arXiv:2603.02501v1 [math.CO] 3 Mar 2026

欧拉迹具有唯一标记的图

Donggyu Kim[1], Rose McCarty*[2]和 Caleb McFarland†[3]

[1,3]佐治亚理工学院数学学院。[2]佐治亚理工学院数学学院和计算机科学学院。

2026年3月4日

摘要

考虑一个无向图，其边以群中的元素作为可逆标记。从一个固定顶点到另一个固定顶点的每条欧拉迹何时具有相同的标记？我们对这个问题给出了精确的结构性解答。简言之，我们证明，每个“3-连通部分”上的标记都取自一个与 $\mathbb{Z}_2^k$ 某个 k同构的群。我们还证明，关于该群的字问题可以在多项式时间内归约到这个算法问题。

1 引言

群标记图（也称为增益图或电压图）提供了一种灵活的框架，用于编码图中路径、圈和迹的各种约束，同时允许通过在顶点处进行移位来定义自然的等价关系。最常见的情形是群为 $\mathbb{Z}_2$，这对应于奇偶约束。凯莱图也自然地带有群标记，并且它们属于一个更一般的框架，该框架关联了覆盖图 [26], 、图嵌入 [25], 和图自同构 [9]; 参见 [27]。

群标记图也源自图拟阵的余扩张 [24, 56]，类似地，也源自“几乎是图形的”各向同性系统 [5, 7]。因此，它们在发展拟阵小和顶点子图的结构理论方面发挥着重要作用；参见 [23, 44]。此外，纽结的泰特图可以视为带符号的四正则平面图，也可以定义在其他曲面上；请参阅 [6, 19, 46]。

在群标记图中，图是无向的，但每条边的两种可能定向分别由群中的一对互逆元素标记。因此，每条边都可以沿任一方向遍历，但方向会影响相应的群元素。图的一条欧拉迹可以看作按某种特定顺序和定向遍历各边；因此，它对应于群上的一个字。示例见图 1。

我们给出一个结构定理，刻画从一个固定顶点到另一个固定顶点的每条欧拉迹都具有相同标记的情形。一个充分条件是群同构于 $\mathbb{Z}_2^k$

*由美国国家科学基金会资助，资助编号为 DMS-2452111。

†部分经费来自佐治亚理工学院 ARC-ACO 奖学金，部分来自美国国家科学基金会，资助编号为 DMS-2452111。

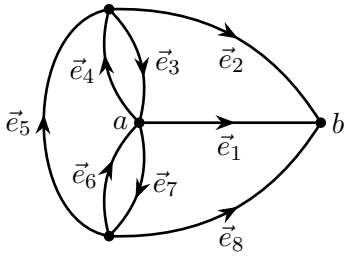


图 1：展示柯尼斯堡七桥问题的图，并额外添加了一条边e_5。该图具有一条从 a 到 b的欧拉迹 $\vec{e}_1\vec{e}_2^{-1}\vec{e}_3\vec{e}_4\vec{e}_5^{-1}\vec{e}_6\vec{e}_7\vec{e}_8$。当我们用群中的元素 α_i 为弧 $\vec{e}_i$标记时，这条迹的标记为 $\alpha_1\alpha_2^{-1}\alpha_3\alpha_4\alpha_5^{-1}\alpha_6\alpha_7\alpha_8$。

对某个 $k \in \mathbb{N}$。此时，每条欧拉迹都对应同一个字，也就是所有边的标记之和；由于群是阿贝尔群，阶无关紧要；由于每个群元素都是自身的逆，定向也无关紧要。我们证明，除移位以及由 2-边割引起的一些连通性问题外，这基本上是唯一可能的情形。正式表述见定理4.3。

定理 1.1（非正式表述）。 对于任意群标记图（G, γ），若其顶点为 a 和 b，且存在一条从 a 到 b的欧拉迹，则以下各项等价。

1. 从 a 到 b 的每条欧拉迹具有相同的标记。

2. 存在一种对 γ 的移位 γ'，使得“G的每个3-边连通部分”均标记在某个与 $\mathbb{Z}_2^k$ 同构的群上，其中 k。

我们在引理2.2中给出了定理1.1 对阿贝尔群的一个简单证明。在这种情况下，我们发现 G 本身标记于一个与 $\mathbb{Z}_2^k$ 同构的群上，其中 k。然而，我们注意到，对于一般的群，这一点未必成立；一个例子见图3 。

我们还利用定理 1.1高效地解决相应的算法问题。假设我们的图标记于一个有限生成群 Γ 上，并且可以访问一个能够解决字问题的预言机 Γ。也就是说，该预言机以 Γ的生成元及其逆元（视为形式符号）构成的字作为输入，并判断该字是否等于单位元。众所周知，对于一般的有限生成群，这是一个不可判定问题 [3, 48]。然而，许多群确实存在这样的预言机；关于这类群的刻画，见 [4] ，关于群几何的相关联系，见 [8] 。

我们假设预言机的运行时间为 $\phi(n)$，其中 n 是输入字的长度。注意，对于所有有限群以及许多其他有趣的群（例如字双曲群 [18, 20]），我们有 $\phi(n) = \mathcal{O}(n)$。另请参阅 [1, 52] ，了解一些近期示例，其中字问题可以在近线性时间内得到解决；并参阅 [2] ，了解一个涵盖几乎幂零群的复杂性类。

在此设定下，我们可以将主要的算法方面结果表述如下。

定理 1.2。 设(G, γ) 是一个连通群标记图，含有 m 条边，且每条弧都标记有一个长度为1的字。那么，我们可以在 $\mathcal{O}(m^2) \cdot \phi(12m)$ 时间内判定从顶点 a 到顶点 b的每个欧拉回路是否具有相同的标记。此外，若并非如此，则我们可以在 $\mathcal{O}(m^4) \cdot \phi(12m)$时间内找出两条从 a 到 b、标记不同的欧拉回路。

我们预期，本文的结果将在理解欧拉图的回路分解方面发挥重要作用。对于顶点子图的应用（见 [44, 45]），我们

感兴趣的是，何时一个 $\mathbb{Z}_2^k$-标记图具有一种回路分解（即由若干回路组成、且这些回路划分了该图边集的集合），使得所有回路都从一个固定的根顶点出发并在此终止，并且至少有 k 个回路的标记非单位元。算法方面的问题也令量子计算界特别关注。这是因为顶点子图刻画了何时可以从一个图态“轻松地”制备出另一个图态；见 [15, 54]。McCarty [44]为 $\mathbb{Z}_2$-标记图证明了一个极小极大定理，但要将该定理推广到偶数 $\mathbb{Z}_2^2$也面临着相当大的困难。若要理解一般群 Γ的情形，则需要定理1.1 和1.2 来处理2-边割。有趣的是， $\mathbb{Z}_2^k$ 情形自然地由定理1.1得出。

我们将其留作一个开放问题：要准确理解群标记图中欧拉迹可能具有哪些标记。特别是，虽然定理 1.1 可用于判断从 a 到 b 的欧拉迹的标记是否生成一个非平凡子群，但我们无法控制这个群具体是什么。

相关工作

研究欧拉图的圈分解和回路分解（带有不同约束），以及研究群标记图中的约束，有着悠久的历史。我们简要综述这些领域，以便将我们的结果置于相关背景中。

首先，有一系列研究 [37, 50]，最终由 [16] 完成，证明了如下结论对绘制在曲面上的任意欧拉图 G 都成立。对于每一种同伦类型，都存在一个 G 的圈分解，使得这些圈相对于该同伦类型的代表度之和等于 G 的代表度。（这里，代表度 是指一条给定同伦类型的曲线与图/圈相交的边数的最小值。）其他研究则着重寻找充分条件，以保证存在这样的圈分解：其中每个圈的长度均为偶数 [31, 39, 51, 57]，或者在给定的边集划分中，每个部分至多取一条边 [21]。

Máčajová和Škoviera [43] 证明，一个欧拉图具有包含 k 条奇数长度回路的回路分解，当且仅当它具有 k 个两两边不相交的奇圈的打包，并且边数与 k具有相同的奇偶性。McCarty [45] 针对该问题的有根版本（要求分解中的每条回路都经过一个固定顶点）证明了一个精确的极小极大定理。如果人们转而希望找到一个包含许多奇圈而非奇回路的圈分解，那么问题会困难得多，但可参见 [11]中一个漂亮的猜想。该猜想指出，若 r 和 t 是奇圈的可行数目，则介于 r 与 t 之间且具有相同奇偶性的任何整数也是可行的。

对于不一定是欧拉的4-边连通图中的边不交奇圈，也已知存在Erdős-Pósa性质（即打包与覆盖之间的粗略对偶性）；有根版本见 [33]，无根版本见 [34]。4-边连通性这一条件是必要的，这是由于一个著名的例子，即Escher墙，Reed [49] 证明它是唯一的障碍。我们注意到，唯一的问题来自恰好含三条边的割，因此欧拉图的表现要好得多。

