arXiv:2603.02469v1 [math.CO] 2 Mar 2026

固定角 arccos(1/(1 + 2√2)) 下等角直线的分类

Theodore Gossett* Zilin Jiang*, † Adam Teets‡ Zoe Wellner*,

摘要

我们确定了在 d 维欧几里得空间中，固定角 arccos α、 $\alpha = 1/(1 + 2\sqrt{2})$ 条件下等角直线的最大数量 $N_\alpha(d)$：当 $d \in \{2, \ldots, 14\}$ 时，最大数量分别为 2，3，4，6，8，10，14，15，16，17，18，20，22；当 $d \geq 15$ 时，最大数量为 max(24，$\lfloor 3(d-1)/2 \rfloor$)。这似乎是自 Lemmens 和 Seidel 于 1973年 对 $\alpha = 1/3$ 的研究以来，首次在所有维数 d 中完整确定固定非平凡 α 下的 $N_\alpha(d)$。

1 引言

在维数为 d的欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$ 中，过原点的一组直线若任意两条形成相同的角，则称为等角的。确定 $\mathbb{R}^d$中等角直线系的最大基数 $N(d)$这一问题，由 van Lint 和 Seidel [20] 于1966年正式提出，被认为是代数图论的基础问题之一。 $N(d)$的精确值仅对有限多个 d得到了确定。经过数十年的研究，关于 $d \leq 43$ 的研究现状总结如下。

d	2	3–4	5	6	7–14	15	16	17	18	19	20	21	22	23–41	42	43
$N(d)$	3	6	10	16	28	36	40	48	57–59	72–74	90–94	126	176	276	276–288	344

这张表有着悠久的历史。1948年，Haantjes [14]确定了 $N(3) = 6$和 $N(4) = 6$—— $\mathbb{R}^3$ 中的最优构型由正二十面体的6条对角线给出。后来，van Lint 和 Seidel [20]确定了 $N(d)$，其中 $d \in \{5, 6, 7\}$。Lemmens 和 Seidel [17]确定了 $N(d)$，其中$d \in \{15, 21, 22, 23\}$；他们在研究中还提到了 Asche 和 Taylor 的构造，意味着 $N(19) \geq 72$ 和 $N(20) \geq 90$。此后四十多年，研究进展停滞不前。Greaves,

*亚利桑那州立大学数学与统计科学学院，美国亚利桑那州坦佩市，邮编 85281。电子邮件：{tgossett, zilinj, zwellner}@asu.edu。

†亚利桑那州立大学计算与增强智能学院，美国亚利桑那州坦佩市，邮编 85281。部分经费由西蒙斯基金会通过其数学家旅行资助计划提供，并由美国纳税人通过美国国家科学基金会项目编号 2451581 提供。

‡汉密尔顿高中，美国亚利桑那州钱德勒市，邮编 85248。电子邮件：adamteets127@gmail.com

Koolen、Munemasa 和 Szöllősi [9]改进了关于 $N(14)$ 和 $N(16)$的两个长期未能突破的上界；Barg 和 Yu [3]确定了 $N(d)$，适用于每个 $d \in \{24, \ldots, 41\}$，并且 $N(43) = 344$，但 $N(42)$的问题仍未解决，其中 $276 \leq N(42) \leq 288$。近年来，关于 $N(d)$的研究一直十分活跃：Greaves 和 Yatsyna [13] 改进了上界 $N(17) \leq 49$；Greaves、Syatriadi 和 Yatsyna 在随后发表的两篇论文中 [11, 12]确定了 $N(14) = 28$、 $N(16) = 40$和 $N(17) = 48$，并将界改进至 $N(18) \geq 57$、 $N(19) \leq 74$和 $N(20) \leq 94$；最近，Greaves 和 Syatriadi [10] 改进了上界 $N(18) \leq 59$。

确定在公共角为 $\arccos \alpha$ 的情况下， $\mathbb{R}^d$ 中等角直线的最大数量 $N_\alpha(d)$ 这一问题，最早由 Lemmens 和 Seidel [17] 于 1973年 提出。他们确定，当 $d \in \{2, \ldots, 6\}$ 时， $N_{1/3}(d)$ 等于 2，4，6，10，16；当 $d \geq 7$ 时，则为 $\max(28, 2(d-1))$。他们还猜想，对于 $d \geq 23$，$N_{1/5}(d) = \max(276, \lfloor 3(d-1)/2 \rfloor)$。这一猜想最近由 Cao、Koolen、Lin 和 Yu [5] 解决。当 $2 \leq d \leq 22$ 时，已知结果如下。

d	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$N_{1/5}(d)$	2	3	4	6	7	9	10	12	16	18	20	26	28	36	40	48	57–59	72–74	90–94	126	176

在上表中，Greaves、Koolen、Munemasa 和 Szöllősi [9] 确定了 $d \in \{2, \ldots, 11\} \cup \{13\}$时的 $N(d)$ $N_{1/5}(d)$，而 Szöllősi 和 Östergård [19] 确定了 $d = 12$时的该值。已知的关于 $N(d)$ 和 $N_{1/5}(d)$ 的结果在 $d \in \{14, \ldots, 41\}$ 时一致，这并非巧合——这是因为 [17,定理 3.7] 断言，对于 $d \leq 48$， $N(d) \leq \max(N_{1/3}(d)\ N_{1/5}(d)\ \lfloor 48d/(49-d) \rfloor)$。

