arXiv:2603.02454v1 [math.AP] 2 Mar 2026

半线性狄利克雷特征值问题的耳语廊模

林振江

Abstract. 我们研究单位球 $B_1 \subseteq \mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ 内半线性狄利克雷特征值问题弱解的边界局域现象，该现象称为耳语廊模，其形式为

$$\begin{cases} -\Delta u + f(u) = \lambda u & \text{in } B_1, \\ u = 0 & \text{on } \partial B_1. \end{cases}$$

这里，$f = F'$ 其中 F 是具有超二次多项式增长的非负 C^2 函数。我们证明存在一个解序列 (u_n, λ_n)，满足 $\lambda_n \to +\infty$，使得对于任意 $\tau \in (0, 1)$，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_\tau(u_n)}{E_1(u_n)} = 0,$$

其中 $E_\rho(u) = \int_{B_\rho} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)\right) dx$ 表示半径为 ρ 的球内的能量。这表明，这些高特征值解的能量集中在边界附近，将线性拉普拉斯特征函数中的经典耳语廊模现象推广到了半线性情形。作为直接应用，情形 $F(u) = u^4/4$ 在适当缩放后给出一个高特征值边界集中解序列，为 Allen-Cahn 方程的耳语廊模提供了非线性类比。该方法结合了线性拉普拉斯算子的谱性质与局部非线性分岔，预计还可推广到其他几何形状中的相关内部局域现象，例如弹跳球模；在这些几何形状中，线性特征函数呈现类似的局域化行为（如实心椭圆或椭圆环）。

1. Introduction

耳语廊现象 [26, 37, 41, 42], 由瑞利勋爵在圣保罗大教堂的穹顶中观察到，它生动地展现了这样一种直觉：波可以被限制在弯曲边界附近，沿边界以小角度掠射反射传播，同时向内部迅速衰减。在谱几何中，这意味着拉普拉斯算子的高频特征函数会集中在光滑凸区域的边界任意近处，这种行为称为耳语廊模。

设 Ω 是欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$ 中的有界定义域，且 $d \geq 2$。对于 Ω 中的线性狄利克雷特征值问题 $-\Delta u = \lambda u$，其在 $\partial\Omega$ 上满足 $u = 0$，耳语廊模沿着一列特征值 $\lambda \to +\infty$ 出现；对于这些特征值，相应的 L^2归一化特征函数 u_λ 满足：对任意 $\tau > 0$,

$$\int_{\{\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)>\tau\}} |u_\lambda|^2 \, dx \to 0 \quad \text{as} \quad \lambda \to +\infty.$$

这种行为首先由拉祖特金等人 [4, 29–31]借助半经典方法，在一般光滑严格凸区域中得到了严格确立。在单位球中，如 [37], 所示，变量分离法给出由球贝塞尔函数支配的显式径向剖面，其一致渐近证实：对应于大特征值的特征函数在远离边界处呈指数衰减，并提供了精确的定量估计。

Date: 2026年3月4日。

由此产生一个自然而引人深思的问题：类似的边界局域化是否对非线性特征值问题仍然成立，其形式为

$$-\Delta u + f(u) = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{1.1}$$

其中 $f = F'$ 和 $F \geq 0$ 是一个 C^2 具有超线性增长的位势？本文通过在具有狄利克雷边界条件的单位球 $\Omega = B_1 \subseteq \mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ 中构造一个解序列，为此给出了肯定的回答。该解序列对应于方程 (1.1)，其能量在 $\lambda \to +\infty$ 时局部化于边界附近。这为耳语廊模式提供了真正的非线性类比，并从数学上解释了 [23] 中报告的实验观察。

我们在此指出，方程 (1.1) 是能量泛函在临界点处的欧拉–拉格朗日方程

$$E_\Omega(u) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + F(u(x)) \right) dx$$

满足 L^2-质量约束（其中 λ 充当拉格朗日乘子）。这类方程出现在多种背景中，包括非线性标量场、反应扩散系统和相变模型。例如，当 $F(u) = u^4/4$时，对方程 (1.1) 作适当缩放即可得到艾伦–卡恩方程的一种形式。方程 (1.1) 的复值对应形式是格罗斯–皮塔耶夫斯基特征值问题 [3, 6, 7, 43],，该问题广泛应用于量子物理中，用于描述玻色–爱因斯坦凝聚 [5, 12, 18]。在诺伊曼边界条件下，针对艾伦–卡恩方程缩放版本（对应于 $\lambda \to +\infty$）的相关边界聚集现象已在 [16, 17, 34, 35] 中得到研究。相比之下，带诺伊曼边界条件的 $\lambda \to -\infty$ 情形通常会产生内部或边界尖峰解，相关研究要广泛得多；例如参见 [32, 33, 38–40] 及其中的参考文献。本文通过在狄利克雷边界条件下证明当 $\lambda \to +\infty$ 时存在连续边界聚集，补充了这些结果；所得解不同于诺伊曼边界条件文献中常见的离散簇状层结构或尖峰形态。

我们的主要定理如下定理 1.1。

定理 1.1。 设 $\Omega = B_1$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的单位球，且 $d \geq 2$。假设 F 满足假设 *2.1*，且巴拿赫空间 V 按定义 *2.5*定义。存在一族解对$\{(u_n, \lambda_n)\} \subseteq V \times \mathbb{R}$ 满足 (1.1)，使得 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$，并且对于任意 *(0*,1),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_\tau(u_n)}{E_1(u_n)} = 0, \tag{1.2}$$

其中，我们令 B_τ 为半径为 τ 的球，并且

$$E_\tau(u) := \int_{B_\tau} \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + F(u(x)) \, \mathrm{d}x. \tag{1.3}$$

定理 1.1 的证明结合了线性拉普拉斯算子的全局谱性质与局部非线性分岔，并将其形式化为以下两个辅助定理。尽管本文聚焦于实值函数，我们的方法可直接推广到复值情形，包括格罗斯–皮塔耶夫斯基特征值问题。

定理 *1.2*。采用假设 *2.1*、定义 *2.5*，并假设 *Ω* 的边界是 C^1光滑的。设 Λ 是 *Ω* 的一个狄利克雷拉普拉斯特征值。存在依赖于 Λ、*Ω* p_1、p_k、b、b_0的正常数 δ_Λ、γ_Λ，使得对于任意 $\lambda \in [\Lambda, \Lambda + \delta_\Lambda]$, 存在一对 $(u_\lambda, \lambda) \in V \times \mathbb{R}$ 满足方程 *(1.1)* 的解，并且满足

(1) $u_\lambda = (\lambda - \Lambda)^{p_1 - 2} (w_\lambda + \phi_\lambda)$ 对于两个函数 w_λ、ϕ_λ，它们属于 V。*(2)* $\Delta w_\lambda + \Lambda w_\lambda = 0$、$\|w_\lambda\|_2 \in [\alpha \Lambda^{-\kappa}, \beta]$，其中 $\alpha > 0$、$\beta > 0$ 依赖于Ω p_1、p_k、b、b_0，而 $\kappa > 0$ 依赖于 d、p_1、p_k。*(3)* ϕ_λ 在 H_0^1(Ω)中与 w_λ 正交，且 $\|\phi_\lambda\|_V \leq \gamma_\Lambda(\lambda - \Lambda)$。

定理1.2 的证明采用了分岔理论和 Lyapunov-Schmidt 约化的技巧，这些技巧广泛用于构造半线性偏微分方程的解。参见例如 [8, 10, 11, 33,34, 36]。

第二个关键要素，是对单位球上线性拉普拉斯特征函数的经典回音廊现象的一个精细版本 [22, 26, 37, 41, 42, 49], ，此处将其调整为适用于非线性情形。特别是， L^p (1.4) 中的估计包含在 [37]对定理 2.1 的证明中；我们的证明采用了类似的策略，思路也借鉴了 [28]。

定理 1.3。 设$\Omega = B_1$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的单位球，且 $d \geq 2$。存在一列Ω 的狄利克雷拉普拉斯特征值 $\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，使得以下结论成立：设 $\{w_{\Lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 为任意对应的 L^2-归一化特征函数，即 $w_{\Lambda_n} \in H_0^1(\Omega)$，满足 $\Delta w_{\Lambda_n} + \Lambda_n w_{\Lambda_n} = 0$ 且$\|w_{\Lambda_n}\|_2 = 1$。那么，对任意 $p \geq 2$,

$$\int_{B_{\tau_{\Lambda_n}}} |\nabla w_{\Lambda_n}|^2 \mathrm{d}x \leq 2^{-\frac{1}{5}\Lambda_n^{1/6}}, \quad \int_{B_{\tau_{\Lambda_n}}} |w_{\Lambda_n}|^p \mathrm{d}x \leq 2^{-\frac{1}{10}\Lambda_n^{1/6}\cdot p}, \tag{1.4}$$

当 $\Lambda_n > C$， 其中 $C = C(d) > 0$ 是一个仅取决于 d 的常数。这里， $\tau_\Lambda := 1 - 2\Lambda^{-1/6}$.

定理 1.3 主要讨论球上高频拉普拉斯特征函数的边界局部化估计。类似的局部化现象，无论发生在边界附近还是内部，无论是在低频还是高频下，都已在更一般的区域中得到广泛研究 [4, 13, 14, 19, 20, 24, 25, 29–31, 44, 45]。除线性拉普拉斯算子外，对于具有适当势¨的线性薛定谔算子，$\Delta w + V(x)w + \lambda w = 0$ 也会出现类似行为；近来，对于高频下满足固支边界条件的双拉普拉斯特征函数 V [26] ， $\Delta^2 w - \lambda^2 w = 0$ 也发现了类似现象 [28]。

值得指出的是，定理1.1 专门针对单位球 $\Omega = B_1$建立，因为它关键依赖于定理1.3中的定量局域化估计。相比之下，定理1.2 中的局部分岔结果适用于任意 C^1光滑区域。因此，对于更一般的几何情形，包括高频拉普拉斯特征函数呈现强烈边界集中的光滑严格凸区域 [4, 26, 29–31], 只要能够获得足够精细的底层线性拉普拉斯特征函数定量估计，预计也会存在类似的非线性回音廊模态。同样，在其他情形下也可预期出现类似的非线性局部化现象，例如线性特征函数集中于内部或呈现其他形式的局域化，如实心椭圆或椭圆环域中的弹跳球模 [37]（另请参见，例如 [13, 14, 19, 20, 24, 25, 44, 45]）。因此，我们的方法为构造和分析更一般区域上的半线性方程局部集中现象提供了有力工具。

最后，为结束引言，我们证明定理1.1，并说明它如何由定理 1.2和定理 1.3推出。这两个辅助定理的完整证明分别见第 3 节和第4节。

定理 *1.1*的证明。 采用定理 1.3的结果，设 Λ 是 Ω 的狄利克雷拉普拉斯特征值 $= B_1$ 序列中的一个特征值 $\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，并且 $\Lambda > C$。设 γ_Λ， δ_Λ 是定理 1.2中的两个常数。令 $\lambda = \Lambda + \delta$ ，其中 $\delta \in [0, \delta_\Lambda]$ 将在后文确定。令 $\sigma = \frac{1}{p_1 - 2} > 0$。因此，定理 1.2 中的 u_λ 为 $u_\lambda = \delta^\sigma(w_\lambda + \phi_\lambda)$ 且 $\|\phi_\lambda\|_V \leq \gamma_\Lambda \delta$。接下来，固定一个 $\tau \in (0,1)$，我们估计比值

$$\frac{E_\tau(u_\lambda)}{\int_{B_1} |\nabla u_\lambda(x)|^2 \, \mathrm{d}x}. \tag{1.5}$$

首先，我们估计分母。我们知道

$$\delta^{-2\sigma}|\nabla u_\lambda|^2 = |\nabla w_\lambda|^2 + 2\langle \nabla w_\lambda, \nabla \phi_\lambda \rangle + |\nabla \phi_\lambda|^2 \geq \frac{1}{2}|\nabla w_\lambda|^2 - |\nabla \phi_\lambda|^2, \tag{1.6}$$