在算法方面，虽然我们尚未发现有先前研究探讨群标记图中可能存在何种欧拉迹，但已有研究考察路径和圈的奇偶性。Kawarabayashi、Reed 和 Wollan [35] 提出了一种用于解决带奇偶约束的 k连接问题的算法。在博士论文中，Huynh [29] 将其推广至群标记图的 k连接问题，其中有限群是任意给定的固定群。最近，Liu 和 Yoo [38] 提出了一种用于解决 k 连接问题的算法，其中约束来自一个

无向边以有限阿贝尔群中的元素为标记的图。

关于在群标记图中寻找标记不是单位元的顶点不相交路径，也有大量相关文献。我们请读者参阅 [13, 14], 中的统一 Erdős-Pósa 定理 [30], , 以及 [32]中寻找连接一对顶点的此类最短路径的算法。

概要

在第 2 节，我们介绍本文所用的记号，讨论阿贝尔情形（见引理 2.2），并证明一个关于如何保持3-边连通度的有用引理（引理 2.3）。在第 3 节，我们证明命题 3.1，该命题处理 3-边连通情形。在第 4 节，我们说明如何获得“3-边连通部分”，并证明完整的结构定理（定理 4.3）。最后，我们利用该定理在第 5 节给出算法（判定问题见定理 5.5 ，若迹存在则寻找这些迹的算法见推论 5.6 ）。

2 预备知识

我们将图视为有限无向图，并允许存在平行边和环。我们用乘法形式表示群作用，并用 1 表示单位元。我们使用标准的图论记号。特别地，若 G是一个顶点集为 X的图，则我们用 $\delta_G(X)$（若上下文清楚，也简写为 $\delta(X)$）表示 G 中恰有一个端点位于 X内的所有边构成的集合。若一个图不存在适当的非空顶点集X 使得 $|\delta(X)| \leqslant 2$, 则称该图为 **3-边连通** 。因此，任何只有一个顶点的图都平凡地是 3-边连通的。

给定一个图 G，每条边 e 都有两种不同的定向，称为弧，记作 $\vec{e}$和 $\vec{e}^{-1}$。每条弧 $\vec{e}$ 都有一个**尾端** 和一个头，我们称 $\vec{e}$从其尾端到 其头进行定向。**群标记图** 是一个元组 (G, γ)，其中 G 是一个图，且 γ 是一个函数，它将 G 的每条弧标记为群 Γ 中的元素，并且对每条边 e，都有 $\gamma(\vec{e}^{-1}) = \gamma(\vec{e})^{-1}$。因此，沿一个方向经过一条边对应一个群元素 α, 而沿相反方向经过该边则对应 α^{-1}。我们称任何这样的函数 γ 为 G的**群标记** 。我们用 $\langle G, \gamma\rangle$ 表示由 $\{\gamma(\vec{e}) : e \in E(G)\}$生成的 Γ 的子群。

G 的一条**迹** 是一个由弧组成的序列，其中各弧对应的底层无向边两两不同，且每条弧的头都是下一条弧的尾端。因此，每条迹 $T = \vec{e}_1\vec{e}_2 \dots \vec{e}_t$ 都会在 Γ 上生成一个字 $\gamma(\vec{e}_1)\gamma(\vec{e}_2) \dots \gamma(\vec{e}_t)$。相应的群元素记作 $\gamma(T)$，它是 T 的**标记** 。若一条迹恰好包含 G 的每条边的一种定向，则称其为**欧拉** 迹。一条迹从其**尾端**（即第一条弧的尾端）出发，到达其头（即最后一条弧的头），称这些顶点为 T 的**端点** 。T 的**逆** 是将弧按相反顺序排列并反向定向所得的迹 T^{-1}；因此 $\gamma(T^{-1}) = \gamma(T)^{-1}$。只有一个端点的迹 T称为**回路** 。迹 T 的**子回路** 是由 T 中连续若干条弧构成的子序列，且本身是一个回路。若迹 T_1 和 T_2 满足 T_1 的头是 T_2 的尾端，则可以将它们连接成一条新迹，记作 T_1T_2。

在 Γ标记的图上有一种自然的等价关系，定义如下。给定一个Γ标记的图（G, γ）、一个顶点 $v \in V$（G）和一个群元素 $\alpha \in \Gamma$，在 α 处 v移位，意为在每条尾端为 v 的弧的标记开头附加 α，并在每条头为 v的弧的标记末尾附加 α^{-1}。例如，如果 $\vec{e}$ 是位于 v处的一个环，那么它的新标记就是 $\alpha\gamma$（$\vec{e}$）α^{-1}。此操作与边的定向相容，因此总会得到一个新的 Γ标记。我们称图 G 的群标记 γ' 是 γ 的**移位**，如果它可以通过有限次此类移位得到。

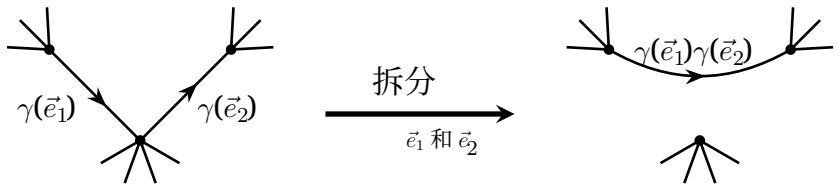


图 2：拆分 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$的示意图。

回路的标记在移位下具有如下良好性质。

引理 2.1. 设(G,γ) 是一个群标记图。那么，对于 G 的任意回路 C 以及 γ的任意移位γ'，元素 $\gamma'(C)$是 $\gamma(C)$的一个共轭元。特别地，$\gamma'(C)$和 $\gamma(C)$ 在群中具有相同的阶。

证明。 设 G的一个回路为 $C=\vec{e}_1\vec{e}_2\dots\vec{e}_t$，$\gamma$的一个移位为 γ'。对于每个 i，我们用 v_i 表示 $\vec{e}_i$ 的头。注意，若 u 和 v 是不同的顶点，则在 u处移位和在 v 处移位这两个操作可以交换。因此，移位 γ' 由为每个顶点 v 选取一个群元素 α_v，并在 v 处按 α_v进行移位来定义。我们用 α_i 表示α_{v_i}。于是

$$\gamma'(C)=(\alpha_t\gamma(\vec{e}_1)\alpha_1^{-1})(\alpha_1\gamma(\vec{e}_2)\alpha_2^{-1})\dots(\alpha_{t-1}\gamma(\vec{e}_t)\alpha_t^{-1})=\alpha_t\gamma(C)\alpha_t^{-1},$$

这就证明了该引理。 □

注意，同理，若(G,γ)是一个群标记图，其顶点为 a 和 b，且 γ' 是 γ的一个移位，那么，从 a 到 b 的每条欧拉迹具有相同的 γ标记，当且仅当从 a 到 b的每条欧拉迹具有相同的 γ'标记。

有一种广为人知的方法，可以将一个群标记图（G，γ）变为另一个边数更少的群标记图。对于不同的弧 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$，若 $\vec{e}_1$ 的头是 $\vec{e}_2$的尾端，则拆分 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 是指删除 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$，并添加一条从 $\vec{e}_1$ 的尾端到 $\vec{e}_2$ 的头的新弧（若 $\vec{e}_1$ 的尾端和 $\vec{e}_2$ 的头是同一个顶点，则这条弧是一个环），其标记为 $\gamma(\vec{e}_1)\gamma(\vec{e}_2)$。参见图 2。

阿贝尔群

对于阿贝尔群，情况要简单得多，因此我们现在给出一个直接证明。接着，我们概述一般非阿贝尔情形下的不同之处。

引理 2.2. 设 G 是一个图，其顶点为 a和 b，且存在一条从a 到 b的欧拉迹；设 γ 是 G 上的一个阿贝尔群标记。则以下条件等价。

1. G从 a 到 b 的每条欧拉迹都有相同的 γ标记。

2. 存在 γ' 的某种移位，使得 $\langle G、\ \gamma'\rangle$ 与某个 k的 $\mathbb{Z}_2^k$ 同构。

证明。 显然，第二个条件蕴含第一个条件，因此我们只需证明反方向。反设结论不成立。

首先，假设 G 不存在标记的阶大于 2 的回路。令 T为 G的一棵生成树，并进行移位，使 T的每条边都标记为单位元。移位不会改变任何回路的标记的阶（事实上，在阿贝尔群中，移位根本不会改变标记）。因此，对于这次移位 γ'，每条边 e 的 $\gamma'(\vec{e})$的阶至多为 2。（考虑 $T+e$的唯一圈即可看出这一点。）所以 $\langle G,\ \gamma'\rangle$ 是

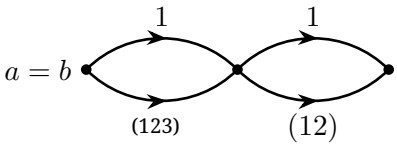


图 3：一个群标记图（G，γ），其从 a 到 b 的欧拉迹在对称群 $\mathfrak{S}_3$ 中的标记均为 (123)(12) = (13) = (12)(132)，但不存在移位 γ' 使得 $\langle G, \gamma' \rangle \cong \mathbb{Z}_2^k$ 对某个 $k \in \mathbb{N}$ 成立。