近期的研究 [4, 2, 15] 最终促成了 Jiang、Tidor、Yao、Zhang 和 Zhao 对高维情形下确定 $N_\alpha(d)$ 问题的解决方案 [16] 。具体而言，他们证明，对每个整数 $k \geq 2$，当 d 充分大时，

$$N_{\alpha^*}(d) = \lfloor 3(d-1)/2 \rfloor \text{ and } N_{1/(2k-1)}(d) = \lfloor kd/(k-1) \rfloor.$$

在本文中，我们始终固定常数

$$\alpha^* = \frac{1}{1+2\sqrt{2}}.$$

关于相关结果的精确表述以及其与图的特征值重数之间的联系，读者可参阅 Zhao 的精彩综述 [22] [16] 。

鉴于 α^* 介于 $1/3$ 和 $1/5$之间，我们或许可以先确定所有维数d 下的 N_{α^*}（d），再着手处理 $N_{1/5}$（d）。事实上，我们解决了这个问题。

定理1.1。 在 d 维欧氏空间中，固定角为 $\arccos(\alpha^*)$ 的等角直线的最大数量满足

$$N_{\alpha^*}(d) = \begin{cases} 2, 3, 4, 6, 8, 10, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 22 & \text{for } d \in \{2, \ldots, 14\}, \\ \max(24, \lfloor 3(d-1)/2 \rfloor) & \text{for } d \geq 15. \end{cases}$$

我们以尽可能强的形式证明主定理——对于所有 d，我们对 $\mathbb{R}^d$ 中固定角为 arccos(α^*) 的等角直线系进行分类，分类结果以正交变换为准。为了陈述分类定理，我们回顾等角直线、图及其 Seidel 矩阵之间的联系。图 G 的 ***Seidel*** 矩阵 记为 $S(G)$，定义为 $J - I - 2A(G)$，其中 $A(G)$ 是 G 的邻接矩阵，而 G 的最小 ***Seidel*** 特征值 是 $S(G)$ 的最小特征值。

van Lint 和 Seidel [20] 指出，将固定角为 $\arccos \alpha$ 的等角直线系按正交变换分类，等价于将最小 Seidel 特征值至少为 $-1/\alpha$ 的图按切换等价 分类（参见 [8, 第 11]章）。

定义 1.2（切换等价）。 给定一个图 G 和一个子集 $U \subseteq V(G)$，关于 U对 G进行切换，记作 G^U，是指通过切换 U中的每个顶点与 $V(G)$中的每个顶点之间的邻接关系，从 G得到的图 $\setminus U$。若存在 $U \subseteq V(G)$，使得 H与 G^U同构，则两个图 G和 H称为切换等价 。

为了描述大多数最小 Seidel 特征值至少为 $-1/\alpha^*$的图，我们引入以下概念。本文中的所有子图均指诱导子图。

定义 1.3（切换闭包）。 给定一个图族 $\mathcal{G}$，其切换闭包记作 $\langle \mathcal{G} \rangle_{\pm}$，是包含 $\mathcal{G}$ 中每个成员，且在取子图、顶点不交并和切换等价运算下封闭的最小图类。

在第 2 节中，我们指出一个简单的事实：$\langle \text{樱} \rangle_{\pm}$ 中的每个图的最小 Seidel 特征值至少为 $-1/\alpha^*$，其中 表示樱桃图（全文中指长度为 3 的路径）。我们枚举了所有其他最小 Seidel 特征值至少为 $-1/\alpha^*$ 的图，并将结果总结如下。

定理1.4. 在切换等价意义下，$\langle \text{樱} \rangle_{\pm}$ 之外共有 *63673* 个最小 ***Seidel*** 特征值至少为 $-1/\alpha^*$ 的图，统计如下，其中秩是指图 G 的 $S(G) + I/\alpha^*$ 的秩。

d	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
#	1	6	25	82	294	1047	3533	8929	14921	15799
最小秩 *5 6*			6	6	7	7	8	8	8	8

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
10555	5030	2034	831	325	140	63	31	13	6	3	2	2	1
9	10	11	12	13	13	14	14	15	15	25	26	27	28

此外，对于 $n \in \{5, 7, 8, 13, 14, 22, 24, 28\}$，达到最小秩的图在切换等价意义下是唯一的；而当 $n \in \{5, 8, 14, 28\}$ 时，唯一的图分别与圈图 C_5、圈图 C_8、希伍德图（见图 *1*）以及完全图的线图的补图 K_8切换等价。

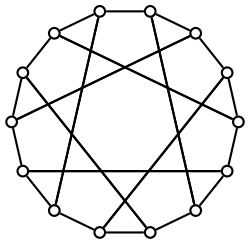

图1：希伍德图。

本文其余部分安排如下。第 2 节中，我们在假设定理1.4成立的前提下证明主定理。第3节中，我们找出五个图，使得任何不属于 $\langle \mathcal{S} \rangle_{\pm}$ 的图都至少包含其中一个作为子图。第4节中，我们通过扩展这五个图来证明定理1.4。最后，我们在第5节中讨论固定角为 arccos(1/3) 的等角直线，并提出一个开放问题。

我们的部分证明借助经验证的算术通过计算机辅助完成。我们会详细描述每个此类证明，以便他人能够独立复现。为帮助读者识别计算机辅助证明，我们在每个此类证明的结尾使用一个专门设计的符号。我们所有用 C++ 编写的代码，均作为附属文件提供于本文的 arXiv 版本中。我们刻意避免使用第三方库，从而便于将代码改写为其他编程语言。

