关于缺-p Virasoro 代数的酉模

CHENGKANG XU

arXiv:2603.02527v1 [math.RT] 3 Mar 2026

Abs对于缺-p Virasoro 代数上的任意不可约 Harish-Chandra 模 V ，我们dete确定V 为酉模的条件。

1. 引言

李代数的酉模在数学和物理的许多领域中发挥着重要作用，例如统计力学和二维共形量子场论。在 [4], 过去几十年中，作者对 Virasoro 代数以及 Virasoro 超代数（Ramond 和 Neveu-Schwarz 情形）的不可约酉 Harish-Chandra 模进行了分类。这些模是满足某些条件的中间系列模、最高权模或最低权模。过去几十年中，人们还研究了许多其他无限维李代数上的酉模，例如仿射 Kac-Moody 代数ffine Kac-Moody algebras [2, 3], 无限矩阵李代数[11, 12], 扭Heisenberg-Virasoro代数[7, 17], W-无穷代数[6], W-代数 $W(2,\ 2)$[15], Schr¨odinger-Virasoro 代数[16], 等等。

本文研究 gap-p Virasoro 代数 g 上的酉模，该代数最初由 [13] 引入。gap-pVirasoro 代数与扭 Heisenberg-Virasoro 代数以及有理量子环面上的导子代数关系密切。它可以实现为这两个李代数的某些子代数的泛中心扩张。此外，当$p\ =\ 2$ 时，g 同构于 [1] 引入并由 [8] 命名的镜像 Heisenberg-Virasoro 代数。在 [13], 中，对 g 上的不可约 Harish-Chandra 模进行了分类。这类模包括中间系列模、最高权模或最低权模。

现在简要介绍本文的结构。第 2 节回顾 Harish-Chandra 模和酉模的概念，以及有关 Virasoro 代数和 gap-pVirasoro 代数 g 的一些相关结果。第 3 节明确确定 Verma 模的不可约性，以及 g 的不可约最高权模的结构。第 4 节致力于确定 g 的共轭线性反对合，第 5 节则确定 g 上的不可约 Harish-Chandra 模成为酉模的条件。

本文中，我们用符号 $\mathbb{Z}$、 $\mathbb{N}$、 $\mathbb{Z}_+$、 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 分别表示整数、非负整数、正整数、实数集和复数集；对于 $\mathbb{C}$ 的任意子集 N，记作 $N^\times = N \setminus \{0\}$。用 S^1 表示模长为一的复数集。所有向量空间和代数均定义在 $\mathbb{C}$ 上；向量空间 V 的对偶空间记作 V^*，李代数 $\mathcal{L}$ 的泛包络代数记作 $\mathcal{U}(\mathcal{L})$。本文固定一个正整数 $p\ >\ 1$ ；对于任意 $k\ \in \mathbb{Z}$，用 k 表示 k 除以 p所得的余数。最后，对于$a\ \in \mathbb{C}$ ，用 a 表示a的共轭；对于任意有限集 A，用 $|A|$ 表示A的基数。

2020 数学学科分类。 17B10,17B65,17B68.关键词和短语。 Gap-pVirasoro 代数，Virasoro 代数，酉，最高权模，中间系列模。

2. 预备知识

本节回顾有关 Virasoro 代数和间隙p Virasoro代数的一些相关记号和已知结果。

定义 2.1. 该***gap-p Virasoro*** 代数是一个复李代数 $\mathfrak{g}$，具有一组基

$$\left\{L_n, I_n^{(i)}, C_j \mid n \in \mathbb{Z}, 1 \le i \le p-1, 0 \le j \le [\frac{p}{2}]\right\}$$

以及非平凡关系

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{12}(m^3 - m)C_0\delta_{m+n,0},$$

$$[I_m^{(i)}, I_n^{(j)}] = \left(m + \frac{i}{p}\right)\delta_{i+j,p}\delta_{m+n+1,0}C_{\min\{i,p-i\}}, \quad [L_m, I_n^{(i)}] = -\left(n + \frac{i}{p}\right)I_{m+n}^{(i)},$$

其中 $m,n \in \mathbb{Z}, 1 \le i,j \le p-1$，且 $[\frac{p}{2}]$表示小于或等于 $\frac{p}{2}$ 的最大整数。

注 2.2. 为简化记号，本文用复数集$_i$ = 复数集$_{p-i}$表示 $[\frac{p}{2}] \le i \le p-1$。

设 $\mathcal{L}$ 是一个李代数，在 [10] 的意义下具有三角分解，$\mathcal{L} = \mathcal{L}_- \oplus \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_+$，其中 $\mathcal{L}_0$ 是一个阿贝尔子代数。