由阶为 2 的元素生成的有限阿贝尔群。因此，$\langle G, \gamma' \rangle$ 同构于某个 $\mathbb{Z}_2^k$ k，这就产生了矛盾。

因此，存在一个标记的阶大于 2 的回路 C。选择 C，使得 $G - E(C)$ 中包含 a 的连通分支具有尽可能多的边。在此条件下，选择 C，使得 C 具有尽可能多的边。如果 $G - E(C)$ 中没有其他连通分支含有边，那么出于奇偶性原因，b 与 a 位于同一个连通分支中，并且该连通分支存在一条从 a 到 b 的欧拉迹 T。因此，存在迹 T_1 和 T_2，使得 $T = T_1T_2$，且 T_1CT_2 是 G 的一条欧拉迹。由于 C 的阶大于 2，迹 T_1CT_2 和 $T_1C^{-1}T_2$ 的标记不同，矛盾。

因此，$G - E(C)$中存在一个连通分支 H，它至少包含一条边，且不包含 a。根据奇偶性，H 也不包含 b，因此它有一个欧拉回路C_H。通过循环调整 C 和 C_H中各弧的顺序，我们可以假设它们始于并终于同一个顶点。注意，如果群是阿贝尔群，这一操作不会改变回路的标记。（一般而言，它不会改变其标记的阶。）C_H 和 C_HC 的阶都至多为 2，否则它们会是比 C更好的选择。因此

$$\gamma(C_H)\gamma(C) = \gamma(C)^{-1}\gamma(C_H)^{-1} = \gamma(C)^{-1}\gamma(C_H),$$

这与 C 的阶大于 2 矛盾。我们注意到，这是唯一一处真正依赖群为阿贝尔群的地方。□

引理 2.2并非对所有群都成立；可能存在这样的情形：从 a到 b 的每条欧拉迹都有相同的标记，但不存在任何移位，使得整个生成子群同构于 $\mathbb{Z}_2^k$，其中 k。具体例子见图 3。这个例子不存在这样的移位，因为移位不会改变任何回路的标记的阶；注意，其中有一个回路的标记 $(123) \in \mathfrak{S}_3$ 的阶为 3。不过，我们将证明，在附加假设图是 3-边连通的条件下，引理 2.2对一般群确实成立；见命题 3.1。

维持3-边连通度

为了处理3边连通的情形，我们需要下面的引理2.3，它说明如何在保持3边连通度的同时删除一条边。这个引理实质上可由 Lovász 的定理 [40] 和 Mader 的定理 [41] 推出，这些定理讨论了如何在保持两两边连通度的同时拆分关联边。不过，由于这种联系并不明显，而且我们需要一个略显技术性的表述，因此仍附上一个简短的证明。我们注意到，这些拆分定理已有许多改进；例如，[42, 53] 介绍了组合改进，[10, 12, 22, 36] 介绍了算法版本。



图4： G 和 G_e 在 $G_e \neq G - e$时的示意图。

为方便起见，我们称有效实例为一个元组 (G, a, b)，其中 G 是一个 3 边连通图， a 和 b 是 G 的顶点，并且存在一条从 a 到 b 的欧拉迹。对图 G 的顶点 v 进行平滑，指的是：若 v 恰好关联两条边，且这两条边都不是环，则删除 v，并添加一条新边，其端点是 v 在 G 中的邻点。（否则，若 v 不满足这一条件，则对 v 进行平滑不会产生任何变化。）设 (G, a, b) 是一个有效实例，并设 e 是 G 中一条与 a 关联的边。我们将删除 e 后再对 a 进行平滑所得的图记作 G_e，其中 G 为原图。见图4。下述引理表明，总存在一条端点为 a 和 a' 的边 e，使得 (G_e, a', b) 是一个有效实例。注意，若 $G_e \neq G - e$，则 a 是 G 中一个度为 3 且没有关联环的顶点。因此在这种情况下， $a \neq b$，并且 a' 和 b 仍是 G_e 的顶点。

Now 我们证明关于如何将一个有效实例约化为另一个有效实例的主要引理 .

引理 2.3。 对于任意至少有一条边的有效实例（G, a, b），存在一条边 e，其端点为 a 和 a'（可能带有 $a = a'$），使得（G_e, a', b）是一个有效实例。

证明。 为导出矛盾，反设结论不成立。首先证明以下断言。

断言 2.4. 在 a处没有环，顶点 a和 b 不同，并且对于任意一条端点为 a 和 a'的边 e，图 G_e 都存在一条从 a' 到 b的欧拉迹。

证明。 众所周知，图 G 存在一条从顶点 a 到顶点 b 的欧拉迹，当且仅当 G 是连通的，除 a 和 b 之外的每个顶点的度都是偶数，并且当 a 和 b不同时，它们的度都是奇数。（若二者相同，根据握手引理，该顶点的度为偶数。）注意，对于任意一条与 a关联的边 e，图 $G - e$ 是连通的，因此图 G_e 也连通，因为 G 是 3-边连通的。还要注意，我们刚才描述的奇偶条件对 $(G_e,\ a',\ b)$ 成立，因为它们对 $(G,\ a,\ b)$ 成立。因此，对于任意一条端点为 a 和 a'的边 e， G_e 都存在一条从 a' 到 b 的欧拉迹。

由此可知， a 处没有环，否则我们可以删除这条边，同时保持 3-边连通。类似地，如果 $a = b$，那么 G 是欧拉图，因此每个割都是偶数。因此， G 实际上是 4-边连通的，我们可以取 e 为任意一条与 a关联的边，这就产生了矛盾。 □

根据断言 2.4，并且由于 $(G,\ a,\ b)$ 是一个反例，因此不存在与 e 关联的边 a，使得 G_e 是 3-边连通的。现在我们证明最后一个断言。省略下标时，我们指的是图 G。因此，给定一个集合 $X \subseteq V(G)$，我们将 $\delta(X)$ 记作 $\delta_G(X)$。

断言 2.5。 对于任意一条与 a关联的边 e，存在一个顶点集 X，其中包含 a 和至少一个其他顶点，不包含 b，并且满足 $|\delta(X)| = 3$ 以及 $e \in \delta(X)$。

证明。 如果 a 的度大于 3，那么在 $G - e$ 中对 a 进行平滑不会产生任何影响，因此 $G - e$ 有一个 2-边割。在 G 中，这会得到一个包含 e的 3-边割。由于 G 有一条欧拉迹

从 a 到 b，每个奇数割都会将 a 和 b分隔开。最后，包含 a 的一侧至少有两个顶点，因为根据假设，a 的度大于 3。

如果 a 的度恰好为 3，那么我们可以在 G_e 中取一个小割，并将 a 添到 a 拥有较多邻点的一侧，从而得到所需的集合 X。 □

现在，由于 G 是 3-边连通的，因此在 a 和 b之间存在三条两两边不相交的路径。由断言2.5可知，a 的所有邻点都必须位于其中一条路径上。因此，a 在 G中的度恰好为3。

在所有与 a 关联的边 e 以及所有满足断言2.5 中关于 e的条件的集合 X 中，选取 e 和 X，使得 $|X|$ 最小。注意，X 必须包含某条与 a关联的边 f 的两个端点。令 Y 为满足断言2.5 中关于 f的条件的顶点集。

由次模性，$|\delta(X\cup Y)|+|\delta(X\cap Y)|\leqslant|\delta(Y)|+|\delta(X)|=6$。注意，$a\in X\cap Y$和 $b\notin X\cup Y$。因此，由于 G 是 3-边连通的，我们实际上有 $|\delta(X\cup Y)|=|\delta(X\cap Y)|=3$。由于我们选择了 e 和 X，而不是 f 和 $X\cap Y$，可知 a 是 $X\cap Y$中唯一的顶点。注意，$X\setminus Y$和 $Y\setminus X$ 都非空。由于 a 的度为 3，$X\setminus Y$ 和 $Y\setminus X$ 中必有一个与 a之间至多有一条边。设$X\setminus Y$与 a之间至多有一条边；另一种情况的证明类似。由于 G 是 3-边连通的，$|\delta(X\setminus Y)|\geqslant 3$。这两条不通向 a 的边对 $\delta(X)$有贡献。然而，从 a 到 $V(G)$的两条边 $\setminus X$ 也对 $\delta(X)$有贡献，这与 $|\delta(X)|=3$矛盾。证明完毕。 □

3 3-边连通情形

本节利用引理 2.3 完整处理3-边连通情形。为方便起见，给定一个有效实例 (G,a,b)，若存在一条从 L 到 G 的欧拉迹，其中包含 L 作为子回路，则称回路 L（属于 G）可行。

