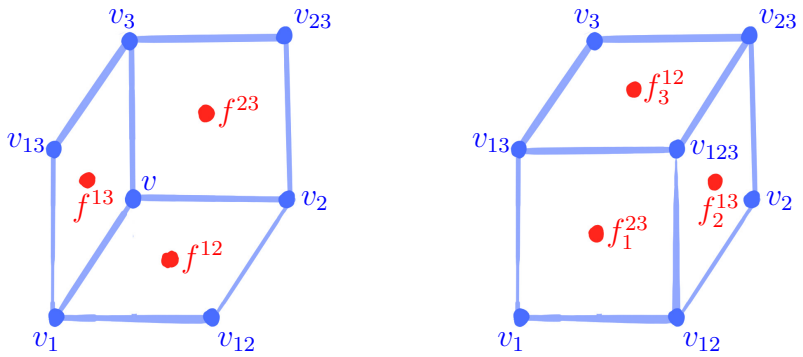

图6. 极共轭二网的立方体相容性组合结构。

属于 $\mathbb{Z}^N$ 中一个三维立方体的顶点及其六个面

$$f^{12},\ f^{23},\ f^{13},\ f_3^{12},\ f_1^{23},\ f_2^{13}, \tag{3.4}$$

如图6所示。假设除 v_{123}以外的所有顶点以及三个面 f^{12}、 f^{23}、 f^{13}上都满足极性约束。要补全立方体，只需验证

$$\begin{aligned}&\square b(f_3^{12}) \subset b(f_3^{12})^{\perp}, \quad \square b(f_1^{23}) \subset b(f_1^{23})^{\perp}, \quad \square b(f_2^{13}) \subset b(f_2^{13})^{\perp},\\ &\square b(v_{123}) \subset b(v_{123})^{\perp}\end{aligned} \tag{3.5}$$

成立。我们首先考虑面 f_3^{12}。根据共轭双网的定义，

$$\begin{aligned}\square b(f_3^{12}) &= b(v_{23}) \vee b(v_3) \vee b(v_{13}),\\ b(f_3^{12}) &= \square b(v_{23}) \cap \square b(v_3) \cap \square b(v_{13}).\end{aligned} \tag{3.6}$$

由于初始数据满足极性约束，我们有

$$b(v_{23}) \in \square b(v_{23})^{\perp}, \quad b(v_3) \in \square b(v_3)^{\perp}, \quad b(v_{13}) \in \square b(v_{13})^{\perp},$$

因此

$$\begin{aligned}\square b(f_3^{12}) &\subset \square b(v_{23})^{\perp} \vee \square b(v_3)^{\perp} \vee \square b(v_{13})^{\perp}\\ &= \big(\square b(v_{23}) \cap \square b(v_3) \cap \square b(v_{13})\big)^{\perp}\\ &= b(f_3^{12})^{\perp}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

同样的论证也适用于面f_1^{23}和f_2^{13}。最后，对于顶点 v_{123}，我们有

$$\begin{aligned}\square b(v_{123}) &= b(f_3^{12}) \vee b(f_2^{13}) \vee b(f_1^{23}),\\ b(v_{123}) &= \square b(f_3^{12}) \cap \square b(f_2^{13}) \cap \square b(f_1^{23}),\end{aligned} \tag{3.8}$$

并利用刚刚确定的三个面的极性，

$$\begin{aligned}\square b(v_{123}) &\subset \square b(f_3^{12})^{\perp} \vee \square b(f_2^{13})^{\perp} \vee \square b(f_1^{23})^{\perp}\\ &= \big(\square b(f_3^{12}) \cap \square b(f_2^{13}) \cap \square b(f_1^{23})\big)^{\perp}\\ &= b(v_{123})^{\perp}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

这验证了 (3.5) 中的所有条件，并完成了证明。 □

4 主双网

我们已在定义 1.6 中引入了主双网。主双网的两个共轭网之间的正交约束定义在 $\mathbb{Z}^N$的交叉 C_N 上。请注意，在 $\mathbb{Z}^2$中，每条边至多对应一个交叉（忽略排列），而在 $\mathbb{Z}^N$ 中，每条边都包含在 $\binom{2N-2}{2}$ 个交叉中（参见图 4）。

注 4.1. 对于共轭双网的一条边 (v, v')，所有满足 $(v, f, v', f') \in C_N$构成一个交叉的面的点都位于直线 $\square b(v) \cap \square b(v')$ 上。因此，尽管组合交叉的数量很多，主双网实际上对每条边 $(v, v') \in E_N$只施加一个正交约束，该约束涉及两条直线$b(v) \vee b(v')$ 和 $\square b(v) \cap \square b(v')$。■

本节将证明，主双网构成共轭双网的一种相容约化。我们的方法基于 [AT25] 中引入的 M¨obius 提升。

令 $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{n+1}$ 为*M¨obius* 二次超曲面，它是在 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n+1}$的某个仿射图中的单位球面。令 B 为 $\mathcal{M}$上的一个点，并令

$$\pi : \mathbb{R}\mathrm{P}^{n+1} \setminus \{B\} \to \mathbb{R}^n \tag{4.1}$$

这是标准立体投影，并将其扩展到 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n+1}$，使其成为以 B 为中心的中心投影。我们回顾一下文献 [AT25] 中关于主双网的 M¨obius 提升的如下定义。注意，在 [AT25] 中，M¨obius 提升的定义更为一般，但下文只需考虑主双网的情形。

定义 4.2. 设 b: $D_N \to \mathbb{R}^n$ 是一个主双网。若双网 $b_{\mathcal{M}} : D_N \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n+1}$ 满足以下条件，则称其为*M¨obius* 提升：