2 主定理的证明

为在假设定理1.4成立的前提下证明主定理定理1.1，我们首先正式陈述等角直线系的图论刻画。

定理2.1 (van Lint 和 Seidel [20]). 在正交变换的意义下，具有固定角 α 的 $\mathbb{R}^d$ 条等角直线系与阶为 n 、最小 *Seidel* 特征值至少为 $-1/\alpha$ 且 $-1/\alpha$ 作为 *Seidel* 特征值的重数至少为 $n-d$ 的图之间存在一一对应关系，其中图按切换等价取商。

□

根据这一对应关系，等角直线系分为两类：一类来自 $\langle \mathcal{S} \rangle_{\pm}$ 中的图，另一类来自 $\langle \mathcal{S} \rangle_{\pm}$ 中的图之外。下一个命题讨论前一种情形，而定理1.4讨论后一种情形。为此，我们需要引入以下概念。

定义 2.2 （闭包）。给定一族 $\mathcal{G}$ 图，其闭包记为 $\langle \mathcal{G} \rangle$，是包含 $\mathcal{G}$ 且对取子图和顶点不交并运算封闭的最小图类。

命题2.3。 $\langle \mathcal{S} \rangle_{\pm}$ 中的每个图的最小 *Seidel* 特征值都至少为 $-1/\alpha^*$。此外，对于每个 $d \in \mathbb{N}^+$，在 $\langle \mathcal{S} \rangle_{\pm}$ 中满足 $S(G) + I/\alpha^*$ 的秩至多为 d 的图 G 的最大阶恰为 $\max(d, \lfloor 3(d-1)/2 \rfloor)$。

证明与 [16] 中定理1.2和命题 3.2 的证明十分相似。

证明。设 G 是 $\langle \text{8} \rangle_{\pm}$ 中的一个图。由于切换等价保持 Seidel 矩阵的特征值不变，不妨假设 G 属于 $\langle \text{8} \rangle$，也就是说，G 的每个连通分量都是一个孤立顶点、一条单边或一个樱桃图。由于 的最大特征值为 $\sqrt{2}$，G 的每个连通分量的最大特征值都至多为 $\sqrt{2}$，因此 G 本身也如此。于是

$$S(G) + I/\alpha^* = J - I - 2A(G) + I/\alpha^* = J + 2\Big(\sqrt{2}I - A(G)\Big), \tag{1}$$

它是半正定的。因此，G 的最小 Seidel 特征值不小于 $-1/\alpha^*$。

现在，进一步假设 $S(G) + I/\alpha^*$ 的秩至多为 d。令 c 表示 G中的樱桃数。

若 $c = 0$，则 G 的最大特征值至多为 1，因此根据 (1)，矩阵$S(G) + I/\alpha^*$ 是正定的，这意味着 $S(G) + I/\alpha^*$ 的秩恰好为 d。

最后，我们考虑 $c > 0$的情形。由于 J和 $\sqrt{2}I - A(G)$均为半正定矩阵，

$$\ker\Big(J + 2\Big(\sqrt{2}I - A(G)\Big)\Big) = \ker(J) \cap \ker\Big(\sqrt{2}I - A(G)\Big).$$

根据佩龙–弗罗贝尼乌斯定理，$A(G)$存在一个与 $\sqrt{2}$ 对应且分量非负的特征向量。该向量属于 $\ker(\sqrt{2}I - A(G))$，但不属于 $\ker(J)$，这意味着 $\dim \ker\big(J + 2\big(\sqrt{2}I - A(G)\big)\big) \le \dim\ker(\sqrt{2}I - A(G)) - 1$。根据秩-零度定理，我们得到

$$n - c = \operatorname{rank}(\sqrt{2}I - A(G)) \le \operatorname{rank}(J + 2\Big(\sqrt{2}I - A(G)\Big)) \le d - 1.$$

由于 $c \le n/3$，我们有 $n \le \lfloor 3(d-1)/2 \rfloor$。此外，当 G 是由 $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$个樱桃以及 $(d-1) - 2\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ 个孤立顶点构成的顶点不交并时，G 的阶恰为 $\lfloor 3(d-1)/2 \rfloor$，而 $\sqrt{2}I - A(G)$的秩恰为 $d-1$，这意味着通过 (1)，$S(G) + I/\alpha^*$ 的秩至多为d 。

□

假设定理*1.4*成立时定理*1.1*的证明。根据定理2.1，对于每个维数 d，我们要寻找满足以下条件的图 G 的最大阶 $N_{\alpha^*}(d)$：其最小 Seidel 特征值至少为 $-1/\alpha^*$，且 $S(G) + I/\alpha^*$ 的秩至多为 d。

若 G 是 $\langle \text{8} \rangle_{\pm}$中的图，则根据命题2.3，$G$ 的最大阶恰为 $\max(d, \lfloor 3(d-1)/2 \rfloor)$。

假设 G 不属于 $\langle \text{8} \rangle_{\pm}$。根据定理1.4，这类秩为 $S(G) + I/\alpha^*$ 且不超过 d 的图 G的最大阶如下所示。

d	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15–24	25	26	27	28–∞
最大阶	5	8	10	14	15	16	17	18	20	22	24	25	26	27	28

