稀疏格拉斯曼上的低复杂度高能效预编码码本设计

Joe Asano，*IEEE*学生会员，Yuto Hama，*IEEE*会员，Hiroki Iimori，*IEEE*会员，
Chandan Pradhan，*IEEE*会员，Szabolcs Malomsoky，以及Naoki Ishikawa，*IEEE*高级会员。

arXiv:2603.02515v1 [eess.SP] 3 Mar 2026

摘要——**我们提出一种面向预编码码本的稀疏格拉斯曼设计。由于其稀疏结构，所提出的码本实现了较低的峰均功率比（PAPR）、较低的预编码器乘法复杂度以及较低的存储成本，同时展现出与最优码本相当的性能。具体而言，我们介绍一种基于格拉斯曼流形上舒伯特胞腔分解的码本构造方法。设计最优格拉斯曼预编码码本通常需要很高的计算复杂度。在所提出的方法中，通过利用其稀疏性，目标函数得以简化，并且与现有先进码本相比，搜索空间也可显著缩小。上行系统中的数值仿真表明，在不相关瑞利衰落信道下，所提出的稀疏码本在可达速率方面渐近逼近最优码本，并优于5G NR中当前采用的码本，同时其峰均功率比显著低于传统稠密设计。这些结果证实，所提出的稀疏码本可在广泛的上行传输场景中作为传统码本的一种实用且高能效的替代方案。**

索引词—**格拉斯曼流形预编码码本、多输入多输出（MIMO）、峰均功率比（PAPR）**

I. 引言

THE 无线通信流量持续稳步增长，这是由实时云服务和超高清视频应用的快速扩展所推动的 [1]。尽管当前5G标准 [2]通过大规模多输入多输出（MIMO）技术、毫米波频谱的使用以及先进的波束管理，实现了亚毫秒级时延和千兆比特每秒的峰值数据速率，未来的超5G系统仍致力于进一步提升性能。这些下一代网络旨在显著增强超高可靠性、超低时延、能效、频谱效率和总体吞吐量 [3]。与此同时，物联网和设备到设备通信的使用预计将进一步扩展，从而需要复杂度更低、功耗更低的更高效系统。为应对这些挑战，稀疏性在现代无线通信中发挥着至关重要的作用 [4]。由于其数学特性，稀疏性使低复杂度算法成为可能，例如压缩感知和正交匹配追踪 [5], ，这些算法被用于信道估计 [6]和波束成形设计 [7]。稀疏性也被用于空间调制方案，例如索引调制 [8], ，从而提供低复杂度但高性能的传输技术。稀疏性的有效性已在物联网的设计中得到证明 [9],，其未来应用备受期待。

在现代MIMO系统中，预编码是实现高效阵列增益的关键技术，已广泛应用于当前的无线标准。在5G系统中，支持基于码本和非基于码本的预编码。尤其是，基于码本的预编码广泛应用于实际部署中，预编码器从 [2]中规定的预定义码本中选取。对于有限反馈MIMO系统，研究表明，最优预编码码本应在格拉斯曼流形上设计 [10–12]。此外，格拉斯曼流形也已被广泛确立为非相干通信的有效星座设计方式 [13, 14]。受这一基本特性启发，大量研究探讨了面向非相干通信的格拉斯曼流形星座设计 [15–22]。在不相关瑞利衰落信道下最大化可达速率的问题，可表述为格拉斯曼子空间打包问题 [23], ，其目标是最大化码字之间的最小弦距离（MCD）。然而，随着发射天线和数据流数量增加，预编码器的维度也随之增长。这会扩大搜索空间并增加优化变量的数量，难以满足低复杂度、可扩展设计的需求。因此，对于实际及未来的预编码码本设计，即使在大规模系统参数下，建立兼具低复杂度和高性能的码本设计准则也至关重要。

面向6G，预计上行容量将进一步提升。在上行系统中，高峰均功率比（PAPR）仍是一项重大挑战，尤其是在功率放大器（PA）效率至关重要的场景下，例如小区边缘用户。因此，已有大量研究分析了PAPR的统计特性 [24–26] ，并提出了适用于正交频分复用（OFDM）和离散傅里叶变换扩展OFDM（DFT-s-OFDM）的有效降峰均功率比技术 [27–29] ；这两种技术应用于当前的5G上行链路系统。然而，在5G中，DFT-s-OFDM仅限于单数据流传输。面向6G，为提升上行容量和覆盖，业界正在探讨扩展DFT-s-OFDM以支持多数据流传输。

J. Asano 和 N. Ishikawa 任职于横滨国立大学工学部，地址为日本神奈川县横滨市 240-8501（电子邮箱：iskw@ieee.org）。Y. Hama、H. Iimori、C. Pradhan 和 S. Malomsoky 任职于爱立信研究院、爱立信日本株式会社，地址为日本神奈川县横滨市 220-0012（电子邮箱： [yuto.hama, hiroki.iimori, chandan.pradhan, sz- abolcs.malomsoky]@ericsson.com）。

然而，在实际应用中，DFT-s-OFDM的峰均功率比很大程度上取决于预编码器。事实上，5G中的传统预编码器会增大DFT-s-OFDM的峰均功率比，因为现有码本采用密集的预编码器结构，以最大化阵列增益方面的性能，且仅设计用于支持单流 DFT-s-OFDM，这会破坏单载波特性。因此，面向6G扩展DFT-s-OFDM的数据流时，必须从峰均功率比和阵列增益两方面慎重设计该系统的预编码器。

基于上述背景，我们通过引入稀疏性，提出一种低复杂度、高功率效率的预编码码本设计方法。我们基于格拉斯曼流形上的舒伯特胞腔理论，提出一种码本设计方法 [30, 31]。此外，我们将所提出的稀疏码本与传统方法进行比较，评估其性能，并通过数值仿真验证其有效性。所提方法的主要贡献总结如下：

1) **近乎最优的性能**：我们通过舒伯特胞腔分解，提出一种用于预编码码本的新型稀疏格拉斯曼设计。我们证明，得益于稀疏性，所提出的码本降低了时间复杂度和空间复杂度。数值仿真表明，尽管受到稀疏性约束，所提出的码本仍能实现渐近接近最优码本的性能。

2) **降低峰均功率比**：我们通过数值分析，研究预编码器稀疏度对正交频分复用和 DFT-s-OFDM 中峰均功率比的影响。结果表明，与传统码本相比，所提出的稀疏码本可显著降低 DFT-s-OFDM 中的峰均功率比。

3) **可扩展设计**：对于以最大化 MCD 为目标的码本优化问题，在特定情况下，所提出的码本设计方法能够显著简化目标函数，并大幅缩小搜索空间。因此，即使发射天线数量、数据流数量和码本大小都很大，码本构造也只需采用低复杂度优化。即使优化过程经过简化，所提出的码本在保持参数设计灵活性的同时，性能仍与最优码本相当。

本文的贡献与我们的预印本 [32]存在根本差异。尽管两篇论文共享基于稀疏格拉斯曼设计的共同框架，但它们所针对的系统模型根本不同。具体而言，先前工作聚焦于非相干通信，而本文考虑的是有限反馈系统的预编码码本设计。系统模型上的这一差异导致问题 formulation、分析推导和所得见解均存在显著差异。此外， [32] 中提出的星座旨在最小化成对错误概率。其作为本文所考虑的预编码码本时的性能无法得到保证。

本文其余部分组织如下。第二节回顾格拉斯曼流形与传统码本的基本原理。第三节给出系统模型，第四节介绍所提出的稀疏格拉斯曼设计。第五节分析所提出码本的特性，第六节给出数值结果。最后，第七节得出结论。

II. 格拉斯曼码本

本节介绍格拉斯曼流形及其在无线通信中的应用。我们首先给出复格拉斯曼流形的数学定义，随后讨论几种具有代表性的码本构造方法。

A. 数学定义 *[33, 34]*

对于正整数 M，阶数为 M 的酉群，记作 $\mathcal{U}(M)$，定义为所有 $M\times M$ 复矩阵 $\mathbf{U}$ 构成的集合，其定义为

$$\mathcal{U}(M)=\left\{\mathbf{U}\in\mathbb{C}^{M\times M}\mid \mathbf{U}^{\mathrm{H}}\mathbf{U}=\mathbf{I}_M\right\}. \tag{1}$$

对于 $T>M$，复斯蒂费尔流形 $\mathcal{S}(T,\ M)$ 由所有具有正交归一列的 $T\times M$ 矩阵 $\mathbf{S}$ 构成，其定义为

$$\mathcal{S}(T,M)=\left\{\mathbf{S}\in\mathbb{C}^{T\times M}\mid \mathbf{S}^{\mathrm{H}}\mathbf{S}=\mathbf{I}_M\right\}. \tag{2}$$

每个矩阵 $\mathbf{S}\in\mathcal{S}(T,\ M)$ 都表示由其列张成的 $\mathbb{C}^T$ 中的一个 M 维子空间。令 $\mathbf{s}_m$ 表示 $\mathbf{S}$ 的第 m 列，其对应的子空间，即 $\mathbf{S}$ 的线性张成，可写为

$$\mathrm{span}(\mathbf{S})=\{h_1\mathbf{s}_1+\cdots+h_M\mathbf{s}_M\mid h_1,\cdots,h_M\in\mathbb{C}\}. \tag{3}$$

若两个矩阵 $\mathbf{S}_1,\mathbf{S}_2\in\mathcal{S}(T,\ M)$ 张成相同的子空间，则称它们等价，也就是说，若 $\mathrm{span}(\mathbf{S}_1)=\mathrm{span}(\mathbf{S}_2)$。$\mathbf{S}$ 对应的等价类记为 $[\mathbf{S}]$，写作

$$[\mathbf{S}]=\{\mathbf{S}_1\in\mathcal{S}(T,M)\ \mid\ \mathbf{S}_1\sim\mathbf{S}_2\}. \tag{4}$$

于是，格拉斯曼流形 $\mathcal{G}(T,\ M)$ 定义为所有此类等价类构成的集合，并可表示为斯蒂费尔流形 $\mathcal{S}(T,\ M)$ 关于酉群 $\mathcal{U}(M)$ 的商空间

$$\mathcal{G}(T,M)=\mathcal{S}(T,M)\ /\ \mathcal{U}(M)=\{[\mathbf{S}]\mid\mathbf{S}\in\mathcal{S}(T,M)\}. \tag{5}$$