利用不等式 $2\langle\nabla w_\lambda,\nabla\phi_\lambda\rangle\geq-\frac{1}{2}|\nabla w_\lambda|^2-2|\nabla\phi_\lambda|^2$。因此，

$$\delta^{-2\sigma}\int_{B_1}|\nabla u_\lambda(x)|^2\,\mathrm{d}x\geq\frac{\Lambda}{2}\|w_\lambda\|_2^2-(\gamma_\Lambda\delta)^2\geq\frac{\alpha}{2}\Lambda^{1-\kappa}-(\gamma_\Lambda\delta)^2\geq\frac{\alpha}{4}\Lambda^{1-\kappa},\tag{1.7}$$

其中第二个不等式由定理 1.2 的 (2) 得出；若要求 δ 足够小，使得 $(\gamma_\Lambda\delta)^2<\frac{\alpha}{4}\Lambda^{1-\kappa}$，则最后一个不等式成立。

接下来，我们估计分子中的狄利克雷能量项。我们同样知道

$$\delta^{-2\sigma}|\nabla u_\lambda|^2\leq2|\nabla w_\lambda|^2+2|\nabla\phi_\lambda|^2.\tag{1.8}$$

因此，由定理 1.3，

(1.9)

$$\delta^{-2\sigma}\int_{B_\tau}|\nabla u_\lambda(x)|^2\,\mathrm{d}x\leq2\int_{B_\tau}|\nabla w_\lambda(x)|^2\,\mathrm{d}x+2(\gamma_\Lambda\delta)^2\leq2\cdot\|w_\lambda\|_2^2\cdot2^{-\frac{1}{5}\cdot\Lambda^{1/6}}+2(\gamma_\Lambda\delta)^2\leq4\beta^2\cdot2^{-\frac{1}{5}\cdot\Lambda^{1/6}},$$

其中在最后一个不等式中，我们使用了定理 1.2 中的 (2)，即 $\|w_\lambda\|_2\leq\beta$，并要求 δ 足够小，使得 $(\gamma_\Lambda\delta)^2\leq\beta^2\cdot2^{-\frac{1}{5}\cdot\Lambda^{1/6}}$。

剩下的是分子中的非线性项。由注记 2.4 以及$\delta^{-\sigma p}|u_\lambda|^p\leq2^p|w_\lambda|^p+2^p|\phi_\lambda|^p$ 对于 $p\geq2$ 的事实，我们有

$$\begin{aligned}\delta^{-\sigma p_1}\int_{B_\tau}F(u_\lambda)\mathrm{d}x&\leq C\int_{B_\tau}\left(|w_\lambda|^{p_1}+|\phi_\lambda|^{p_1}+\delta^{\sigma(p_k-p_1)}\left(|w_\lambda|^{p_k}+|\phi_\lambda|^{p_k}\right)\right)\mathrm{d}x\\&\leq C\int_{B_\tau}\left(|w_\lambda|^{p_1}+|\phi_\lambda|^{p_1}+\left(|w_\lambda|^{p_k}+|\phi_\lambda|^{p_k}\right)\right)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{1.10}$$

对于一个依赖于 b 的常数 C， p_1， p_k，这里我们用到了 $\delta^{\sigma(p_k-p_1)}\leq1$ 这一事实。对于项 $\int_{B_\tau}|\phi_\lambda|^{p_k}\mathrm{d}x$，我们有

$$\int_{B_\tau}|\phi_\lambda|^{p_k}\mathrm{d}x\leq\|\phi_\lambda\|_{p_k}^{p_k}\leq C\|\phi_\lambda\|_q^{p_k}\leq C\|\phi_\lambda\|_V^{p_k}\leq C(\gamma_\Lambda\delta)^{p_k},\tag{1.11}$$

其中使用了 H¨older 不等式得到第二个不等式，并且 C 是一个依赖于 p_k 和d的常数。类似地，我们可以得到 $\int_{B_\tau}|\phi_\lambda|^{p_1}\mathrm{d}x\leq C(\gamma_\Lambda\delta)^{p_1}$。对于 $\int_{B_\tau}|w_\lambda|^{p_k}\mathrm{d}x$这一项，根据定理 1.3和定理1.2中的（2），我们有

$$\int_{B_\tau}|w_\lambda|^{p_k}\mathrm{d}x\leq2^{-\frac{1}{10}\Lambda^{1/6}\cdot p_k}\|w_\lambda\|_2^{p_k}\leq\beta^{p_k}2^{-\frac{1}{10}\Lambda^{1/6}\cdot p_k}\leq\beta^{p_k}2^{-\frac{1}{5}\Lambda^{1/6}},\tag{1.12}$$

其中最后一个不等式是因为 $p_k>2$。类似地，我们有 $\int_{B_\tau}|w_\lambda|^{p_k}\mathrm{d}x\leq\beta^{p_1}2^{-\frac{1}{5}\Lambda^{1/6}}$。综合上述估计，选取 δ足够小，使得 $C(\gamma_\Lambda\delta)^{p_1}\leq\beta^{p_k}2^{-\frac{1}{5}\Lambda^{1/6}}$，我们得到

$$\delta^{-\sigma p_1}\int_{B_\tau}F(u_\lambda)\mathrm{d}x\leq C2^{-\frac{1}{5}\Lambda^{1/6}},\tag{1.13}$$

其中 C是一个依赖于 b、 b_0、 p_1、 p_k、 d 且与 Λ无关的常数。

综合分子和分母的估计，我们有

$$\frac{E_\tau(u_\lambda)}{\int_{B_1}|\nabla u_\lambda(x)|^2\,\mathrm{d}x}\leq C\Lambda^{\kappa-1}(1+\delta^{\sigma(p_1-2)})2^{-\frac{1}{5}\Lambda^{1/6}}\leq2C\Lambda^{\kappa-1}2^{-\frac{1}{5}\Lambda^{1/6}},\tag{1.14}$$

其中 C 是一个依赖于 b， b_0， p_1， p_k， d 而与 Λ无关的常数；我们用到了这一事实：$\delta^{\sigma(p_1-2)}<1$，因为 $\delta<1$ 且 $p_1>2$。因此，在要求对某个依赖于上述参数（依赖于 Λ， d， p_1， p_k， b， b_0）的 δ'_Λ 有 $\delta<\delta'_\Lambda$ 后，我们得到

$$\frac{E_\tau(u_\lambda)}{\int_{B_1}|\nabla u_\lambda(x)|^2\,\mathrm{d}x}\leq2C\Lambda^{\kappa-1}2^{-\frac{1}{5}\Lambda^{1/6}}.\tag{1.15}$$

因此，我们选取 $\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 作为定理 1.3中的序列，并选取相应的 $\delta_n < \delta'_{\Lambda_n}$ 以得到一个 $\lambda_n = \Lambda_n + \delta_n$。相应的 $\{u_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 于是满足

$$\frac{E_\tau(u_{\lambda_n})}{E_1(u_{\lambda_n})} \le \frac{E_\tau(u_{\lambda_n})}{\frac{1}{2}\int_{B_1}|\nabla u_{\lambda_n}(x)|^2\,\mathrm{d}x} \le 4C\Lambda_n^{\kappa-1}2^{-\frac{1}{5}\Lambda_n^{1/6}}, \tag{1.16}$$

其以指数速度趋于 0，当 $n \to +\infty$。 □

2. Preliminary

在本节2中，我们记录关于位势 F 的假设，并介绍构造解所采用的泛函框架。我们对 F施加特定的超二次多项式增长条件，该条件刻画了非线性项 $f = F'$的超线性特征。随后，我们定义与这一增长条件及维数 V 相适应的自然巴拿赫空间 d，以及相关的索博列夫嵌入和插值不等式；这些将在第3节的分歧分析中反复用到。

As假设 2.1。 $F(s)$ 非负，且具有如下形式：对任意 $s \in \mathbb{R}$ ，

$$F(s) = b_1|s|^{p_1} + b_2|s|^{p_2} + \cdots + b_k|s|^{p_k}, \tag{2.1}$$

其中 $k \in \mathbb{Z}_+$、 $2 < p_1 < p_2$、 $\cdots < p_k$ 和 $\{b_i\}_{i=1}^k$ 是 $\mathbb{R}$ 中的常数。此外，我们假设$F(s) \ge b_0|s|^{p_1}$，其中某个 $b_0 > 0$。

注记*2.2.* 在假设 *2.1* 中，由于 *F(s)* 具有多项式形式 *(2.1)*，因此额外假设 *F(s)* $\ge b_0|s|^{p_1}$ 对于某个 $b_0 > 0$ 成立，等价于假设 *F(s)* > 0 成立，除非 $s = 0$。按照第 *3* 节中的相同证明，定理 *1.2* 也可以推广到假设 *F(s)* < 0 成立，除非 $s = 0$的情形。唯一必要的区别在于，现在 λ 的选择属于 $[\Lambda - \varepsilon_\Lambda, \Lambda]$，这是由引理*3.6*的证明所致。

注记2.3. 可以用适当的多项式增长不等式假设*2.1*取代假设，条件施加于 f'、 f、 F，即 $|f'| \asymp s^p$、 $|f| \asymp s^{p+1}$、 $|F| \asymp s^{p+2}$，并由此得到类似于定理*1.1* 和定理*1.2*的结果。此外，也可以用定义在 b_i上的有界函数取代这些常数Ω，而定理*1.1* 和定理*1.2*仍然成立。为简化论证并清楚阐明主要思路，我们保留当前的假设*2.1*。

注 2.4。 在证明中，当某个常数取决于 $|b_1|$、……、 $|b_k|$ 的上界时，我们称该常数取决于 b。我们将频繁使用以下不等式：存在取决于 b、 p_1、 p_k 的常数 C、 C'，使得 $|F(s)| \le C|s|^{p_1} + C'|s|^{p_k}$、 $|f(s)| = |F'(s)| \le C|s|^{p_1-1} + C'|s|^{p_k-1}$，以及 $|f'(s)| = |F''(s)| \le C|s|^{p_1-2} + C'|s|^{p_k-2}$，其中使用了插值不等式。

接下来，我们讨论所研究的（1.1）的解空间。

定义 2.5。 采用假设 *2.1*。我们定义巴拿赫空间

$$V := \begin{cases} H_0^1(\Omega), & \text{if } d = 2 \text{ or } d \ge 3 \text{ and } p_k \le \frac{2d}{d-2}, \\ H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega), \text{ where } q = \frac{d(p_k-2)}{2}, & \text{if } d \ge 3 \text{ and } p_k > \frac{2d}{d-2}. \end{cases} \tag{2.2}$$

选择 q 是为了确保 $(p_k-1)\frac{dq}{d+2q} = q$。此外，该 q 满足 $q > \frac{2d}{d-2}$ 和 $q > p_k$。

相应的范数 $\|u\|_V$ 对 $u \in V$ 定义如下

$$\|u\|_V := \begin{cases} \|u\|, & \text{if } d = 2 \text{ or } d \ge 3 \text{ and } p_k \le \frac{2d}{d-2}, \\ \|u\| + \|u\|_q, & \text{if } d \ge 3 \text{ and } p_k > \frac{2d}{d-2}. \end{cases} \tag{2.3}$$

本文中，我们使用如下记号

$$\|u\| := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|u\|_r := \left(\int_\Omega |u|^r \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}, \text{ for any } r \ge 1. \tag{2.4}$$

定义 2.6. 令 $\|\cdot\|$ 为 $H_0^1(\Omega)$ 上的范数。当 $d \geq 3$ 时，令 i 为索博列夫嵌入映射 $i\colon H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)$，其对偶映射为 $i^*\colon L^{\frac{2d}{d+2}} \to H_0^1(\Omega)$；当 $d=2$ 时，$i\colon H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \cap_{r>1} L^r(\Omega)$，其对偶映射为 $i^*\colon \cup_{r>1} L^r(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$。

当 $d \geq 3$ 时，对于任意 $v \in H_0^1(\Omega)$ 和 $u \in L^{\frac{2d}{d+2}}$，我们有

$$\int_\Omega \langle \nabla i^*(u), \nabla v\rangle \mathrm{d}x = \int_\Omega u \cdot i(v)\mathrm{d}x \leq C\|u\|_{\frac{2d}{d+2}} \|i(v)\|_{\frac{2d}{d-2}} \leq C\|u\|_{\frac{2d}{d+2}}\|v\|, \tag{2.5}$$