假设 γ 是 G 的群标记，使得 (G,a,b) 有一个可行回路 L，其标记的阶大于 2。我们声称，此时存在从 a 到 b 的标记不同的欧拉迹。这是因为，如果 T_1 和 T_2 是迹，且 T_1LT_2 是一条从 a 到 b 的欧拉迹（其中 T_1 和/或 T_2 可以为空），那么 $\gamma(T_1LT_2)\neq\gamma(T_1L^{-1}T_2)$，因为 $\gamma(L)\neq\gamma(L^{-1})$。本节将证明，要么存在一个标记的阶大于 2 的可行回路，要么存在 γ 的一种移位 γ'，使得对于某个 $k\in\mathbb{N}$，$\langle G,\gamma'\rangle\cong\mathbb{Z}_2^k$。

我们的策略是维持一个更强的归纳假设，其实质是说，如果 $\langle G,\ \gamma'\rangle\cong\mathbb{Z}_2^k$，那么 G 的每条边都属于一些可行回路，且这些回路的标记生成 $\mathbb{Z}_2^k$。

命题 3.1。设 (G,a,b) 是一个有效实例，且 γ 是 G 的群标记。那么以下两种情况恰有一种成立。

1. 存在一个可行回路 L，满足 $\gamma(L)\neq\gamma(L^{-1})$。
2. 存在 γ 的一次移位 γ'，使得对于某个 $k\in\mathbb{N}$，$\langle G,\gamma'\rangle\cong\mathbb{Z}_2^k$。此外，对于任意 $e\in E(G)$，集合 $\{\gamma'(L):L$ 是一个包含 $\vec{e}\}$ 且生成 $\langle G,\gamma'\rangle$ 的可行回路。

证明。显然，这两个条件不可能同时成立，因此我们只需证明至少有一个条件成立。我们通过对 G 的边数进行归纳法来证明。可以假设 G 有一条边，否则第二种情况显然成立。

根据引理2.3，存在一条边 $e\in E(G)$，其端点为 a 和 a'，使得(G_e,a',b)是一个有效实例。如果 a 在 $G-e$中恰好关联两条边，那么我们将 e_1 和 e_2

记作这两条关联边，并将 $e_{1,2}$ 记作 G_e 的新边。我们可以假设，$\vec{e}_1$ 的方向指向 a，$\vec{e}_2$ 的方向背离 a，而 $\vec{e}_{1,2}$ 的方向从 $\vec{e}_1$ 的尾端指向 $\vec{e}_2$ 的头。最后，令 γ_e 表示与 γ 对应的 G_e 的群标记。（首先，我们暂时不考虑 e 的标记。然后，如果 $G_e \neq G - e$，我们将 $\vec{e}_{1,2}$ 标记为 $\gamma(\vec{e}_1)\gamma(\vec{e}_2)$。）

现在我们对有效实例 (G_e, a', b) 和标记 γ_e 使用归纳法。若第一种情况成立，则 (G, a, b) 也有一个可行回路 L，使得 $\gamma(L)$ 的阶大于 2。因此，我们可以假设存在 γ_e 的移位 γ'_e，使得第二种情况对 (G_e, a', b) 成立。为方便起见，我们将 $\langle G_e, \gamma'_e\rangle$ 记为 Γ_e。令 k 为满足 $\Gamma_e \cong \mathbb{Z}_2^k$ 的整数。

现在我们在 G 中定义与之对应的 γ 的移位 γ'。首先，执行与从 γ_e 得到 γ'_e 时相同的移位（在顶点处乘以群元素）。最后，若 $G_e \neq G - e$，则在 a 处再执行一次移位，使 $\vec{e}_1$ 由单位元标记。

注意，在 $E(G-e)$ 中，除非 e_1 和 e_2 存在，否则每条边的任一定向在 γ' 和 γ'_e 下具有相同的标记。此外，若 e_1 和 e_2 确实存在，则 $\gamma'(\vec{e}_1)$ 是单位元，且 $\gamma'(\vec{e}_2) = \gamma'_e(\vec{e}_{1,2})$。因此 $\langle G - e, \gamma'\rangle = \Gamma_e$ 与 $\mathbb{Z}_2^k$ 同构。不失一般性，我们假设 $\vec{e}$ 的定向背离 a，并用 β 表示 $\gamma'(\vec{e})$。（若 e 是一个环，则任意确定 $\vec{e}$ 的定向。）注意，$\langle G, \gamma'\rangle$ 是由 $\Gamma_e \cup \{\beta\}$ 生成的群。

我们首先证明，集合 $\{\gamma'(L) : L$ 是一个可行回路，它包含 $\vec{e}\}$ 生成的$\langle G, \gamma'\rangle$。我们用 $\mathcal{L}$ 表示所有满足以下条件的可行回路的集合：它们属于 (G, a, b)，且第一条弧为 $\vec{e}$。

断言 3.2. 集合 $\{\gamma'(L) : L \in \mathcal{L}\}$ 生成 $\langle G, \gamma'\rangle$。

证明。由于 $\Gamma_e \cup \{\beta\}$ 生成 $\langle G, \gamma'\rangle$，只需证明 $\Gamma_e \cup \{\beta\}$ 中的每个元素都由 $\{\gamma'(L) : L \in \mathcal{L}\}$ 生成。

如果 e_1 和 e_2 存在，那么我们将归纳陈述应用于边 $f = e_{1,2}$。否则，我们将归纳陈述应用于与 a关联的边 $f \neq e$。（我们可以假设这样的边存在，因为如果 e 是 G的唯一一条边，那么它就是顶点 $a = b$上的一个环，且断言成立。）因此，根据归纳陈述，由 $\{\gamma'_e(L) : L$生成的群是 (G_e, a', b)的一个可行回路，它包含 $\vec{f}\}$，即 Γ_e。在这两种情况下，都可得出 Γ_e 由回路 G 的 γ'-标记生成，其中这些回路为 L，且存在迹 T_1，T_2，使得$T_1 L T_2$ 是 G中从 a 到 b 的欧拉迹，T_1 的第一条边是 $\vec{e}$，并且 L 包含至少一条与 a 关联的边。

考虑上述迹 T_1、L、T_2。设 L_1 和 L_2 是 L 的子迹（其中 L_1、L_2 之一可以为空），且 $L = L_1 L_2$ 和 a 是 L_1的最后一个顶点。那么，$T_1 L_1$ 和$T_1 L_2^{-1}$都在 $\mathcal{L}$中。注意，

$$\begin{aligned}(\gamma'(T_1L_1))^{-1}\gamma'(T_1L_2^{-1}) &= \gamma'(L_1)^{-1}\gamma'(T_1)^{-1}\gamma'(T_1)\gamma'(L_2)^{-1}\\ &= \gamma'(L_1)^{-1}\gamma'(L_2)^{-1}\\ &= \gamma'(L_1)\gamma'(L_2),\end{aligned}$$

其中最后一行成立，是因为 $\gamma'(L_1)$ 和 $\gamma'(L_2)$ 的阶至多为 2。（要看出这一点，请回想 $\vec{e}$ 在 T_1 中，而其他弧生成 Γ_e，它与 $\mathbb{Z}_2^k$同构。）由于$\gamma'(L_1)\gamma'(L_2) = \gamma'(L)$，因此 $\mathcal{L}$中回路的 γ'标记生成 Γ_e。

此外，对于任意 $L \in \mathcal{L}$，存在 $\alpha \in \Gamma_e$ 使得 $\gamma'(L) = \beta\alpha$。由于我们已证明，α 由 $\mathcal{L}$中回路的 γ'-标记生成，因此 β 也由它们生成。

□

由于 $\mathcal{L}$ 中的每个回路对于 $(G、\ a、\ b)$都是可行的，命题 3.2 表明 $\{\gamma'(L)\colon L$ 是 $(G、\ a、\ b)$ 的一个可行回路，其中包含 $\vec{e}\}$ 生成 $\langle G、\ \gamma'\rangle$。

现在我们证明 $\langle G,\ \gamma'\rangle$ 同构于 $\mathbb{Z}_2^{k'}$，其中 $k'\in\mathbb{N}$。显然，若$\beta\in\Gamma_e$，结论成立，因此假设并非如此。现在考虑回路 $L\in\mathcal{L}$的 γ'-标记。它必为 $\beta\alpha$ 的形式，其中 $\alpha\in\Gamma_e$。如果这些元素 $\beta\alpha$ 中有任何一个的阶大于 2，那么引理的第一种情况成立，证明即告完成。因此，我们可以假设这些元素的阶都至多为 2。于是，这些元素 $\beta\alpha$ 和 $\beta\alpha'$ 中的任意两个都交换，因为

$$(\beta\alpha)(\beta\alpha')=(\alpha\beta^{-1})(\beta\alpha')=\alpha\alpha'=\alpha'\alpha=(\alpha'\beta^{-1})(\beta\alpha)=(\beta\alpha')(\beta\alpha).$$

任何由有限个阶为 2 且彼此交换的元素生成的群都同构于 $\mathbb{Z}_2^{k'}$，其中 $k'\in\mathbb{N}$；因此可得 $\langle G,\ \gamma'\rangle$ 同构于 $\mathbb{Z}_2^{k+1}$。