格拉斯曼流形的一个关键性质是其在酉矩阵右乘下保持不变。具体而言，对于任意 $\mathbf{W}\in\mathcal{G}(T,\ M)$ 和任意 $\mathbf{U}\in\mathcal{U}(M)$，关系式

$$\mathrm{span}(\mathbf{W})=\mathrm{span}(\mathbf{WU}), \tag{6}$$

成立。这种酉不变性意味着对应于同一子空间的不同矩阵表示是等价的。这一性质在无线通信中被广泛利用，例如在非相干检测和信道估计 [14, 35, 36]中。在本文中，$\mathcal{G}(T,\ M)$上的有限点集被称为格拉斯曼码本。

令 $\mathcal{W}=\{\mathbf{W}_1,\cdots,\mathbf{W}_{|\mathcal{W}|}\}$ 表示一个大小为 $|\mathcal{W}|$的格拉斯曼流形码本，其中每个码字 $\mathbf{W}_i$ 代表一个点

位于 $\mathcal{G}(T,M)$ 上。在此码本中，两点 $\mathbf{W}_i$ 和 $\mathbf{W}_j$之间的弦距离记为 $d_{\mathrm{c}}(\mathbf{W}_i,\mathbf{W}_j)$，其定义为

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{c}}(\mathbf{W}_i,\mathbf{W}_j) &= \frac{\|\mathbf{W}_i\mathbf{W}_i^{\mathrm{H}} - \mathbf{W}_j\mathbf{W}_j^{\mathrm{H}}\|_{\mathrm{F}}}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{M - \|\mathbf{W}_i^{\mathrm{H}}\mathbf{W}_j\|_{\mathrm{F}}^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

B. 传统格拉斯曼码本

1) Manopt [18, 35]：本文将基于在格拉斯曼流形上直接优化的码本设计方法称为 Manopt。通过优化（7）来最大化 MCD 的方法称为 MCD-Manopt，其中 MCD 定义为

$$d_{\min} = \min_{1\le i<j\le|\mathcal{W}|} d_{\mathrm{c}}(\mathbf{W}_i,\mathbf{W}_j), \tag{8}$$

。MCD 最大化问题可表述为

$$\begin{aligned} \underset{\mathcal{W}}{\text{maximize}} \ & \min_{1\le i<j\le|\mathcal{W}|} d_{\mathrm{c}}(\mathbf{W}_i,\mathbf{W}_j) \\ \text{s.t.} \ & \mathbf{W}_i \in \mathcal{G}(T,M),\ \forall\ i=\{1,\cdots,|\mathcal{W}|\}, \end{aligned} \tag{9}$$

其中，（9）中的目标函数可由如下平滑代理目标函数近似

$$\begin{aligned} \underset{\mathcal{W}}{\text{minimize}} \ & \log \sum_{1\le i<j\le|\mathcal{W}|} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{W}_i\mathbf{W}_i^{\mathrm{H}} - \mathbf{W}_j\mathbf{W}_j^{\mathrm{H}}\|_{\mathrm{F}}}{\epsilon}\right) \\ \text{s.t.} \ & \mathbf{W}_i \in \mathcal{G}(T,M),\ \forall\ i=\{1,\cdots,|\mathcal{W}|\}, \end{aligned} \tag{10}$$

，其中 ϵ 为平滑常数。根据数值优化的结果，MCD-Manopt 可视为不相关瑞利衰落信道下的理论最优码本 [10–12]。

2) Exp-Map [16, 17]：指数映射（Exp-Map）是格拉斯曼流形最具结构化的设计方法之一。利用矩阵指数，我们可以将格拉斯曼流形上的任意一点表示为

$$\mathbf{W} = \left[\exp\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{\Theta} \\ -\mathbf{\Theta}^{\mathrm{H}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right]\mathbf{I}_{T,M}, \tag{11}$$

其中，$\mathbf{I}_{T,M} = [\mathbf{I}_M\ \mathbf{0}_{M\times(T-M)}]^\top$和 $\mathbf{\Theta}\in\mathbb{C}^{M\times(T-M)}$是任意矩阵，例如由正交幅度调制符号构成的空时分组码。Exp-Map 是一种具有代表性的非优化码本构造方法，支持多流场景，即 $M\ge 2$。尽管该方法最初是为非相干码设计提出的，但由于其设计准则旨在最大化 MCD，因此也可用作预编码码本，本文将其作为基准方法。

3）5G NR 码本 *[2]*：5G NR 码本已在当前 5G系统中得到广泛采用。尽管标准中并未明确说明，但每个预编码器都对应格拉斯曼流形上的一个点，并且根据发射天线数量和数据流数量，以表格形式提供相应的码本。虽然标准中未说明具体的设计准则，但假设这些码本是基于带天线极化的离散傅里叶变换设计的。在我们的仿真中，它与 MCD-Manopt 一同作为一种基准方案使用。仿真中使用的具体新空口码本见附录。

III. 系统模型

本节介绍有限反馈多输入多输出预编码系统 [10–12]，，传统码本和本文提出的码本均应用于该系统。

我们考虑一个有限反馈多输入多输出系统，其中有 T 根发射天线和 N根接收天线。令 $M\le\min(T,N)$ 为数据流数量。对于给定的信道矩阵$\mathbf{H}\in\mathbb{C}^{N\times T}$，假设该系统的接收机已知完美的信道状态信息（CSI）。令 $\mathbf{s}\in\mathbb{C}^{M\times 1}$ 表示满足平均功率约束 $\mathbb{E}[\mathbf{s}\mathbf{s}^{\mathrm{H}}]=\mathbf{I}_M$的符号向量。子载波 k 上的频域接收信号$\mathbf{y}_k\in\mathbb{C}^{N\times 1}$ 表示为

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{W}_k\mathbf{s}_k + \mathbf{v}_k, \tag{12}$$

其中，$\mathbf{W}_k\in\mathbb{C}^{T\times M}$ 为预编码矩阵，$\mathbf{v}_k\in\mathbb{C}^{N\times 1}$为加性白高斯噪声向量，其每个元素均独立同分布为 $\mathcal{CN}(0,\sigma_v^2)$。

在该系统中，我们考虑平坦衰落信道和宽带预编码。假设信道和预编码器在一个频带内的所有子载波上均保持不变。也就是说，对于频带内的所有子载波 k，均有 $\mathbf{H}_k=\mathbf{H}$ 和$\mathbf{W}_k=\mathbf{W}$。在此假设下，我们考虑瑞利衰落和莱斯衰落等典型信道模型 [37]。非相关瑞利衰落信道矩阵$\mathbf{H}$ 的每个元素均独立同分布为均值为零、方差为一的复高斯随机变量，即 $\mathcal{CN}(0,1)$。莱斯信道模型定义为视距（LoS）分量 [38, 39]与非视距（NLoS）分量的叠加，其中莱斯因子为$K\ge 0$，表示视距功率与非视距功率之比。

预编码矩阵从一个有限码本$\mathcal{W}=\{\mathbf{W}_1,\cdots,\mathbf{W}_{|\mathcal{W}|}\}$中选取，该码本由发射机和接收机预先共享。每个矩阵 $\mathbf{W}_i$ 均满足正交归一约束$\mathbf{W}_i^{\mathrm{H}}\mathbf{W}_i=\mathbf{I}_M$，因此可视为复格拉斯曼流形$\mathcal{G}(T,M)$上的一个点。此时，必须满足约束 $M\le\min(T,N)$，因为 M 表示数据流的数量。此外，该约束会自动满足第二节 A 中所述的格拉斯曼流形条件。在信道状态信息完美的情况下，接收机选择使可达速率最大化的$\mathbf{W}_i\in\mathcal{W}$，记为 [11]

$$R(\mathbf{W}_i) = \log_2\det\left(\mathbf{I}_M + \frac{\rho}{M}\mathbf{W}_i^{\mathrm{H}}\mathbf{H}^{\mathrm{H}}\mathbf{H}\mathbf{W}_i\right), \tag{13}$$

其中，ρ 表示信噪比（SNR）。在该系统中，接收机处的平均信噪比定义为$\rho=1/\sigma_v^2$。ˆ 随后，接收机将对应于最优预编码器矩阵的索引 i 反馈为

$$\hat{i} = \underset{1\le i\le|\mathcal{W}|}{\operatorname{argmax}}\ R(\mathbf{W}_i), \tag{14}$$

以 $\log_2|\mathcal{W}|$ 比特表示。对于不相关瑞利衰落信道下的有限反馈系统，最优码本设计

对应于最大化式（9）中定义的码本 MCD。因此，就可达速率而言，最优预编码码本为 MCD-Manopt。

上述系统模型可以轻松扩展至当前5G上行传输所采用的正交频分复用和DFT-s-OFDM方案。在这一扩展系统中，我们通过(14)对离散傅里叶变换预编码序列的每个子载波符号执行最优索引反馈和预编码。随后，我们执行 [40, 41] 中所述的过采样过程，以准确评估峰均功率比。此外，我们还评估每根发射天线上的时域信号的峰均功率比。令 $x_t[n]$ 表示从第 t根天线发射的离散时间基带信号，则第 t根天线的峰均功率比定义为

$$\mathrm{PAPR}(t) = \frac{\max_n |x_t[n]|^2}{\mathbb{E}\left[|x_t[n]|^2\right]}, \tag{15}$$

其表示最大瞬时功率与平均发射功率之比。

IV. 所提出的设计方法

本节介绍所提出的稀疏格拉斯曼码本的设计方法。我们首先针对一般情况描述设计过程的详细步骤，随后给出一个具体示例。

A. 一般设计方法

总体过程如图1所示。所提出的方法适用于满足 $T > M > 1$的任意 T 和 M。与传统的稠密码本相比，该过程系统地生成稀疏结构，从而降低与预编码器乘法、索引选择和存储成本相关的复杂度。

1）舒伯特胞腔分解 *[30, 31]*：复格拉斯曼流形 $\mathcal{G}(T, M)$ 可分解为若干舒伯特胞腔的不交并

$$\mathcal{G}(T,M) = \bigsqcup_{\mathbf{k}\in\binom{[T]}{M}} \mathbf{C}_{\mathbf{k}}, \tag{16}$$