定义 2.3. </style}上的模 V 称为权模，如果 $V = \oplus_{\lambda \in \mathcal{L}_0^*} V_\lambda$，其中 $V_\lambda = \{v \in V \mid xv = \lambda(x)v$ 对任意 $x \in \mathcal{L}_0\}$成立。权 $\mathcal{L}$-模 V 称为***Harish-Chandra***模，如果维数 $V_\lambda < \infty$ 对任意 $\lambda \in \mathcal{L}_0^*$均成立；若所有 维数$V_\lambda \le 1$，则称为中间系列模；若 V 由一个最高 （分别为最低）权向量v 生成，且 $\mathcal{L}_+ v = 0$ （分别为 $\mathcal{L}_- v = 0$），并且对任意 $x \in \mathcal{L}_0$，$xv = \varphi(x)v$，则称为最高 （分别为最低）权模，其权为 $\varphi \in \mathcal{L}_0^*$。

设 $\varphi \in \mathcal{L}_0^*$ 和 $\mathbb{C}v_\varphi$ 为 $\mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_+$ 上的一维模，定义为

$$xv_\varphi = \varphi(x)v_\varphi, \ \mathcal{L}_+ v_\varphi = 0 \quad \text{for any } x \in \mathcal{L}_0.$$

于是得到诱导的 $\mathcal{L}$-模

$$M_{\mathcal{L},\varphi} = \mathcal{U}(\mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_+)} \mathbb{C}v_\varphi$$

称为最高权为 φ的**Verma 模**。对于任意最高权为 φ 且具有最高权向量v的最高权模V，存在一个自然的 $\mathcal{L}$-模满同态，从$M_{\mathcal{L},\varphi}$ 到V，该同态定义为$v_\varphi \mapsto v$。

Set

$$\mathfrak{h} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{L_0, C_i \mid 0 \le i \le p-1\},$$

它是g的Cartan子代数。显然，h包含了g中的所有半单元素，并且gap-pVirasoro 代数g具有三角分解$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_+$，其中

$$\mathfrak{g}_- = \text{张成}_{\mathbb{C}}\left\{L_n, \ I_n^{(i)} \mid n < 0, \ 1 \le i \le p-1\right\}, \quad \mathfrak{g}_+ = \text{张成}_{\mathbb{C}}\left\{L_{n+1}, I_n^{(i)} \mid n \in \mathbb{N}, 1 \le i \le p-1\right\}。$$

Set

$$\mathcal{V} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{L_n, C_0 \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{and} \quad \mathcal{H} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{I_n^{(i)}, C_i \mid n \in \mathbb{Z}, 1 \le i \le p-1\right\}.$$

显然，$\mathcal{V}$ 是Virasoro 代数，$\mathcal{H}$ 是海森堡代数，且是g的一个理想 .

现在我们回顾 Virasoro 代数 $\mathcal{V}$ 以及 gap-p Virasoro 代数 g 上的不可约 Harish-Chandra 模，它们分别在 [9] 和 [13] 中被分类。它们是中间系列模、最高权模或最低权模。

The Virasoro 代数 $\mathcal{V}$ 具有三角分解 $\mathcal{V}=\mathcal{V}_-\oplus\mathcal{V}_0\oplus\mathcal{V}_+$，其中

$$\mathcal{V}_\pm=\mathcal{V}\cap\mathfrak{g}_\pm=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{L_n\mid \pm n\in\mathbb{Z}_+\},\quad \mathcal{V}_0=\mathcal{V}\cap\mathfrak{h}=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{L_0,C_0\}.$$

于是，我们有如下 Verma 模的概念：$M_{\mathcal{V},\phi}$ 上的 $\mathcal{V}$ 最高权为 $\phi\in\mathcal{V}_0^*$。以下结果众所周知，参见 [5] 以供参考。

命题 2.4. *Verma* 模 $M_{\mathcal{V},\phi}$ 上的 $\mathcal{V}$ 不可约，当且仅当 $\Phi_{h,c}(\alpha,\beta)=0$ 对某个 $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+$成立，其中 $h=\phi(L_0),c=\phi($复数集$_0)$ 且

$$\Phi_{h,c}(\alpha,\beta)=\left(h+\frac{(\alpha^2-1)(c-13)}{24}+\frac{(\alpha\beta-1)}{2}\right)\left(h+\frac{(\beta^2-1)(c-13)}{24}+\frac{(\alpha\beta-1)}{2}\right)+\frac{(\alpha^2-\beta^2)^2}{16}.$$

For 任意 $a,b\in\mathbb{C}$，在空间 $\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}v_n$ 上存在一个 $\mathcal{V}$-模结构，其作用为

$$L_nv_k=-(a+k+bn)v_{n+k},\quad C_0v_k=0\quad \text{for any } n,k\in\mathbb{Z}.$$

所得的 $\mathcal{V}$-中间系列模通常记作 $V(a,b)$。众所周知，$V(a,b)$ 可约，当且仅当 $a\in\mathbb{Z}$ 且 $b\in\{0,1\}$。