(i) $b_{\mathcal{M}}$ 是相对于 $\mathcal{M}$ 的极共轭二网，

(ii) b 是 $b_{\mathcal{M}}$ 的投影，即 $\pi \circ b_{\mathcal{M}} = b$。 ■

我们回顾一下 M¨obius 提升的两个相关性质。

引理 4.3。

(i) 每个主双网都有一个单参数族的 *M¨obius* 提升。*(ii)* 任意极共轭二网相对于 $\mathcal{M}$的投影 π 都是一个主双网。■

注 4.4. 引理 4.3 中的陈述已在 [AT25] 中针对情形 $N = 2$得到了证明。证明只需考虑一个十字（即双图 D_N中的一个四边形），因此这些结果可立即推广到任意维数 N 以及单连通四边形图。■

注4.5. M¨obius 提升中的点可以解释为以主双网各点为球心的球面。它们构成主双网 [AT25]的正交球面表示 。在 M¨obius 提升的单参数族中，一个球面的半径可以任意选定，随后其他所有球面的半径都由正交约束确定。■

利用这些概念，我们现在可以证明定理 1.7，这是关于主双网多维一致性的主要结果。

定理 *1.7* 的证明。 设 $b\colon D_3 \to \mathbb{R}^n$ 是一个共轭双网。假设在二维坐标平面的并集上，b 满足定义主双网的约束。注意，这意味着坐标平面相交的角点处还满足额外条件。由引理 4.3 (i) 和注 4.4，我们可以在初始数据上选取一个 M¨obius 提升 $b_{\mathcal{M}}$。该 M¨obius 提升是 $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n+1}$中的一个极共轭二网。因此，由定理 1.5，我们可以将该 M¨obius 提升从初始数据扩展为 $b_{\mathcal{M}}$ 在整个 D_3上的一个极共轭二网。由于 b 和 $b_{\mathcal{M}}$ 都是共轭双网，且由其初始数据唯一确定，因此在 D_3上有 $\pi \circ b_{\mathcal{M}} = b$。于是，由引理 4.3 (ii)， b 在整个 D_3上都是一个主双网。 □

注 4.6. 由于定理 1.5 对任意二次曲面都成立，因此可以通过适当选择二次曲面和提升，将定理 1.7 中关于主双网一致性的结果推广到其他几何中（包括双曲几何、椭圆几何、洛伦兹几何、各向同性几何、德西特几何和反德西特几何）。∎

给定两个方向 $1 \le i < j \le N$，设 $g\colon V_N \to \mathbb{R}^n$和 $h\colon F_N^{ij} \cong V_N \to \mathbb{R}^n$是两个共轭顶点网。我们将由 g及其扩展得到的共轭双网记为 $(g,\ \lceil h \rfloor)$，其中 h 被扩展为共轭面网 $\lceil h \rfloor\colon F_N \to \mathbb{R}^n$ （参见定理 1.2）。如注 2.10 所述，交换 V_N 和 F_N^{ij} 的角色，则会得到 g的扩展 $\lceil g \rfloor\colon F_N \to \mathbb{R}^n$，进而得到共轭双网 $(\lceil g \rfloor,\ h)$。主双网具有以下关于这种交换的对称性。

定理 4.7。 设 $1 \le i < j \le N$，且设 g、h 是分别定义在 V_N 和 F_N^{ij} 上的两个共轭顶点网。那么，共轭双网 $(g, \lceil h \rfloor)$ 是主双网，当且仅当共轭双网 $(\lceil g \rfloor, h)$ 是主双网。∎

证明。 设 $b \coloneqq (g, \lceil h \rfloor)$ 和 $b' \coloneqq (\lceil g \rfloor, h)$ 是由 (g, h) 延拓得到的两个共轭双网。假设 b 是主双网。那么，根据引理 4.3 (i)，它有一个 M¨obius 提升 $b_{\mathcal{M}}$，这是一个极共轭二网。将 $b_{\mathcal{M}}$ 限制在 $V_N \cup F_N^{ij}$ 上，得到一对共轭顶点网 $(g_{\mathcal{M}}, h_{\mathcal{M}})$。由于所有平面 $\square\lceil h_{\mathcal{M}} \rfloor = \square h_{\mathcal{M}}$ 及其交点均已由 $h_{\mathcal{M}}$ 唯一确定，因此不难验证 $b_{\mathcal{M}} = (g_{\mathcal{M}}, \lceil h_{\mathcal{M}} \rfloor)$。此外，由于 $b_{\mathcal{M}}$ 是一个极共轭二网，我们有

$$\begin{aligned} &\square h_{\mathcal{M}}(v) \subset g_{\mathcal{M}}(v)^{\perp} \quad \text{for all } v \in V_N, \text{ and} \\ &\square g_{\mathcal{M}}(f) \subset h_{\mathcal{M}}(f)^{\perp} \quad \text{for all } f \in F_N. \end{aligned} \tag{4.2}$$

接下来，我们将 $b'_{\mathcal{M}}$ 定义为 M¨obius 提升的另一个延拓（$g_{\mathcal{M}}$，$h_{\mathcal{M}}$），即

$$b'_{\mathcal{M}} \coloneqq (\lceil g_{\mathcal{M}} \rfloor, h_{\mathcal{M}}). \tag{4.3}$$

显然，$\pi \circ b'_{\mathcal{M}} = b'$。我们证明 $b'_{\mathcal{M}}$ 是 b'的 M¨obius 提升。根据命题 2.9，$b'_{\mathcal{M}}$ 是一个共轭双网。因此，只需证明 $b'_{\mathcal{M}}$ 是一个极性双网。

如果我们将 F_N^{ij}与 $\mathbb{Z}^N$的顶点对应起来，那么这个 $\mathbb{Z}^N$的面可以自然地对应于

$$W_N \coloneqq V_N \cup (F_N \setminus F_N^{ij}) \tag{4.4}$$

（见图 7）。因此， $g_{\mathcal{M}}$ 的扩展为

$$\lceil g_{\mathcal{M}} \rfloor(w) = \bigcap_{f \in F_N^{ij},\ f \sim w} \square g_{\mathcal{M}}(f) \qquad \text{for all } w \in W_N. \tag{4.5}$$