其中用到了索伯列夫不等式。因此，$\|i^*(u)\| \leq C\|u\|_{\frac{2d}{d+2}}$，并且我们看到 $i^* = (-\Delta)^{-1}$，即负拉普拉斯算子的逆算子。这里，C 是一个仅依赖于 Ω 的常数。类似地，当 $d=2$ 时，对于任意 $r>1$，有 $\|i^*(u)\| \leq C(r)\|u\|_r$，且 $C(r)$ 是一个仅依赖于 Ω r 的常数。此外，当 $d \geq 3$ 和 $p_k > \frac{2d}{d-2}$ 时，我们还有以下引理。例如，参见[2]，[21], 中的引理 9.17 和定理 7.26，或 [36]中的引理 2.2。

引理 2.7. 设 $d \geq 3$ 与 $s > \frac{2d}{d-2}$。若 $u \in L^{\frac{ds}{d+2s}}(\Omega) \subseteq L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)$，则 $i^*(u) \in L^s(\Omega)$，且存在正常数 C，其依赖于 d、s、Ω，使得 $\|i^*(u)\|_s \leq C\|u\|_{\frac{ds}{d+2s}}$。

由引理 2.7 以及对 q 在定义 2.5 中的选取，我们看到，对于 $u \in L^q(\Omega)$，$\|i^*(u^{p_k})\|_q \leq C\|u^{p_k}\|_{\frac{dq}{d+2q}} = C\|u\|_q^{p_k}$。我们将在第 3 节中用到这一事实。

3. Proof of Theorem 1.2

我们将证明定理 1.2，方法是扰动一个解 w_λ，它求解 $\Delta w_\lambda + \Lambda w_\lambda = 0$，并利用分岔理论与 Lyapunov-Schmidt 约化。例如可参见 [8, 10, 11, 33, 34, 36] 中关于分岔理论与 Lyapunov-Schmidt 约化在构造半线性偏微分方程的解方面的应用。主要思想如下：若 $u \in V$ 是（1.1）的一个解，则 $\widetilde{u} := Mu \in V$ 在某个正常数 M 下便成为如下方程的一个解

$$\begin{cases} \Delta\widetilde{u} + \lambda\widetilde{u} - Mf\left(M^{-1}\widetilde{u}\right) = 0, & \text{in } \Omega, \\ \widetilde{u} = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

由于 f 是超线性的，我们可以增大尺度 M，使得项 $Mf\left(M^{-1}\widetilde{u}\right)$ 在（3.1）中变得可以忽略。因此，我们可以利用分岔理论和 Lyapunov-Schmidt 约化，通过扰动一个狄利克雷拉普拉斯特征函数，得到（3.1）的一个解。

为严谨地阐明上述思路，我们将特征值 Λ 对应的拉普拉斯特征空间记为 K_Λ，其维数为 $N_\Lambda \in \mathbb{Z}_+$。也就是说，$K_\Lambda$ 由满足 $\Delta f + \Lambda f = 0$ 的 $f \in H_0^1(\Omega)$ 中的元素构成。由于 $H_0^1(\Omega)$ 关于内积 $\langle u, v\rangle := \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle \mathrm{d}x$ 构成一个希尔伯特空间，我们将 K_Λ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的正交补记为 $K_\Lambda^\perp$。定义 $\mathcal{P}\colon H_0^1(\Omega) \to K_\Lambda$ 为到 K_Λ 上的正交投影，并定义 $\mathcal{P}^\perp\colon H_0^1(\Omega) \to K_\Lambda^\perp$ 为到 $K_\Lambda^\perp$ 上的正交投影。注意，若令 $\{e_i\}_{i=1}^{N_\Lambda}$ 为 K_Λ 的一组标准正交基，则可以显式写出 $P(u) = \sum_{i=1}^{N_\Lambda} \langle u, e_i\rangle e_i$，并且对任意 $u \in H_0^1(\Omega)$，有 $P^\perp(u) = u - P(u)$。根据（2.3）中各种情形下 $\|\cdot\|_V$ 的定义，我们可以利用 $P(u)$ 的这一显式公式，得到依赖于 Λ 的常数 $C(\Lambda)$，使得

$$\|P(u)\|_V \leq C(\Lambda)\|u\|_V, \quad \|P^\perp(u)\|_V \leq C(\Lambda)\|u\|_V. \tag{3.2}$$

因此，我们可以将定义 V 2.5 中的 分解为 $V = K_\Lambda \oplus (K_\Lambda^\perp \cap V)$，并希望寻找形式为 $\widetilde{u} = \widetilde{w}_\lambda + \widetilde{\phi}_\lambda$ 的 $\widetilde{w}_\lambda \in K_\Lambda$ 和 $\widetilde{\phi}_\lambda \in (K_\Lambda^\perp \cap V)$ 的解。首先注意到，(3.1) 等价于

$$\widetilde{u} - i^*\left(\lambda\widetilde{u} - Mf\left(M^{-1}\widetilde{u}\right)\right) = 0, \tag{3.3}$$

它可以分解为

$$P^{\perp}\left(\widetilde{u}-i^{*}\left(\lambda\widetilde{u}-Mf\left(M^{-1}\widetilde{u}\right)\right)\right)=0, \tag{3.4}$$

and

$$P\left(\widetilde{u}-i^{*}\left(\lambda\widetilde{u}-Mf\left(M^{-1}\widetilde{u}\right)\right)\right)=0. \tag{3.5}$$

利用 $\widetilde{u}=\widetilde{w}_{\lambda}+\widetilde{\phi}_{\lambda}$ 关于 $\widetilde{w}_{\lambda}\in K_{\Lambda}$ 和 $\widetilde{\phi}_{\lambda}\in(K_{\Lambda}^{\perp}\cap V)$的分解，以及$i^{*}\widetilde{w}_{\lambda}=(-\Delta)^{-1}\widetilde{w}_{\lambda}=\Lambda^{-1}\widetilde{w}_{\lambda}$ 和 $i^{*}(K_{\Lambda}^{\perp})\subseteq K_{\Lambda}^{\perp}$，式（3.4）和式（3.5）可化为

$$\widetilde{\phi}_{\lambda}-\lambda i^{*}\widetilde{\phi}_{\lambda}+MP^{\perp}i^{*}\left[f\left(M^{-1}\widetilde{u}\right)\right]=0, \tag{3.6}$$

and

$$\left(1-\frac{\lambda}{\Lambda}\right)\widetilde{w}_{\lambda}+MPi^{*}\left[f\left(M^{-1}\widetilde{u}\right)\right]=0. \tag{3.7}$$

下面分别求解式（3.6）和式（3.7）。

引理 *3.1.* 存在一个依赖于 Λ、Ω 的正常数 δ_{Λ}，以及一个依赖于 Λ、p_1、p_k、Ω 的正常数 C_{Λ}，使得对于任意 $W>1$ 以及任意满足 $\|w\|_{V}\leq W$ 的 w，若 $|\lambda-\Lambda|<\delta_{\Lambda}$ 且 $M>C_{\Lambda}W^{\frac{p_1-1}{p_1-2}}$，则存在唯一的 $\widetilde{\phi}_{\lambda}\in(K_{\Lambda}^{\perp}\cap V)$，它是式（*3.6*）的解，满足 $\widetilde{u}=w+\widetilde{\phi}_{\lambda}$ 和 $\|\widetilde{\phi}_{\lambda}\|_{V}\leq M^{2-p_1}C_{\Lambda}^{p_1-2}W^{p_1-1}$。该 $\widetilde{\phi}_{\lambda}$ 关于 $w\in K_{\Lambda}$ 是-可微，我们将其记为 $\phi_{\lambda}(w)$。

引理 *3.2*。存在一个依赖于 Λ、Ω p_1、p_k、b、b_0 的正常数 C'_{Λ}，一个依赖于 b_0、Ω p_1 的正常数 $\eta<1$，以及一个形如 $\varepsilon_{\Lambda}=C\Lambda^{-\kappa}\eta^{p_1-2}$ 的常数 $\varepsilon_{\Lambda}<\frac{1}{2}$，其中 $C>0$ 依赖于Ω、p_1、p_k、b、b_0，而 $\kappa>0$ 依赖于 d、p_1、p_k，使得若 $M>C'_{\Lambda}$，且令 $\lambda=\Lambda+2\eta M^{2-p_1}$，则存在一个满足 $\|\widetilde{w}_{\lambda}\|_{2}\in(\frac{\varepsilon_{\Lambda}}{2},1-\frac{\varepsilon_{\Lambda}}{2})$ 的 $\widetilde{w}_{\lambda}\in K_{\Lambda}$，使函数 $\widetilde{u}=\widetilde{w}_{\lambda}+\widetilde{\phi}_{\lambda}(\widetilde{w}_{\lambda})$ 是方程*(3.1)* 的一个解，其中 $\widetilde{\phi}_{\lambda}(\widetilde{w}_{\lambda})$ 在引理 *3.1* 中得到，并满足 $\|\widetilde{\phi}_{\lambda}\|_{V}\leq M^{2-p_1}(C'_{\Lambda})^{p_1-2}$。

3.1. **引理的证明 3.1**。定义一个有界线性算子

$$A_{\lambda}:K_{\Lambda}^{\perp}\to K_{\Lambda}^{\perp},\ \phi\mapsto\phi-\lambda i^{*}\phi. \tag{3.8}$$

由引理 2.7可知，存在正常数 C，它依赖于 d，p_k，Λ，Ω，使得$\|A_{\lambda}(\phi)\|_{V}\leq C\|\phi\|_{V}$若 $\phi\in V$。因此，$\mathrm{Im}\left(A_{\lambda}|_{V\cap K_{\Lambda}^{\perp}}\right)\subseteq V\cap K_{\Lambda}^{\perp}$。下述引理 3.3 表明 $A_{\lambda}|_{V\cap K_{\Lambda}^{\perp}}$是 $V\cap K_{\Lambda}^{\perp}$上的一个可逆映射。

引理 3.3。存在正常数 δ_{Λ}，它依赖于 Λ、Ω，以及正常数 c_{Λ}，它依赖于 Λ、p_k 和 Ω，使得对于任意 $|\lambda-\Lambda|<\delta_{\Lambda}$和任意 $\phi\in V\cap K_{\Lambda}^{\perp}$，

$$\|A_{\lambda}(\phi)\|_{V}\geq c_{\Lambda}\|\phi\|_{V}. \tag{3.9}$$

证明。我们只证明 $d\geq 3$ 且 $p_k>\frac{2d}{d-2}$时的情形，因为定义 2.5 中另一种情形的证明相同。我们首先证明存在 δ_1，c_1，它们依赖于 Λ，Ω，使得对于任意 $|\lambda-\Lambda|<\delta_1$ 和任意 $\phi\in K_{\Lambda}^{\perp}$，

$$\|A_{\lambda}(\phi)\|\geq c_1\|\phi\|. \tag{3.10}$$

假设 $\{\varphi_j\}$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 中由特征值为 $\Lambda_j\neq\Lambda$ 的狄利克雷拉普拉斯算子特征函数组成的 $K_{\Lambda}^{\perp}$ 标准正交基。因此，由于 $i^{*}=(-\Delta)^{-1}$，我们有

$$\phi=\sum_{j}\langle\varphi_j,\phi\rangle\varphi_j,\ \text{and}\ A_{\lambda}=\sum_{j}\langle\varphi_j,\phi\rangle\left(1-\frac{\lambda}{\Lambda_j}\right)\varphi_j. \tag{3.11}$$

因此，

$$\|A_\lambda\phi\|^2 = \sum_j |\langle\varphi_j,\phi\rangle|^2 \left(1-\frac{\lambda}{\Lambda_j}\right)^2 \geq \min_j \left(1-\frac{\lambda}{\Lambda_j}\right)^2 \cdot \|\phi\|^2. \tag{3.12}$$

因此，若将所有狄利克雷拉普拉斯特征值按 $0<\Lambda_1<\cdots<\Lambda_-<\Lambda<\Lambda_+<\ldots$ 的顺序排列，并令 $\delta_1=\frac{1}{2}\min\{\Lambda_+-\Lambda,\Lambda-\Lambda_-\}$，则可知当 $|\lambda-\Lambda|<\delta_1$ 时，对于依赖于 $\Lambda_-,\Lambda,\Lambda_+$ 的正常数 c_1，有 $\min_j\left(1-\frac{\lambda}{\Lambda_j}\right)^2\geq c_1^2>0$。