Taki取两种情况中的最大值，我们得到所有 $d \in \mathbb{N}$ 的 $N_{\alpha^*}(d)$ 值 $^{+}$. □

3 极小禁子图

为了找出这样的图：每个不属于 $\langle\mathcal{A}\rangle_{\pm}$ 的图都至少包含其中一个作为子图，我们采用最经济的方法。

定义 3.1 （极小禁子图）。 给定一个在取子图下封闭的图类 $\mathcal{C}$ ，图 F 是 $\mathcal{C}$ 的极小禁子图 ，如果 F 本身不在 $\mathcal{C}$中，但 F 的每个真子图都在 $\mathcal{C}$中。

为了枚举 $\langle\mathcal{A}\rangle_{\pm}$的极小禁子图，我们证明 $\langle\mathcal{A}\rangle_{\pm}$中的大图在切换等价下由 $\langle\mathcal{A}\rangle$ 中的一个图唯一表示，然后刻画 $\langle\mathcal{A}\rangle$的极小禁子图。

命题 3.2. 对于每个阶至少为7的 $G \in \langle\mathcal{A}\rangle$ ，以及每个 $U \subseteq V(G)$，如果 G 关于 U 的切换 G^U也在 $\langle\mathcal{A}\rangle$中，则 U 是平凡的，即 $U = \varnothing$ 或 $U = V(G)$。

证明。设 G 是 $\langle\mathcal{A}\rangle$ 中阶为 $n \geq 7$的图，且 $U \subseteq V$（G）使得 G^U 也在 $\langle\mathcal{A}\rangle$中。必要时可取 U 的补图，从而不妨假设 $|U| \leq n/2$ 。为得出矛盾，假设 $U \neq \varnothing$。令 $W = V$（G）$\setminus U$。显然 $|W| \geq 4$。对每个顶点 $u \in U$，它在 G^U中的 W内至少有 $|W \setminus N_G$（u）$|$ 个邻点，其中 N_G（u）表示 u 在 G中的邻点集。由于 $G^U \in \langle\mathcal{A}\rangle$，其最大度至多为2，因此 $|W \setminus N_G$（u）$| \leq 2$。必定有 $|W| = 4$， $|N_G$（u）$| = 2$，且对每个 $u \in U$有 N_G（u） $\subseteq W$。由于对每个 $u \in U$， $G[\{u\} \cup N_G$（u）$]$ 都必须是 G 的一个同构于的连通分量，我们得到 $2|U| \leq |W| = 4$，这与 $n \geq 7$矛盾。

□

Pr命题 3.3. $\langle\mathcal{A}\rangle$ 的任一极小禁子图至多有 4 个顶点 .

证明。 设 G 是 $\langle\mathcal{A}\rangle$的一个极小禁子图。由于 $G \notin \langle\mathcal{A}\rangle$ ，而 G 的每个真子图都属于 $\langle\mathcal{A}\rangle$，因此 G 必定是连通的。存在 G 的一个顶点 v ，使得 $G - v$仍然连通。由于 $G - v$是 的一个子图，图 G至多有 4 个顶点。 □

我们给出下界（or 以便为枚举 $\langle\mathcal{A}\rangle_{\pm}$ 做准备 n.

引理 3.4. $\langle\mathcal{A}\rangle_{\pm}$ 的任一极小禁子图至多有 8 个顶点 .

证明。 设 G 是 $\langle\mathcal{A}\rangle_{\pm}$ 在 n 个顶点上的一个极小禁子图。为导出矛盾，假设 $n \geq 9$。固定 G的一个顶点 v 。由极小性可知， $G - v$ 属于 $\langle\mathcal{A}\rangle_{\pm}$。对 G进行一次切换后，我们可以假设 $G - v$ 属于 $\langle\mathcal{A}\rangle$，且 v 的度至多为 $n/2$。

我们声称，对于每个 $u \in V$（G）， $G - u$ 都属于 $\langle\mathcal{A}\rangle$ 。任取一个 $u \in V$（G）。不妨设 $u \neq v$。由于 $G - u \in \langle\mathcal{A}\rangle_{\pm}$，存在 $U \subseteq V$（G）$\setminus \{u\}$ ，使得（$G - u$）$^U \in \langle\mathcal{A}\rangle$。若 $v \in U$，则将 U 作为 V（G）$\setminus \{u\}$ 的子集取补图，可不妨设 $v \notin U$ 。由于$G - v \in \langle\mathcal{A}\rangle$，显然 $G - \{u, v\}$ 属于 $\langle\mathcal{A}\rangle$。由于（$G - \{u, v\}$）^{U} 也属于 $\langle\mathcal{A}\rangle$，根据命题 3.2， U 作为 V（G）$\setminus \{u, v\}$ 的子集是平凡的。暂且假设 $U = V$（G）$\setminus \{u, v\}$。



Fig图2：樱桃图的切换闭包的极小禁子图 h.