其中，每个索引$\mathbf{k} = \{k_1, \cdots, k_M\}$定义一个舒伯特胞 $\mathbf{C_k}$，符号 $\bigsqcup$ 表示不相交并。每个胞$\mathbf{C_k}$ 都可以由一个处于列阶梯形的 $T \times M$ 矩阵唯一表示，使得第（k_l，l）个元素为 1，其中$l = 1, \cdots, M$；同一列中该位置上方以及同一行中该位置左侧的所有元素均为零。其他元素，即同一行中该位置右侧或同一列中该位置下方的元素，可以取任意复数值。在本文后续讨论中，我们将这个任意复数记为 $*$。这种分解为 $\mathcal{G}(T, M)$提供了结构化的参数化，自然地将流形划分为更简单的子空间。它使我们能够直接构造稀疏且正交的矩阵表示，而无需进行迭代流形优化。

2）稀疏模式选择：对于给定的稀疏度s（即给定矩阵中的非零元素数量），我们进一步通过考虑稀疏模式来定义该分解，也就是能够生成列正交配置的非零元素组合，这些配置表示复格拉斯曼流形上的点。为以直接明了的方式同时确保稀疏性和列正交性，我们施加以下约束：

- $M \le s \le T$（稀疏性约束）和
- 不同列中的非零元素彼此不相交（列正交约束）。

也就是说，任意两列都不共享行索引。在此条件下，各列的支撑集互不相交，因此它们的内积自动为零。因此，任何这样的矩阵都是稀疏且列正交的，即无需进一步调整便位于复格拉斯曼流形上。此外，在此约束下，可以轻松计算允许的稀疏模式数量：首先从 T 个行中选出 s 个，然后将其划分为 M 个非空且互不相交的子集，分别对应各列的支撑集。因此，对于给定的 T，M 和稀疏度 s，其稀疏模式总数 $n(T, M, s)$ 为

$$n(T,M,s) = \frac{\binom{T}{s}}{M!}\sum_{k=0}^{M}(-1)^k\binom{M}{k}(M-k)^s. \tag{17}$$

3) 复变量嵌入：接下来，我们从给定的 $n(T, M, s)$ 稀疏模式中选择矩阵。然后，将复数嵌入到任意复数部分 $*$ 中并进行优化。此时，令 p 表示矩阵 $\mathbf{W}$ 的复参数集合。p 可定义为 s 中复数的幅度和相位参数集合。例如，p可定义为 $p = \{\alpha_1, \theta_1, \cdots\}$，其中$\alpha_i$，$\theta_i$ 分别表示第 i 个复元素的幅度和相位。对于给定的码本大小 $|\mathcal{W}|$，我们将这些参数的集合定义为 $\mathcal{P} = \{p_1, \cdots, p_{|\mathcal{W}|}\}$，并针对 $\mathcal{P}$ 进行优化。在满足约束的前提下，可根据具体应用将每个参数自由设为离散值或连续值。这种稀疏性直接减少了预编码器矩阵中的非零元素数量，从而降低实现复杂度和功耗。

4）*MCD*最大化：我们根据上述定义的参数优化码本。对于大小为、参数集为的码本 $\mathcal{W} = \{\quad_1 \cdots \quad_{|\mathcal{W}|}\}$ $|\mathcal{W}|$ $\mathcal{P} = \mathbf{W}$，，$\{p_1, \cdots, p_{|\mathcal{W}|}\}$ $\mathbf{W}$，最大化式（9）中 MCD 的优化目标定义为

$$\underset{\mathcal{P}}{\text{minimize}} \quad \log \sum_{1\le i<j\le|\mathcal{W}|} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{W}_i\mathbf{W}_i^{\mathrm{H}} - \mathbf{W}_j\mathbf{W}_j^{\mathrm{H}}\|_{\mathrm{F}}}{\epsilon}\right) \tag{18}$$

$$\text{s.t.} \quad \mathcal{P} = \{p_1, \cdots, p_{|\mathcal{W}|}\},$$

其中，ϵ 为平滑常数。每个参数集 $p_i \in \mathcal{P}$ 均在上述约束条件下独立优化。

B. $T = 2M$的设计方法

我们着重研究在约束条件 $T = 2M$ 下，通过最大化 MCD 来设计预编码码本。这

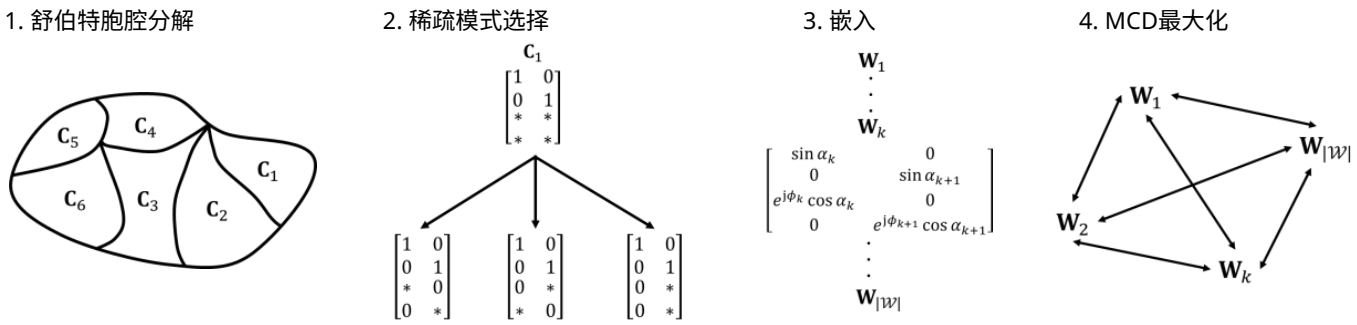


图1. 所提出的码本设计方法概述，该方法由四个步骤组成。

种配置在实际应用中很常见，因为许多上行链路预编码场景中，发射天线的数量是数据流的两倍。它还具有解析上的对称结构，使弦距离能够显式计算。针对这种情况，我们提出一种方法来缩小搜索空间，并简化用于最大化 MCD 的目标函数。

这里，我们假设矩阵的所有元素具有相同的幅度，且每个矩阵都是 $2M$-稀疏的，即 $s = 2M$。在此约束下，每个矩阵的 M 列中恰好有两个非零元素。对于给定矩阵 $\mathbf{W}$，我们将其稀疏模式 π_i 定义为

$$\begin{aligned} &\pi_i = \{(a_{i,1}, b_{i,1}), \cdots, (a_{i,M}, b_{i,M})\}, \\ &\text{s.t } \{a_{i,m}, b_{i,m}\} \cap \{a_{i,m'}, b_{i,m'}\} = \varnothing, \quad 1 \le m < m' \le M, \end{aligned} \tag{19}$$

其中每个 $(a_{i,m}, b_{i,m})$ 表示第 m个列向量中非零元素的行索引对，以及$a_{i,m}, b_{i,m} \in \{1, \cdots, 2M\}$。此外，这些行索引对共同覆盖整个指标集 $\{1, \cdots, 2M\}$。也就是说，

$$\bigcup_{m=1}^{M} \{a_{i,m}, b_{i,m}\} = \{1, \cdots, 2M\}. \tag{20}$$

这些条件意味着行索引对构成将 $\{1, \cdots, 2M\}$ 划分为 M 个互不相交的无序对。因此，每个稀疏模式对应于$2M$ 个行索引的一个完美匹配，从而保证列正交性。对于给定的 $T = 2M$，我们考虑一组稀疏模式 π，并要求这些模式在任何列索引处都不相交。在此约束下，可容许稀疏模式的数量为 $2M - 1$。也就是说，对于稀疏模式 $\pi_i = \{ (a_{i,m}, b_{i,m}) \}_{m=1}^{M}$的每一个集合 $\pi_1, \cdots, \pi_{2M-1}$，我们设定如下约束

$$\begin{aligned} &(a_{i,m}, b_{i,m}) \neq (a_{j,m}, b_{j,m}), \\ &\text{s.t. } 1 \le i < j \le 2M - 1, \ m \in \{1, \cdots, M\}. \end{aligned} \tag{21}$$

因此，对于任意两个不同的稀疏模式 π_i 和π_j，逐列索引对都不相同。此外，由于每个稀疏模式构成 $\{1, \cdots, 2M\}$ 的一个完美匹配，因此每个行索引在每种模式中都恰好出现一次。因此，对于 π_i 中索引为$\{a_{i,m}, b_{i,m}\}$的固定列 m，两个索引 $a_{i,\,m}$ 和 $b_{i,\,m}$ 必定属于 π_j的两个不同列对，这意味着对应的列向量 $\mathbf{w}_{i,\,m}$ 恰好与 $\mathbf{W}_j$的两列各有一个元素重叠。

接着，令 $\pi_i = \{(a_{i,m}, b_{i,m})\}_{m=1}^{M}$ 和 $\pi_j = \{(a_{j,m}, b_{j,m})\}_{m=1}^{M}$ 分别为对应的矩阵 $\mathbf{W}_i = [\mathbf{w}_{i,1}, \cdots, \mathbf{w}_{i,M}]$和 $\mathbf{W}_j = [\mathbf{w}_{j,1}, \cdots, \mathbf{w}_{j,M}]$。根据舒伯特分解，每个列向量表示为 $\mathbf{w}_{i,m} = (\mathbf{e}_{a_{i,m}} + e^{\mathrm{j}\theta_i}\mathbf{e}_{b_{i,m}})/\sqrt{2}$ 和 $\mathbf{w}_{j,m} = (\mathbf{e}_{a_{j,m}} + e^{\mathrm{j}\theta_j}\mathbf{e}_{b_{j,m}})/\sqrt{2}$，其中 $\mathbf{e}_i \in \mathbb{C}^{2M}$ 表示一个列向量，其第 i个元素为 1，其余元素均为 0，即长度为 $2M$的标准基向量。$\mathbf{W}_i$ 和 $\mathbf{W}_j$ 的内积表示为

$$\|\mathbf{W}_i^{\mathrm{H}} \mathbf{W}_j\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum_{m=1}^{M} \sum_{m'=1}^{M} |\langle \mathbf{w}_{i,m}, \mathbf{w}_{j,m'} \rangle|^2. \tag{22}$$