接下来，根据 A_λ (3.8) 的定义，

$$\|\phi\|_q = \|A_\lambda(\phi)+\lambda i^*(\phi)\|_q \leq \|A_\lambda(\phi)\|_q + \lambda\|i^*(\phi)\|_q. \tag{3.13}$$

利用引理 2.7，对于 $s=q$，可得 $\|i^*(\phi)\|_q\leq C\|\phi\|_{\frac{q}{p_k}}\leq C\|\phi\|_q^{1-\alpha}\|\phi\|_1^{\alpha}$，其中最后一个不等式由 H¨older 不等式以及 $\alpha\in(0,1)$ 满足 $\frac{p_k}{q}=\frac{1-\alpha}{q}+\frac{\alpha}{1}$ 得到。因此，对 $\|\phi\|_1$ 应用索伯列夫不等式，可得存在一个依赖于 d,q,Ω 的常数 C，使得 $\|i^*(\phi)\|_q\leq C\|\phi\|_q^{1-\alpha}\|\phi\|^{\alpha}$，从而

$$\|\phi\|_q \leq \|A_\lambda(\phi)\|_q + C\|\phi\|_q^{1-\alpha}\|\phi\|^{\alpha}, \tag{3.14}$$

对于一个常数 C，其取决于 Λ，d，q，Ω。

当 $C\|\phi\|^\alpha\leq\frac{1}{2}\|\phi\|_q^\alpha$ 时，我们看到 $\|\phi\|_q\leq 2\|A_\lambda(\phi)\|_q$，因此 $\|A_\lambda(\phi)\|_V\geq$ 最小$\{c_1,\frac{1}{2}\}\|\phi\|_V$，结合（3.10）。当 $C\|\phi\|^\alpha>\frac{1}{2}\|\phi\|_q^\alpha$，即 $(2C)^{\frac{1}{\alpha}}\|\phi\|>\|\phi\|_q$ 时，我们看到

$$\|\phi\|_V \leq (1+(2C)^{\frac{1}{\alpha}})\|\phi\| \leq c_1^{-1}(1+(2C)^{\frac{1}{\alpha}})\|A_\lambda(\phi)\| \leq c_1^{-1}(1+(2C)^{\frac{1}{\alpha}})\|A_\lambda(\phi)\|_V \tag{3.15}$$

由（3.10）。在这两种情况下，取决于 c_Λ 仅取决于 Λ，p_k、Ω 的一个 $\|A_\lambda(\phi)\|_V\geq c_\Lambda\|\phi\|_V$，当我们取 $\delta_\Lambda=\delta_1$。□

我们指出，[36] 中的引理 3.1 也可以通过反证法证明引理 3.3 。我们在此给出的证明直接展示了常数 c_Λ 。现在我们可以证明引理 3.1。

引理的证明 *3.1*。我们只证明 $d\geq 3$ 且 $p_k>\frac{2d}{d-2}$ 时的引理，因为定义 2.5中的另一种情况证明相同。

首先，A_λ 根据引理 3.3可逆。于是我们可以将（3.6）改写为

$$\widetilde{\phi}_\lambda = -M(A_\lambda)^{-1}\circ P^\perp\circ i^*\left[f\left(M^{-1}(w+\widetilde{\phi}_\lambda)\right)\right]. \tag{3.16}$$

固定常数 $W>1$。对于任意满足 $\|w\|_V\leq W$ 的固定 $w\in K_\Lambda$，我们定义映射

$$T: V\cap K_\Lambda^\perp\to V\cap K_\Lambda^\perp,\ \phi\mapsto -M(A_\lambda)^{-1}\circ P^\perp\circ i^*\left[f\left(M^{-1}(w+\phi)\right)\right]. \tag{3.17}$$

我们证明存在一个依赖于 Λ，p_1，p_k，Ω 的正常数 ξ_Λ，使得当 $M>\xi_\Lambda W^{\frac{p_1-1}{p_1-2}}$ 时，T 存在一个满足 $\|\widetilde{\phi}_\lambda\|_V\leq M^{2-p_1}\xi_\Lambda^{p_1-2}W^{p_1-1}$ 的不动点。

首先，我们计算 $\|T(\phi)\|_V$ 对于一个 $\phi\in V\cap K_\Lambda^\perp$ 满足 $\|\phi\|_V\leq 1$。根据（3.2）和（3.9），我们有

$$\begin{aligned}\|T(\phi)\|_V &\leq MC\left\|i^*\left[f\left(M^{-1}(w+\phi)\right)\right]\right\|_V\\ &= MC\left(\left\|i^*\left[f\left(M^{-1}(w+\phi)\right)\right]\right\|+\left\|i^*\left[f\left(M^{-1}(w+\phi)\right)\right]\right\|_q\right)\\ &\leq MC\left(\left\|f\left(M^{-1}(w+\phi)\right)\right\|_{\frac{2d}{d+2}}+\left\|f\left(M^{-1}(w+\phi)\right)\right\|_{\frac{dq}{d+2q}}\right),\end{aligned} \tag{3.18}$$

其中用到了（2.5）和引理 2.7。在上述不等式中，常数 C 逐行变化，但仅依赖于 Λ，p_1，p_k，Ω。由于 $q>2$，根据 Hölder不等式，我们只需

估计上面的 $L^{\frac{dq}{d+2q}}$-范数项。注意，根据注 2.4 以及定义 q 中 2.5的选择，对于任意 $v \in V$,

$$\begin{aligned}\|f(v)\|_{\frac{dq}{d+2q}} &\leq C\|v\|_{\frac{(p_1-1)dq}{d+2q}}^{p_1-1} + C'\|v\|_{\frac{(p_k-1)dq}{d+2q}}^{p_k-1} \leq C\|v\|_{\frac{(p_k-1)dq}{d+2q}}^{p_1-1} + C'\|v\|_{\frac{(p_k-1)dq}{d+2q}}^{p_k-1} \\ &= C\|v\|_q^{p_1-1} + C'\|v\|_q^{p_k-1},\end{aligned} \tag{3.19}$$

其中第二个不等式用到了 H¨older 不等式，常数 C, C' 虽然每一行都可能不同，但仅依赖于 $\Lambda, p_1, p_k, \Omega$。因此，先选取 $M > 2W$，并将 $v = M^{-1}(w+\phi)$代入（3.19），注意到由于

$$\|w+\phi\|_q \leq \|w+\phi\|_V \leq W+1 \leq 2W,$$

$$\left\|f\left(M^{-1}(w+\phi)\right)\right\|_{\frac{dq}{d+2q}} \leq (C+C')M^{1-p_1}(2W)^{p_1-1}. \tag{3.20}$$

因此，存在一个依赖于 $\Lambda, p_1, p_k, \Omega$ 的常数 C，

$$\|T(\phi)\|_V \leq CM^{2-p_1}W^{p_1-1}. \tag{3.21}$$

特别地，当 $M > C^{\frac{1}{p_1-2}}W^{\frac{p_1-1}{p_1-2}}$ 时，我们有 $\|T(\phi)\|_V < 1$。

接下来，我们证明 T是一个压缩映射。与（3.18）类似，对于任意 $\phi_1, \phi_2 \in V \cap K_\Lambda^\perp$满足$\|\phi_1\|_V, \|\phi_2\|_V \leq 1$, 我们有

$$\begin{aligned}\|T(\phi_1) - T(\phi_2)\|_V &\leq MC\left\|f\left(M^{-1}(w+\phi_1)\right) - f\left(M^{-1}(w+\phi_2)\right)\right\|_{\frac{dq}{d+2q}} \\ &= C\left\|f'\left(M^{-1}(w+(\theta\phi_1+(1-\theta)\phi_2)\right)(\phi_1-\phi_2)\right\|_{\frac{dq}{d+2q}},\end{aligned} \tag{3.22}$$

这里用到了中值定理以及 $\theta \in (0,1)$. 与 (3.19类似，我们可以看出，对任意 $v \in V$以及任意 $r > 1$,

$$\left\|f'(v)\right\|_r \leq C\|v\|_{r(p_1-2)}^{p_1-2} + C'\|v\|_{r(p_k-2)}^{p_k-2} \leq C\|v\|_{r(p_k-2)}^{p_1-2} + C'\|v\|_{r(p_k-2)}^{p_k-2}, \tag{3.23}$$

其中常数 C, C' 在不同的行中取值可能不同，但只依赖于 $\Lambda, p_1, p_k, \Omega$。因此，取$M > 2W$并将 $v = M^{-1}(w+(\theta\phi_1+(1-\theta)\phi_2)$代入 (3.19)，我们得到：由于 $\|w+(\theta\phi_1+(1-\theta)\phi_2)\|_q \leq \|w+(\theta\phi_1+(1-\theta)\phi_2)\|_V \leq W+1 \leq 2W$，且由于 $(p_k-1)_{d+2q}^{dq} = q$,

$$\begin{aligned}\|T(\phi_1) - T(\phi_2)\|_V &\leq C\left\|f'\left(M^{-1}(w+(\theta\phi_1+(1-\theta)\phi_2)\right)\right\|_{\frac{(p_k-1)dq}{(p_k-2)(d+2q)}}\|(\phi_1-\phi_2)\|_{\frac{(p_k-1)dq}{d+2q}} \\ &\leq CM^{2-p_1}W^{p_1-2}\|(\phi_1-\phi_2)\|_q \leq CM^{2-p_1}W^{p_1-2}\|(\phi_1-\phi_2)\|_V.\end{aligned} \tag{3.24}$$

因此，当 $M > C^{\frac{1}{p_1-2}}W$, T是一个压缩映射。根据压缩映射定理，存在唯一的不动点$\widetilde{\phi}_\lambda \in (K_\Lambda^\perp \cap V)$，满足 $\|\widetilde{\phi}_\lambda\|_V < 1$，属于 T。由此可得 $\widetilde{\phi}_\lambda$是方程 (3.6) 的解。关于 C^1对 $w \in K_\Lambda$ 的可微性源于 T 对 $w \in K_\Lambda$ 的可微性，如 (3.17) 中的定义所示。□

3.2. **引理的证明 3.2.** 我们将求解 (3.7) 转化为在有限维空间 K_Λ 上寻找能量泛函的临界点。首先，我们注意到，(3.1) 的解等价于能量泛函的临界点

$$\widetilde{E}_\Omega(\widetilde{u}) := \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla\widetilde{u}(x)|^2 - \frac{\lambda}{2}\widetilde{u}^2 + M^2F(M^{-1}\widetilde{u}(x))\,\mathrm{d}x, \quad \widetilde{u} \in H_0^1(\Omega). \tag{3.25}$$

我们还在 K_Λ上定义了一个能量泛函。对于任意 $w \in K_\Lambda$，记 $\phi_\lambda(w)$ 为在假设p_1-1(3.6) 下，我们在引理 3.1 中得到的解，并定义$M > C_\Lambda\|w\|_V^{p_1-2}$，

$$\widetilde{J}(w) := \widetilde{E}_\Omega(w+\widetilde{\phi}_\lambda(w)). \tag{3.26}$$

引理 3.4。采用引理 3.1的假设。函数 $\widetilde{u} = w + \phi_\lambda(w)$ 是方程 (3.1) 的解，当且仅当 w 是 J 在 K_Λ上的临界点。

证明。根据引理 3.1 的构造，对任意 $w \in K_\Lambda$，函数 $\phi_\lambda(w)$ 满足 (2.6)，这保证了 $\widetilde{u} = w + \widetilde{\phi}_\lambda(w)$ 满足关于 $K_\Lambda^\perp$ 的投影方程。这等价于对所有 $\xi \in K_\Lambda^\perp$，均有 $\langle \mathrm{d}\,\widetilde{E}_\Omega(\widetilde{u})\ \xi\rangle = 0$。这里，$\mathrm{d}\,\widetilde{E}_\Omega(\widetilde{u})$ 是 $\widetilde{E}_\Omega$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $\widetilde{u}$ 处的 Fr´echet 导数。现在，计算 $\widetilde{J}$ 在 w 处的导数：

$$\mathrm{d}\widetilde{J}(w)[v] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \widetilde{J}(w+tv) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \widetilde{E}_\Omega((w+tv) + \widetilde{\phi}_\lambda(w+tv)) = \langle \mathrm{d}\widetilde{E}_\Omega(\widetilde{u}), v+\psi\rangle, \tag{3.27}$$