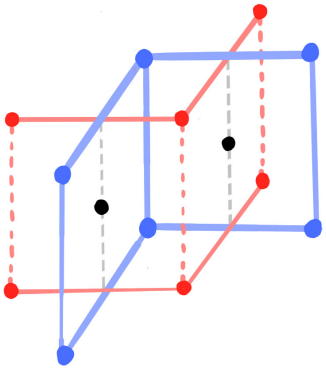

图 7. V_3的顶点（蓝色）和 $\mathbb{Z}^3$的 12-面（红色）。将 F_3^{12}与另一个 $\mathbb{Z}^3$的顶点相识别后，此 $\mathbb{Z}^3$ 的面自然地与 $W_3 = V_3 \cup (F_3 \setminus F_3^{12})$（蓝色和黑色）相识别。

因此，对于任意入射的 $w \in W_N$ 和 $f \in F_N^{ij}$，有

$$\lceil g_{\mathcal{M}} \rceil(w) = \bigcap_{\tilde{f} \in F_N^{ij},\ \tilde{f} \sim w} \square g_{\mathcal{M}}(\tilde{f}) \subset \square g_{\mathcal{M}}(f) \subset h_{\mathcal{M}}(f)^{\perp}. \tag{4.6}$$

因此，$b'_{\mathcal{M}}$ 是 b'的莫比乌斯提升，由引理 4.3 (ii) 可知，b' 是一个主双网。

□

因此，一对共轭顶点网

$$g : V_N \to \mathbb{R}^n, \qquad h : F_N^{ij} \to \mathbb{R}^n \tag{4.7}$$

如果它们具有如证明中所述的莫比乌斯提升（$g_{\mathcal{M}}$，$h_{\mathcal{M}}$），即一对共轭顶点网，则定义一个主双网

$$g_{\mathcal{M}} : V_N \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n+1}, \qquad h_{\mathcal{M}} : F_N^{ij} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n+1} \tag{4.8}$$

使得

(i) $\pi \circ g_{\mathcal{M}} = g$、$\pi \circ h_{\mathcal{M}} = h$，以及 (ii) g（v）和 h（f）相对于 $\mathcal{M}$满足极性关系，对所有相邻的 $v \in V_N$和 $f \in F_N^{ij}$均成立。

这样，g 与 h之间的关系就完全对称了。然而，(g, h)这一对在 $\mathbb{Z}^N$上的定义并不对称，因为 ij方向具有特殊地位。另一方面，将 $\mathbb{Z}^N$ 上的双网解释为离散曲面的*Ribaucour*变换 时，某些方向自然会具有特殊地位（另见注 2.10 和第 5.1 节）。

注4.8。 由注 2.11 可知，扩展$(g, \lceil h \rceil)$上的点可解释为(g, h)这一对的焦点。转而采用扩展$(\lceil g \rceil, h)$，相当于为共轭系引入额外的焦点。与光滑理论相比，针对不同焦点施加正交条件时所产生的对称性将在第 7 节中进一步探讨。■

问题4.9. 是否存在一个简单直接的几何条件，适用于两个共轭顶点网（g，h），并且等价于点对（g，$\lceil h \rceil$）（或等价地，（$\lceil g \rceil$，h））构成主双网？■

问题4.10. 对于每一对方向，我们都可以得到两种扩展方式，从而构成主双网。这些扩展是否会以某种有意义的方式形成一个“相容”的主双网系？此外，在由此得到的点中，哪些应视为共轭系的点，哪些应视为焦点？ ∎

5 Ci圆形、圆锥形与主接触元素网 ts

本节简要回顾先前关于主网的离散化及其与主双网的关系。

5.1 圆网与 Ribaucour 变换

设 $b\colon D_N \to \mathbb{R}^n$ 是一个主双网，其 M¨obius 提升为 $b_{\mathcal{M}}\colon D_N \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n+1}$。$b_{\mathcal{M}}$ 上的点可以解释为以 b 上的点为球心的球面，这种解释称为正交球面表示（参见注4.5）。此外，对于每个四边形 $f \in F_N$，平面 $\square b_{\mathcal{M}}(f)$ 与 M¨obius 二次超曲面的交集 $\mathcal{M}$ 定义了一个圆 $C(f)$。根据构造，该圆与对应于和 f 相邻的顶点的球面正交。这些圆是圆网中圆的推广。事实上，若 M¨obius 提升完全位于 $\mathcal{M}$ 上，则正交球面表示中的球面退化为点，且每个四边形的四个点都位于相应的圆上。关于这种与圆网的关系，[AT25] 中讨论了 $N = 2$ 的情形，并且该结论可立即推广到任意维数。

对于 $N > 2$，我们可以进一步恢复与圆网类似的几何结构。对于主双网的 M¨obius 提升，每个基本三维立方体的张成空间都是一个三维射影子空间。因此，该张成空间与 M¨obius 二次超曲面的交定义了一个球面。在圆网这一特殊情形中，这个球面包含与立方体顶点对应的八个点。在主双网的一般情形中，它是一个与正交球面表示中对应于立方体顶点的八个球面正交的球面。此外，对应于立方体六个面的六个圆的轴相交于该球面的球心（见图8）。

与主双网的每个三维立方体相关联的球面，也自然出现在与离散正交坐标系的比较中（见第6节）。另一方面，如果我们将主双网的一个方向视为基本变换的方向，那么涉及该方向的圆便是对*Ribaucour*变换相切圆的离散化。同样，与每个三维立方体相关联的球面是对这一 Ribaucour 变换相切球的离散化。