设 $a,b\in\mathbb{C}$ 和 $F=(F_{i,j})$ 是一个指标为 $1\le i\le p-1, 0\le j\le p-1$ 的 $(p-1)\times p$ 矩阵，满足

$$F_{s,i}F_{r,\overline{i+s}}=F_{r,i}F_{s,\overline{i+r}}\quad \text{for any } 1\le r,s\le p-1, 0\le i\le p-1,$$

and

$$i+j\in\mathrm{col}(F)\quad \text{if } j\in\mathrm{col}(F) \text{ and } i\in\mathrm{row}(F),$$

其中 $\mathrm{col}(F)=\{j\mid F_{ij}\neq 0$对于某个 $i\}$成立，并且 $\mathrm{row}(F)=\{i\mid F_{ij}\neq 0$对于某个 $j\}$成立。于是，空间 $\oplus_{j\in\mathrm{col}(F),k\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}v_{k+\frac{j}{p}}$ 上存在一个 g-模结构，其作用为

$$L_mv_{k+\frac{j}{p}}=-\left(a+k+\frac{j}{p}+bm\right)v_{m+k+\frac{j}{p}},\quad I_m^{(i)}v_{k+\frac{j}{p}}=F_{i,j}v_{m+k+\frac{i+j}{p}},\quad C_sv_{k+\frac{j}{p}}=0$$

对于 $m,k\in\mathbb{Z}, j\in\mathrm{col}(F), 1\le i\le p-1, 0\le s\le p-1$。所得 g-模是一个中间系列模，本文将其记为 $V(a,b,F)$。对于任意 $j\in\mathrm{col}(F)$，记

$$V_{(j)}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}v_{k+\frac{j}{p}},$$

它是一个 $\mathcal{V}$-中间系列模，同构于 $V(a+jp,b)$，并且 $V(a,b,F)=\bigoplus_{j\in\mathrm{col}(F)}V_{(j)}$。

命题 2.5. [13, 命题 4.2] g-模 $V(a,b,F)$ </style}可约，当且仅当 $\mathrm{col}(F)|=1, a\in\mathbb{Z}$ 且 $b\in\{0,1\}$。

接下来我们回顾关于 $\mathcal{V}$ 上酉模的一些概念和结果。

定义 2.6。 设 $\mathcal{L}$ 是一个李代数。若 $\mathcal{L}$-模 V 存在一个正定 *Hermite* 型 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 使得

$$\langle xu,v\rangle=\langle u,\theta(x)v\rangle\quad \textit{for any } x\in\mathcal{L},u,v\in V,$$

其中 $\theta:\ \mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}$是 $\mathcal{L}$ 上的共轭线性反对合，即满足以下条件的映射 t

$$\theta^2=\mathrm{identity},\ \theta(x+y)=\theta(x)+\theta(y),\ \theta(ax)=\bar{a}\theta(x),\ \theta([x,y])=[\theta(y),\theta(x)]$$

对任意 $a\in\mathbb{C},\ x,\ y\in\mathcal{L}$。

值得注意的是，酉权模是完全可约的。以下命题引自 [4]。

命题 2.7. $\mathcal{V}$ 的任意共轭线性反对合均属于以下类型之一。*(i)* $\theta_\alpha^+(L_n) = \alpha^n L_{-n},\ \theta_\alpha^+(C_0) = C_0$，其中 $\alpha \in \mathbb{R}^\times$。*(ii)* $\theta_\alpha^-(L_n) = -\alpha^n L_n,\ \theta_\alpha^-(C_0) = -C_0$，其中 $\alpha \in S^1$ 是模长为一的复数集合。

命题 2.8. 设 V 是 $\mathcal{V}$ 上的一个非平凡不可约权模。
(1) 若 V 关于 $\mathcal{V}$ 的某个共轭线性反对合 θ 酉，则 $\theta = \theta_\alpha^+$ 对某个 $\alpha > 0$成立。*(2)* 若 V 关于满足 $\alpha > 0$ 的 θ_α^+ 酉，则 V 关于 θ_1^+ 酉。

命题 2.9. *(1)* 当且仅当 $a \in \mathbb{R}, b \in \frac{1}{2} + \sqrt{-1}\mathbb{R}$ 时，$\mathcal{V}$-模 $V(a,b)$ 关于 θ_1^+ 酉。*(2)* 当且仅当 $\phi(C_0)^{\overline{\ }} \geq 1$, $\phi(L_0) \geq 0$，或者存在整数 $m \geq 2$ 且 $r, s \in \mathbb{Z}$ 满足以下条件时，$\mathcal{V}$ 上最高权为 ϕ 的不可约最高权模关于 θ_1^+ 酉：

$$0 \leq r < s < m, \quad \phi(C_0) = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \quad \phi(L_0) = \frac{(mr+s)^2 - 1}{4m(m+1)}.$$