其中 $\psi = \mathrm{d}\widetilde{\phi}_\lambda(w)[v]$ 且 $v \in K_\Lambda$。根据引理 3.1，$\widetilde{\phi}_\lambda(w) \in K_\Lambda^\perp \cap V$ 并且是 C^1-可微的（关于 w），因此 ψ 是良定义的，且 $\psi \in K_\Lambda^\perp \cap V$。因此，$\langle \mathrm{d}\,\widetilde{E}_\Omega(\widetilde{u})\ \psi\rangle = 0$，并且

$$\mathrm{d}\widetilde{J}(w)[v] = \langle \mathrm{d}\widetilde{E}_\Omega(\widetilde{u}), v\rangle. \tag{3.28}$$

因此，w 是 K_Λ 上 J 的临界点，当且仅当对所有 $v \in K_\Lambda$都有 $\mathrm{d}J(w)[v] = 0$；这又当且仅当对所有 $v \in K_\Lambda$都有 $\langle \mathrm{d}\,\widetilde{E}_\Omega(\widetilde{u})\ v\rangle = 0$。由构造可知，对所有 $\xi \in K_\Lambda^\perp$，$\langle \mathrm{d}\,\widetilde{E}_\Omega(\widetilde{u})\ \xi\rangle$ 已经成立，因此这等价于 $\mathrm{d}E_\Omega(\widetilde{u}) = 0$，也就是说，$\widetilde{u} = w + \phi_\lambda(w)$是 E_Ω 的临界点，因而是方程 (3.1) 的一个解。□

对于函数 $w \in K_\Lambda$，我们有以下逆 H¨older 不等式。

引理 3.5. 设 M 是一个维数为 N的流形（有边界或无边界），且 f 是满足 $\Delta_M f + \Lambda f = 0$的拉普拉斯特征函数。那么，存在一个仅依赖于 M的常数 C，使得对于任意 $r \geq 2$,

$$\|f\|_r \leq C\Lambda^{\frac{N}{4}}\|f\|_2. \tag{3.29}$$

引理 3.5的证明可参见例如 [47] 和 [48]中的方程 (1.8) 和 (1.9)。我们指出，精确阶小于 $\Lambda^{\frac{N}{4}}$，如 [47, 48],所示，但阶 $\Lambda^{\frac{N}{4}}$已足以满足本文的需要。

接下来，由于 $\phi_\lambda(w) \in K_\Lambda^\perp$，它们在 $H_0^1(\Omega)$ 和 $L^2(\Omega)$ 中彼此正交。因此，我们可以将 $\widetilde{J}(w)$ 展开为

$$\begin{aligned}\widetilde{J}(w) &= \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla w|^2 + \frac{1}{2}|\nabla\widetilde{\phi}_\lambda(w)|^2 - \frac{\lambda}{2}w^2 - \frac{\lambda}{2}(\widetilde{\phi}_\lambda(w))^2 + M^2F(M^{-1}(w+\widetilde{\phi}_\lambda(w)))\ \mathrm{d}x \\ &= \widetilde{G}(w) + \widetilde{R}(w),\end{aligned} \tag{3.30}$$

其中

$$\widetilde{G}(w) := \frac{\Lambda-\lambda}{2}\|w\|_2^2 + M^2\int_\Omega F(M^{-1}w)\ \mathrm{d}x, \tag{3.31}$$

and

$$\widetilde{R}(w) := \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla\widetilde{\phi}_\lambda(w)|^2 - \frac{\lambda}{2}(\widetilde{\phi}_\lambda(w))^2 + M^2\left[F(M^{-1}(w+\widetilde{\phi}_\lambda(w))) - F(M^{-1}w)\right]\ \mathrm{d}x. \tag{3.32}$$

引理*3.6.* 存在一个依赖于 b_0、Ω p_1 的正常数 $\eta < 1$，以及一个形如 $\varepsilon_\Lambda = C\Lambda^{-\kappa}\eta^{p_1-2}$ 的常数 $\varepsilon_\Lambda < \frac{1}{2}$，其中 $C > 0$ 依赖于 Ω p_1、p_k、b、b_0，而 $\kappa > 0$ 依赖于 d、p_1、p_k，使得若令 $\lambda = \Lambda + 2\eta M^{2-p_1}$，则当 $\|w\|_2 \in [0, \frac{\varepsilon_\Lambda}{2}]$ 时，有 $\widetilde{G}(w) \geq -(\frac{\eta}{4}\varepsilon_\Lambda^2)M^{2-p_1}$；当 $\|w\|_2 = \varepsilon_\Lambda$ 时，有 $\widetilde{G}(w) \leq -(\frac{\eta}{2}\varepsilon_\Lambda^2)M^{2-p_1} < 0$；当 $\|w\|_2 = \frac{1}{2}$ 时，有 $\widetilde{G}(w) \geq (\frac{\eta}{4})M^{2-p_1} > 0$。

证明。 根据 λ 的选取，我们可知

$$\widetilde{G}(w) = M^{2-p_1}\left(-\eta\|w\|_2^2 + M^{p_1}\int_\Omega F(M^{-1}w)\,\mathrm{d}x\right). \tag{3.33}$$

根据引理 3.5，存在一个常数 C，它依赖于 Ω，使得对任意 $r \geq 2$ 以及任意 $w \in K_\Lambda$，

$$\|w\|_r \leq C\Lambda^d\|w\|_2. \tag{3.34}$$

因此，当 $\|w\|_2 \leq 1$ 且 $M > 1$时，我们知道

$$\begin{aligned} M^{p_1}\int_\Omega F(M^{-1}w)\,\mathrm{d}x &\leq C_1M^{p_1}\left(M^{-p_1}\|w\|_{p_1}^{p_1} + M^{-p_2}\|w\|_{p_2}^{p_2} + \cdots + M^{-p_k}\|w\|_{p_k}^{p_k}\right) \\ &\leq C_1M^{p_1}\Lambda^{dp_k}\left(M^{-p_1}\|w\|_2^{p_1} + M^{-p_2}\|w\|_2^{p_2} + \cdots + M^{-p_k}\|w\|_2^{p_k}\right) \\ &\leq C_1M^{p_1}\Lambda^{dp_k}\left(M^{-p_1}\|w\|_2^{p_1}\right) = C_1\Lambda^{dp_k}\|w\|_2^{p_1}, \end{aligned} \tag{3.35}$$

其中常数 $C_1 > 1$ 随行变化，但仅依赖于 Ω p_1， p_k， b。此外，根据假设 2.1，我们有

$$M^{p_1}\int_\Omega F(M^{-1}w)\,\mathrm{d}x \geq b_0\int_\Omega |w|^{p_1}\,\mathrm{d}x \geq C_2\|w\|_2^{p_1}, \tag{3.36}$$

根据 H¨older 不等式，存在一个依赖于 b_0 的常数 $C_2 < 1$，Ω。结合这两个不等式，可得

$$M^{2-p_1}\|w\|_2^2\left(-\eta + C_2\|w\|_2^{p_1-2}\right) \leq \widetilde{G}(w) \leq M^{2-p_1}\|w\|_2^2\left(-\eta + C_1\Lambda^{dp_k}\|w\|_2^{p_1-2}\right). \tag{3.37}$$

现在我们取

$$\eta = \frac{C_2}{2^{p_1-1}} < 1. \tag{3.38}$$

当 $\|w\|_2 = \frac{1}{2}$、$-\eta + C_2\|w\|_2^{p_1-2} = \eta$，从而 $\widetilde{G}(w) \geq (\frac{\eta}{4})M^{2-p_1} > 0$。接下来，我们选择 e

$$\varepsilon_\Lambda = \left(\frac{\eta}{2C_1\Lambda^{dp_k}}\right)^{1/(p_1-2)}. \tag{3.39}$$

当 $\|w\|_2 = \varepsilon_\Lambda$，$-\eta + C_1\Lambda^{dp_k}\|w\|_2^{p_1-2} \leq -\eta + \frac{\eta}{2} = -\frac{\eta}{2}$，从而 $\widetilde{G}(w) \leq -(\frac{\eta}{2}\varepsilon_\Lambda^2)M^{2-p_1} < 0$。最后，当 $\|w\|_2 \in [0, \frac{\varepsilon_\Lambda}{2}]$，(3.37) 表明 $\widetilde{G}(w) \geq -\eta\|w\|_2^2M^{2-p_1} \geq -(\frac{\eta}{4}\varepsilon_\Lambda^2)M^{2-p_1}$。□

引理 3.7. 采用引理 *3.1* 的假设。存在常数 C 依赖于Ω p_1、p_k、b，使得对任意 $w \in K_\Lambda$ 满足 $\|w\|_2 \leq 1$，

$$|\widetilde{R}(w)| \leq C\Lambda^{dp_k}\left(\|\widetilde{\phi}_\lambda(w)\|_V^2 + M^{2-p_1}\|\widetilde{\phi}_\lambda(w)\|_V\right). \tag{3.40}$$

˜证明。 首先，由于 $|\lambda - \Lambda| \leq 1$，在 $R(w)$ 中，

$$\left|\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla\widetilde{\phi}_\lambda(w)|^2 - \frac{\lambda}{2}(\widetilde{\phi}_\lambda(w))^2\mathrm{d}x\right| \leq C\Lambda\|\widetilde{\phi}_\lambda(w)\|_V^2, \tag{3.41}$$

根据定义 2.5和庞加莱´不等式，其中 C 仅依赖于 Ω。接下来，我们考虑非线性项

$$M^2\int_\Omega \left[F(M^{-1}(w + \widetilde{\phi}_\lambda(w))) - F(M^{-1}w)\right]\,\mathrm{d}x. \tag{3.42}$$

根据中值定理，存在某个 $\theta \in (0,1)$ 和 $\zeta = w + \theta\phi_\lambda(w)$，并且有

$$\begin{aligned} &\left|F(M^{-1}(w+\widetilde{\phi}_\lambda(w))) - F(M^{-1}w)\right| \le \left|f(M^{-1}\zeta)\right| \left|M^{-1}\widetilde{\phi}_\lambda(w)\right| \\ &\le C\left[|M^{-1}\zeta|^{p_1-1} + |M^{-1}\zeta|^{p_k-1}\right] M^{-1}|\widetilde{\phi}_\lambda(w)| \\ &\le C\left[|w|^{p_1-1} + |w|^{p_k-1} + |\widetilde{\phi}_\lambda(w)|^{p_1-1} + |\widetilde{\phi}_\lambda(w)|^{p_k-1}\right] M^{-p_1}|\widetilde{\phi}_\lambda(w)|, \end{aligned} \tag{3.43}$$

利用注记 2.4，其中 C 取决于 b，p_1，p_k。我们分别估计上述各项。由 H¨older 不等式和 (3.34)，

$$\int_\Omega |w|^{p_1-1}|\widetilde{\phi}_\lambda(w)|\mathrm{d}x \le \|w\|_{\frac{(p_1-1)q}{q-1}}^{p_1-1}\|\widetilde{\phi}_\lambda(w)\|_q \le C\Lambda^{dp_1}\|w\|_2^{p_1-1}\|\widetilde{\phi}_\lambda(w)\|_q = C\Lambda^{dp_1}\|\widetilde{\phi}_\lambda(w)\|_q, \tag{3.44}$$

其中 C 仅取决于 Ω。类似地，我们可以得到 $\int_\Omega |w|^{p_k-1}|\widetilde{\phi}_\lambda(w)|\mathrm{d}x \le C\Lambda^{dp_k}\|\widetilde{\phi}_\lambda(w)\|_q$，其中某个 C 仅取决于 Ω。对于另外两项，由于 $p_1 < p_k < q$，由 H¨older 不等式可知，$\|\phi_\lambda(w)\|_{p_1}^{p_1} \le C\|\phi_\lambda(w)\|_q^{p_1} \le C\|\phi_\lambda(w)\|_q$，因为 $\|\phi_\lambda(w)\|_V < 1$，如引理 3.1 所示。类似地，$\|\phi_\lambda(w)\|_{p_k}^{p_k} \le C\|\phi_\lambda(w)\|_q$。结合上述估计，我们得到

$$M^2\int_\Omega \left[F(M^{-1}(w+\widetilde{\phi}_\lambda(w))) - F(M^{-1}w)\right]\,\mathrm{d}x \le CM^{2-p_1}\Lambda^{dp_k}\|\widetilde{\phi}_\lambda(w)\|_q \le CM^{2-p_1}\Lambda^{dp_k}\|\widetilde{\phi}_\lambda(w)\|_V, \tag{3.45}$$