由于 v 在（$G-u$）$^{\{v\}}$ 中的度至少为 $n/2-1$，图（$G-u$）$^{\{v\}} \notin \langle \text{☘} \rangle$，这与（$G-u$）$^{\{v\}} =$（$G-u$）$^{U} \in \langle \text{☘} \rangle$ 这一事实矛盾。因此 $U=\varnothing$，且 $G-u=$（$G-u$）$^{U} \in \langle \text{☘} \rangle$。

根据该断言，我们观察到， G 是一个至少有 9 个顶点的 $\langle \text{☘} \rangle$ 的极小禁子图，这与命题3.3矛盾。 □

我们通过一种简单直接的暴力枚举方法，枚举了 $\langle \text{☘} \rangle_{\pm}$ 的极小禁子图。

引理3.5。 在切换等价意义下，图2中列出了 $\langle \text{☘} \rangle_{\pm}$ 的5 个极小禁子图。

证明。 根据引理 3.4，任意 $\langle \text{☘} \rangle_{\pm}$ 的极小禁子图的阶至多为 8。为了在切换等价意义下枚举 $\langle \text{☘} \rangle_{\pm}$ 的极小禁子图 G ，我们可以假设， n 个顶点上的 G 可以通过向 $n-1$ 个顶点上的 $\langle \text{☘} \rangle$ 添加一个新顶点，并指定它与现有 $n-1$ 个顶点中的哪些顶点相邻而得到。

我们的算法首先将 $\langle \text{☘} \rangle$ 中至多8个顶点的所有图按切换等价存入基集，然后对基集中至多7个顶点的图添加一个新顶点，穷尽所有可能的顶点子集作为其邻域，并检查每个新图 G 是否为 $\langle \text{☘} \rangle_{\pm}$ 的极小禁用子图—— G 不应与基集中的任何图切换等价，但对于 G的每个顶点 v ， $G-v$ 都应与基集中的某个图切换等价。最后，我们将每个这样的极小禁用子图加入字典，前提是它不与字典中任何已有成员切换等价。我们的代码以min_forb.cpp的形式提供，它是该论文arXiv版本中的一个辅助文件。

在本节的其余部分，我们进一步给出实现的细节。

3.1 图的哈希函数与Seidel度

上述算法中的一个常见例程是判定图 G 是否与给定图集合中的任一图切换等价。暴力枚举实现仍可在合理的时间限制内运行。尽管如此，我们采用更高效的实现，因为该代码将在第4节中复用。

假设我们需要检查图 G 是否与 set 的任一现有成员切换等价。为了高效检测切换等价，我们使用以下哈希函数维护 set 现有成员的哈希表 hash。

定义 3.6. 给定图 G、其顶点 v 以及 $k \in \mathbb{N}$， v 在 G 中的第 k Seidel 度是 G 的 Seidel 矩阵的第 k 次幂的 (v, v) 元。

命题 3.7. 对于任意图 G、 G的任意顶点子集 U 、 G的任意顶点 v 以及任意$k \in \mathbb{N}$， v 在 G 中的第 k 个 ***Seidel*** 度等于 v 在 G^U中的第 k 个 ***Seidel*** 度。

证明。 定义 $D(U)$为 $V(G)$上的对角矩阵，其定义为 D_v, $v \in U$ 时取$v = 1$ ，否则取$D_{v,v} = -1$。 G和 G^U的 Seidel 矩阵满足关系 $S(G^U) = D(U)S(G)D(U)$。最后，由于 $D(U)^2 = I$，我们有 $S(G^U)^k = D(U)S(G)^k D(U)$，其对角元素与$S(G)^k$中的对角元素一致。

□

对于一个阶为 n 的图 G ，其哈希值是第三 Seidel 度按序排列后组成的序列。我们略去第一和第二 Seidel 度，因为它们始终分别为 0 和 $n - 1$。显然，当两个图切换等价时，根据命题 3.7，它们的哈希值相等。

这使我们能够通过仅检查哈希值为 G的集合中哈希值为[hv], 的成员，来测试 G 是否与集合中的任何现有成员切换等价。此外，当我们搜索 G 的顶点子集 U 以及 G^U 与哈希值为],的集合中哈希值为[hv],的某个成员 G' 之间的同构时，我们只将 G 中的顶点映射到 G' 中具有相同第三 Seidel 度的顶点。

4 极端图的枚举

本节中，我们通过将图2中 $\langle \text{8} \rangle_{\pm}$ 的极小禁子图扩展到最小 Seidel 特征值至少为 $-1/\alpha^*$的图，来证明定理1.4。

定理*1.4*的证明。 为了在切换等价意义下枚举最小 Seidel 特征值至少为$-1/\alpha^*$ 的图 $G \notin \langle \text{8} \rangle_{\pm}$ ，我们根据图的阶将这些图生成到字典中。起初，字典[5], 字典[6], 字典[7] 由图2中 $\langle \text{8} \rangle_{\pm}$ 的极小禁子图构成，这些子图有5，6， 7个顶点，且其最小 Seidel 特征值至少为 $-1/\alpha^*$；计数器 n 设为5。结果发现，图2中的第二个图的最小 Seidel 特征值小于 $-1/\alpha^*$，因此我们跳过它。

每当 dict[n] 非空时，我们会遍历 dict[n] 中的成员，然后将计数器 n 加 1。对于 dict[n], 中的每个 G ，我们执行以下步骤。

(i) 我们计算 rank($S(G) + I/\alpha^*$)，并将当前最小秩记录在 min_rank 中。(ii) 我们以所有可能的方式，将一个新顶点连接到 G 中的一个顶点子集 U ，从而得到新图H。更高效的实现请参见第 4.1 节。(iii) 我们将满足 $S(H) + I/\alpha^* \succeq 0$ 的图 H 存入临时数组 candidates。(iv) 我们将 candidates 合并到 dict[n+1] 中（参见第 3.1 节）。