3. 最高权模

本节中，我们将确定 Verma模的不可约性以及 g 上不可约最高权模的结构。

回顾最高权为 $\varphi \in \mathfrak{h}^*$ 的 Verma g-模 $M_{\mathfrak{g},\varphi}$。记

$$J = \{1 \leq i \leq p-1 \mid \varphi(C_i) \neq 0\} \quad \text{and} \quad J^C = \{1 \leq i \leq p-1 \mid \varphi(C_i) = 0\}.$$

由于 $C_i = C_{p-i}$，集合 J 是对称的，即若 $p - i \in J$，则 $i \in J$。集合 J^C 也具有对称性。于是我们得到子代数

$$\mathfrak{g}_{J^C} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \left\{ L_n, I_n^{(i)}, C_0, C_i \mid n \in \mathbb{Z}, i \in J^C \right\} \text{ and } \mathcal{H}_J = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \left\{ I_n^{(i)}, C_i \mid n \in \mathbb{Z}, i \in J \right\}$$

g 的子代数。显然，$\mathcal{H}_J$ 是 g 的理想，$\mathfrak{g}_{J^C} \ltimes \mathcal{H}_J = \mathfrak{g}$，并且若 $J^C = \emptyset$，则 $\mathcal{H}_J = \mathcal{H}$，$\mathfrak{g}_{J^C} = \mathcal{V}$。此外，它们具有由 g 诱导的三角分解。定义线性函数 $\psi \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{J^C})^*$，其定义为

$$\psi(L_0) = \varphi(L_0) - \sum_{j \in J} \frac{j(p-j)}{4p^2}; \quad \psi(C_0) = \varphi(C_0) - |J|; \quad \psi(C_i) = 0 \quad \text{for } i \in J^C. \tag{3.1}$$

于是我们得到 $\mathfrak{g}_{J^C}$ 的 Verma 模 $M^{\mathfrak{g}_{J^C},\psi}$，其最高权为 ψ。显然，若 $J^C \neq \emptyset$，则 $\mathcal{U}\left(\mathcal{H}_{\{i,p-i\}}\right)$ v^ψ 生成 $M^{\mathfrak{g}_{J^C},\psi}$的一个真 g-子模，其中 $i \in J^C$，

$$\mathcal{H}_{\{i,p-i\}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} I_n^{(i)} \oplus \mathbb{C} I_n^{(p-i)},$$

且 v^ψ 是 $M^{\mathfrak{g}_{J^C},\psi}$中的最高权向量。因此 $M^{\mathfrak{g}_{J^C},\psi}$ 是可约的。记 $\psi|_{\mathcal{V}}$ 为 ψ 在 $\mathfrak{h} \cap \mathcal{V}$上的限制。由于任何最高权为 $\psi|_{\mathcal{V}}$ 的最高权 $\mathcal{V}$-模，都可以通过要求对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $i \in J^C$，$I_n^{(i)}$和 C_i 均平凡作用，将其扩张为最高权为 ψ 的最高权 $\mathfrak{g}_{J^C}$-模，因此我们看到 $M^{\mathfrak{g}_{J^C},\psi}$ 的不可约商等价于 Verma $\mathcal{V}$-模 $M^{\mathcal{V},\psi|_{\mathcal{V}}}$的不可约商。

通过要求 $\mathcal{H}_J M^{\mathfrak{g}_{J^C},\psi} = 0$，我们将 $M^{\mathfrak{g}_{J^C},\psi}$ 变成一个g-模，并应将所得的g-模记为 $\left(M^{\mathfrak{g}_{J^C},\psi}\right)^e$。

设 $\phi = \varphi|_{\mathcal{H}_J}$ 对 φ 的限制 $\mathfrak{h} \cap \mathcal{H}_J$。我们有 Verma 模 $M^{\mathcal{H}_J,\,\phi}$ 它属于 $\mathcal{H}_J$，其最高权为 ϕ，很容易证明它是不可约的。以下结果是 [14,命题 3.1] 的一个特例。

命题 3.1. 空间 $M_{\mathcal{H}_J}$ 上存在一个不可约最高权 $\mathfrak{g}$-模结构，ϕ其作用定义为

$$I_n^{(i)} \mapsto \begin{cases} I_n^{(i)} & \text{if } i \in J, \\ 0 & \text{if } i \notin J, \end{cases} \qquad C_i \mapsto \begin{cases} \phi(C_i) & \text{if } i \in J, \\ 0 & \text{if } i \notin J, \end{cases}, \quad C_0 \mapsto |J|, \tag{3.2}$$

$$L_n \mapsto \sum_{j\in J} \frac{1}{2\phi(C_j)} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} : I_k^{(j)} I_{n-k-1}^{(p-j)} : \right) + \delta_{n,0} \sum_{j\in I} \frac{j(p-j)}{4p^2}, \tag{3.3}$$