其中 C 取决于 b，p_1，p_k，Ω。

□

引理 3.2 的证明。首先，由 (3.34) 以及 $\|w\|^2 = \Lambda\|w\|_2^2$ 这一事实，存在一个取决于 Ω 的常数 C，使得对任意 $w \in K_\Lambda$，都有 $\|w\|_V \le C\Lambda^d\|w\|_2$。因此，当 $\|w\|_2 \le 1$ 时，$\|w\|_V \le C\Lambda^d$，并且我们在引理 3.1 中选择参数 $W = C\Lambda^d$。由引理 3.1 可知，$\|\widetilde{\phi}_\lambda(w)\|_V \le C'M^{2-p_1}$，其中某个 C' 取决于 Λ、Ω p_1、p_k、b、b_0，当 $M > (C')^{\frac{1}{p_1-2}}$ 时成立。因此，由引理 3.7 可得，$|\widetilde{R}(w)| \le C\Lambda^{dp_k}M^{4-2p_1}$，其中某个 C 取决于 Ω p_1、p_k、b。由引理3.6可知，若进一步假设 $C\Lambda^{dp_k}M^{2-p_1} < \frac{\eta}{8}\varepsilon_\Lambda^2$，则有 $|\widetilde{R}(w)| < (\frac{\eta}{8}\varepsilon_\Lambda^2)M^{2-p_1}$。因此，当 $\|w\|_2 \in [0, \frac{\varepsilon_\Lambda}{2}]$ 时，我们有，

$$\widetilde{J}(w) \ge \widetilde{G}(w) - |\widetilde{R}(w)| > \widetilde{G}(w) - \left(\frac{\eta}{8}\varepsilon_\Lambda^2\right)M^{2-p_1} \ge -\left(\frac{3\eta}{8}\varepsilon_\Lambda^2\right)M^{2-p_1}, \tag{3.46}$$

当 $\|w\|_2 = \varepsilon_\Lambda$ 时，

$$\widetilde{J}(w) \le \widetilde{G}(w) + |\widetilde{R}(w)| < \widetilde{G}(w) + \left(\frac{\eta}{8}\varepsilon_\Lambda^2\right)M^{2-p_1} \le -\left(\frac{3\eta}{8}\varepsilon_\Lambda^2\right)M^{2-p_1} < 0, \tag{3.47}$$

并且当 $\|w\|_2 = \frac{1}{2}$ 时，

$$\widetilde{J}(w) \ge \widetilde{G}(w) - |\widetilde{R}(w)| \ge \widetilde{G}(w) - \left(\frac{\eta}{8}\right)M^{2-p_1} \ge \left(\frac{\eta}{8}\right)M^{2-p_1} > 0. \tag{3.48}$$

上述三个不等式表明

$$\min_{\|w\|_2\in[0,\frac{\varepsilon_\Lambda}{2}]}\widetilde{J}(w) > \min_{\|w\|_2=\varepsilon_\Lambda}\widetilde{J}(w), \text{ and } \min_{\|w\|_2=\frac{1}{2}}\widetilde{J}(w) > \min_{\|w\|_2=\varepsilon_\Lambda}\widetilde{J}(w). \tag{3.49}$$

因此，在 $w \in K_\Lambda$ 且 $\|w\|_2 \le \frac{1}{2}$ 的定义域内，$\widetilde{J}(w)$ 必须在满足 $\widetilde{w}_\lambda \in K_\Lambda$ 的某个 $\|\widetilde{w}_\lambda\|_2 \in (\frac{\varepsilon_\Lambda}{2}, \frac{1}{2})$ 的点处取得其最小值。因此，该 $\widetilde{w}_\lambda$ 是能量泛函的一个临界点 $J(w)$。根据引理 3.4，函数 $\widetilde{u} = \widetilde{w}_\lambda + \phi_\lambda(\widetilde{w}_\lambda)$ 是方程（3.1）的一个解。□

3.3. 定理 1.2 的证明。由引理 3.1 和引理 3.2 可知，对于每个 $M > C'_\Lambda$ （取决于 Λ、Ω p_1、p_k、b、b_0）充分大的情形，我们得到 $\lambda = \Lambda + 2\eta M^{2-p_1}$，满足 $|\lambda - \Lambda| = 2\eta M^{2-p_1} < \delta_\Lambda$；一个函数 $\widetilde{w}_\lambda \in K_\Lambda$，满足 $\|\widetilde{w}_\lambda\|_2^2 \in (\varepsilon_\Lambda/2, 1/2)$；以及 $\widetilde{\phi}_\lambda = \widetilde{\phi}_\lambda(\widetilde{w}_\lambda) \in K_\Lambda^\perp \cap V$，满足 $\|\widetilde{\phi}_\lambda\|_V \le M^{2-p_1}(C'_\Lambda)^{p_1-2}$，使得 $\widetilde{u} = \widetilde{w}_\lambda + \widetilde{\phi}_\lambda$ 是重标度方程 (3.1) 的解，且 $\widetilde{\phi}_\lambda \perp \widetilde{w}_\lambda$ 属于 $H_0^1(\Omega)$。令 $u_\lambda = \widetilde{u}/M$，即可得到方程 (1.1) 的一个解。此外，我们看到

$$M = \left(\frac{2\eta}{\lambda - \Lambda}\right)^{\frac{1}{p_1-2}}. \tag{3.50}$$

Set

$$w_\lambda = \widetilde{w}_\lambda \cdot (2\eta)^{-\frac{1}{p_1-2}}, \quad \phi_\lambda = \widetilde{\phi}_\lambda \cdot (2\eta)^{-\frac{1}{p_1-2}}, \tag{3.51}$$

由此可见，$u_\lambda = (\lambda - \Lambda)^{\frac{1}{p_1-2}}(w_\lambda + \phi_\lambda)$。因此，我们可以根据引理3.2的结论得到这些常数 α，β，κ，γ_Λ。

4. Proof of Theorem 1.3

首先，我们回顾单位球 $\Omega = B_1 \subseteq \mathbb{R}^d (d \ge 2)$ 上狄利克雷拉普拉斯特征函数的一些基本事实。例如，参见 [9], 第五章中的 §5 或 [28,37]。我们定义记号 $D := \frac{d}{2} - 1$ 和 $\nu := n + D$。对于任意 $\mu \ge 0$，我们用 $J_\mu(s)$ 表示 μ 阶第一类贝塞尔函数，并用 $J'_\mu(s)$ 表示其导数。对于任意 $\mu \ge 0$，记 j_μ 为 $J_\mu(s)$ 的第一个正根，并记 j'_μ 为 $J'_\mu(s)$ 的第一个正根。也就是说，

$$j_\mu := \sup\{t \mid J_\mu(s) \ne 0 \text{ for any } s \in (0,t),\ t > 0\}, \tag{4.1}$$

类似地，我们定义 j'_μ。

则下列函数构成$\Omega = B_1$上特征值为Λ_n 的狄利克雷拉普拉斯算子特征函数的一组基：$= j_\nu^2$

$$w_{n,m}(x) := r^{-D} J_\nu(j_\nu r) Y_{n,m}(\theta),\ 0 < r \le 1,\ \theta \in \mathbb{S}^{d-1},\ n \in \mathbb{Z}_{\ge 0},\ 1 \le m \le N_n, \tag{4.2}$$

特征值为 Λ_n，即$\Delta w_{n,m} + \Lambda_n w_{n,m} = 0$，其中我们对 $x = (r,\theta) \in \mathbb{R}^d$使用了球坐标，且$Y_{n,m}(\theta)$是次数为 n的球谐函数，即$\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_{n,m} + n(n+d-2) Y_{n,m} = 0$，并满足$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_{n,m}^2 (\theta) \mathrm{d}\theta = 1$。这里，$\{Y_{n,m}\}_{m=1}^{N_n}$ 构成球面 $\mathbb{S}^{d-1}$上次数为 n 的球谐函数的标准正交基，而 $N_n = \binom{n+d-1}{d-1} - \binom{n+d-3}{d-1}$ 是该线性空间的维数。$\{w_{n,m}\}_{m=1}^{N_n}$ 进而构成单位球$\Omega = B_1$上特征值为 Λ_n 的狄利克雷特征函数的一组正交基，因此 $K_{\Lambda_n} = \mathrm{Span}\{w_{n,m}\}_{m=1}^{N_n}$。对于任意 $w \in K_{\Lambda_n}$，存在唯一的$a = (a_1, a_2, \dots, a_{N_n}) \in \mathbb{R}^{N_n}$，使得

$$w = \sum_{m=1}^{N_n} a_m w_{n,m} = r^{-D} J_\nu(j_\nu r) \sum_{m=1}^{N_n} a_m Y_{n,m}(\theta). \tag{4.3}$$

我们记 $Y(\theta) := \sum_{m=1}^{N_n} a_m Y_{n,m}(\theta)$，因此 $w = r^{-D} J_\nu(j_\nu r) Y(\theta)$。为简化记号，在以下引理和证明中，我们假设 $w \in K_{\Lambda_n}$ and 满足$\|a\|_2^2 = \sum_{m=1}^{N_n} a_m^2 = 1$。因此，$\|Y\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 = \sum_{m=1}^{N_n} a_m^2 = 1$。

在以下证明中，当我们说 ν 足够大时，意思是 ν 大于某个较大的通用常数。

引理 4.1. 对于任意 $s \ge 0$,

$$\begin{aligned}\int_{B_s} |\nabla w(x)|^2 \mathrm{d}x = {} & \frac{j_\nu^2 s^2 - \nu^2}{2} J_\nu^2(j_\nu s) + \frac{j_\nu^2 s^2}{2} \left(J'_\nu(j_\nu s)\right)^2 \\ & + \left(-D J_\nu(j_\nu s) + j_\nu s J'_\nu(j_\nu s)\right) J_\nu(j_\nu s).\end{aligned} \tag{4.4}$$

引理 *4.1* 的证明。 记 $R(r) = r^{-D}J_\nu(j_\nu r)$，于是可得 $w = R(r)Y(\theta)$ 。通过分部积分，

$$\int_{B_s} |\nabla w|^2 \mathrm{d}x = -\int_{B_s} w\Delta w \mathrm{d}x + \int_{\partial B_s} w\partial_r w \mathrm{d}\sigma(x). \tag{4.5}$$

第一项是 $j_\nu^2 \int_{B_s} w^2 \mathrm{d}x$。此外，$\int_{B_s} w^2 \mathrm{d}x = \int_0^s r^{d-1}R(r)^2 \mathrm{d}r = \int_0^s rJ_\nu(j_\nu r)^2 \mathrm{d}r$，因为 $d-1-2D = 1$。边界项为

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} [R(s)Y_{n,m}(\theta)][R'(s)Y_{n,m}(\theta)]s^{d-1}\mathrm{d}\theta = s^{d-1}R(s)R'(s)\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_{n,m}^2(\theta)\mathrm{d}\theta = s^{d-1}R(s)R'(s). \tag{4.6}$$

现在，由于 $R'(s) = -Ds^{-D-1}J_\nu(\lambda s) + s^{-D}\lambda J'_\nu(\lambda s)$，边界项变为

$$s^{d-1}R(s)R'(s) = -DJ_\nu(\lambda s)^2 + \lambda s J_\nu(\lambda s)J'_\nu(\lambda s), \tag{4.7}$$

因为 $d-1-2D = 1$。因此，

$$\int_{B_s} |\nabla w|^2 \, dx = j_\nu^2 \int_0^s rJ_\nu(j_\nu r)^2 \mathrm{d}r + j_\nu s J_\nu(j_\nu s)J'_\nu(j_\nu s) - DJ_\nu^2(j_\nu s). \tag{4.8}$$

根据 Lommel 积分（例如，见第 5 章 [50] 中的第 5.11 节公式 (11)，或 [28]中的引理 5.4），

$$j_\nu^2 \int_0^s rJ_\nu(\lambda r)^2 \mathrm{d}r = \int_0^{j_\nu s} rJ_\nu(r)^2 \mathrm{d}r = \frac{j_\nu^2 s^2 - (\nu)^2}{2} J_\nu^2(j_\nu s) + \frac{j_\nu^2 s^2}{2}\left(J'_\nu(j_\nu s)\right)^2. \tag{4.9}$$