这里，由于每种稀疏模式都是同一指标集上的完美匹配，固定列$\mathbf{w}_{i,m}$ 恰好与$\mathbf{W}_j$ 中的两列各有一个元素相交。也就是说，对于任意 m 和 m'，当交集为一个元素时，每个列向量$\mathbf{w}_{i,m}$ 和$\mathbf{w}_{j,m'}$ 的内积记为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}_{i,m}, \mathbf{w}_{j,m'} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\mathrm{j}\theta_{i,m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\mathrm{j}\theta_{j,m'}} \\ &= \frac{1}{2} e^{-\mathrm{j}(\theta_{i,m} - \theta_{j,m'})}, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\Leftrightarrow \ |\langle \mathbf{w}_{i,m}, \mathbf{w}_{j,m'} \rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} e^{-\mathrm{j}(\theta_{i,m} - \theta_{j,m'})} \right|^2 = \frac{1}{4}. \tag{24}$$

当没有交集时，内积为 0。因此，我们得到

$$\sum_{m'=1}^{M} |\langle \mathbf{w}_{i,m}, \mathbf{w}_{j,m'} \rangle|^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \tag{25}$$

利用 (24) 和 (25) 的结果，可将 (22) 化简为

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W}_i^{\mathrm{H}} \mathbf{W}_j\|_{\mathrm{F}}^2 &= \sum_{m=1}^{M} \sum_{m'=1}^{M} |\langle \mathbf{w}_{i,m}, \mathbf{w}_{j,m'} \rangle|^2 \\ &= \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{2} = \frac{M}{2}. \end{aligned} \tag{26}$$

由式（26）可知，不同稀疏模式之间的弦距离为常数，即 $\mathbf{W}_i$与$\mathbf{W}_j$, d_{c}（$\mathbf{W}_i$,$\mathbf{W}_j$）之间的弦距离可表示为

$$d_{\mathrm{c}}(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j) = \sqrt{M - \|\mathbf{W}_i^{\mathrm{H}} \mathbf{W}_j\|_{\mathrm{F}}^2} = \sqrt{\frac{M}{2}}, \tag{27}$$

也就是说，不同稀疏模式之间的弦距离不取决于其矩阵的相位。这意味着，由不同稀疏模式构造的所有码字在格拉斯曼流形上彼此等距，形成准均匀码本结构，而无需显式进行流形优化。

接下来，我们考虑具有相同稀疏模式 $\pi_i = \{(a_{i,m}, b_{i,m})\}_{m=1}^{M}$ 的两个矩阵 $\mathbf{W}_i = [\mathbf{w}_{i,1}, \cdots, \mathbf{w}_{i,M}]$ 和 $\mathbf{W}_k = [\mathbf{w}_{k,1}, \cdots, \mathbf{w}_{k,M}]$。它们的列向量分别记为 $\mathbf{w}_{i,m} = (\mathbf{e}_{a_{i,m}} + e^{\mathrm{j}\theta_i} \mathbf{e}_{b_{i,m}})/\sqrt{2}$ 和 $\mathbf{w}_{k,m} = (\mathbf{e}_{a_{k,m}} + e^{\mathrm{j}\theta_k} \mathbf{e}_{b_{k,m}})/\sqrt{2}$。由于 $\mathbf{W}_i$ 和 $\mathbf{W}_k$ 具有相同的稀疏模式 π_i，因此 $\mathbf{w}_{i,m}$ 和 $\mathbf{w}_{k,m'}$ 之间的内积记为

$$\langle \mathbf{w}_{i,m}, \mathbf{w}_{k,m'} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 + e^{-\mathrm{j}(\theta_{i,m} - \theta_{k,m'})}\right) & (m = m') \\ 0 & (m \neq m') \end{cases}. \tag{28}$$

因此，对于 $m = m'$，我们得到 $|\langle \mathbf{w}_{i,m}, \mathbf{w}_{k,m'} \rangle|^2 (1 + \cos(\theta_{i,m} - \theta_{k,m'}))/2$，否则其值为 0。根据（22），$\mathbf{W}_i$ 和 $\mathbf{W}_k$ 的内积可简化为

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W}_i^{\mathrm{H}} \mathbf{W}_k\|_{\mathrm{F}}^2 &= \sum_{m=1}^{M} \sum_{m'=1}^{M} |\langle \mathbf{w}_{i,m}, \mathbf{w}_{k,m'} \rangle|^2 \\ &= \sum_{m=1}^{M} |\langle \mathbf{w}_{i,m}, \mathbf{w}_{k,m} \rangle|^2 \\ &= \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{2}\left(1 + \cos(\theta_{i,m} - \theta_{k,m})\right) \\ &= \frac{M}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M} \cos(\theta_{i,m} - \theta_{k,m}). \end{aligned} \tag{29}$$

因此，$\mathbf{W}_i$ 和 $\mathbf{W}_k$, $d_{\mathrm{c}}(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_k)$ 之间的弦距离记为

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{c}}(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_k) &= \sqrt{M - \|\mathbf{W}_i^{\mathrm{H}} \mathbf{W}_k\|_{\mathrm{F}}^2} \\ &= \sqrt{\frac{M}{2} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M} \cos(\theta_{i,m} - \theta_{k,m})} \\ &= \sqrt{\sum_{m=1}^{M} \sin^2 \frac{\theta_{i,m} - \theta_{k,m}}{2}}, \end{aligned} \tag{30}$$

这仅取决于相位参数之间的差值。这证实了具有相同稀疏模式的两个矩阵之间的弦距离完全由它们的相对相位差决定。这一重要结果显著简化了码本优化，因为不同模式之间的所有距离都是固定的，只有同一模式内的相位差会影响性能。

利用性质 (27) 和 (30)，原先在式 (18) 中定义的、用于设计大小为 $|\mathcal{W}|$ 的预编码码本的 MCD 最大化目标，可大幅简化为仅依赖于相位差的函数，表示为

$$\underset{\theta_{i,m},\ \theta_{j,m}}{\text{maximize}} \ \min_{1 \leq i < j \leq L} \sum_{m=1}^{M} \sin^2 \frac{\theta_{i,m} - \theta_{j,m}}{2}, \tag{31}$$

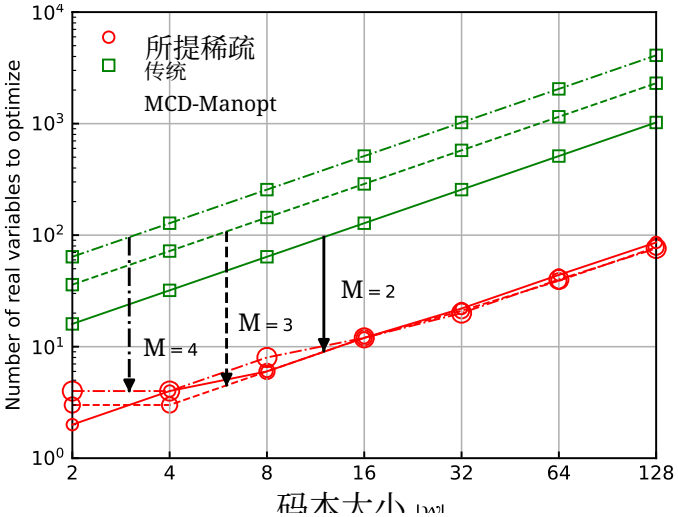


图 2. 采用所提出的方法时，优化所需的实变量数量与发射天线数量 T 和数据流数量 M 的关系，其中 $(T, M) = (4, 2)$，$(6, 3)$，和 $(8, 4)$。

其中，L 表示分配给每种稀疏模式的相位实例数量，其定义为

$$L = \left\lceil \frac{|\mathcal{W}|}{2M - 1} \right\rceil, \tag{32}$$

其中，$\lceil x \rceil$ 表示向上取整函数，将 x 向上取整至最接近的整数；$2M - 1$ 表示上文构造的不同稀疏模式的数量。因此，码本大小$|\mathcal{W}|$ 满足 $|\mathcal{W}| \leq L(2M - 1)$。如果 $|\mathcal{W}|$ 不是 $2M - 1$的整数倍，则只有一部分稀疏模式包含L 个实例，其余模式则包含 $L - 1$个实例。如上所述，这种不均匀分配不会影响式 (27) 和 (30) 中推导的 MCD刻画。

与使用（10）的传统 MCD-Manopt 方法相比，我们证明了实变量的数量及其对应的搜索空间均显著减少。具体而言，对于码本 $\mathcal{W} \subset \mathcal{G}(T, M)$，其码本大小为 $|\mathcal{W}|$, MCD-Manopt 所需的实变量数量定义为 $2|\mathcal{W}| \cdot M(T - M)$。相比之下，在相同码本大小及条件和约束下，应用本文方法所需的实变量数量定义为 $\lceil |\mathcal{W}|/(2M - 1) \rceil \cdot M$。

图 2 展示了将所提出的 $2M$ 稀疏矩阵简化方法应用于 $(T, M) = (4, 2)$、$(6, 3)$，以及 $(8, 4)$ 时，优化所需实变量数量的对比。如图 2 所示，在所有情况下，即使码本大小较大，所提出的方法所需的优化实变量也显著少于 MCD-Manopt。此外，对比两种方法的结果可知，随着 M 增大，MCD-Manopt 所需的实变量数量随之增加，而所提出的方法所需的实变量数量则几乎不变。这一结果表明，对于难以优化的大矩阵尺寸，所提出的方法仍然有效。

V. 数值分析

本节分析所提出码本设计方法的数值性能。首先，我们说明峰均功率比会随预编码器稀疏度而变化。随后，我们通过数值分析展示稀疏结构如何降低复杂度。此外，我们比较第四节 IV-B 节中设计的码本的 MCD，以验证所提出设计方法的优势。