其中 $n \in \mathbb{Z}, 1 \le i \le p-1$，且正规序乘积定义为

$$: I_k^{(i)} I_l^{(p-i)} := \begin{cases} I_k^{(i)} I_l^{(p-i)} & \text{if } k < l; \\ I_l^{(p-i)} I_k^{(i)} & \text{if } k \ge l. \end{cases}$$

我们将 $\left(M_{\mathcal{H}_J,\phi}\right)^{\mathfrak{g}}$ 表示为命题$\mathfrak{g}$-模3.1。此外，我们还给出了 $\mathfrak{g}$ 的 Verma 模$M_{\mathfrak{g},\varphi}$ 的刻画。

定理 *3.2*。*(1)* $M_{\mathfrak{g},\varphi} \cong \left(M_{\mathcal{H}_J,\phi}\right)^{\mathfrak{g}} \otimes \left(M_{\mathfrak{g}_{J^C},\psi}\right)^e$ 当且仅当 $J \neq \emptyset$。*(2)* $\left(M_{\mathcal{H}_J,\phi}\right)^{\mathfrak{g}} \otimes \left(M_{\mathfrak{g}_{J^C},\psi}\right)^e$ 的任意子模都具有 $\left(M_{\mathcal{H}_J,\phi}\right)^{\mathfrak{g}} \otimes W^e$ 的形式，其中 W 是 $M_{\mathfrak{g}_{J^C},\psi}$ 的 g_{J^C}-子模，而 W^e 是以与 $\left(M_{\mathfrak{g}_{J^C},\psi}\right)^e$ 相同的方式由 W 得到的 g-模。因此，最高权为 φ 的不可约最高权 g-模同构于 $\left(M_{\mathcal{H}_J,\phi}\right)^{\mathfrak{g}} \otimes \left(V_{\mathcal{V},\psi|_{\mathcal{V}}}\right)^e$，若 $J \neq \emptyset$；若 $J = \emptyset$，则同构于 $\left(V_{\mathcal{V},\psi|_{\mathcal{V}}}\right)^e$。其中，$V_{\mathcal{V},\psi|_{\mathcal{V}}}$ 是 *Verma* $\mathcal{V}$-模 $M_{\mathcal{V},\psi|_{\mathcal{V}}}$ 的唯一不可约商（即最高权为 $\psi|_{\mathcal{V}}$ 的不可约最高权 $\mathcal{V}$- 模），而 $\left(V_{\mathcal{V},\psi|_{\mathcal{V}}}\right)^e$ 是以与 $\left(M_{\mathfrak{g}_{J^C},\psi}\right)^e$ 相同的方式由 $V_{\mathcal{V},\psi|_{\mathcal{V}}}$ 得到的 g-模。*(3) Verma* 模 $M_{\mathfrak{g},\varphi}$ 不可约，当且仅当 $J = \{1, 2, 。 \ldots, p-1\}$ 且

$$\Phi(\alpha,\beta)\Phi(\beta,\alpha) + (\alpha^2-\beta^2)^2 = 0 \text{ for some } \alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+,$$

其中

$$\Phi(\alpha,\beta) = 4\varphi(L_0) - \sum_{j=1}^{p-1} \frac{j(p-j)}{p^2} + \frac{(\alpha^2-1)(\varphi(C_0)-p-12)}{6} + 2(\alpha\beta-1).$$

证明。可以验证 $\left(M_{\mathcal{H}_J,\phi}\right)^{\mathfrak{g}} \otimes \left(M_{\mathfrak{g}_{J^C},\psi}\right)^e$ 是一个最高权 $\mathfrak{g}$-模，其最高权为 φ。于是 (1) 由 PBW 定理得出。(2) 由 (1) 和 [14, 命题 3。5], 而 (3) 由 (2) 和命题 2.4得出。□

4. Conjugate-linear anti-involutions of $\mathfrak{g}$

本节我们确定 $\mathfrak{g}$ 的所有共轭线性反对合。记

$$\mathfrak{c} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{C_i \mid 0 \le i \le p-1\}$$

$\mathfrak{g}$ 的中心。则 $\mathfrak{h} = \mathbb{C}L_0 \oplus \mathfrak{c}$。

引理 *4.1.* 设 θ 是 g 的共轭线性反对合。那么 *(1)* $\theta(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}, \theta(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ *and* $\theta(L_0) = \lambda L_0 + C(L_0)$, *where* $\lambda = \pm 1$ *and* $C(L_0) \in \mathfrak{c}$. *(2)* $\theta(C_i) = \lambda A_{0,i} A_{-1,p-i} C_i$ *and*

$$\theta(I_n^{(i)}) = \begin{cases} A_{-n-1,p-i} I_{-n-1}^{(p-i)} & \text{if } \lambda = 1, \\ A_{n,i} I_n^{(i)} & \text{if } \lambda = -1, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $n \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq p-1$ 和所有 $A_{j,k}$ 都是非零复数。特别地，$\theta(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.