我们的程序在 dict[29] 为空时终止 $n = 29$ 。我们还会输出每个 $n \in \{5, \ldots, 28\}$ 对应的、达到最小秩的图，并将 dict[n] 中的所有图及其秩写入文件 cherry-<n>.txt。本文 arXiv 版本中的附属文件 enum.cpp 提供了我们的代码。

根据结果，我们观察到，对于$n \in \{5, 7, 8, 13, 14, 22, 24, 28\}$，达到最小秩的图是唯一的。当 $n \in \{5, 8, 14, 28\}$ 时，这个唯一的图分别切换等价于圈图 C_5、圈图 C_8、希伍德图以及完全图 K_8 的线图的补图；而当 $n \in \{7, 13, 22, 24\}$ 时，这个唯一的图不切换等价于任何正则图。

备注。 尽管对于每个 $n \in \{7, 13, 22, 24\}$，没有正则图切换等价于（最小 Seidel 特征值至少为 $-1/\alpha^*$ 的）达到最小秩的唯一图，但仍可以尝试对这些图进行易于描述的切换。例如，当 $n = 24$ 时，这个唯一的图切换等价于如下图：取图 1 中二部划分为 A 和 B 的希伍德图；添加四个顶点 c_1， c_2， c_3， c_4，使每个顶点都与 B 中的所有顶点相连；然后再添加六个顶点，每个顶点分别与 $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ 中一对不同的顶点相连。

备注。 在配备 Apple M4 芯片和 16 GB 内存的 Mac mini 上，程序在 3 分钟内终止。

4.1 添加新顶点

为加速图的生成，我们利用基于以下观察对 G 在字典[n] 中所做的计算。设 G 是一个图，且满足 $S(G) + I/\alpha^* \succeq 0$。对于 $U \subseteq V(G)$，记 G_U^+ 为将一个新顶点与 U中的顶点相连后，从 G 得到的图。令

$$\mathcal{U} = \left\{U \subseteq V(G) \colon S(G_U^+) + I/\alpha^* \succeq 0\right\}.$$

对于每个 $W \subseteq V(H)$，其中 $H = G_U^+$ 对某个 $U \subseteq V(G)$成立，注意到 $S(H_W^+) + I/\alpha^* \succeq 0$ 意味着 $S(G^+_{W \cap V(G)}) + I/\alpha^* \succeq 0$，这等价于 $W \cap V(G) \in \mathcal{U}$。换句话说，当我们将一个新顶点连接到 H的顶点子集 W时，只需考虑满足 $W \cap V(G) \in \mathcal{U}$的 W。

为了追踪为 G定义的集合 $\mathcal{U}$ ，我们为每个图 G添加一个属性 possible_subsets，它是 G的不同顶点子集组成的列表。对于图2中 $\langle \mathcal{S} \rangle_{\pm}$的极小禁子图，其 possible_subsets 包含所有非空顶点子集。对于 dict[n]，中的每个 G ，我们不再通过所有可能的方式将新顶点（例如 v）连接到 G 的一个顶点子集 U ，而是对 G的 possible_subsets 中的每个 S ，将 v 连接到 S 。为了得到由 G生成的图的 possible_subsets，我们首先将 new_possible_subsets 设为空列表。对于 G的 possible_subsets 中的每个 U ，检查 $S(G_U^+) + I/\alpha^* \succeq 0$是否成立；如果成立，则将 U和 $U \cup \{v\}$都追加到 new_possible_subsets，并将 G_U^+ 追加到候选图中。最后，将 candidates 中每个图 G' 的 possible_subsets 设为 new_possible_subsets。

备注。 这种将计算过程向前推进的相同思路此前也出现在 [1], 中；在该文中，Acharya 和 Jiang 对满足 $A(G) + \lambda^* I \succeq 0$的连通图 G 进行了分类，其中 $\lambda^* \approx 2.01980$。

4.2 半正定性与秩

检验 $S(G) + I/\alpha^* \succeq 0$，相当于验证 $p_G(x - 1/\alpha^*)$ 的所有根都是非负的，其中 p_G 是 $S(G)$ 的特征多项式。我们回顾以下判据，它是笛卡尔符号法则的一个特例：对于 x_1, ..., $x_n \in \mathbb{R}$，当且仅当它们的初等对称函数均为非负时，它们才都是非负的。假设

$$p_G(x - 1/\alpha^*) = c_n x^n + \cdots + c_0.$$

我们可以得出，$S(G) + I/\alpha^* \succeq 0$，当且仅当对于每个 $k \in \{0, \ldots, n\}$，都有 $(-1)^{n-k} c_k \geq 0$。

为计算 $S(G)$ 的特征多项式 p_G，我们使用法捷耶夫–勒维耶算法（参见 [7, 第四章第 5] 节），在整个过程中只涉及整数。计算 $p_G(x - 1/\alpha^*)$ 的系数完全可以在整环 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ 内进行。

作为一个附带结果，$S(G) + I/\alpha^*$ 的秩可计算为 $n - m$，其中 m 是 $p_G(x - 1/\alpha^*)$ 的根 0 的重数，也就是说，m 是满足 $c_m \neq 0$、但对所有 $i < m$均有 $c_i = 0$ 的指标。