5.2 圆锥网作为相容约化

与圆网类似，圆锥网也可视为主双网的一种特殊情形，$n = 3$ 采用拉盖尔几何描述 [AT25]。圆锥网自然地描述为一种映射，它为 $\mathbb{Z}^N$ 的每个顶点指定 $\mathbb{R}^3$中的一个定向平面。其特征是，任一基本四边形的四个平面都与一个旋转圆锥 [LPW$^+$06、BS08]定向相切。在这种表述下，圆锥网对应于内接于布拉施克圆柱 [BS07、BS08]的共轭顶点网。因此，二次超曲面中的共轭顶点网的多维一致性 [Dol99]

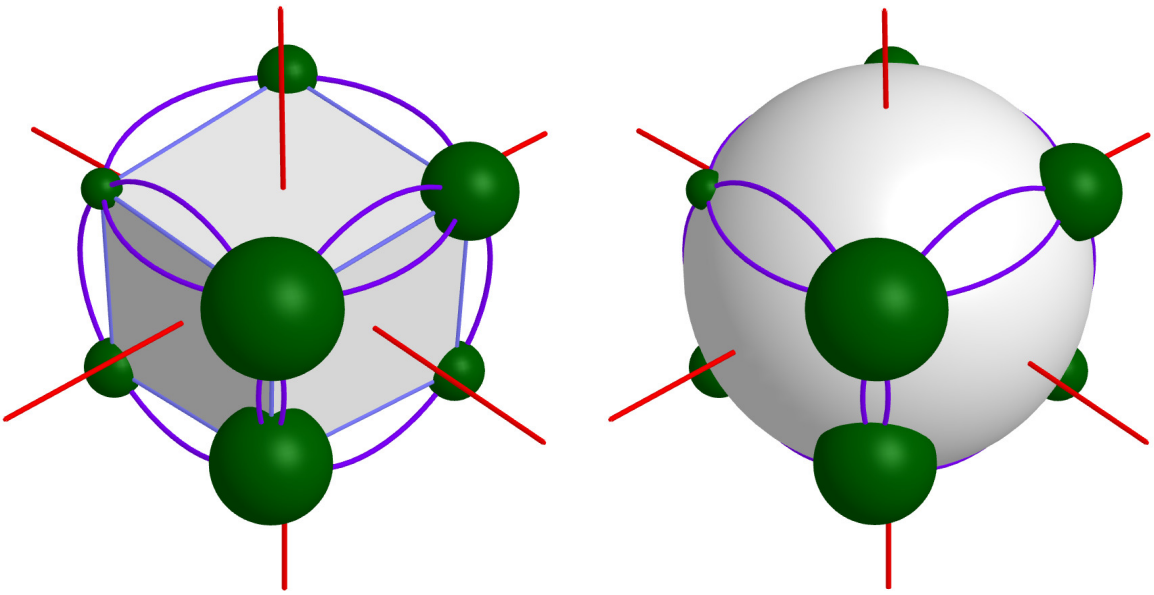

图8。 主双网的初等立方体。 $\mathbb{Z}^3$ 上的限制以蓝色绘制（仅左侧），圆以紫色绘制、轴以红色绘制， $\mathbb{Z}^3$ 上的正交球面表示中的球面以绿色绘制，中心球面以白色绘制（仅右侧）。

意味着圆锥网具有多维一致性。对于 $N > 2$，圆锥网不能一致地视为定义在 $\mathbb{Z}^N$顶点上的点映射。然而，若改为通过与 $\mathbb{Z}^N$面相关联的平面的交点来定义圆锥网，则所得 $N > 2$ 的组合结构与我们对共轭面网的定义（定义 1.1 (ii)）一致。这样，我们便可将其视为共轭面网的相容约化：

定理5.1。 圆锥网是共轭面网的一种相容约化。 ∎

证明。 这由共轭面网的多维一致性（命题2.13）以及圆锥网的多维一致性 [BS07、BS08、Dol99]得出。 □

5.3 主接触元网与直线复形

主接触元网可理解为李二次曲面中的各向同性直线复形（注意，在 $\mathbb{Z}^2$ 上它们称为各向同性直线合同） [BS07]。各向同性直线复形的相容性见 [BS08，第3节。3], 不过，与 *A*网对应的一个特殊情形早先已由 [Dol01]研究。与共轭顶点网相关的直线合同由 [DSM00], 引入，并且已知具有多维一致性 [BS15]。

[AT25]的一个关键洞见是，主双网容许李几何描述：它们相对于李二次曲面 $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^5$提升为极性直线双合同 。更确切地说，主双网 $b : D_2 \to \mathbb{R}^3$ 产生一个映射

$$b_{\mathcal{L}} : D_2 \to \mathrm{Lines}(\mathbb{R}\mathrm{P}^5), \tag{5.1}$$

使得

(i）对 V_2 的限制是直线合同（相邻顶点对应的直线相交） ，

（ii）对 F_2 的限制是直线合同（相邻面对应的直线相交 ），

(iii) 对于所有关联的 $d, d' \in D_2$ ，直线 $b_{\mathcal{L}}(d)$ 和 $b_{\mathcal{L}}(d')$ 关于 $\mathcal{L}$ 互为极性对应。

从这个角度来看，与主双网相关联的极性直线双合同自然地推广了由主接触元网产生的各向同性直线合同。极性条件意味着， $b_{\mathcal{L}}$ 在面上的取值由其在顶点上的取值唯一确定：

$$b_{\mathcal{L}}(f) = \bigcap_{v \sim f} \big(b_{\mathcal{L}}(v)\big)^{\perp}. \tag{5.2}$$

在本文中，我们利用极共轭双网的多维一致性（定理 1.5），证明了主双网构成共轭双网的一个相容约化（定理 1.7）。不过，我们注意到，还有一种基于直线复形多维一致性的替代方法。由于若干原因，我们没有采用这一替代证明：它需要大量额外的预备知识，与本文的其他观察结果不太契合，而且其本身仅限于 $\mathbb{R}^3$ 情形。我们将在本节余下部分简要勾勒这一替代证明的思路。