引理 4.1的证明至此完成。 □

接下来，我们需要以下与 j_μ 和 j'_μ相关的显式渐近式。见 [1] 第 9.5 节中的公式 (9.5.14)、公式 (9.5.16)、公式 (9.5.18)，或 [37] 附录 A，或[26] 中的公式 (30)，以得到以下引理 4.2。

引理 4.2 (第 9.5 节，见 [1])。 对于任意 $\mu \geq 0$ 充分大时，

$$\mu + (1.855)\cdot\mu^{\frac{1}{3}} < j_\mu < \mu + (1.856)\cdot\mu^{\frac{1}{3}}, \tag{4.10}$$

and

$$\mu + (0.808)\cdot\mu^{\frac{1}{3}} < j'_\mu < \mu + (0.809)\cdot\mu^{\frac{1}{3}}, \tag{4.11}$$

and

$$(-1.114)\cdot\mu^{-\frac{2}{3}} < J'_\mu(j_\mu) < (-1.113)\cdot\mu^{-\frac{2}{3}}, \tag{4.12}$$

and

$$(0.674)\cdot\mu^{-\frac{1}{3}} < J_\mu(j'_\mu) < (0.675)\cdot\mu^{-\frac{1}{3}}. \tag{4.13}$$

引理 4.3。 对于任意 $\mu \geq 0$ 充分大时，

$$0 < J_\mu(\mu - \mu^{\frac{2}{3}}) < 2^{-\frac{1}{3}}\mu^{\frac{1}{3}}, \tag{4.14}$$

and

$$\left|J'_\mu(\mu - \mu^{\frac{2}{3}})\right| < \mu^{-\frac{1}{2}}2^{-\frac{1}{3}}\mu^{\frac{1}{3}}. \tag{4.15}$$

证明。 (4.14) 已在 [37] 或 [27], 中的引理 A.1 中证明，因此我们省略其证明。对于 (4.15)，根据 [50](或 [46] 和 [15]中的第 8 章第 8.5 节的公式 (10) 以及第 10.14 节)，对于任意 $0 < x \leq 1$,

$$\left|J'_\mu(\mu x)\right| \leq \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}x^\mu e^{\mu\sqrt{1-x^2}}}{x\sqrt{(2\pi\mu)}(1+\sqrt{1-x^2})^\mu}. \tag{4.16}$$

在 4.14) 的证明中， [27]可知，对于任意 $\varepsilon \in (0, 23)$ 以及任意 $x \in (0, 1-\mu^{\varepsilon-\frac{2}{3}})$,

$$\frac{x^{\mu} e^{\mu\sqrt{1-x^2}}}{(1+\sqrt{1-x^2})^{\mu}} < 2^{-\frac{\mu^{\varepsilon}}{3}}. \tag{4.17}$$

特别地，取 $\varepsilon = \frac{1}{3}$和 $x = 1-\mu^{-\frac{1}{3}}$，我们看到土述不等式的右端为 $2^{-\frac{1}{3}\mu^{\frac{1}{3}}}$。此外，当 μ足够大时， x接近于 1, 因此 $\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}{x\sqrt{(2\pi\mu)}} < \mu^{-\frac{1}{2}})$ 。这证明了（4.15）。 □

引理 4.4。 当 ν 足够大时，对于任意 $m \in [\![1, N_n]\!]$,

$$\frac{1}{2}\nu^{-\frac{4}{3}} \leq \int_{B_1} |w(x)|^2 \mathrm{d}x = j_{\nu}^{-2} \int_{B_1} |\nabla w(x)|^2 \mathrm{d}x \leq \nu^{-\frac{4}{3}}. \tag{4.18}$$

此外，令 $\zeta_n = j_{\nu}^{-1}(\nu - \nu^{\frac{2}{3}}) < 1$，则当 ν足够大时，

$$\int_{B_{\zeta_n}} |\nabla w(x)|^2 \mathrm{d}x < 2^{-\frac{1}{3}\nu^{\frac{1}{3}}}. \tag{4.19}$$

证明。 由引理 4.1，由于 $J_{\nu}(j_{\nu}) = 0$，我们首先看到

$$\int_{B_1} |\nabla w(x)|^2 \mathrm{d}x = \frac{j_{\nu}^2}{2} \left(J_{\nu}'(j_{\nu})\right)^2. \tag{4.20}$$

由引理 4.2，我们看到 $\nu^{-\frac{4}{3}} \leq (J_{\nu}'(j_{\nu}))^2 \leq 2\nu^{-\frac{4}{3}}$以及 $j_{\nu} > \nu$。由于 w是特征值为 $\Lambda_n = j_{\nu}^2$ 的拉普拉斯特征函数，即 $\Delta w + j_{\nu}^2 w = 0$，我们进行分部积分，得到

$$\int_{B_1} |w(x)|^2 \mathrm{d}x = j_{\nu}^{-2} \int_{B_1} |\nabla w(x)|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(J_{\nu}'(j_{\nu}))^2 \in \left[\frac{1}{2}\nu^{-\frac{4}{3}}, \nu^{-\frac{4}{3}}\right]. \tag{4.21}$$

接下来，我们估计 $\int_{B_{\zeta_n}} |\nabla w(x)|^2 \mathrm{d}x$ 在 ν充分大时的情形。根据引理 4.1，我们分别估计这三项。首先，根据引理4.3，当 ν 充分大时，

$$\frac{j_{\nu}^2\zeta_n^2 - \nu^2}{2} J_{\nu}^2(j_{\nu}\zeta_n) = \frac{-2\nu^{\frac{5}{3}} + \nu^{\frac{4}{3}}}{2} J_{\nu}^2(\nu - \nu^{\frac{2}{3}}) \leq \nu^{\frac{4}{3}} 2^{-\frac{2}{3}\nu^{\frac{1}{3}}} < 2^{-\frac{1}{2}\nu^{\frac{1}{3}}}. \tag{4.22}$$

接下来,

$$\frac{j_{\nu}^2\zeta_n^2}{2} \left(J_{\nu}'(j_{\nu}\zeta_n)\right)^2 = \frac{(\nu-\nu^{\frac{2}{3}})^2}{2} \left(J_{\nu}'(\nu-\nu^{\frac{2}{3}})\right)^2 \leq \nu^2 \cdot \nu^{-1} 2^{-\frac{2}{3}\nu^{\frac{1}{3}}} < 2^{-\frac{1}{2}\nu^{\frac{1}{3}}}. \tag{4.23}$$

最后，由于 $-DJ_{\nu}^2(j_{\nu}\zeta_n) \leq 0$,

$$\begin{aligned} &\left(-DJ_{\nu}(j_{\nu}\zeta_n) + j_{\nu}\zeta_n J_{\nu}'(j_{\nu}\zeta_n)\right) J_{\nu}(j_{\nu}\zeta_n) \leq (\nu-\nu^{\frac{2}{3}}) J_{\nu}'(\nu-\nu^{\frac{2}{3}}) J_{\nu}(\nu-\nu^{\frac{2}{3}}) \\ &\leq \nu \cdot \nu^{-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{2}{3}\nu^{\frac{1}{3}}} < 2^{-\frac{1}{2}\nu^{\frac{1}{3}}}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

因此，当 ν 充分大时，我们有

$$\int_{B_{\zeta_n}} |\nabla w(x)|^2 \mathrm{d}x \leq 3 \cdot 2^{-\frac{1}{2}\nu^{\frac{1}{3}}} < 2^{-\frac{1}{3}\nu^{\frac{1}{3}}}. \tag{4.25}$$

□

在引理 4.4中，由于 $\zeta_n \to 1^-$ 当 $n \to +\infty$时，引理 4.4 已经展示了 w的狄利克雷能量的耳语廊模式。接下来，我们为 L^p-范数构建 w的类似结果，这些结果与 [37]相似。我们需要以下关于贝塞尔函数的引理。另请参见 [1]中的方程 (9.1.62)，或 [15]中的方程 (10.14.4)，以了解引理 4.5。

引理 4.5。对于任意 $x \in \mathbb{R}$,

$$|J_\nu(x)| \leq \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \tag{4.26}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$是伽马函数。

引理 4.6。固定 $p \geq 2$，并令 $\zeta_n = j_\nu^{-1}(\nu - \nu^{\frac{2}{3}}) < 1$。当 ν足够大时（取决于 d），对于任意 $m \in [\![1, N_n]\!]$，我们有

$$\int_{B_{\zeta_n}} |w(x)|^p \mathrm{d}x \leq 2^{-\frac{1}{6}\nu^{\frac{1}{3}}\cdot p}. \tag{4.27}$$

证明。对于任意 $s \geq 0$，我们首先看到

$$\int_{B_s} |w(x)|^p \mathrm{d}x = \int_0^s r^{d-1-pD} |J_\nu(j_\nu r)|^p \mathrm{d}r \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |Y(\theta)|^p \mathrm{d}\theta. \tag{4.28}$$

我们首先计算 $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |Y(\theta)|^p \mathrm{d}\theta$。回顾 $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |Y(\theta)|^2 \mathrm{d}\theta = 1$ 以及 $\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} Y + n(n+d-2)Y = 0$。我们还注意到，$\nu^2 = n^2 + \frac{d^2}{4} + 1 + nd - 2n - d = n(n+d-2) + (\frac{d}{2}-1)^2 \geq n(n+d-2)$。利用引理3.5可得，对于某个取决于 d的 $\bar{C} > 0$，

$$\|Y\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})} \leq C\left(n(n+d-2)\right)^{\frac{d-1}{4}} \cdot \|Y\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq C\nu^{\frac{d-1}{2}}. \tag{4.29}$$

接下来，我们估计项 $\int_0^{\zeta_n} r^{d-1-pD} |J_\nu(j_\nu r)|^p \mathrm{d}r$。由引理 4.2，我们有

$$\begin{aligned} \int_0^{\zeta_n} r^{d-1-pD} |J_\nu(j_\nu r)|^p \mathrm{d}r &= j_\nu^{pD-d} \int_0^{(\nu-\nu^{\frac{2}{3}})} r^{d-1-pD} |J_\nu(r)|^p \mathrm{d}r \\ &\leq 2^{|pD-d|} \nu^{pD-d} \int_0^{(\nu-\nu^{\frac{2}{3}})} r^{d-1-pD} |J_\nu(r)|^p \mathrm{d}r, \end{aligned} \tag{4.30}$$

并将上述积分分成区间 $[0,1]$和 $[1, \nu - \nu^{\frac{2}{3}}]$上的积分。利用引理4.5，我们有

$$\begin{aligned} \nu^{pD-d} \int_0^1 r^{d-1-pD} |J_\nu(r)|^p \mathrm{d}r &= \nu^{pD-d} \int_0^1 r^{d-1} |r^{-D} J_\nu(r)|^p \mathrm{d}r \\ &\leq \nu^{pD-d} \int_0^1 \left| \frac{r^n}{2^\nu \cdot \Gamma(\nu+1)} \right|^p \mathrm{d}r \leq \frac{\nu^{pD-d}}{2^{\nu p} \cdot (\Gamma(\nu+1))^p}, \end{aligned} \tag{4.31}$$

它趋于 0 的速度比 $2^{-\nu p}$更快，因为 $\Gamma(\nu+1) \sim \nu!$，这远大于 $\nu^{D-d/p}$。由引理4.3，我们有

$$\begin{aligned} &\nu^{pD-d} \int_1^{(\nu-\nu^{\frac{2}{3}})} r^{d-1-pD} |J_\nu(r)|^p \mathrm{d}r \leq 2^{-\frac{1}{3}\nu^{\frac{1}{3}}\cdot p} \cdot \nu^{pD-d} \int_1^{(\nu-\nu^{\frac{2}{3}})} r^{d-1-pD} \mathrm{d}r \\ &= 2^{-\frac{1}{3}\nu^{\frac{1}{3}}\cdot p} \cdot \int_{\nu^{-1}}^{(1-\nu^{-\frac{1}{3}})} r^{d-1-pD} \mathrm{d}r \leq 2^{-\frac{1}{3}\nu^{\frac{1}{3}}\cdot p} \cdot \int_{\nu^{-1}}^1 r^{d-1-pD} \mathrm{d}r. \end{aligned} \tag{4.32}$$