A. 峰均功率比分析

我们分析预编码器稀疏度对峰均功率比的影响。为了将稀疏性影响与码本优化的影响分离，本节不再进行进一步的码本调整。我们考虑一个预编码器，其非零元素具有相同的幅度，且每行恰好包含 ℓ 个非零元素，且为简便起见，$\ell \in \{1, \cdots, M\}$。注意，$\ell$ 表示每行中的非零元素数，因此在这种情况下，非零元素总数（即矩阵稀疏度）定义为 $s = \ell T$。由于每个元素具有相同的幅度，且每行包含相同数量的非零元素，第 t个发射天线和第 k个子载波上的频域预编码信号 $z_t[k]$ 表示为

$$z_t[k] = \sqrt{\frac{M}{\ell T}} \sum_{i=1}^{\ell} e^{\mathrm{j}\theta_i^{(t)}} \cdot s_i[k], \tag{33}$$

其中，$s_i[k]$ 是第 k个子载波上的数据符号，索引 $i \in \{1, \cdots, \ell\}$ 表示所有 M 个数据流中的第 i个非零数据流。在正交频分复用情况下，数据符号取自相移键控或正交幅度调制星座；而在离散傅里叶变换扩展正交频分复用中，数据符号是通过对相移键控或正交幅度调制符号向量应用离散傅里叶变换预编码得到的离散傅里叶变换扩频符号。

随后，我们对（33）执行快速傅里叶逆变换（IFFT），并绘制所得时域符号的星座图，以估算每个采样点的瞬时功率。对于（T，M）=（8，4）的情况，当预编码器 ℓ 每行中的非零元素数量从 1 变化到 4 时，正交频分复用和 DFT-s-OFDM 的时域符号星座图分别如图 3 和图 4 所示。子载波总数为 512，采用 4-QAM调制。相位变量θ 独立取自

$$\boldsymbol{\theta} \triangleq [-\pi, \pi], \quad \left[\theta_0^{(t)}, \theta_1^{(t)}, \theta_2^{(t)}, \theta_3^{(t)}\right] = [1.91, -2.21, -1.71, 0.636]$$

在本例中得到弧度。对于 $\ell \in \{1, 2, 3, 4\}$，映射时使用前 ℓ 个元素。为便于更好地展示结果，图 3 和图 4 中未进行过采样。正交频分复用和 DFT-s-OFDM 过采样后的时域符号轨迹极其复杂，无法获取进行峰均功率比分析所需的信息。因此，我们采用奈奎斯特速率采样得到的时域采样值。图 3 展示了正交频分复用情况下的星座分布。根据中心极限定理，无论预编码器 ℓ如何，正交频分复用信号的时域采样值均服从复高斯分布 [24] 。因此，峰均功率比几乎保持不变，且与稀疏性无关。图 4 展示了 DFT-s-OFDM 的星座分布。预编码器的运作实质上等同于将单载波信号叠加。因此，最终会形成由 ℓ 4-正交幅度调制符号叠加而成的有限星座。如（33）所示，当 $\ell = 1$ 时，星座等效于输入符号的相位旋转，因此不会影响峰均功率比。随着 ℓ 增大，星座分布变得更加密集且不规则，导致峰值更高、方差更大，进而使峰均功率比增大。当星座趋于足够密集时，理论上会逐渐接近复高斯分布。尽管结果取决于输入符号和具体的预编码器，但平均而言，图 3 和图 4 所示的趋势相似。原则上，应通过过采样重建连续时间信号，并据此评估峰均功率比。然而，为了突出说明在 DFT-s-OFDM 中，稠密预编码器会通过叠加调制信号点增大峰均功率比，我们在此将分析限定于奈奎斯特速率下采集的采样值。下文将基于过采样重建的连续时间信号讨论峰均功率比。

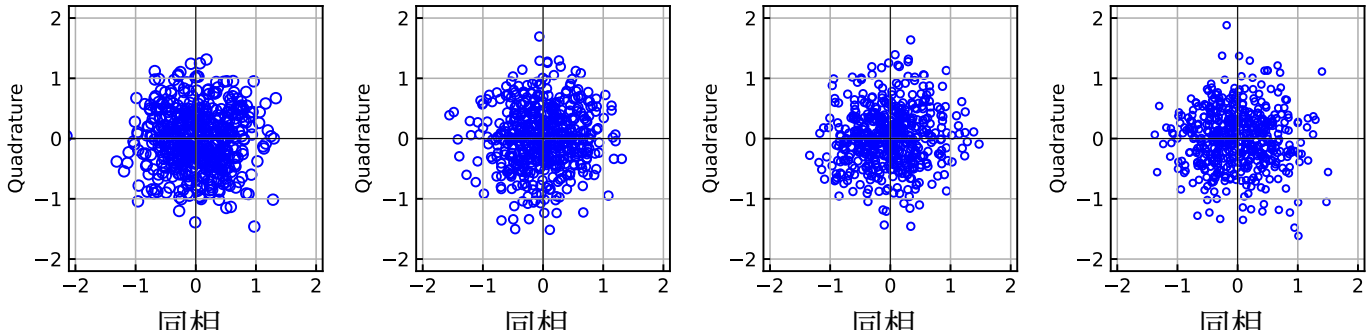
为从统计角度表征峰均功率比的特性，我们采用互补累积分布函数（CCDF），它表示传输信号的峰均功率比超过给定阈值的概率，该函数定义为

$$\mathrm{CCDF}(\mathrm{PAPR}_0) = \Pr(\mathrm{PAPR} > \mathrm{PAPR}_0). \tag{34}$$

图5展示了采用512个子载波和4-QAM调制时峰均功率比的CCDF。为在评估CCDF时准确估算峰均功率比，我们进行了8倍过采样。如图5所示，对于DFT-s-OFDM，预编码器越稀疏，峰均功率比越低；而对于正交频分复用，峰均功率比几乎不受稀疏性的影响。这证实了以下观点的有效性：在正交频分复用中，星座不取决于稀疏性，也不会影响峰均功率比；而在DFT-s-OFDM中，星座随着稀疏性增加而变得更有结构，从而使峰均功率比降低。由于第四节引入的约束，所提出的码本必须满足 $\ell = 1$，以确保列正交条件。正如上文所述，所提出的码本实现了可能的最低峰均功率比。

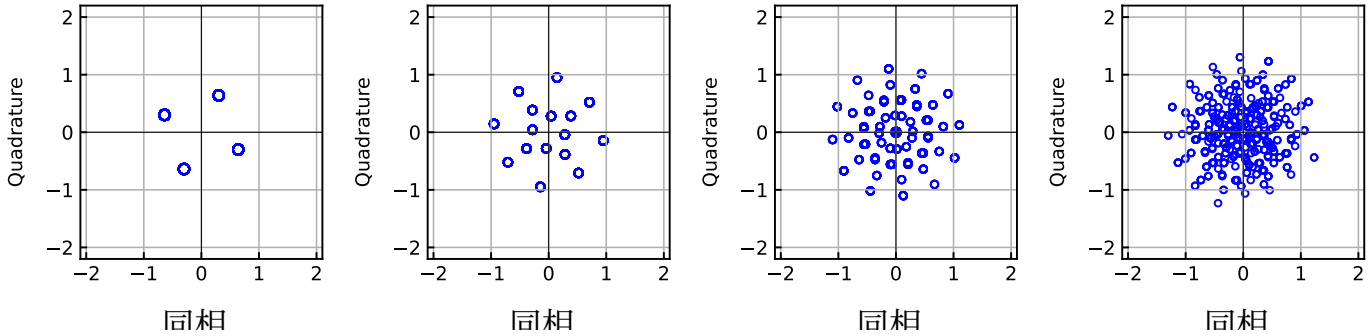
B. 复杂度分析

接下来，本文将从复数乘法次数的角度，分析所提出的稀疏预编码器与传统稠密预编码器在计算复杂度上的差异。为简单起见，此处假设在（33）的定义中，$\ell = 1$。复杂度评估分为三部分：预编码器选择、预编码器乘法和空间复杂度。对于预编码器选择，我们使用（13）中给出的可达速率来选择最优预编码器索引，其中包括计算格拉姆矩阵$(\mathbf{HW})^{\mathrm{H}}(\mathbf{HW})$。对于稠密矩阵$\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{T \times M}$和$\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N \times T}$，计算$\mathbf{HW}$需要 NTM次复数乘法。因此，格拉姆矩阵的计算总共需要 $NTM + NM^2$。另一方面，由于所提出的稀疏预编码器的每一行仅包含一个非零元素，复数乘法的次数



(a) $\ell = 1$ (b) $\ell = 2$ (c) $\ell = 3$ (d) $\ell = 4$

图3. 具有512个子载波和4-QAM调制的正交频分复用信号时域奈奎斯特速率采样的分布，其中 ℓ 表示预编码器每行中的非零元素数量



(a) $\ell = 1$ (b) $\ell = 2$ (c) $\ell = 3$ (d) $\ell = 4$

图 4. 分布 采用 512 个子载波和 4-QAM 调制的 DFT-s-OFDM 时域奈奎斯特速率采样，其中变化 ℓ.