现在我们证明，对于任意边 $f\in E(G-e)$，集合 $\{\gamma'(L)\colon L$ 是 $(G,\ a,\ b)$ 的一个可行回路，且该回路包含 $\vec{f}\}$ 并生成 $\langle G,\ \gamma'\rangle$。固定 $f\in E(G-e)$，令 Γ^f 表示由包含 f 的 $(G,\ a,\ b)$ 的可行回路的标记生成的群。由于 $(G_e,\ a',\ b)$ 的每个可行回路都“提升”为 $(G,\ a,\ b)$ 中标记相同的可行回路，因此 $\Gamma^f\supseteq\Gamma_e$。由此，我们可以假设 $\beta\notin\Gamma_e$，只需证明 $\beta\in\Gamma^f$。

接下来只需证明存在一个可行回路，同时包含 e和f 作为底层无向边。由于该群同构于 $\mathbb{Z}_2^{k+1}$，阶和定向并不重要。一旦证明这样的可行回路存在，就可得出β 也由集合 $\{\gamma'(L)$ 生成：L 是一个包含 $\vec{f}\}$的可行回路，因为我们已经知道，除 e 之外所有其他边的标记均已生成。

现在我们来证明这样的可行回路确实存在。由于 G是 2-边连通的，根据关于边不相交路径的门格尔定理，G 中的任意一对边都属于同一个回路。令L 为 G 的一个边极大回路，其中同时包含 e 和 f。我们断言 L 是可行的。由边极大性可知，$G-E(L)$中每个含有边的连通分支都至少有一个奇度数顶点。因此，若 $a=b$，则 L 是一个欧拉回路，结论即得。若 $a\neq b$，则 a 和b 位于 $G-E(L)$的同一个连通分支中，且其他每个连通分支都只是一个孤立顶点。令 T 为非平凡连通分支内从 a 到 b的一条欧拉迹。令 v 为同时位于 T 和 L上的一个顶点，并令 $T=T_1T_2$ 满足 T_1 的头等于 T_2的尾，且二者都等于 v （ T_1和 T_2 中可能有一个为空）。那么 T_1LT_2 是 G的一条欧拉迹，从而证明 L是可行的，正如所需。命题 3.1 的证明至此完成。

□

我们注意到，命题3.1意味着，如果 G 是一个 3-边连通欧拉图，且$a=b$ 满足：从 a 到 b 的每条欧拉迹具有相同的标记，那么对于 $a=b$ 的任意选择，结论也成立（事实上，任意选择都对应相同的标记）。对于一般的欧拉图，这一结论并不成立：考虑将 $a=b$ 改为图3中的中心顶点。

4 一般情形

本节将说明如何把一般情形——即图不一定是3-边连通的情形——归约为命题3.1。主要定理表述为定理4.3。

为陈述完整的定理，我们首先需要给出一些定义。图 G 的核心 （也称为 3-核心）是 G 的一个极大顶点集，其中任意一对顶点的两两边连通度至少为 3。众所周知，图的各个核心两两不相交，且其并集为 V（G）。核心已用于许多不同的应用，例如研究含有禁用浸入 [55]的图的结构。正如 [17], 所指出的，这种方法等价于

考察 Gomory-Hu树，不同之处在于，我们不关心树中边的精确容量，只关心容量是否至少为 3。

我们使用以下引理，从每个核心得到一个有效实例。

引理 4.1. 对于任意图 G 及其任意核心 X，G的每个连通分支与 X之间至多有两条边。此外，如果 G 至少有两个核心且是连通的，那么对于 G的任意顶点 x，存在一个核心 $X \subseteq V(G) \setminus \{x\}$，使得 $G - X$ 是连通的。

证明。首先，反设 $G-X$的某个连通分支 H与 X之间至少有三条边。考虑 H 的一个极小子图，该子图连接这些边的端点，由此可知，存在一个顶点 $u \in V(H)$，使得存在三条从 u 到 X的边不相交迹。然而，由于 u不属于核心 X，存在一个 2-边割将 u与 X中的某个顶点分开，因而也将其与 X的所有顶点分开，矛盾。

现在，假设 G 至少有两个核心且是连通的。选取一个核心 $X \subseteq V(G) \setminus \{x\}$，使得 $G-X$ 中包含 x 的连通分支所含顶点数尽可能多。如果 $G - X$ 不连通，那么它有一个不包含 x的连通分支 H。由于连接 H 与 X的 G至多有两条边，因此存在一个包含于 $V(H)$中的核心 X'。这个核心 X' 与我们对 X的选择矛盾。 □

现在，为方便起见，我们称一个实例为元组 $\mathcal{G} = (G, a, b, C)$，其中 G 是一个图，a 和 b 是 G 的顶点（可能带有 $a = b$），而 C 是 G 中从a 到 b的欧拉迹。我们称一个实例（或有效实例）是带标记的，如果它还包含该图的群标记 γ。设 $\mathcal{G} = (G, a, b, C)$ 是一个实例，可能带有标记γ，并设 X 是 G的一个核心。现在我们说明如何从X得到一个有效实例 (H, a', b')，以及如何从 γ得到 H 的关联标记 γ_H。

首先，图 H 的顶点集为 X，并包含 G 的所有边 e，其中两端点均属于 X；我们令 $\gamma_H(\vec{e}) = \gamma(\vec{e})$。接下来，对于 C 的每个子迹 T，如果其第一条和最后一条弧的底层边分别属于 $\delta(X)$，且该子迹起于并终于 X，但在X中没有内部顶点，我们向 H 添加一条边 e，使得 $\vec{e}$ 从 T 的尾端定向至 T的头；我们令$\gamma_H(\vec{e}) = \gamma(T)$。至此，$H$和 γ_H的定义完成。最后，我们令 a'为 X 中被 C命中的第一个顶点，并令 b' 为 X 中被 C命中的最后一个顶点。示例见图 5。

我们现在证明（H，a'，b'）实际上是一个有效实例。

引理 4.2. 设 $\mathcal{G} = (G, a, b, C)$ 是一个实例，且 X 是 G 的一个核心。那么由 X 得到的元组(H, a', b') 是一个有效实例。

证明。我们可以看到，通过考察 C 中尾端为 a'、头为 b' 的极大子迹，H 包含一条从 a' 到 b' 的欧拉迹。

现在反设存在 Y 的一个非空真子集V（H），使得 $|\delta_H(Y)| \leqslant 2$。由引理 4.1 可知，$G-X$ 的每个连通分支 K 至多有两个邻点属于 X。令 Y' 为 Y 与 $G-X$ 的任一连通分支 K 的顶点集之并，其中该分支的所有邻点都在 Y 中。注意，若 $G - X$ 的一个连通分支 K 有两个不同的邻点 x 和 y，且 K 不同时包含 a 和 b，则我们在 x与 y 之间向 H 添加一条边。（由于在 G 中分离 a 与 b 的每个边割都是奇数，因此这样的连通分支不可能恰好包含 a 和 b 中的一个。）因此，若 $G-X$ 的任何连通分支 K 都不同时包含 a 和 b，且在 Y 中有一个邻点、在 V（H）中有一个邻点 $\setminus Y$，则我们有 $|\delta_H(Y)| = |\delta_G(Y')|$。此外，$|\delta_G(Y')| \geqslant 3$，因为 X 中的顶点两两 3-边连通。

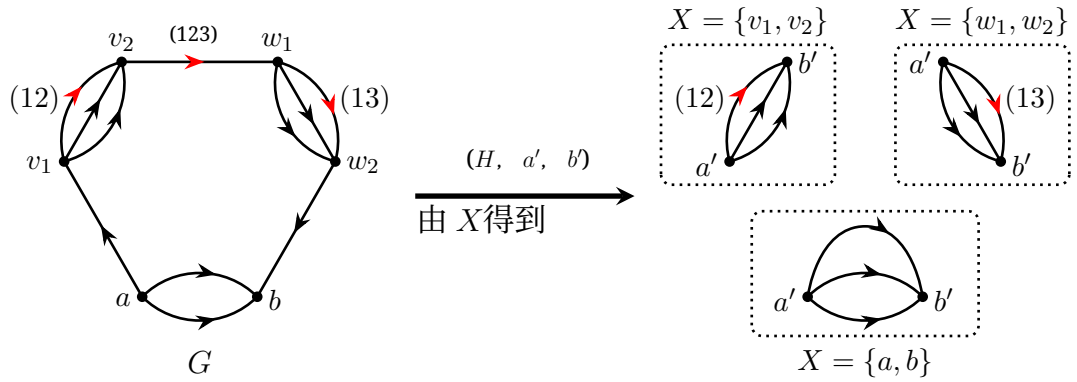


图 5：左图展示了一个实例（G、a、b、C），其中 C 是 G 中从 a 到 b 的任意欧拉迹。所有边的标记均为单位元，唯有红色带箭头的弧例外，它们标记为对称群 $\mathfrak{S}_3$ 中的某些非单位元。G 的核心为 $\{a, b\}$、$\{v_1, v_2\}$ 和 $\{w_1, w_2\}$。由这些核心得到的有效实例（H、a'、b'）展示于右图；值得注意的是，C 的具体选择并不重要，因为从 a 到 b 的每条欧拉迹都有相同的标记。