证明。(1) 设 $x \in \mathfrak{c}$，$y \in \mathfrak{g}$ 且 $z = \theta(y)$。则 $y = \theta^2(y) = \theta(z)$ 且 $[\theta(x), y] = \theta[z, x] = 0$，从而证明 $\theta(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}$。由于

$$[\theta(L_0), \theta(L_n)] = \theta[L_n, L_0] = n\theta(L_n) \quad \text{and} \quad [\theta(L_0), \theta(I_n^{(i)})] = \theta[I_n^{(i)}, L_0] = \left(n + \frac{i}{p}\right)\theta(I_n^{(i)})$$

对任意 $n \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq p-1$，可知 $\theta(L_0) \in \mathfrak{h} \setminus \mathfrak{c}$。因此 $\theta(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$，我们可以写成

$$\theta(L_0) = \lambda L_0 + C(L_0) \quad \text{for some } \lambda \in \mathbb{C}, C(L_0) \in \mathfrak{c}.$$

由 $L_0 = \theta^2(L_0) = \theta(\lambda L_0 + C(L_0)) = \bar{\lambda}\lambda L_0 + \lambda C(L_0) + \theta(C(L_0))$，我们知道 $\lambda \in S^1$。

对任意 $n \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq p-1$，记为（一个有限和）

$$\theta(I_n^{(i)}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{p-1} A_{k,j} I_k^{(j)} + C(I_n^{(i)}), \quad \text{where } C(I_n^{(i)}) \in \mathfrak{c}, A_{k,j} \in \mathbb{C}^\times.$$

由方程

$$\left(n + \frac{i}{p}\right)\theta(I_n^{(i)}) = \theta[I_n^{(i)}, L_0] = [\theta(L_0), \theta(I_n^{(i)})] = -\lambda \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{p-1} \left(k + \frac{j}{p}\right) A_{k,j} I_k^{(j)} \tag{4.2}$$

我们看到，对于固定的一对 $(k + \frac{j}{p}) = n + \frac{i}{p}$，$k$ 和 j。这意味着 λ 是一个有理数，因此 $\lambda = \pm 1$，从而证明了 (1)。此外，我们有

$$\begin{cases} k = -n-1, j = p-i & \text{if } \lambda = 1, \\ k = n, j = i & \text{if } \lambda = -1. \end{cases}$$

(2) 方程 (4.2) 还意味着复数集$(I_n^{(i)}) = 0$。于是我们由上式得到 (4.1)。对于任意 $1 \leq i \leq p-1$，由下式可知

$$\frac{i}{p}\theta(C_i) = \theta[I_0^{(i)}, I_{-1}^{(p-i)}] = [\theta(I_{-1}^{(p-i)}), \theta(I_0^{(i)})] = \lambda A_{0,i} A_{-1,p-i} \frac{i}{p} C_i$$

因此 $\theta($复数集$_i) = \lambda A_{0,\ i} A_{-1,\ p-i}$复数集$_i$。证明完毕。 □

命题 4.2。$\mathfrak{g}$ 的任意共轭线性反对合属于以下类型之一.

(1) $\theta^+_{\alpha,\beta}(L_n) = \alpha^n L_{-n}$, $\theta^+_{\alpha,\beta}(I_n^{(i)}) = \alpha^n \beta_{p-i} I_-^{(p-i)}$ $n-1$, $\theta^+_{\alpha,\beta}($复数集$_0) = C0$, $\theta^+_{\alpha,\beta}($复数集$_i) = \alpha^{-1}\beta_i\beta_{p-i}C_i$，其中 $\alpha \in \mathbb{R}^\times, \beta_i \in \mathbb{C}^\times$ 使得对所有 $1 \leq i \leq p-1$ 均有 $\beta_i\beta_{p-i} = \alpha$，以及 $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{p-1})$；*(2)* $\theta^-_{\alpha,\beta}(L_n) = -\alpha^n L_n$, $\theta^-_{\alpha,\beta}(I_n^{(i)}) = \alpha^n \beta_i I_n^{(i)}$, $\theta^-_{\alpha,\beta}($复数集$_0) = -C0$, $\theta^-_{\alpha,\beta}($复数集$_i) = -\alpha^{-1}\beta_i\beta_{p-i}C_i$，其中 $\alpha, \beta_i \in S^1$。

证明。设 θ 是$\mathfrak{g}$的共轭线性反对合，它由 $\mathcal{H}$ 根据引理4.1(2) 固定，因此诱导出一个共轭线性反对合，记为 θ，定义在商代数 $\mathfrak{g}/\mathcal{H}$上。对于元素 $x \in \mathfrak{g}$，下文用 x 表示x 在$\mathfrak{g}/\mathcal{H}$ 中的像。由于$\mathfrak{g}/\mathcal{H} \cong \mathcal{V}$，由命题 2.7 可知，$\theta$ 属于以下两种类型之一。