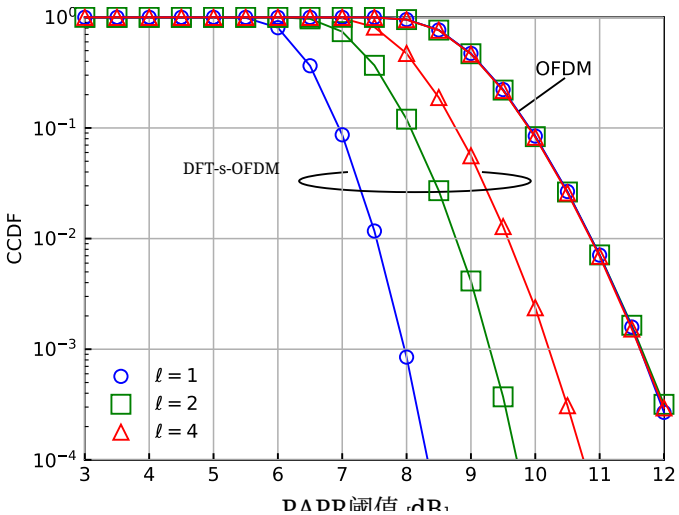


图 5. 在采用 512 个子载波和 4-QAM 调制的正交频分复用与 DFT-s-OFDM 中，峰均功率比随预编码器每行非零元素个数 $\ell = 1$、2、3 和 4 的变化情况。

在计算$\mathbf{HW}$ 时可减少至 NT。因此，使用稀疏预编码器计算格拉姆矩阵$(\mathbf{HW})^{\mathrm{H}}(\mathbf{HW})$的总复杂度为 $NT + NM^2$。

对于预编码器乘法，发射机将选定的预编码器$\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{T\times M}$ 应用于调制信号

表 I 计算复杂度比较

	传统稠密	所提稀疏（$\ell = 1$）
索引选择	$\mathcal{O}((TM + M^2)N)$	$\mathcal{O}((T + M^2)N)$
预编码器乘法	$\mathcal{O}(TM)$	$\mathcal{O}(T)$
空间复杂度	$\mathcal{O}(TM\|\mathcal{W}\|)$	$\mathcal{O}(T\|\mathcal{W}\|)$

向量$\mathbf{s} \in \mathbb{C}^{M\times 1}$，然后进行传输。一般而言，此操作需要$MT$ 复数乘法，但借助我们提出的稀疏预编码器，可将其减少至 T 。

此外，所提出的稀疏码本还能降低空间复杂度。稀疏矩阵的数据结构总结见 [42]。由于第四节中定义的约束，所提出的星座矩阵的每一行仅存储一个非零元素，因此可以采用广为人知的 ELLPACK 格式 [43] 。对于维度和码本大小相同的一般稠密矩阵，其空间复杂度为 $\mathcal{O}(|\mathcal{W}|TM)$。相比之下，对于所提出的稀疏星座，采用 ELLPACK 格式可将空间复杂度降至 $\mathcal{O}(|\mathcal{W}|T)$，因为只需存储非零元素的位置及其复数值。因此，与时间复杂度类似，空间复杂度相对于 M也降至线性阶。

因此，利用稀疏性，计算开销随天线维度线性增长，而非二次增长，从而提高了宽带MIMO系统的效率。

C. MCD 比较

我们从 MCD 方面比较所提出的稀疏码本与传统码本、MCD-Manopt 和 Exp-Map。图 6 (a) 展示了 $(T, M) = (4, 2)$ 情况下的结果。稀疏码本按照第 IV-B 节所述方法设计。对于离散情况，相位变量被量化为 $\theta \in \{-\pi/2,\ 0,\ \pi/2,\ \pi\}$。对于任何码本大小 $|\mathcal{W}|$，所提出的码本性能均优于 Exp-Map，且与 MCD-Manopt 相当。图 6 (b) 展示了 $(T, M) = (6, 3)$ 情况下的结果，其中所提出的码本采用与图 6 (a) 相同的流程构建。所提出的方法优于 Exp-Map，且性能接近 MCD-Manopt。这些结果表明，即使矩阵 T 和 M 的维度增加，所提出的方法仍然有效。最后，图 6 (c) 展示了 $(T, M) = (6, 2)$ 情况下的结果。在此情况下，无法应用第 IV- B 节介绍的简化方法。尽管如此，对于 $|\mathcal{W}|$的所有取值，稀疏码本的 MCD 仍大于 Exp-Map。

在所有测试维度下，所提出的稀疏设计始终取得接近 MCD-Manopt 理论最优结果的 MCD 值，同时保持了结构简洁性。

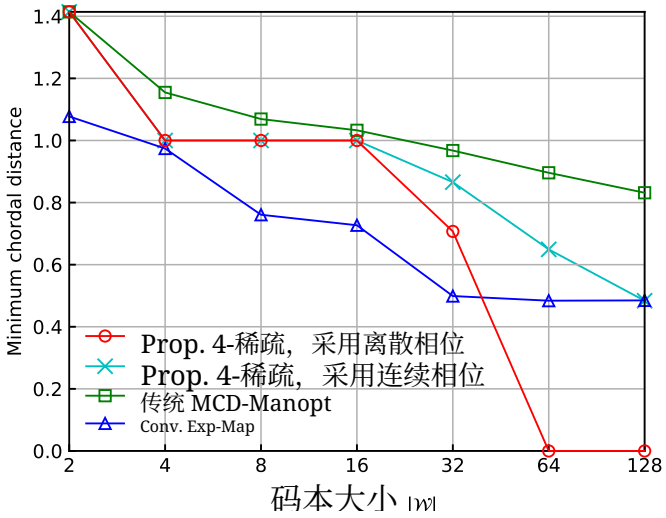
VI. 性能比较

本节研究采用所提出方法设计的码本性能。我们评估了不相关瑞利衰落信道下的可达速率、莱斯衰落信道下的有效信道增益，以及正交频分复用和 DFT-s-OFDM 中的峰均功率比。在可达速率和有效信道增益比较中，接收天线数设为 $N = 32$，并假设为上行链路场景。

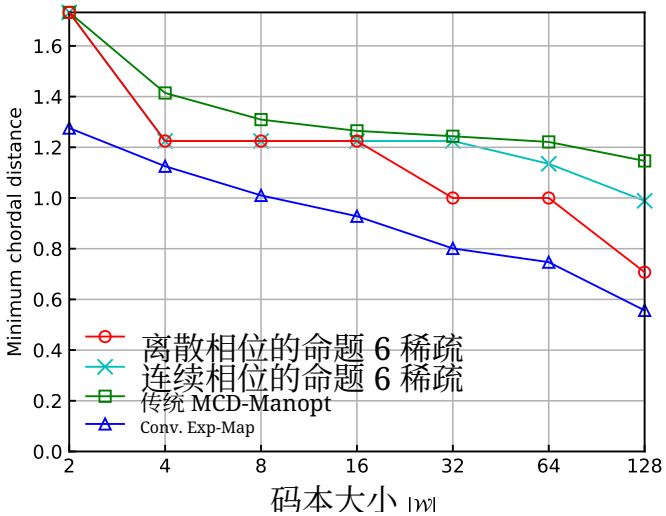
A. 可达速率比较

我们首先将所提出的稀疏码本与 MCD-Manopt 以及 5G NR 系统当前采用的码本进行比较，后者定义于 [2] 中的表6.3.1.5-5 和 6.3.1.5-12。对于可达速率，我们计算了式（13）的期望，并按照式（14）中的方法选择每个索引 i。根据第四节-B 中所述的准则，我们为 $(T, M) = (4, 2)$ 构造了采用 2 和 4 个非零元素的稀疏矩阵的码本，为 $(T, M) = (8, 4)$ 构造了采用 8 个非零元素的稀疏矩阵的码本。码本大小 $|\mathcal{W}|$ 对于 $(T, M) = (4, 2)$ 设为 22，对于 $(T, M) = (8, 4)$ 设为 24。矩阵中每个元素的幅度设为离散值 ± 1 和 $\pm$j，与 [2]中的 5G NR规范一致。

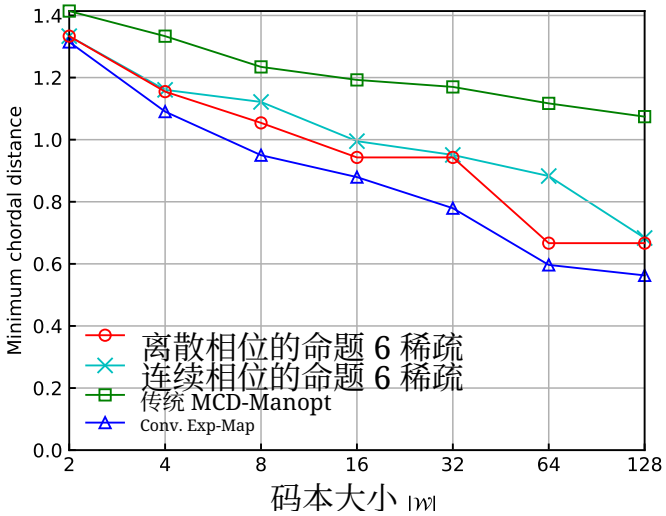
图 7 展示了三种方案的可达速率结果
在非相关瑞利衰落信道下，具有相同码本大小的码本。如图 7 所示，在整个信噪比范围内，所提出的稀疏码本均实现了与最优 MCD-Manopt 码本几乎相同的可达速率。与 MCD-Manopt 相比，所提出的码本没有可测量的信噪比损失，所需的额外信噪比不到 0.01 dB。相比之下，与 5G NR 码本相比，其信噪比增益约为 0.025 dB。这些结果表明，所提出的稀疏方法能够保持



(a) $(T, M) = (4, 2)$。



(b) $(T, M) = (6, 3)$。



(c) $(T, M) = (6,2)$。

图 6. 发射天线数量为 T、数据流数量为 M 时的最小弦距离比较，其中 $(T, M) = (4, 2)$、$(6, 3)$ 和 $(6, 2)$。

MCD-Manopt 的格拉斯曼最优性，同时在

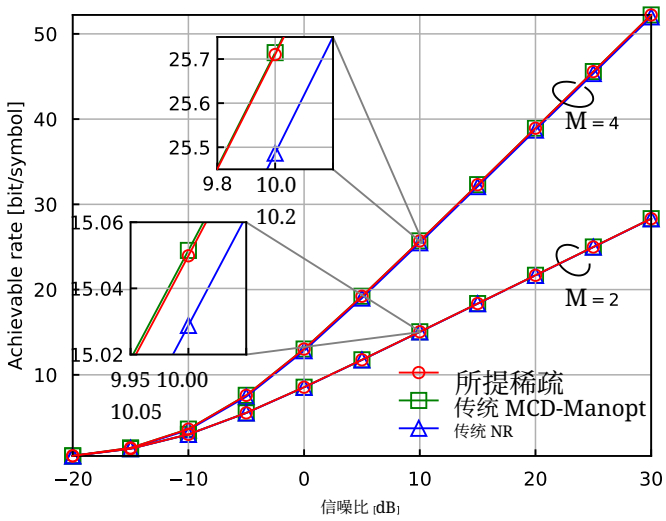


图 7. 不相关瑞利衰落信道下的可达速率，其中 $(T,\ M)=(4,\ 2)$ 和 $(8,\ 4)$。

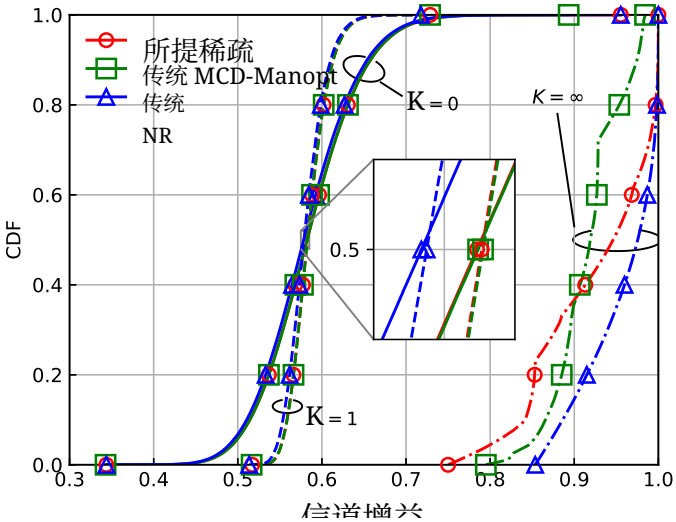


图 8. 莱斯信道中的有效信道增益，参数为 $(T,\ M,\ N)=(4,\ 2)$，其中莱斯因子为 $K=0,\ 1,$ 且 ∞。

不相关瑞利衰落信道。

如图 7 所示，随着系统维度增加，所提出的稀疏码本的信噪比增益更加显著。与 5G NR 码本相比，所提出的设计实现了约 0.17 dB 的信噪比增益，同时与 MCD-Manopt 的性能差距可以忽略不计。这表明，所提方法的性能优势会随着天线和数据流数量的增加而扩大，证实了其在大规模 MIMO 预编码中的有效性。