因此，我们可以假设存在这样一个连通分支 K。那么 $|\delta_H(Y)| = |\delta_G(Y')| - 1$，并且 $|\delta_G(Y')|$ 是偶数，因为它不包含 a 或 b。由于 X 中的顶点两两 3-边连通，因此 $|\delta_G(Y')| \geqslant 4$。证明至此完成。 □

现在我们可以陈述完整的刻画了。

定理 4.3。 对于任意实例 $\mathcal{G} = (G, a, b, C)$ 和标记 γ，以下条件等价。

1. G中从 a到 b的每条欧拉迹都具有相同的 γ-标记。
2. 存在 γ 的一个移位 γ'，使得对每个核心 X，由 X 得到的有效实例(H, a', b')以及由 γ' 得到的标记 γ_H 对某个 k满足 $\langle H, \gamma_H \rangle \cong \mathbb{Z}_2^k$。

此外，如果这两个条件都不成立，则 G 有一个回路 L，使得 $\gamma(L) \neq \gamma(L^{-1})$，并且存在一条从 a到 b的欧拉迹，以 L 作为子回路。

证明。我们对 G的核心个数使用归纳法证明该定理。对于基础情形，如果只有一个核心，则该定理由命题3.1成立。

因此我们可以假设至少有两个核心。于是由引理 4.1（注意 G 是连通的，因为它有一条从 a 到 b的欧拉迹），存在 G 的一个核心 X，使得 $b \notin X$且 $|\delta_G(X)| \leqslant 2$。设$(H, a', b')$和 γ_H由 X和 γ得到。由引理 4.2，元组(H, a', b')是一个有效实例。由命题 3.1 可知，H 中从a' 到 b' 的每条欧拉迹都具有相同的 γ_H-标记，当且仅当存在 γ_H 的一个移位 γ'_H，使得对某个 k有$\langle H, \gamma_H \rangle \cong \mathbb{Z}_2^k$。此外，如果这些条件不成立，则$(H, a', b')$有一个可行回路 L，其标记的阶大于2。

^^^^ 现在我们定义一个新的有效实例 $\mathcal{G} = (G, \hat{}a, b, C)$，以及 G 的标记 $\hat{}\gamma$。如果 X 包含 $\hat{}a$，那么 $|\delta(X)| = 1$，并令 $\hat{}a$ 为 X 唯一的邻点。我们还令 G 由 $\hat{}G$ 删除 X 得到，并令 C 由 C 删除所有弧（截至并包括从 $\delta(X)$ 出发的弧）得到。另一方面，如果 X 不包含 a，因此 $|\delta(X)| = 2$，那么我们设定 $\hat{}\hat{}a = a$，并按如下方式由 $\mathcal{G}$ 得到 $\mathcal{G}$。首先，令 T 为 C 的子迹，其首弧和末弧位于 $\delta(X)$ 中，且起点和终点都在 $V(G) \setminus X$，并具有内部

ˆ 顶点位于 X 中。然后，通过将 C 中的 T 替换为一条从 Tˆ 的尾端到 T 的头的新增弧，得到 C。同样，通过删除 X 并添加一条新边 e，使 $\vec{e}$ 的方向从 T 的尾端指向 T 的头，从而由 G 得到 G；我们设定 ˆ$\gamma(e) = \gamma(T)$。

注意，核心 C 的核心恰好也是 G 的核心，只是不包括 X。（要看出这一点，只需注意，G 中任意一对顶点的边连通度都与其在 G中的边连通度相同。）因此，根据归纳法，对于带有标记ˆγ的 $\mathcal{G}$，这两个条件等价。此外，还要注意，G中从 a 到 b 的每条欧拉迹具有相同的 γ标记，当且仅当以下两点均成立：1） G 中从ˆa 到 b 的每条欧拉迹都具有相同的ˆγ标记；2） H 中从 a' 到 b' 的每条欧拉迹都具有相同的ˆ γ_H标记。此外，还要注意，G 的每个核心相对于 $\mathcal{G}$ 和相对于 $\mathcal{G}$ 都会产生相同的有效实例（因为 C 中相关的子迹会产生 C 中端点相同的子迹）。同样，在核心 Y 的顶点处进行移位，不会改变除 Y以外任何其他核心的有效实例的标记。最后，如果某个核心具有可行回路L，那么 L 也是 G中从 a 到 b的一条欧拉迹的子回路。定理得证。

□

5 算法

我们首先给出一个简单的算法，用于检验在利用命题 a 到 b 的 3-边连通群标记图中，所有欧拉迹是否具有相同的标记。3.1。接着，我们利用定理 4.3 给出适用于一般群标记图的算法。最后，我们将此算法用于判定问题，以便在不同标记的欧拉迹存在时实际找出它们。在本节中，我们始终假设图标记在有限生成群 Γ 上，并且可以使用预言机，在时间 Γ 内解决 $\phi(n)$ 字问题，其中 n 是输入字的长度。

我们还假设，作为下述算法输入的 Γ 标记图 (G, γ) 以邻接表形式存储；对于一条边 e，我们可以访问其 $\vec{e}$ 和 $\vec{e}^{-1}$ 的标记；并且，如果 $\gamma(\vec{e})$ 是字 $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t$，那么 $\gamma(\vec{e}^{-1})$ 就是形式上的逆字$\alpha_t^{-1}\ldots\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}$。对于任意选择的每条边 e 的定向方式 $\vec{e}$，我们将 (G, γ) 的总字长定义为对所有边 $e \in E(G)$ 的字长 $\gamma(\vec{e})$ 求和。当我们说某个算法返回一个移位 γ' of γ时，意思是除了获知每条弧的新标记外，我们还知道对于每个顶点 v，相应的字 α_v，它是我们移位所用的群元素。（回想一下，任何移位都可以用这种方式指定。）γ' 相对于 γ 的差异是这些字 α_v 中的最大长度。

我们首先说明如何“规范化”群标记。对于连通群标记图 (G, γ) 的生成树 T，如果对于 T 中的所有边 e，移位 γ' 满足 $\gamma'(\vec{e}) = 1$，则称 γ' 是 T-规范化的。我们将以下述意义证明，任意两个 T- 规范化的移位都是 “ 共轭元 ”。

引理 5.1。 设 (G, γ) 是一个连通群标记图，且 T 是 G 的生成树。若 γ' 和 γ'' 是 γ 的 T-规范化移位，则存在一个群元素 α，使得对所有边 $e \in E(G)$，都有 $\alpha\gamma'(\vec{e})\alpha^{-1} = \gamma''(\vec{e})$。

证明。 由于 γ' 和 γ'' 是公共函数 γ 的移位，因此 γ'' 是 γ' 的一个移位。注意，对于不同的顶点 u 和 v，先在 u 处移位还是先在 v 处移位并无影响。因此我们可以假设，γ'' 是由 γ' 在每个顶点 v 处分别按某个元素（记作 α_v）移位得到的。

固定任意顶点 u，并令 $\alpha := \alpha_u$。对于任意顶点 v，在 T 中存在一条从u 到 v的唯一路径 P。由于对于 P中的所有边 e，$\gamma'(\vec{e}) = \gamma''(\vec{e}) = 1$，我们推得 $\alpha_v = \alpha$。因此，γ'' 是通过在每个顶点处移位 α 由 γ' 得到的，从而对于 G的所有边 e，$\alpha\gamma'(\vec{e})\alpha^{-1} = \gamma''(\vec{e})$，正如所需。

□

接下来，我们说明如何将任意群标记转化为规范化的群标记。

引理 5.2。 设(G,γ) 是一个总字长为 ℓ 的连通群标记图，且 T 是 G 的生成树。那么在时间 $\mathcal{O}(\ell|E(G)|)$ 内，我们可以找到一个与 T 归一化的移位 γ'，其γ与 γ 的差异至多为 ℓ，使得 $\langle G,\gamma'\rangle$ 是 $\langle G,\gamma\rangle$ 的子群。

证明。 我们按如下方式构造一个与 T 归一化的移位。任取 T 的一个根，并按广度优先的方式从根遍历到叶。我们不对根顶点进行移位。对于其他每个顶点，依次将其移位，移位量为连接它与其父节点的弧的标记，使得该弧现在的标记为 1。由于我们始终只使用 $\langle G,\gamma\rangle$ 中的元素进行移位，所得移位 γ' 满足：$\langle G,\gamma'\rangle$ 是 $\langle G,\gamma\rangle$ 的子群。

每次我们在顶点 v 处进行移位时，移位所用的字 α_v 的长度等于从 v 到 T 的根的路径上各弧的字长之和。因此，我们移位时所用的字长始终至多为 ℓ。考虑到写出单条弧的标记可能需要 $\mathcal{O}(\ell)$ 的时间，弧上的标记可以在 $\mathcal{O}(\ell|E(G)|)$ 时间内写出。 □