备注。 实现中需要注意的一点是，法捷耶夫–勒维耶算法中涉及的整数，以及 $p_G(x)$ 和 $p_G(x - 1/\alpha^*)$ 的系数，理论上都可能非常大。幸运的是，实际计算中涉及的整数绝对值从未超过 3.42×10^{21}，因此有符号 128 位整数足以完成本小节所述的计算。

5 总结

5.1 固定角$\arccos(1/3)$的等角直线

本文的整个过程可以改用于固定角为 $\arccos(1/3)$ 的等角直线。由于该角的情况已有充分研究，我们的枚举结果与已知结果一致，这进一步增强了我们对计算机辅助证明实现的信心。我们按如下方式进行改编。注意，$\langle \circ\circ \rangle_{\pm}$ 中的每个图的最小 Seidel 特征值都至少为 -3。为了枚举 $\langle \circ\circ \rangle_{\pm}$之外最小 Seidel 特征值至少为 -3 的图，我们先列出 $\langle \circ\circ \rangle_{\pm}$ 的极小禁子图，再将它们扩展为最小 Seidel 特征值至少为 -3的图。此处省略细节，因为该过程与第3节和第4节中的过程相同。

引理 5.1。 在切换等价意义下，$\langle \circ\circ \rangle_{\pm}$ 对应的极小禁子图共有4 个，如图 *3* 所示。

我们得到以下固定角为 $\arccos 1/3$ 的等角直线系分类（模正交变换）。



图 3: 单边图的切换闭包的极小禁子图 h.

定理 5.2. 在切换等价意义下，$\langle \circ \circ \rangle_{\pm}$ 之外共有 *902* 个最小 *Seidel* 特征值至少为 -3 的图，其统计数据如下；其中秩指图 G的 $S(G) + 3I$ 的秩。

n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
#	2	5	12	20	35	52	69	89	101	103	101	90
最小秩	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
70	54	37	23	16	10	5	3	2	1	1	1
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7

此外，在切换等价意义下，对于 $n \in \{8, 9, 10, 14, 15, 16, 26, 27, 28\}$，达到最小秩的图是唯一的；当 $n \in \{9, 10, 15, 16, 27, 28\}$ 时，唯一的图分别与 $L(K_{3,\ 3})$、彼得森图、 $L(K_6)$、克莱布施图、施莱夫利图的补图以及 $L(K_8)$ 的补图切换等价。

定理 5.2 与 Cao、Koolen、Munemasa 和 Yoshino 的 [6, 定理 3.1] 以及 Yoshino 的 [21,推论 1.1] 一致，这支持了我们的实现的正确性。

在 [6], Cao 等人的分类中，按切换等价计，具有最大 Seidel 特征值 3 的图 G 是极大的，其含义是不存在具有最大 Seidel 特征值 3 的图 G' 的真超图 G ，使得秩$(3I - S(G')) =$秩$(3I - S(G))$。定理 5.2 中对于 $n \in \{10, 16, 28\}$ 具有最小 Seidel 特征值 -3 的唯一图，显然也是极大的，其含义是不存在具有最小 Seidel 特征值 -3 的图 G 的真超图 G' ，使得秩$(S(G') + 3I) =$秩$(S(G) + 3I)$。由于取补图会使 Seidel 矩阵变号，因此这 3 个唯一图的补图在 Cao 等人的意义下是极大的。事实上，彼得森图的补图是 $L(K_5)$；克莱布施图的补图与 $L(K_6)$ 和 K_1 的顶点不交并切换等价； $L(K_8)$ 的补图的补图就是 $L(K_8)$——所有这些补图都出现在 [6, 定理 3.1] 中。

在 [21], Yoshino 推导出了固定角为 arccos$(1/3)$ 的 n 等角直线系统的总数 $s(n)$。对于 $n \geq 3$, 这个数与定理 5.2 中图的数量恰好相差 $\lfloor n/2 \rfloor + 1$。差异源于 $\langle \circ \circ \rangle$ 中以 n 个顶点构成的图，这些图未计入定理 5.2。

我们的代码以 min_forb.cpp 和 enum.cpp 的形式提供，作为论文 arXiv 版本的辅助文件。要运行针对 $\alpha = 1/3$ 的代码，请使用额外的 --single-edge 标志。包含定理 5.2 中的图及其秩的输出文件可在 single-edge-5.txt 至 single-edge-28.txt 中找到。

5.2 异常图的有限性

对于一般的 $\alpha \in (0,1)$，设 $\lambda = (1-\alpha)/(2\alpha)$，并令 $\mathcal{G}(\lambda)$ 为谱半径至多为 λ 的连通图集合。构造最小 Seidel 特征值至少为 $-1/\alpha$ 的图 G 的一般方法，是取来自 $\mathcal{G}(\lambda)$ 的图的顶点不交并。事实上，这样的图 G 满足 $\lambda I - A(G) \succeq 0$，由此可得 $S(G) + I/\alpha = J + 2(\lambda I - A(G)) \succeq 0$。进行切换闭包后，得到族 $\langle \mathcal{G}(\lambda)\rangle_{\pm}$，其中所有成员的最小 Seidel 特征值都至少为 $-1/\alpha$。由此引出以下定性问题。

问题5.3. 对于哪些 $\alpha \in (0,1)$，在 $\langle \mathcal{G}(\lambda)\rangle_{\pm}$ 之外且最小 *Seidel* 特征值至少为 $-1/\alpha$ 的图只有有限多个，其中 $\lambda = (1-\alpha)/(2\alpha)$?