主双网的李提升可以如下扩展到更高维。一个主双网 $b\colon\ D_N \to \mathbb{R}^3$ 产生一个映射

$$b_{\mathcal{L}}\colon D_N \to \mathrm{Lines}(\mathbb{RP}^5),$$

使得

（i）对 V_N 的限制是一个直线复形；（ii）对 F_N 的限制具有如下性质：相邻面的直线相交，

（iii）对于所有相交的 $d,\ d' \in D_N$ 直线 $b_{\mathcal{L}}(d)$ 和 $b_{\mathcal{L}}(d')$ 关于 $\mathcal{L}$ 的极性相关。

关系（5.2）对 $N > 2$ 仍然成立。因此，直线复形的多维一致性意味着这类李提升的多维一致性，进而得到主双网的相容性。

6 离散正交坐标系

在 [AT25]中引入主双网的一个关键动机来自离散共焦二次曲面 [BSST16、BSST18]（见图9左），它们可被视为离散正交坐标系的一种特例。然而，对于 $N > 2$，其底层组合结构与主双网所采用的组合结构不同。在本节中，我们简要回顾 $N = 3$ 情形下离散共焦二次曲面的组合设定与正交约束，并说明它们与主双网的关系。

在 [BSST18], 中，离散共焦二次曲面被定义为映射 $(\frac{1}{2}\mathbb{Z})^{N} \to \mathbb{R}^N$。然而，正交约束仅涉及这些映射在对偶子晶格对上的限制，例如 $\mathbb{Z}^N$ 和 $(\mathbb{Z}^N)^{*} = (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^{N}$。在 $N = 3$ 的情形下，我们可以自然地

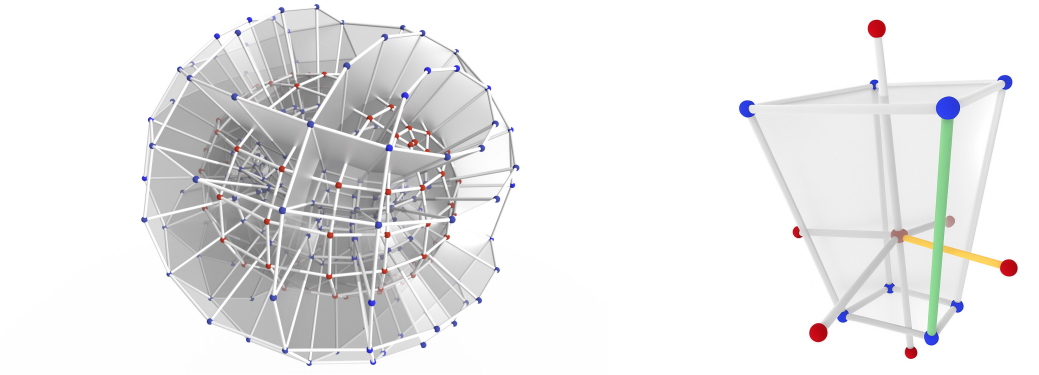

图 9. 左图： $\mathbb{Z}^3$ 上的离散共焦二次曲面（V_3 为蓝色， $\square_3$ 为红色）。右图：离散正交坐标系的基本立方体。绿色边和黄色边构成一组正交边对。

将 $(\mathbb{Z}^3)^*$ 视为 $\mathbb{Z}^3$ 中 3-立方体的集合，记作 $\square_3$。从这一角度出发，可以从 [BSST 18] 中提炼出以下离散正交坐标系的定义（另见 [Tec21]）：

定义 6.1. A（三维）离散正交坐标系（*dOCS*）是一个映射 $x\colon V_3 \cup \square_3 \to \mathbb{R}^3$，满足：对于所有相邻顶点对 $v, v' \in V_3$，以及所有共享公共面的相邻立方体对 $c, c' \in \square_3$（即 $v, v' \in c, c'$），两条直线 $x(v) \vee x(v')$ 和 $x(c) \vee x(c')$ 互相正交（见图 9 右图）。∎

由定义 6.1 可立即得出，每个面的像（以及每个对偶面的像）都位于一个平面内。因此，将 dOCS 限制在 V_3（或分别限制在 $\square_3 \cong V_3$）上，得到的是一个共轭顶点网。

主双网的莫比乌斯提升概念（定义 4.2）可按以下方式推广到 dOCS [Tec21]:

定义 6.2. 设 $x\colon V_3 \cup \square_3 \to \mathbb{R}^3$ 是一个 dOCS。映射 $x_{\mathcal{M}}\colon V_3 \cup \square_3 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^4$ 称为 *¨M¨obius* 提升，若

(i) 对每一对相邻的 $v \in V_3$ 和 $c \in \square_3$，点 $x(v)$ 与 $x(c)$ 关于 $\mathcal{M}$ 满足极性关系，

(ii) x 是 $x_{\mathcal{M}}$的投影，即 $\pi \circ x_{\mathcal{M}} = x$。 ∎

极性约束立即意味着，将 dOCS 的莫比乌斯提升 $x_{\mathcal{M}}$ 限制到 V_3（以及$\square_3 \cong V_3$）上，仍然是共轭顶点网。主双网的莫比乌斯提升的存在性与完备性结果（引理 4.3）可直接推广到 dOCS [Tec21] 的莫比乌斯提升。

引理 6.3。

(i) 每个 *dOCS* 都有一个单参数族的 *M¨obius* 提升。*(ii)* 满足定义 *6.2* 中极性约束 *(i)* 的任意映射 $V_3 \cup \square_3 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^4$ 的投影 π 都是一个 *dOCS*。∎

此外 ver，定义 6.2 中的极性约束 (i) 意味着该限制 of

$x_{\mathcal{M}}$ 到 V_3 （或相应地到 $\square_3$）唯一确定整个提升，经由

$$x_{\mathcal{M}}(c) = \left(\bigvee_{v \sim c} x(v) \right)^{\perp}. \tag{6.1}$$