利用上述引理，我们证明：要检查 (G,γ) 是否存在满足 $\langle G,\gamma'\rangle\cong\mathbb{Z}_2^k$ 的移位 γ'（其中某个 k），只需检查任意一个 T-规范化移位即可。

引理 5.3。 设 (G,γ) 是一个连通群标记图，并设 T 是 G 的一棵生成树。若存在 γ 的移位 γ'，使得对于某个 $k\in\mathbb{N}$ 有 $\langle G,\gamma'\rangle\cong\mathbb{Z}_2^k$，那么对于 γ 的任意 T-规范化移位 γ''，存在某个满足 $r\leqslant k$ 的 $r\in\mathbb{N}$，使得 $\langle G,\gamma''\rangle\cong\mathbb{Z}_2^r$。

证明。假设存在一个 γ' 的移位 γ，使得对于某个 $k\in\mathbb{N}$，$\langle G,\gamma'\rangle\cong\mathbb{Z}_2^k$。根据引理 5.2，存在一个 γ'（因此也是 γ）的 T-规范化移位 γ''，使得 $\langle G,\gamma''\rangle$ 是 $\langle G,\gamma'\rangle$的子群，这意味着对于某个满足 $r\leqslant k$的 $r\in\mathbb{N}$，$\langle G,\gamma''\rangle\cong\mathbb{Z}_2^r$。根据引理 5.1，对于 γ的任意 T-规范化移位 γ'''，有 $\langle G,\gamma'''\rangle\cong\langle G,\gamma''\rangle\cong\mathbb{Z}_2^r$。 □

引理5.3和命题3.1立即给出了以下适用于 3-边连通图的简单算法，这些图有一条欧拉迹，从 a 到 b。根据引理 2.2，当群是阿贝尔群时，我们也可以去掉关于 3-边连通度的假设。

命题 5.4。 设(G,γ) 是一个含有 m 条边、总字长为 ℓ 的3-边连通群标记图。设 a 和 b 是 G 的顶点，且存在一条从 a 到 b 的欧拉迹。那么，可以在 $\mathcal{O}(\ell m)\cdot\phi(12\ell)$ 时间内判定从 a 到 b 的每条欧拉迹是否具有相同的标记。此外，若答案为肯定，算法会找到 γ 的一个移位 γ'，其与 γ 的差异至多为 ℓ，使得 $\langle G,\gamma'\rangle$ 与某个 $k\in\mathbb{N}$ 同构。

证明。利用引理 5.2，我们可以在 $\mathcal{O}(\ell m)$ 时间内找到 G 的一棵生成树 T，以及 γ 的一个 T-标准化移位 γ'，其与 γ 的差异至多为 ℓ。如果 $\gamma'\rangle$ 与某个 $k\in\mathbb{N}$ 同构，则输出“是”，并给出见证 γ'。否则，输出“否”。通过检查 $\{\gamma'(\vec{e}):e\in E(G)\}$ 中的每个元素是否阶为 2，且与其他所有元素都可交换，可以在 $\mathcal{O}(\ell m)\cdot\phi(12\ell)$ 时间内完成此检查。（注意，$\ell\geqslant m$，并且对于每条边 e，$\gamma'(\vec{e})$ 的字长至多为 3ℓ。此外，我们可以通过检查 $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ 是否为单位元，来确定元素 α 和 β 是否可交换。）该算法的正确性由命题 3.1 和引理 5.3 得出。 □

现在，我们给出适用于一般群标记图的完整定理，使用定理 4.3。

定理 5.5。 设 (G,γ) 是一个连通群标记图，具有 m 条边，总字长为 ℓ。那么，可以在 $\mathcal{O}(\ell m)\cdot\phi(12\ell)$ 时间内判定从顶点 a 到顶点 b 的每条欧拉迹是否具有相同的标记。此外，若答案为肯定，算法将找出一个 γ' 的 γ 移位，其差异至多为 ℓ，使得定理2 的条件4.3 成立。

证明。 我们首先检验是否存在一条从 a 到 b的欧拉迹。这可以在$\mathcal{O}(m)$时间内完成；只需检查除 a 和 b 之外的每个顶点是否具有偶数度；如果 a 和 b 不同，则检查它们是否具有奇数度。如果不存在这样的迹，我们就返回“每条迹都平凡地具有相同标记”。否则，我们找出这样一条迹 C，利用 Hierholzer 算法可在 $\mathcal{O}(m)$ 时间内完成 [28]。

接着，我们将 $V(G)$ 划分为若干核心。根据 [47]，这一步可在 $\mathcal{O}(m)$ 时间内完成。然后，对每个核心 X，我们根据实例 (G, a, b, C) 和第 4 节中的标记 γ_H from γ，得到一个有效实例 (H, a', b')。对于任意一个核心，这一步可在 $\mathcal{O}(\ell)$ 时间内完成；由于核心至多有 n 个，因此这部分对运行时间的贡献为 $\mathcal{O}(\ell n)$。注意，(H, γ_H) 的总字长也至多为 ℓ。然后，对于每个核心，我们使用命题 5.4 中的算法，在 $\mathcal{O}(\ell|E(H)|) \cdot \phi(12\ell)$ 时间内检验，从 a' to b' 出发的每条欧拉迹是否具有相同的标记。若是，我们还可以从 γ_H 得到 γ_H 的一个移位 γ'_H，其差异至多为 ℓ，使得对于某个 k，有 $\langle H, \gamma'_H \rangle \cong \mathbb{Z}_2^k$。注意，所有这些不同图 H 的边数之和等于 G 的边数 m。因此，这一步可在 $\mathcal{O}(\ell m) \cdot \phi(12\ell)$ 时间内完成。

如果每个有效实例$(H,\ a',\ b')$ 都有这样的移位，那么我们输出“是”；否则输出“否”。算法的正确性由定理4.3推出。如果我们输出“是”，则通过对每个 H，按照 γ'_H 中的方式进行移位，得到 γ' 的 γ 移位。 □

最后，我们利用定理5.5 来寻找标记不同的迹（如果存在）。

推论 5.6。设(G, γ) 是一个连通群标记图，含有 m 条边，总字长为 ℓ。设 a 和 b 是 G 的顶点，且存在两条从 a 到 b、标记不同的欧拉迹。那么我们可以在 $\mathcal{O}(\ell m^3) \cdot \phi(12\ell)$ 时间内，在 $\mathcal{O}$中找到一个回路 L，使得 G 具有 $\gamma(L) \neq \gamma(L)^{-1}$，以及一条从 a 到 b、属于 G的欧拉迹 T，其中 L 是一个子回路。

证明。根据定理4.3，这样的回路 L 存在，当且仅当存在两条从 a 到 b、具有不同标记的欧拉迹。利用这一等价关系，我们按如下方式进行。

只要存在一对弧 $\vec{e}$ 和 f 满足 $\vec{e}f$ 是迹，并且将 $\vec{e}$ 和 f 拆分不会改变这样的 L 是否存在，我们就将它们拆分，并将新弧标记为$\gamma(\vec{e})\gamma(\vec{f})$。根据定理 L，我们可以检验这样的5.5是否存在。对于图中的每条弧，我们都存储一条迹，初始时这条迹仅包含该弧。每次拆分一对弧时，我们按照正确的顺序连接它们所对应的迹，并合并它们的标记。这样，所得图中的每条弧都对应于原图中一条具有相同标记的迹。弧 $\vec{e}$ 和 $\vec{e}^{-1}$ 对应于一条迹 T 及其逆 T^{-1}。

注意，如果一对弧在算法的某一阶段不能被分裂掉，那么它们在算法的任何后续阶段也不能被分裂掉。更精确地说，如果我们在算法的某一阶段判定弧 $\vec{e}$ 与 f 不能被分裂掉，那么在算法的任何后续时刻，若 $\vec{e}_1$ 是一条其对应的迹以 $\vec{e}$结束的弧，而 f_1 是一条其对应的迹以 f开始的弧，则 $\vec{e}_1$ 与 f_1 不能被分裂掉。因此，为了加快算法，每条弧 $\vec{e}$存储一个“禁止”弧列表 $F(\vec{e})$，从而使我们知道 $\vec{e}$不能与 $F(\vec{e})$ 中的任何弧一起被分裂掉。每当我们测试一对弧时，就更新这些列表。

每次应用定理5.5 需要 $\mathcal{O}(\ell m) \cdot \phi(12\ell)$ 时间。更新列表 $F(\vec{e})$可以（朴素地）在 $\mathcal{O}(\ell m)$ 时间内完成，因为 $\ell \geqslant m$。因此，由于在算法的整个过程中我们只检查 $\mathcal{O}(m^2)$ 对弧，总运行时间为 $\mathcal{O}(\ell m^3) \cdot \phi(12\ell)$。

一旦算法确定无法再拆分弧，我们就断言剩下的边至多有三条。为此，注意存在一条欧拉迹 $T_1 L T_2$从 a到 b，使得 L是一个回路，其中有 $\gamma(L) \neq \gamma(L)^{-1}$。如果 L 不是环，那么一对