注意，当 $\alpha = 1/(4\sqrt{u^2+1}-1)$ 对任意整数 $u \geq 10^5$ 成立时，上述问题的答案是否定的。在这种情况下，$\lambda = 2\sqrt{u^2+1}-1$ 不是任何图的谱半径，因此对于任意具有 n 个顶点的图 $G \in \langle \mathcal{G}(\lambda)\rangle_{\pm}$，矩阵 $S(G) + I/\alpha$ 是正定的，因此其秩为 n。如果在 $\langle \mathcal{G}(\lambda)\rangle_{\pm}$ 之外且最小 Seidel 特征值至少为 $-1/\alpha$ 的图只有有限多个，那么通过类似于定理1.1证明中的论证，我们可以得出，对于充分大的 d，$N_\alpha(d) = d$。然而，Schildkraut [18, 定理1.4] 证明了 $N_\alpha(d) \geq d + \Omega(\log\log d)$。

参考文献

[1] Hricha Acharya与Zilin Jiang。超越Cameron、Goethals、Seidel和Shult的分类定理。组合、概率与计算，35(2):207–229，2026。arXiv:2404.13136 [组合数学]。[2] Igor Balla、Felix Dräxler、Peter Keevash与Benny Sudakov。欧几里得空间中的等角直线与球面码。数学发明，211(1):179–212，2018。arXiv:1606.06620 [组合数学]。[3] Alexander Barg与Wei-Hsuan Yu。等角直线的新界。载于离散几何与代数组合学，当代数学第625卷，第111–121页。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2014。arXiv:1311.3219 [math.MG]。[4] Boris Bukh。等角直线及相关球面码的界。*SIAM*离散数学杂志，30(1):549–554，2016。arXiv:1508.00136 [组合数学]。[5] Meng-Yue Cao、Jack H. Koolen、Yen-Chi Roger Lin与Wei-Hsuan Yu。Lemmens–Seidel猜想与禁子图。组合论杂志*A*辑，185：论文编号105538，28，2022。arXiv:2003.07511 [组合数学]。[6] Meng-Yue Cao、Jack H. Koolen、Akihiro Munemasa与Kiyoto Yoshino。Seidel 矩阵的极大性与图的切换根。图与组合，37(5):1491–1507，2021。arXiv:2102.11989 [组合数学]。

[7] F. R. Gantmacher。《矩阵理论》。第1卷。AMS Chelsea Publishing，罗德岛州普罗维登斯，1998。由K. A. Hirsch译自俄文，1959年译本的重印。[8] Chris Godsil与Gordon Royle。代数图论，数学研究生教材第207卷。Springer-Verlag，纽约，2001。[9] Gary Greaves、Jacobus H. Koolen、Akihiro Munemasa与Ferenc Szöllősi。欧几里得空间中的等角直线。组合论杂志A辑，138:208–235，2016。arXiv:1403.2155 [组合数学]。[10] Gary R. W. Greaves与Jeven Syatriadi。18维中的实等角线及互补子图的雅可比恒等式。组合论杂志A辑，201：论文编号105812，27，2024。arXiv:2206.04267 [组合数学]。[11] Gary R. W. Greaves、Jeven Syatriadi与Pavlo Yatsyna。低维欧几里得空间中的等角直线。Combinatorica，41(6):839–872，2021。arXiv:2002.08085 [组合数学]。[12] Gary R. W. Greaves、Jeven Syatriadi与Pavlo Yatsyna。欧几里得空间中的等角直线：17维和18维。计算数学，92(342):1867–1903，2023。arXiv:2104.04330 [组合数学]。[13] Gary R. W. Greaves与Pavlo Yatsyna。关于17维中的等角直线与Seidel 矩阵的特征多项式。计算数学，88(320):3041–3061，2019。arXiv:1806.08323[组合数学]。[14] J. Haantjes。椭圆二维与三维空间中的等边点集。Nieuw Arch. Wiskunde (2)，22:355–362，1948年。[15] Zilin Jiang与Alexandr Polyanskii。谱半径有界图的禁子图及其在等角直线中的应用。以色列数学杂志，236(1):393–421，2020。arXiv:1708.02317[组合数学]。[16] Zilin Jiang、Jonathan Tidor、Yuan Yao、Shengtong Zhang与Yufei Zhao。具有固定角的等角直线。数学年刊(2)，194(3):729–743，2021。arXiv:1907.12466 [组合数学]。[17] P. W. H. Lemmens与J. J. Seidel。等角直线。代数学杂志，24:494–512，1973年。[18] Carl Schildkraut。等角直线与固定第二特征值的大重数，2023。arXiv:2302.12230 [组合数学]。[19] Ferenc Szöllősi与Patric R. J. Östergård。Seidel矩阵枚举。欧洲组合学杂志，69:169–184，2018。arXiv:1703.02943 [组合数学]。[20] J. H. van Lint与J. J. Seidel。椭圆几何中的等边点集。Indag. Math.，28(3):335–348，1966。

[21] Kiyoto Yoshino. 具有公共角 arccos(1/3) 的等角直线集的枚举。离散数学，348(12):第 114647 号论文，14 页，2025。arXiv:2312.10384 [组合数学]。

[22] Yufei Zhao。等角直线与特征值重数。美国数学会通讯，71(9):1151– 1159，2024。arXiv:2410.20738 [组合数学]。