因此，在 M¨obius 提升的层面上，主双网与 dOCS 之间存在直接对应：从 V_3 上的共轭顶点网出发，可以将其扩展到面 F_3 ，也可以扩展到立方体 $\square_3$。扩展到 $\square_3$ 是唯一的，而扩展到 F_3 则取决于初始数据。现在我们将明确说明这种对应关系，并描述它对投影的影响。

设 $b_{\mathcal{M}} \colon V_3 \cup F_3 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^4$ 是主双网 $b \colon V_3 \cup F_3 \to \mathbb{R}^3$ 的 M¨obius 提升。由于 $b_{\mathcal{M}}$ 在 V_3 上的限制是一个共轭顶点网，每个基本三维立方体的顶点张成空间都是三维的。因此，其极子空间是一个点。从几何上看，这个点可以解释为与每个三维立方体相关联的球面的球心（见第 5.1 节）。因此，我们定义映射 $x_{\mathcal{M}} \colon V_3 \cup \square_3 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^4$，如下所示：

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{M}}(v) &\coloneqq b_{\mathcal{M}}(v) && \text{for all } v \in V_3, \\ x_{\mathcal{M}}(c) &\coloneqq \left(\bigvee_{v \sim c} b_{\mathcal{M}}(v) \right)^{\perp} && \text{for all } c \in \square_3. \end{aligned} \tag{6.2}$$

根据构造， $x_{\mathcal{M}}$ 满足定义 6.2 中的极性约束 (i)，因此由引理 6.3 (ii) 可知，它定义了一个 dOCS 的莫比乌斯提升。

现在我们说明如何从主双网 b 直接得到这个 dOCS。点$x_{\mathcal{M}}(c)$ 是所有直线 $x_{\mathcal{M}}(c) \vee x_{\mathcal{M}}(c')$ 的交点，其中 $c' \in \square_3$ 与 c 相邻。每条这样的直线都与平面 $\square b_{\mathcal{M}}(f)$ 互为极性，其中 $f \in F_3$ 是与 c 和 c' 相邻的面。经投影后，这条直线变为主双网的法线（或者等价地，变为第 5.1 节中引入的圆 $C(f)$ 的圆轴），

$$\pi\big(x_{\mathcal{M}}(c) \vee x_{\mathcal{M}}(c')\big) = N(f), \tag{6.3}$$

其中 $N(f)$ 表示经过 $b(f)$ 且垂直于 $\square b(f)$ 的直线。因此，与 b 相关联的 dOCSx: $V_3 \cup \square_3 \to \mathbb{R}^3$ 可表示为

$$\begin{aligned} x(v) &\coloneqq b(v) && \text{for all } v \in V_3, \\ x(c) &\coloneqq \bigcap_{f \sim c} N(f) && \text{for all } c \in \square_3. \end{aligned} \tag{6.4}$$

特别地， x所得的点仅依赖于主双网 b ，而不依赖于M¨obius提升的选取。

反之，设 $x_{\mathcal{M}} \colon V_3 \cup \square_3 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^4$ 为dOCS $x \colon V_3 \cup \square_3 \to \mathbb{R}^3$的M¨obius提升。首先，我们令

$$b_{\mathcal{M}}(v) \coloneqq x_{\mathcal{M}}(v) \qquad \text{for all } v \in V_3. \tag{6.5}$$

此外，由M¨obius提升上的极性条件，我们有

$$b_{\mathcal{M}}(f) \in \big(\square b_{\mathcal{M}}(f)\big)^{\perp} = x_{\mathcal{M}}(c) \vee x_{\mathcal{M}}(c') \qquad \text{for all } f \in F_3, \tag{6.6}$$

其中 c， $c' \in \square_3$ 是与 f关联的两个立方体。这些点可以任意选取在一维初始数据上，例如选在坐标轴沿线的坐标

平面上。随后，坐标平面上的所有其余点都可通过共轭条件在这些直线上唯一确定，详见 [AT25，第 20] 节。最后，根据定理 1.5，极共轭双网构成共轭双网的相容约化，因此 F_3 中的所有其余点均由共轭面网的三维系统唯一确定。

现在我们说明如何直接从 dOCS x 得到这个主双网。该构造可直接推广到投影情形。首先，我们设

$$b(v) \coloneqq x(v) \qquad \text{for all } v \in V_3. \tag{6.7}$$

接着，我们构造其余的点

$$b(f) \in x(c) \vee x(c') \qquad \text{for all } f \in F_3, \tag{6.8}$$

由一维初始数据得到，其中 c，$c' \in \square_3$ 是与 f 相邻的两个立方体。首先按照共轭条件构造二维数据，具体如 [AT25 第 20], 节所述；随后利用共轭面网三维系统构造所有的 F_3。由此，根据定理 1.7 得到一个主双网。

注意，尽管 M¨obius 提升和投影的构造看起来相同，但对于 M¨obius 提升，对 V_3 的限制唯一确定了所有其余的点；而对于投影，仍需使用对 F_3 的限制。

我们在下面的定理中总结这一对应关系。

定理6.4。 主双网 $b\colon\ V_3 \cup F_3 \to \mathbb{R}^3$ 与 *dOCS* $x\colon\ V_3 \cup \square_3 \to \mathbb{R}^3$ 在 $\mathbb{Z}^3$ 上存在自然对应：

(i) 每个主双网都通过(6.4)定义唯一的 *dOCS*。

(ii) 每个 *dOCS* 都通过(6.7)以及(6.8)在一维初始数据上定义一个主双网，并按照上述方式（经由共轭面网三维系统）进行传播。∎

三维 dOCS 的定义（定义 6.1）可以直接推广到映射

$$x : V_N \cup \square_N \to \mathbb{R}^3 \tag{6.9}$$

任意维数 $N \geq 3$ 中，其中 $\square_N$ 表示 $\mathbb{Z}^N$ 中 3-立方体的集合。注意，这与 [BSST16、BSST18], 中使用的高维 dOCS 概念不同，后者仍从根本上基于三维。不过，根据这一定义，并结合前面的观察（即在 M¨obius 提升层面，dOCS 由其在 V_N 上的限制唯一确定），再利用共轭顶点网的多维一致性（命题 2.12, [DS97]），我们得到以下新的观察。