正如第五节 B 部分所述，与稠密码本相比，稀疏结构包含多个零元素，因此也降低了计算式 (13) 和执行式 (14) 中索引选择的计算复杂度。值得注意的是，即使受到这种离散取值限制，所提出的码本仍实现了更优的性能，凸显了其实际应用价值和效率。

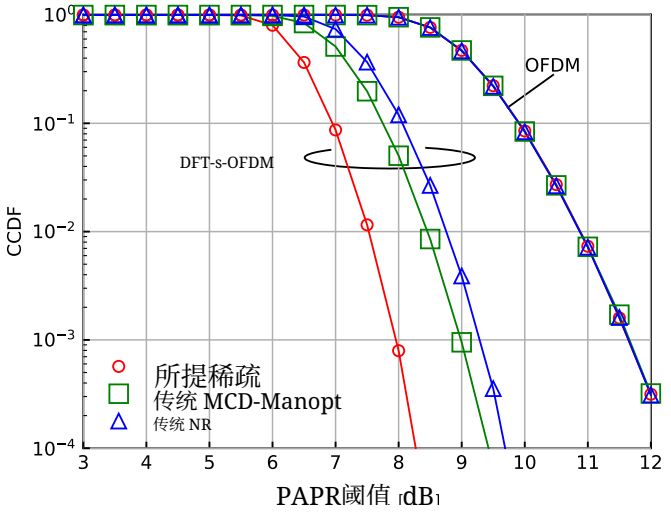


图 9. 正交频分复用和 DFT-s-OFDM 的峰均功率比性能比较，参数为 $(T,\ M)=(4,\ 2)$，码本大小为 8，52 个物理资源块（624 个子载波），1024 点 FFT，过采样 8 倍。

B. 莱斯衰落下有效信道增益的比较

我们比较了莱斯衰落信道下的有效信道增益，以验证所提出的码本在各种信道模型下表现出的特性。莱斯信道的定义见第三节。我们比较了三种情况： K 因子、$K=0$ （仅非视距）、 $K=1$ （非视距与视距占比相同）以及 $K=\infty$ （仅视距）。对于预编码器矩阵$\mathbf{W}_i$，$\mathbf{H}$ 的有效信道增益为 $\|\mathbf{H}\mathbf{W}_i\|_{\mathrm{F}}^2$。从码本中选取每个索引 i，以最大化给定$\mathbf{H}$下的有效信道增益。为便于评估，所有信道均归一化，使得 $\mathbb{E}[\|\mathbf{H}\|_{\mathrm{F}}^2]=1$ 。

在图 8 中，为了从统计角度表征预编码码本的性能，我们针对大量独立信道实现，评估了有效信道增益的经验累积分布函数（CDF）。此处采用的码本与可达速率比较中针对 $(T,\ M)=(4,\ 2)$所用的码本相同。图 8 显示，对于$K=0$ 和 $K=1$，所提出的码本取得了与理论最优的 MCD-Manopt 相当的性能，并优于 NR 码本。这表明“在码本内最大化MCD”的设计准则在散射分量占主导时是有效的，这证实所提出的码本具有相当的性能。相比之下，当视距分量占主导时，该准则效果较差，导致所提出的稀疏码本和MCD-Manopt均不如NR 码本。尽管如此，在视距主导条件下，所提出的码本仍优于 MCD-Manopt。这些结果表明，所提出的稀疏码本是MCD-Manopt的一种实用且稳健的替代方案。它在非相关瑞利信道和中等莱斯信道环境（即 $K\le 1$）中保持接近最优的性能，并且即使在信道变为视距主导、NR 码本天然具有优势时，仍能保持有竞争力的性能。

C. 峰均功率比比较

为证明所提出的码本在实际的5G上行链路系统中有效，我们在图9中使用CCDF评估了峰均功率比。在正交频分复用和DFT-s-OFDM两种情况下，分别计算了每根天线时域信号的峰均功率比，并在图9中给出了各天线的平均值。仿真假设有52个物理资源块（物理资源块），即624个子载波，FFT大小为1024。为确保峰均功率比估计准确，时域信号以8倍过采样生成。码本大小设为8，其稀疏性与NR 码本不同，因为如第五节-A所述，峰均功率比仅取决于稀疏性。

图 9 表明，在 DFT-s-OFDM 传输中，与稠密 MCD-Manopt 码本和 5G NR 码本相比，所提出的稀疏码本显著降低了峰均功率比。具体而言，在 CCDF $= 10^{-2}$ 处，所提出的码本相较于这两种稠密码本，峰均功率比降低了 1 dB 以上。相比之下，正如我们在第五节 A 小节中指出的，在正交频分复用传输中，三个码本的峰均功率比几乎相同，这一结果符合预期，因为随着子载波数量增加，根据中心极限定理，聚合信号趋近于高斯分布，峰均功率比便主要由多载波结构而非预编码器决定。

总体而言，图 9 的结果连同图 7 和图 8 的结果表明，在受功率放大器约束的 DFT-s-OFDM 上行系统中，所提出的稀疏码本在保持高可达速率性能的同时，还带来了显著的峰均功率比优势。峰均功率比的降低有效地使发射机能够在不增加失真的情况下以更高的平均功率运行，从而可直接转化为相同功率预算下可达速率的提升。即使不考虑峰均功率比，这些发现也证实，所提出的稀疏设计对于各种上行传输场景而言，是传统稠密码本的一种实用且节能的替代方案。

VII. 结论

本文提出了一种稀疏格拉斯曼码本设计，可为有限反馈多输入多输出系统实现低复杂度和更高的功率效率。通过结合舒伯特胞腔分解并在预编码器结构中施加稀疏性，所提方法简化了目标函数，并在特定情况下缩小了优化搜索空间。数值结果表明，所提稀疏码本的可达速率性能几乎与理论最优的稠密 MCD-Manopt 码本相同，同时在 DFT-s-OFDM 系统中显著降低了峰均功率比。此外，稀疏结构本身可减少预编码器乘法、索引选择和空间复杂度，因此适用于物联网和上行系统等大规模、功率受限的传输场景。总体而言，所提稀疏码本设计为实用的格拉斯曼码本提供了有效框架，在性能、复杂度和功率效率之间实现了均衡，并有望在面向 6G 的多流 DFT-s-OFDM 系统中取代现有新空口码本。

表 II 新空口码本（T, M）$=$(4,2)。

索引	预编码器 W		
1-3	$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}$
4-6	$\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$
7-9	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\0&-\mathrm{j}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\0&\mathrm{j}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-\mathrm{j}&0\\0&1\end{bmatrix}$
10-12	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-\mathrm{j}&0\\0&-1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-1&0\\0&-\mathrm{j}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-1&0\\0&\mathrm{j}\end{bmatrix}$
13-15	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\\mathrm{j}&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\\mathrm{j}&0\\0&-1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\1&-1\\1&-1\end{bmatrix}$
16-18	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\\mathrm{j}&-\mathrm{j}\\\mathrm{j}&-\mathrm{j}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\\mathrm{j}&\mathrm{j}\\1&-1\\\mathrm{j}&-\mathrm{j}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\\mathrm{j}&\mathrm{j}\\\mathrm{j}&-\mathrm{j}\\-1&1\end{bmatrix}$
19-21	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\\1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\\\mathrm{j}&-\mathrm{j}\\-\mathrm{j}&\mathrm{j}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\-\mathrm{j}&-\mathrm{j}\\1&-1\\-\mathrm{j}&\mathrm{j}\end{bmatrix}$
22	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\-\mathrm{j}&-\mathrm{j}\\\mathrm{j}&-\mathrm{j}\\1&-1\end{bmatrix}$		

附录 A 本研究使用的码本

这些仿真中使用的码本列于表 II 和表 III。尽管表 II 引自 [2], , 但请注意，对于每个索引，其均已归一化为 $\mathbf{W}^{\mathrm{H}}\mathbf{W} = \mathbf{I}_M$，这与实际值不同。索引为 1–6 的矩阵，即 2-稀疏矩阵，在表 II 和表 III 中相同，因为式 (16) 给出的舒伯特胞腔会自动将 2-稀疏矩阵限制为这六个。其他矩阵则采用第四节 B 部分介绍的方法设计。