位于 L内部的弧可以拆分。类似地，如果 T_1 或 T_2 至少包含两条弧，那么就可以拆分一对弧。因此，得到的图至多有三条边，且 L 是一个环。然后，我们通过读取小图中与T_1， L， T_2 对应的迹，在原图中还原 T_1， L， T_2。 □

综上，定理5.5 和推论5.6 立即推出引言中的定理1.2。

参考文献

[1] M. C. Bell 和 S. Schleimer。映射类群字问题的准线性时间算法，2025年。[2] I. Bondarenko。群的字问题与增长。《代数学杂志》，677：252–266，2025年。[3] W. W. Boone。字问题。《数学年刊》，70(2)：207，1959年9月。[4] W. W. Boone 和 G. Higman。具有可解字问题的群的代数刻画。《澳大利亚数学会杂志》，18(1)：41–53，1974年。[5] A. Bouchet。各向同性系统的图表示。《组合理论杂志 B辑》，45(1)：58–76，1988年。[6] A. Bouchet。映射与 Δ-拟阵。《离散数学》，78(1-2)：59–71，1989年。[7] A. Bouchet。圆图障碍。《组合理论杂志 B辑》，60(1)：107–144，1994年。[8] N. Brady、T. Riley 和 H. Short。《有限生成群字问题的几何》。《数学高级课程》。Birkhäuser Verlag，瑞士，第一版，2007年。[9] L. Branković、M. Miller、J. Plesník、J. Ryan 和 J. Širáň。利用电压赋值构造给定度和直径的大凯莱图札记。《电子组合学杂志》，5：研究论文9，11，1998年。[10] R. Cen、J. Li 和 D. Panigrahi。近线性时间的边连通度增强。载于《第54届 ACM SIGACT 计算理论年会论文集》，STOC 2022，第137–150页，纽约，NY，美国，2022年。美国计算机协会。[11] G. Chartrand、H. Jordon 和 P. Zhang。欧拉图的圈分解猜想。《澳大拉西亚组合学杂志》，58：48–59，2014年。[12] C. Chekuri、T. Rukkanchanunt 和 C. Xu。论保持元素连通性的图简化。载于 N. Bansal 和 I. Finocchi 编，《算法——ESA 2015》，第313–324页，柏林、海德堡，2015年。Springer Berlin Heidelberg。[13] M. Chudnovsky、W. H. Cunningham 和 J. Geelen。在群标记图中打包非零A-路径的算法。《Combinatorica》，28(2)：145–161，2008年。[14] M. Chudnovsky、J. Geelen、B. Gerards、L. Goddyn、M. Lohman 和 P. Seymour。在群标记图中打包非零 A-路径。《Combinatorica》，26(5)：521–532，2006年。[15] A. Dahlberg 和 S. Wehner。使用单量子比特操作变换图态。英国皇家学会哲学汇刊 A：数学、物理与工程科学，376(2123)：20170325，2018年。[16] M. de Graaf 和 A. Schrijver。曲面上图的分解。《组合理论杂志 B辑》，70(1)：157–165，1997年。[17] M. DeVos、J. McDonald、B. Mohar 和 D. Scheide。关于禁止团浸入的札记。《电子组合学杂志》，20(3)：P55，2013年。

[18] B. Domanski 和 M. Anshel。群字问题中德恩算法的复杂度。《算法期刊》，6(4)：543–549，1985年。[19] J. A. Ellis-Monaghan 和 I. Moffatt。嵌入图的扭曲对偶。《美国数学会汇刊》，364(3)：1529–1569，2012年。[20] D. Epstein 和 D. Holt。字双曲群中共轭问题的线性时间复杂度。《国际代数与计算杂志》，16(02)：287–305，2006年。[21] G. Fan 和 C.-Q. Zhang。欧拉图的回路分解。《组合理论杂志 B辑》，78(1)：1–23，2000年。[22] H. N. Gabow。高效的图分裂算法。载于《第二十六届 ACM 计算理论研讨会论文集》，STOC ’94，第696–705页，纽约，NY，美国，1994年。美国计算机协会。[23] J. Geelen、B. Gerards 和 G. Whittle。解决罗塔猜想。《美国数学会通讯》，61(7)：736–743，2014年。[24] B. Gerards。论塔特对图拟阵的刻画——一种图论证明。《图论杂志》，20(3)：351–359，1995年。[25] J. L. Gross。电压图。《离散数学》，9：239–246，1974年。[26] J. L. Gross 和 T. W. Tucker。利用置换电压赋值生成所有图覆盖。《离散数学》，18(3)：273–283，1977年。[27] J. L. Gross 和 T. W. Tucker。拓扑图论。《离散数学与优化 Wiley-Interscience 系列》。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1987年。Wiley-Interscience 出版物。[28] C. Hierholzer 和 C. Wiener。关于能否沿一条线段路径绕行而不重复且不中断。《数学年刊》，6(1)：30–32，1873年。[29] T. Huynh。群标记图的连接问题。博士论文，滑铁卢大学，2009年。[30] T. Huynh、F. Joos 和 P. Wollan。约束圈的统一 Erdős–Pósa 定理。《Combinatorica》，39(1)：91–133，2019年。[31] T. Huynh、A. D. King、S.-i. Oum 和 M. Verdian-Rizi。强偶圈可分解图。《图论杂志》，84(2)：158–175，2017年。[32] Y. Iwata 和 Y. Yamaguchi。在群标记图中寻找最短非零路径。《Combinatorica》，42(增刊2)：1253–1282，2022年。[33] N. Kakimura、K.-i. Kawarabayashi 和 Y. Kobayashi。在4-边连通图中经过指定顶点打包边不交的奇欧拉子图。《SIAM离散数学杂志》，31(2)：766–782，2017年。[34] K.-i. Kawarabayashi 和 Y. Kobayashi。4-边连通图中的边不交奇圈。《组合理论杂志 B辑》，119：12–27，2016年。[35] K.-i. Kawarabayashi、B. Reed 和 P. Wollan。满足奇偶条件的图子式算法。载于《2011年 IEEE 第52届计算机科学基础年会》，第27–36页。IEEE，2011年。[36] L. C. Lau 和 C. K. Yung。保持全对边连通度的高效边分裂算法。《SIAM计算杂志》，42(3)：1185–1200，2013年。[37] S. Lins。射影图中回路的极小极大定理。《组合理论杂志 B辑》，30(3)：253–262，1981年。[38] C.-H. Liu 和 Y. Yoo。具有群可表达约束的不交路径问题。载于《第57届 ACM 计算理论年会论文集》，第1933–1943页，2025年。

[39] W. Liu、J. Wang、Q. Cui和Y. Yang。强偶圈可分解的四正则线图。《欧洲组合学杂志》，94：论文编号103315，17，2021年。[40] L. Lovász。组合问题与习题。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹—纽约，1979年。[41] W. Mader。图的边连通度的一种约化方法。《离散数学年刊》，3:145–164，1978年。[42] W. Mader。论极小 n-边连通图中度为 n 的顶点。《组合学、概率与计算》，4(1):81–95，1995年。[43] E. Máčajová和M. Škoviera。欧拉图的奇分解。《*SIAM*离散数学杂志》，31(3):1923–1936，2017年。[44] R. McCarty。顶点子图的局部结构。博士论文，滑铁卢大学，2021年10月。[45] R. McCarty。将符号图分解为根电路。《组合学进展》，页码为论文编号7，22，2024年。[46] I. Moffatt。平面图的部分对偶、可分性与纽结图。《代数与几何拓扑》，12(2):1099–1136，2012年。[47] H. Nagamochi和T. Ibaraki。计算多重图中3-边连通分量的线性时间算法。《日本工业与应用数学杂志》，9(2):163–180，1992年。[48] P. S. Novikov。论群论中字问题的算法不可解性。《斯捷克洛夫数学研究所论文集》，第3–143页，1955年。俄语。[49] B. Reed。芒果与蓝莓。*Combinatorica*，19(2):267–296，1999年。[50] A. Schrijver。克莱因瓶与多商品流。*Combinatorica*，9(4):375–384，1989年。[51] P. Seymour。平面图中的偶电路。《组合理论杂志 *B*辑》，31(3):327–338，1981年。[52] A. Sisto和S. Zbinden。3-流形群字问题的近线性解法。《国际数学研究通报》，2026(4):rnag013，2026年2月。[53] Z. Szigeti。保持图的局部边连通度的边分裂。《离散应用数学》，156(7):1011–1018，2008年。GRACO 2005。[54] M. Van den Nest、J. Dehaene和B. De Moor。局部克利福德变换作用于图态的图示描述。《物理评论*A*辑》，69:022316，2004年2月。[55] P. Wollan。不允许固定浸入的图的结构。《组合理论杂志 *B*辑》，110:47–66，2015年。[56] T. Zaslavsky。偏图。I. 偏性、平衡与增益。《组合理论杂志 *B*辑》，47(1):32–52，1989年。[57] C. Q. Zhang。论欧拉图的偶电路分解。《图论杂志》，18(1):51–57，1994年。