定理 6.5。 *dOCS* 是多维一致的三维系统。 ∎

注 6.6。 定理 6.5 与定理6.4中建立的对应关系相结合，为证明 $\mathbb{R}^3$情形下主双网的多维一致性（定理 1.7）提供了另一种方法。∎

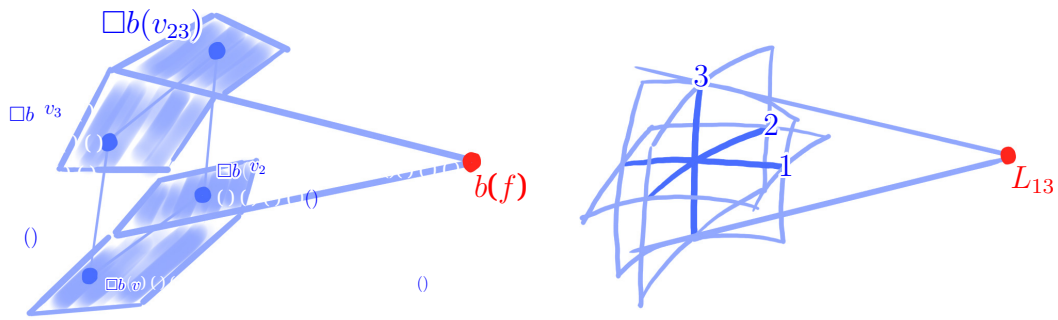

图 10. 左：共轭双网的 23-面上的点。右：三重共轭系统的焦点 L_{13} 。

7 光滑正交坐标系

根据定理6.4，三维主二元网 $b: D_3 \to \mathbb{R}^3$ 与离散正交坐标系之间存在密切的对应关系。在适当的连续极限下，后者应当收敛到光滑正交坐标系。因此，三维主二元网可以视为光滑三维正交坐标系的一种离散化。

另一方面，如注 2.11 中所讨论的，给定共轭双网 $b: D_3 \to \mathbb{R}^3$，可以将顶点 V_3 上的点与 12-面 F_3^{12}上的点视为坐标系的离散化（即这些点在连续极限下应收敛到一个光滑坐标系）。从这个角度看，13-面 F_3^{13}上的点与 23-面 F_3^{23}上的点起着焦点的作用。尽管如此，这些焦点仍然包含在主双网的正交约束中（定义 1.6）。在本节中，我们研究焦点上的正交条件如何在光滑情形下仍然导出一个正交坐标系。

在光滑情形下，三重共轭系统 $x: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 由三个如下形式的方程支配：[Dar15，BS08]

$$\partial_i \partial_j x = a_{ij}\, \partial_i x + a_{ji}\, \partial_j x \tag{7.1}$$

对于不同的 i， $j \in \{1,2,3\}$，其中六个光滑函数 $a_{ij}: U \to \mathbb{R}$ 满足三个相容条件

$$\partial_k a_{ij} = \partial_j a_{ik} = a_{ij}a_{jk} + a_{kj}a_{ik} - a_{ij}a_{ik}. \tag{7.2}$$

x沿着 ij 曲面在 i 方向上的拉普拉斯变换（或焦点）为

$$L_{ij} = x - \frac{1}{a_{ji}}\, \partial_i x.$$

我们假设系数 a_{ij} 不为零，使得拉普拉斯变换有定义，并且这些变换是非退化的；特别是，它们的导数不为零。

现在，我们确定哪些焦点由13-面和23-面上的点离散化。考虑一个23-面 $f = (v, v_2, v_{23}, v_3) \in F_3^{23}$。两条交线 $\square b(v) \cap \square b(v_2)$ 和 $\square b(v_3) \cap \square b(v_{23})$ 将1方向上的切线离散化。因此，交点 $b(f)$ 将沿着1方向的一个焦点 L_{13} 离散化，沿着

13-曲面（见图 10）。类似地，13-面 $f \in F_3^{13}$上的点 $b(f)$ 将沿着23-曲面离散化一个2方向上的焦点 L_{23} 。

关于主双网的正交条件，根据 E_3 中边的方向，我们区分以下两种类型：

- 涉及 1 方向或 2 方向边的交叉：只需考虑形如 $(v,\ f,\ v',\ f') \in C_3$且满足 $f,\ f' \in F_3^{12}$ 的交叉。涉及 13-面或 23-面且包含 1 方向或 2 方向边的交叉，由于注 4.1，会导出相关条件。在光滑极限下，这些对应于正交条件 $\langle \partial_1 x,\ \partial_2 x \rangle = 0$。

- 涉及 3 方向边的交叉：只需考虑形如 $(v,\ f,\ v',\ f') \in C_3$且满足 $v' = v + e_3$和 $f,\ f' \in F_3^{23}$ 的交叉。同样，涉及 13-面且包含 3 方向边的交叉，由于注 4.1，会导出相关条件。在光滑极限下，这些对应于正交条件 $\langle \partial_2 L_{13},\ \partial_3 x \rangle = 0$。

结果表明，即使在光滑情形下，这两个正交约束也能刻画正交坐标系。

定理 7.1. 三重共轭系统 x正交，当且仅当

$$\langle \partial_1 x, \partial_2 x \rangle = 0 \quad and \quad \langle \partial_2 L_{13}, \partial_3 x \rangle = 0. \tag{7.3}$$