(i) $\theta^+_\alpha : L_n \mapsto \alpha^n L_{-n}$, 复数集$_0 \mapsto$ 复数集$_0$ 对于某个 $\alpha \in \mathbb{R}^\times$ 成立。(ii) $\theta^-_\alpha : L_n \mapsto -\alpha^n L_n$, 复数集$_0 \mapsto -$复数集$_0$ 对于某个 $\alpha \in S^1$ 成立。下文根据 θ的两种类型，将证明分为两种情况。

情形 1：$\theta = \theta^+_\alpha$。对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 我们可以写成（一个有限和）

$$\theta(L_n) = \alpha^n L_{-n} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{p-1} B_{k,j}^{(n)} I_k^{(j)} + C(L_n),$$

其中 $B^{(n)}$k,j $\in \mathbb{C}$, C(L_n) $\in$c。特别地，与引理 4.1 比较，我们看到 $\lambda = 1$ 且$\theta(L_0) = L_0 +$ C(L_0)。此外，由 (4.1)，我们有 $\theta(I_n^{(i)}) = A_{-n-1}$， $_{p-i}I_{-}^{(p-i)}$ n_{-1}。

对于$n \in \mathbb{Z}^\times$，我们有

$$n\theta(L_n) = [\theta(L_0), \theta(L_n)] = [L_0, \alpha^n L_{-n} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{p-1} B_{k,j}^{(n)} I_k^{(j)}] = n\alpha^n L_{-n} - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{p-1} \left(k + \frac{j}{p}\right) B_{k,j}^{(n)} I_k^{(j)}.$$

This 可得复数集(L_n) $= 0$ 且$B^{(n)}{}_{k,j} = 0$ 对所有k、j均成立。因此， $\theta(L_n) = \alpha^n L_{-n}$ 对$n \neq 0$成立。由

$$\theta[L_n, L_{-n}] = 2n\theta(L_0) + \frac{1}{12}(n^3 - n)\theta(C_0) = 2nL_0 + 2nC(L_0) + \frac{1}{12}(n^3 - n)\theta(C_0)$$
$$= [\theta(L_{-n}), \theta(L_n)] = 2nL_0 + \frac{1}{12}(n^3 - n)C_0$$

我们可知复数集(L_0) $= 0$ 且 $\theta(C_0) = C_0$。因此，对任意$n \in \mathbb{Z}$， $\theta(L_n) = \alpha^n L_{-n}$.

利用（4.1）并展开 $\theta[L_n$、$I_0^{(i)}] = [\theta(I_0^{(i)}), \theta(L_n)]$，对任意$n \in \mathbb{Z}$、$1 \le i \le p-1$，可得$A_{-n-1,p-i} = \alpha^n A_{-1,p-i}$，或者等价地，

$$A_{n,i} = \alpha^{-n} A_{0,i} \quad \text{for any } n \in \mathbb{Z}, 1 \le i \le p-1.$$

令 $\beta_i = \alpha$A0,$_i$，对任意 $1 \le$i $\le$p $- 1$，并令 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-1})$。那么由引理 4.1(2)，有 θ ($I_n^{(i)}$) $= \alpha^n \beta_{p-i} I_{-}^{(p-i)}$ n_{-1} 且 θ(C$_i$) $= \alpha^{-1}\beta_i\beta_{p-i}C_i$。此外，由$I_n^{(i)} = \theta^2(I_n^{(i)}) = \alpha^{-1}\beta_{p-i}\beta_i I_n^{(i)}$可得 $\beta_{p-i}\beta_i = \alpha = \beta_i\beta_{p-i}$。这表明$\theta = \theta^+_{\alpha,\beta}$。

情形 2: $\theta = \theta^-_{\alpha}$。类似地，此情形导出 $\theta = \theta^-_{\alpha,\beta}$。 □

推论 4.3. 子代数 $\mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathfrak{g}_{J^C}, \mathcal{H}_J$ 在 $\mathfrak{g}$ 的任意共轭线性反对合下保持稳定。

证明。 这由命题4.2推出。 □

5. 酉 Harish-Chandra 模

在本节中，我们确定 g 上任意不可约 Harish-Chandra模为酉模的条件。首先，我们有如下

命题 5.1. 设 V 是一个非平凡的不可约权$\mathfrak{g}$-模，且它对 $\mathfrak{g}$ 的某个共轭线性反对合是酉的，则 V 对某个 $\theta^+_{1,\beta}$ 是酉的，其中 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-1}) \in \mathbb{C}^{p-1}$ 使得 $\beta_i\beta_{p-i} = 1$ 对所有 $1 \le i \le p-1$ 成立。