参考文献

[1] 爱立信，“爱立信移动报告，”2025年。[2] 3GPP，“TS 138 211 - V18.2.0 - 5G；新空口；物理信道与调制（3GPP TS 38.211 版本18.2.0 Release 18），”2024年。[3] Z. Zhang、Y. Xiao、Z. Ma、M. Xiao、Z. Ding、X. Lei、G. K. Karagiannidis和P. Fan，“6G 无线网络：愿景、需求、架构与关键技术，”*IEEE*《车辆技术杂志》，第14卷，第3期，第28–41页，2019年。[4] N. Ishikawa、S. Sugiura和L. Hanzo，“排列、空间与索引调制的50年：从经典射频到可见光通信与数据存储，”*IEEE*《通信调查与教程》，第20卷，第3期，第1905–1938页，2018年。[5] J. W. Choi、B. Shim、Y. Ding、B. Rao和D. I. Kim，“面向无线通信的压缩感知：实用提示与技巧，”*IEEE*《通信调查与教程》，第19卷，1550，2017年 3，1527 期 页 – 。[6] J. Lee、G. Gil和Y. H. Lee，“毫米波通信中混合 MIMO 系统基于正交匹配追踪的信道估计，”*IEEE* 通信汇刊，第64卷，第6期，第2370–2386页，2016年。[7] O. E. Ayach、S. Rajagopal、S. Abu-Surra、Z. Pi和R. W. Heath，“毫米波 MIMO 系统中的空间稀疏预编码，”*IEEE*

表 III $(T,\ M) = (4,\ 2)$ 提出的码本。

索引	预编码器 W		
1-3	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}$
4-6	$\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$
7-9	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-\mathrm{j}&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\0&\mathrm{j}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\0&-\mathrm{j}\end{bmatrix}$
10-12	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-\mathrm{j}&0\\0&-1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\\mathrm{j}&0\\0&-1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-1&0\\0&\mathrm{j}\end{bmatrix}$
13-15	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\\mathrm{j}&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-1&0\\0&-\mathrm{j}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\\0&1\\0&-1\end{bmatrix}$
16-18	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\\mathrm{j}&0\\0&1\\0&-\mathrm{j}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\-\mathrm{j}&0\\0&1\\0&-\mathrm{j}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\0&\mathrm{j}\end{bmatrix}$
19-21	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&-1\\-1&0\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&-\mathrm{j}\\\mathrm{j}&0\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&-\mathrm{j}\\-\mathrm{j}&0\end{bmatrix}$
22	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&\mathrm{j}\\1&0\end{bmatrix}$		

《无线通信汇刊》，第13卷，第3期，第1499–1513页，2014年。[8] N. Ishikawa、S. Sugiura和L. Hanzo，“子载波索引调制辅助正交频分复用——它能否奏效？”*IEEEAccess*，第4卷，第2580–2593页，2016年。[9] Z. Qin、J. Fan、Y. Liu、Y. Gao和G. Y. Li，“无线通信中的稀疏表示：一种压缩感知方法，”《*IEEE* 信号处理杂志》，第35卷，第3期，第40–58页，2018年。[10] D. Love、R. Heath和T. Strohmer，“面向多输入多输出无线系统的格拉斯曼波束成形，”*IEEE* 信息论汇刊，第49卷，第10期，第2735–2747页，2003年。[11] D. Love和R. Heath，“面向空间复用系统的有限反馈酉预编码，”*IEEE* 信息论汇刊，第51卷，第8期，第2967–2976页，2005年。[12] D. Love、R. Heath、V. N. Lau、D. Gesbert、B. Rao和M. Andrews，“无线通信系统中有限反馈综述，”《*IEEE* 通信领域精选期刊》，第26卷，第8期，第1341–1365页，2008年。[13] B. Hochwald和T. Marzetta，“瑞利平坦衰落中多天线通信的酉空时调制，”*IEEE* 信息论汇刊，第46卷，第2期，第543–564页，2000年。[14] K. Ngo、D. Cuevas、R. d. M. Gil、V. M. Baeza、A. G. Armada和I. Santamaria，“非相干多输入多输出通信：理论基础、设计方法与未来挑战，”*arXiv:250523172*，2025年.[15] B. Hochwald、T. Marzetta、T. Richardson、W. Sweldens和R. Urbanke，“酉空时星座的系统设计，”*IEEE* 信息论汇刊，第46卷，第6期，第1962–1973页，2000年。[16] I. Kammoun和J.-C. Belfiore，“面向非相干多输入多输出系统的一类新型格拉斯曼空时码，”《*IEEE* 通信快报》，第7卷，第11期，第528–530页，2003年。[17] I. Kammoun、A. M. Cipriano和J.-C. Belfiore，“格拉斯曼流形上的非相干码，”*IEEE*《无线通信汇刊》，第6卷，第10期，第3657–3667页，2007年。[18] R. H. Gohary和T. N. Davidson，“非相干多输入多输出通信：格拉斯曼星座与高效检测，”*IEEE* 信息论汇刊，第55卷，第3期，第1176–1205页，2009年。[19] K. Ngo、A. Decurninge、M. Guillaud和S. Yang，“Cube-split：一种用于非相干 SIMO 通信的结构化格拉斯曼星座，” IEEE 无线通信汇刊，第 19 卷，第 3 期，2020年。[20] K. Ngo、S. Yang、M. Guillaud 和 A. Decurninge，“非相干多输入多输出多址信道的联合星座设计”，IEEE 信息论汇刊，第 68 卷，第 11 期，第 7281–7305 页，2022年。[21] D. Cuevas、J. Alvarez Vizoso、C. Beltran、I. Santamaria、V. Tuvcek 和 G. Peters，“用于设计格拉斯曼星座的并集界最小化方法”，IEEE 通信汇刊，第 71 卷，第 4 期，第 1940–1952 页，2023年。[22] D. Cuevas、J. Alvarez Vizoso、C. Beltran、I. Santamaria、V. Tuvcek 和 G. Peters，“具有高效编解码功能的非相干通信球面星座”，IEEE 无线通信汇刊，第 23 卷，第 3 期，第 1886–1898 页，2024年。[23] J. H. Conway、R. H. Hardin 和 N. J. A. Sloane，“直线、平面等的装填：格拉斯曼空间中的装填”，《实验数学》，第 5 卷，第 2 期，第 139–159 页，1996年。[24] H. Ochiai 和 H. Imai，“正交频分复用信号峰均功率比的分布”，IEEE 通信汇刊，第 49 卷，第 2 期，第 282–289 页，2001年。[25] H. Ochiai，“单载波频分多址信号瞬时功率分布”，IEEE 无线通信快报，第 1 卷，第 2 期，第 73–76 页，2012年。[26] ——，“单载波频分多址系统中瞬时功率和峰均功率比的统计分布”，《物理通信》，第 8 卷，第 47–55 页，2013年。[27] T. Jiang 和 Y. Wu，“综述：正交频分复用信号的峰均功率比降低技术”，IEEE 广播汇刊，第 54 卷，第 2 期，第 257–268 页，2008年。[28] Y. Hama 和 H. Ochiai，“面向高能效通信的时频域非正交多址接入”，IEEE 无线通信汇刊，第 22 卷，第 9 期，第 5711–5724 页，2023年。[29] M. Yao、M. Carrick、M. M. Sohul、V. Marojevic、C. D. Patterson 和 J. H. Reed，“基于半定松弛的感知峰均功率比预编码：面向大规模多输入多输出正交频分复用系统”，IEEE 车辆技术汇刊，第 68 卷，第 3 期，第 2229–2243 页，2019年。[30] T. Konishi、H. Nakano、Y. Yano 和 M. Aoki，“利用舒伯特胞腔分解实现高移动性环境下的新型多输入多输出方法”，《IEICE 通信快报》，第 11 卷，第 10 期，第 679–684 页，2022年。[31] J. P. Hansen、T. Johnsen 和 K. Ranestad，“格拉斯曼簇上的舒伯特并”，《有限域及其应用》，第 13 卷，第 4 期，第 738–750 页，2007年。[32] J. Asano、Y. Hama、H. Iimori、C. Pradhan、S. Malomsoky 和 N. Ishikawa，“通过舒伯特胞腔分解设计用于非相干码的稀疏格拉斯曼”，arXiv:2601.21009，2026年。[33] T. Bendokat、R. Zimmermann 和 P. Absil，“格拉斯曼流形手册：基础几何与计算方面”，《计算数学进展》，第 50 卷，第 1 期，第 6 页，2024年。[34] A. Edelman、T. A. Arias 和 S. T. Smith，“具有正交约束的算法几何”，SIAM 矩阵分析与应用杂志，第 20 卷，第 2 期，第 303–353 页，1999年。[35] N. Endo、H. Iimori、C. Pradhan、S. Malomsoky 和 N. Ishikawa，“利用格拉斯曼流形上的承载数据参考信号提升频谱效率”，IEEE 无线通信汇刊，第 23 卷，第 8 期，第 10 137–10 149 页，2024年。[36] T. Kato、H. Iimori、C. Pradhan、S. Malomsoky 和 N. Ishikawa，“通过贝叶斯优化最大化承载数据参考信号的频谱效率”，《IEEE 通信学会开放期刊》，第 6 卷，第 3892–3903 页，2025年。[37] D. Tse 和 P. Viswanath，《无线通信基础》，剑桥大学出版社，2005年。[38] P. Liu 和 A. Springer，“毫米波频段视距通信的空间移位键控”，IEEE 无线通信快报，第 4 卷，第 2 期，第 121–124 页，2015年。[39] N. Ishikawa、R. Rajashekar、S. Sugiura 和 L. Hanzo，“基于广义空间调制的射频链简化毫米波通信”，IEEE 车辆技术汇刊，第 66 卷，第 1 期，第 879–883 页，2017年。[40] G. Berardinelli、L. A. M. Ruiz de Temino、S. Frattasi、M. I. Rahman 和 P. Mogensen，“正交频分多址与单载波频分多址：局域 IMT-A 场景下的性能比较”，IEEE 无线通信汇刊，第 15 卷，第 5 期，第 64–72 页，2008年。[41] G. Berardinelli、L. A. M. Ruiz de Temino、S. Frattasi、T. B. Sørensen、P. Mogensen 和 K. Pajukoski，“LTE-A 上行链路中预编码单用户多输入多输出的可行性”，《通信杂志》，第 4 卷，第 3 期，第 155–163 页，2009年。[42] N. Bell 和 M. Garland

’“高效稀疏矩阵-向量乘法

关于 CUDA，”*NVIDIACorporation*，2008年。[43] D. R. Kincaid、T. C. Oppe 和 D. M. Young，《ITPACKV 2D 用户指南》，德克萨斯大学奥斯汀分校数值分析中心，1989年。