■

证明. 假设 $\langle \partial_1 x, \partial_2 x \rangle = 0$。

首先注意，对于正交坐标系，另外两个正交条件 $\langle \partial_2 x, \partial_3 x \rangle = 0$ 和 $\langle \partial_3 x, \partial_1 x \rangle = 0$并非相互独立。事实上，对第一个条件求导可得

$$0 = \partial_3 \langle \partial_1 x, \partial_2 x \rangle = \langle \partial_1 \partial_3 x, \partial_2 x \rangle + \langle \partial_1 x, \partial_2 \partial_3 x \rangle = a_{31} \langle \partial_2 x, \partial_3 x \rangle + a_{32} \langle \partial_1 x, \partial_3 x \rangle , \tag{7.4}$$

这里用到了（7.1）。

接下来，考虑拉普拉斯变换的导数：

$$\begin{aligned} \partial_2 L_{13} &= \partial_2 \left(x - \frac{1}{a_{31}} \partial_1 x \right) \\ &= \partial_2 x + \frac{\partial_2 a_{31}}{a_{31}^2} \partial_1 x - \frac{1}{a_{31}} \partial_1 \partial_2 x \\ &= \frac{\partial_2 a_{31} - a_{12} a_{31}}{a_{31}^2} \partial_1 x + \frac{a_{31} - a_{21}}{a_{31}} \partial_2 x \end{aligned} \tag{7.5}$$

其中我们使用了 (7.1)。现在利用 (7.2)，得到

$$\partial_2 L_{13} = \frac{a_{21} - a_{31}}{a_{31}} \left(\frac{a_{32}}{a_{31}} \partial_1 x - \partial_2 x \right). \tag{7.6}$$

根据假设，拉普拉斯变换是非退化的，特别是 $a_{21} \neq a_{31}$。因此，与 $\partial_3 x$ 的标量积为

$$\langle \partial_2 L_{13}, \partial_3 x \rangle = \frac{a_{21} - a_{31}}{a_{31}} \left(\frac{a_{32}}{a_{31}} \langle \partial_1 x, \partial_3 x \rangle - \langle \partial_2 x, \partial_3 x \rangle \right). \tag{7.7}$$

若 x 正交，则此结果确实为零。反之，若该标量积为零，则根据 (7.4) 以及我们的假设 a_{31}、 $a_{32} \neq 0$ 和 $a_{21} \neq a_{31}$，可推出 $\langle \partial_2 x$、 $\partial_3 x \rangle = \langle \partial_3 x$、 $\partial_1 x \rangle =$0。

□

参考文献

[AT25] Niklas C. Affolter 和 Jan Techter。主双网，2025。即将发表于《离散与计算几何》。3, 5, 6, 7, 8, 16, 19, 20, 21, 24[Bob99] Alexander I. Bobenko。《离散共形映射与曲面》，第 97–108 页。伦敦数学学会讲义系列。剑桥大学出版社，1999。3, 5[BS07] Alexander I. Bobenko 和 Yuri B. Suris。论离散微分几何的组织原则。《球面的几何》。《俄罗斯数学评论》，62(1):1–43，2007 年 2 月。3, 7, 19, 20[BS08] Alexander I. Bobenko 和 Yuri B. Suris。《离散微分几何：可积结构》，数学研究生教材第 98 卷。美国数学学会，2008。3, 4, 5, 13, 19, 20, 25[BS15] Alexander I. Bobenko 和 Wolfgang K. Schief。离散直线复形与子式的可积演化。《英国皇家学会会刊 A辑》，471(2175)，2015 年 3 月。20[BSST16] Alexander I. Bobenko、Wolfgang K. Schief、Yuri B. Suris 和 Jan Techter。共焦二次曲面的离散化 I：一种可积系统方法。《可积系统杂志》，1(1):xyw005，2016 年 8 月。3, 7, 21, 24[BSST18] Alexander I. Bobenko、Wolfgang K. Schief、Yuri B. Suris 和 Jan Techter。共焦二次曲面的离散化：一般参数化的几何方法。《国际数学研究通讯》，2020(24):10180–10230，2018 年 12 月。3, 7, 21, 22, 24[CDS97] Jan Cie´sli´nski、Adam Doliwa 和 Paolo M. Santini。正交坐标系的可积离散模拟是多维圆格。《物理学快报 A辑》，235(5):480–488，1997。5, 6[Dar15] Gaston Darboux。《曲面一般理论及其微积分几何应用讲义》。Gauthier-Villars，法国巴黎，第 2 版，1915。第 2 版经修订并增补。25[Del23] Felix Dellinger。基于棋盘格图案的离散等温网。《离散与计算几何》，2023 年 9 月。6[Dol99] Adam Doliwa。四边形格的二次约化。《几何与物理学杂志》，30(2):169–186，1999。5, 6, 19, 20[Dol01] Adam Doliwa。离散渐近网与 Pl¨ucker 直线几何中的 W全等。《几何与物理学杂志》，39(1):9–29，2001。20[DS97] Adam Doliwa 和 Paolo M. Santini。多维四边形格是可积的。《物理学快报 A辑》，233(4):365–372，1997。4, 5, 13, 24[DSM00] Adam Doliwa、Paolo M. Santini 和 Manuel Ma˜nas。四边形格的变换。《数学物理学杂志》，41(2):944–990，2000。20

[LPW+06] 刘洋、Helmut Pottmann、Johannes Wallner、杨永良和 Wen- ping Wang。基于圆锥网格与可展曲面的几何建模。*ACM* 图形学汇刊，25(3):681–689，2006年7月。3、7、19[PB96] Ulrich Pinkall 和 Alexander Bobenko。离散等温曲面。*Journalf¨ur die reine und angewandte Mathematik*，475:187–208，1996年。3、5[Sau33] Robert Sauer。无穷小可展曲面弯曲中的摇摆曲线网。数学年刊，108(1):673–693，1933年。3、4[Tec21] Jan Techter。离散共焦二次曲面与棋盘格内切圆网。博士论文，柏林工业大学，2021年。22