当 $d-1-pD < 0$时，我们看到 $\int_{\nu^{-1}}^1 r^{d-1-pD} \mathrm{d}r < \nu^{pD+1-d} \int_{\nu^{-1}}^1 \mathrm{d}r < \nu^{pD+1-d}$。当 $d-1-pD \geq 0$，$\int_{\nu^{-1}}^1 r^{d-1-pD} \mathrm{d}r \leq \int_{\nu^{-1}}^1 1 \mathrm{d}r < 1$。因此，在所有这些情况下，（4.32）以至少 $2^{-\frac{1}{4}\nu^{\frac{1}{3}}\cdot p}$的阶指数快速趋于 0，当 ν足够大时（取决于 d）。结合（4.29）、（4.31）和（4.32），我们完成了引理4.6的证明。

□

定理 1.3的证明。 定理 1.3 实际上直接由引理 4.4和引理 4.6推出。为了说明定理 1.3中的确切结果，我们解释定理 1.3中的这些项。首先，由于 Ω 上的所有狄利克雷拉普拉斯算子特征函数都是（ $= B_1$ 的线性组合，因此必然存在一个 n使得 $\Lambda = \Lambda_n = j_\nu^2$。

首先，我们注意到 $\zeta_n > \bar{\tau}_n = 1 - 2\Lambda_n^{\,6} = 1 - 2j_\nu^{\,3}$当 ν 足够大时，这等价于$\nu - \nu^{\frac{2}{3}} > j_\nu - 2j_\nu^{\frac{2}{3}} \iff 2j_\nu^{\frac{2}{3}} > \nu^{\frac{2}{3}} + j_\nu - \nu$。利用引理4.2，可知当 ν足够大时，$2j_\nu^{\frac{2}{3}} > 2\nu^{\frac{2}{3}}$，且 $\nu^{\frac{2}{3}} + j_\nu - \nu < \nu^{\frac{2}{3}} + 2\nu^{\frac{1}{3}} < 2\nu^{\frac{2}{3}}$。因此， $\zeta_n > \tau_n$，引理4.4和引理4.6 的结论在将 ζ_n 替换为 τ_n后仍然成立。

由引理4.6和引理4.4可知，当 ν 足够大时，

(4.33)

$$\left(\int_{B_{\tau_n}} |w(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \le 2^{-\frac{1}{6}\nu^{\frac{1}{3}}} \le 2^{-\frac{1}{6}\nu^{\frac{1}{3}}} \cdot \left(2\nu^{\frac{4}{3}} \cdot \int_{B_1} |w(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \le 2^{-\frac{1}{8}\nu^{\frac{1}{3}}} \left(\int_{B_1} |w(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

此外，我们有 $2^{-\frac{1}{8}\nu^{\frac{1}{3}}} \le 2^{-\frac{1}{10}\Lambda_n^{\frac{1}{6}}}$当 ν足够大时成立，因为根据引理 4.2， $\nu \asymp j_\nu \asymp \Lambda_n^{\frac{1}{2}}$当 ν 足够大时成立。 - 上述不等式在对 w进行缩放时保持不变。因此，由于$\|w_\Lambda\|_2 = 1$ 对于定理 w_Λ 中的 1.3，这就证明了（1.4）中的第二个不等式。（1.4）中的第一个不等式可以用引理4.4 中的两个不等式以类似的方式证明。□

References

[1] M. Abramowitz 和 I. A. Stegun。《数学函数手册：公式、图表和数学表格》。华盛顿：美国商务部。xiv, 1046 页。（1964）。, 1964. [2] S. Agmon、A. Douglis 和 L. Nirenberg。满足一般边界条件的椭圆型偏微分方程解在边界附近的估计。i. *Communications on pure and applied mathematics*, 12 4 623 727, 1959 ( ): – . [3] R. Atre、P. K. Panigrahi 和 G. S. Agarwal。一类一维格罗斯–皮塔耶夫斯基方程的孤立波解。 *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 73(5):056611, 2006. [4] V. M. Babich 和 V. Lazutkin。集中在闭测地线附近的特征函数。 *Spectral Theory and Problems in Diffraction* 9 18, 1968 , 页码 – . [5] Bose。《普朗克定律与光量子假说》。 *Zeitschrift für Physik*, 26(1):178–181, 1924. [6] Z. Chen、J. Lu、Y. Lu 和 X. Zhang。关于 Gross–Pitaevskii 特征值问题的 Sobolev 梯度流的收敛性。 *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 62(2):667–691, 2024. [7] Z. Chen、J. Lu、Y. Lu 和 X. Zhang。Gross-Pitaevskii 特征值问题的全离散 Sobolev 梯度流。 *Mathematics of Computation*, 94(356):2723–2760, 2025. [8] S. Correia 和 M. Figueira。关于从具有任意重数的狄利克雷拉普拉斯算子的特征值处分岔的注记。 *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 30(3):37, 2023. [9] R. Courant 和 D. Hilbert。 *Methods of mathematical physics. Volume I. Transl. and rev. from the German Original.* 1 1953 1989 纽约等地：John Wiley &— Sons，第一版英文版的再版，. [10] M. G. Crandall 和 P. H. Rabinowitz。从简单特征值处分岔。 *Journal of Functional Analysis*, 8 2 321( ): –340, 1971. [11] M. G. Crandall 和 P. H. Rabinowitz。分岔、简单特征值的扰动与线性化稳定性。1973.[12] F. Dalfovo、S. Giorgini、L. P. Pitaevskii 和 S. Stringari。受限气体中玻色–爱因斯坦凝聚的理论。*Reviews of modern physics*, 71(3):463, 1999. [13] A. Delitsyn、B. Nguyen 和 D. Grebenkov。具有可变截面轮廓分支的区域中拉普拉斯特征函数的指数衰减。 *The European Physical Journal B*, 85(11):371, 2012. [14] A. L. Delitsyn、B.-T. Nguyen 和 D. S. Grebenkov。有限量子波导中的受限模态。 *The European Physical Journal B* 85 6 176, 2012 , ( ): .

[15] *NIST Digital Library of Mathematical Functions*。https://dlmf.nist.gov/，2025-08-05 的第 10 章。[16] Z. Du 和 C. Gui。非齐次 Allen–Cahn 方程的内部层。 *Journal of Differential Equations*, 249 2 215 239, 2010 ( ): – . [17] L. Duan、S. Wei 和 J. Yang。光滑有界区域上非齐次 Allen–Cahn 方程的边界界面聚集。 *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 60(2):70, 2021.

[18] A. Einstein。单原子理想气体量子理论。第二篇论文。 *Albert Einstein: Akademie-Vorträge: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1914–1932* 245 257, 2005 , 页码 – . [19] C. Even、S. Russ、V. Repain、P. Pieranski 和 B. Sapoval。分形鼓中的局域化：一项实验研究。 *Physical review letters*, 83(4):726, 1999. [20] S. F´elix、M. Asch、M. Filoche 和 B. Sapoval。不规则声学腔体中的局域化与阻尼增强。*Journal of sound and vibration*, 299(4-5):965–976, 2007. [21] D. Gilbarg 和 N. S. Trudinger。 *Elliptic partial differential equations of second order* 224 *Grundlehren* , 施普林格出版, *Math. Wiss.* 1977 Cham, . [22] D. S. Grebenkov 和 B.-T. Nguyen。拉普拉斯特征函数的几何结构。 *siam REVIEW*, 55(4):601– 667, 2013. [23] T. Harayama、P. Davis 和 K. S. Ikeda。非线性回音廊模态。 *Physical review letters* 82 19 3803, , ( ): . [24] S. M. Heilman 和 R. S. Strichartz。局域特征函数：这里能看见，那里却看不见。 *Notices of the AMS* 57 5 624 629, 2010 1999 , ( ): – . [25] D. Jakobson、N. Nadirashvili 和 J. Toth。特征函数的几何性质。 *Russian Mathematical Surveys*, 56 6 1085, 2001 ( ): . [26] J. B. Keller 和 S. Rubinow。特征值问题的渐近解。 *Annals of Physics*, 9(1):24–75, 1960. [27] P. Kr¨oger。关于欧几里得空间中凸区域的基态特征函数。 *Potential Analysis*, 5(1):103– 108, 1996. [28] O. Kuperman、Z. Lin、A. Logunov 和 D. Mangoubi。固定边界振动金属板在高频下类似于振动膜。 *In preparation*, 2026. [29] V. F. Lazutkin。构造“弹跳球”型特征函数的渐近级数。 *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova* 95 106 118, 1968 , : – . [30] V. F. Lazutkin。凸区域台球问题中焦散的存在性。 *Izvestiya* 7 1 185, 1973 *Mathematics of the USSR-* , ( ): . [31] V. F. Lazutkin。 *KAM theory and semiclassical approximations to eigenfunctions*，第 24 卷。施普林格科学与商业媒体，2012. [32] F.-H. Lin、W.-M. Ni 和 J.-C. Wei。关于奇异摄动纽曼问题的内部峰解数量。 *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences* 60 2 252 281, 2007 , ( ): – . [33] A. Malchiodi、W.-M. Ni 和 J. Wei。球上半线性纽曼问题的多重聚集层解。载于 *Annales de l'IHP Analyse non linéaire*，第 22 卷，143–163 页，2005. [34] A. Malchiodi、W.-M. Ni 和 J. Wei。Allen–Cahn 方程的边界聚集界面。 *Pacific Journal of Mathematics* 229 2 447 468, 2007 , ( ): – . [35] A. Malchiodi 和 J. Wei。Allen-Cahn 方程的边界界面。 *J. Fixed Point Theory Appl.*, 1(2):305– 336, 2007. [36] D. Mugnai 和 A. Pistoia。关于从重特征值处分岔分支的精确数目。 *arXiv preprint math/0509013* 2005 , . [37] B.-T. Nguyen 和 D. S. Grebenkov。圆形、球形和椭圆形区域中拉普拉斯特征函数的局域化。 *SIAM J. Appl. Math.*, 73(2):780–803, 2013. [38] W.-M. Ni、I. Takagi 和 J. Wei。关于奇异摄动半线性狄利克雷问题中尖峰层解的位置与轮廓：中间解。1998. [39] W.-M. Ni 和 J. Wei。关于奇异摄动半线性狄利克雷问题中尖峰层解的位置与轮廓。 *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 48(7):731–768, 1995. [40] W.-M. Ni 和 J. Wei。关于吉勒–迈因哈特系统中集中于球面上的正解。 *Journal of Differential Equations* 221 1 158 189, 2006 , ( ): – . [41] C. V. Raman 和 G. Sutherland。论回音廊现象。 *Proceedings of the Royal Society of London. Series A Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 100 705 424 428, 1922 , , ( ): – . [42] L. Rayleigh。回音廊问题。 *Scientific papers*, 5:617–620, 1912. [43] J. Rogel-Salazar。格罗斯–皮塔耶夫斯基方程与玻色–爱因斯坦凝聚体。 *European Journal of Physics*, 34 2 247, 2013( ): . [44] B. Sapoval、T. Gobron 和 A. Margolina。分形鼓的振动。 *Physical review letters*, 67(21):2974, 1991. [45] P. Sarnak。量子唯一遍历猜想的最新进展。 *Bulletin of the American Mathematical Society* 48 2 211 228, 2011 , ( ): – . [46] K. M. Siegel。一个涉及阶数近似相等的自变量贝塞尔函数的不等式。载于 *Proc. Amer. Math. Soc* 4, 858 859, 1953 , 卷，页码 – . [47] H. F. Smith 和 C. D. Sogge。关于带边界紧流形上谱簇的 L^p 范数。 *Acta Math.* 198 1 107 153, 2007 , ( ): – .

[48] C. D. Sogge. 关于紧流形上二阶椭圆算子的谱簇 L^p 范数。*J. Funct. Anal.*，77(1):123–138，1988年。[49] N. B. Thanh。 *Localization of Laplacian Eigenfunctions in Simple and Irregular Domains*。博士论文，巴黎综合理工学院X，2012年。[50] G. N. Watson。 *A treatise on the theory of Bessel functions.* 剑桥数学丛书。剑桥：剑桥大学出版社，第二版，1995。（ZL）Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, 77 Massachusetts Ave,02139 Cambridge MA, USA*Email address*: linzj@mit.edu