证明。假设V 关于 g 的共轭线性反对合 θ 是酉的。将 V 视为一个 $\mathcal{V}$-模，且 V 对于 $\theta|_{\mathcal{V}}$ θ 到 $\mathcal{V}$ 的限制是酉的。我们断言 V 作为$\mathcal{V}$-模是非平凡的。否则，对任意 $v \in V$， $n \in \mathbb{Z}$， $1 \le i \le p-1$，由 $[L_0, I_n^{(i)}]v = 0$ 可得$I_n^{(i)}v = 0$。因此复数集$_iv = 0$，且 V 是平凡 g-模，矛盾。

由于酉权 $\mathcal{V}$-模是完全可约的，V 包含一个非平凡不可约酉 V-子模，关于 $\theta|_{\mathcal{V}}$。因此我们可以假设 $\theta|_{\mathcal{V}} = \theta^+_1$，根据命题 2.8。然后该陈述由命题4.2得出。 □

下面我们确定不可约 Harish-Chandra $\mathfrak{g}$-模在固定的共轭线性反对合 $\theta^+_{1,\beta}$（$\mathfrak{g}$ 的，如命题 5.1 所述）下成为酉模的条件。我们首先对 $\mathfrak{g}$-模 $V(a, b, F)$ 这一中间系列进行讨论。回顾集合

$$\mathrm{col}(F) = \{0 \le j \le p-1 \mid F_{ij} \neq 0 \text{ for some } i\}.$$

定理 5.2. 该$\mathfrak{g}$-模 $V(a,\ b,\ F)$（中间系列）对于 θ_1^+,β 是酉的，当且仅当 $a \in \mathbb{R}$，$b \in \frac{1}{2} + \sqrt{-1}\mathbb{R}$ 且 $\overline{\beta_{p-i}}F_{p-i,\ i+j} = F_{i,-j}$对任意 $j \in col(F)$，$1 \le i \le p-1$。

证明。 若$a \in \mathbb{R}$、$b \in \frac{1}{2} + \sqrt{-1}\mathbb{R}$且 $\beta_{p-i}F_{p-i,i+j} = \overline{F_{i,j}}$对任意$j \in \mathrm{col}(F)$，$1 \le i \le p-1$成立，那么容易验证，对于 $\theta_{1,\beta}^+$，$V(a,b,F)$ 是酉的，且正定 Hermite 型 $\langle\cdot,\cdot\rangle$定义为

$$\langle v_{m+\frac{i}{p}}, v_{n+\frac{j}{p}}\rangle = \delta_{m,n}\delta_{i,j} \quad \text{for } m,n \in \mathbb{Z}, i,j \in \mathrm{col}(F).$$

反过来，设 V(a, b, F) 对于 $\theta_{1,\beta}^+$ 是酉的，并且存在某个正定 Hermite 型$\langle\cdot,\cdot\rangle$。那么所有 V(j)' 都是对于 $\left(\theta_{1,\beta}^+\right)|_{\mathcal{V}} = \theta_1^+$ 的酉 $\mathcal{V}$-模。因此，根据命题 2.9(1)，a $\in \mathbb{R}$、b $\in \frac{1}{2} + \sqrt{-1}\mathbb{R}$。此外，对于任意 j $\in$ col(F), 1 $\le$ i $\le$ p $-$ 1，通过在必要时将基元素 v j 替换为适当的 p p p p p 倍数，对厄米型 $\langle\cdot,\cdot\rangle$进行归一化，使得 $\langle v_{i+j}, v\ i+j\rangle = \langle v\ j, v\ j\rangle = 1$。于是我们有

$$\begin{aligned}\beta_{p-i}F_{p-i,\overline{i+j}} &= \beta_{p-i}F_{p-i,\overline{i+j}}\langle v_{\frac{j}{p}}, v_{\frac{j}{p}}\rangle = \langle\beta_{p-i}I_{-1}^{(p-i)}v_{\frac{i+j}{p}}, v_{\frac{j}{p}}\rangle = \langle\theta_{1,\beta}^+(I_0^{(i)})v_{\frac{i+j}{p}}, v_{\frac{j}{p}}\rangle \\ &= \langle v_{\frac{i+j}{p}}, I_0^{(i)}v_{\frac{j}{p}}\rangle = \overline{F_{i,j}}\langle v_{\frac{i+j}{p}}, v_{\frac{i+j}{p}}\rangle = \overline{F_{i,j}}.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

接下来，我们要确定不可约最高权 g-模成为酉模的条件，其中 $\theta_{1,\beta}^+$ 以及某个正定 Hermite 型。

回忆最高权为 φ 的不可约最高权 g-模。根据定理3.2，当$J = \emptyset$时，它同构于$V_{\mathcal{V},\psi|_{\mathcal{V}}}$；当$J \neq \emptyset$时，它同构于 $\left(M_{\mathcal{H}_J,\phi}\right)^{\mathfrak{g}} \otimes \left(V_{\mathcal{V},\psi|_{\mathcal{V}}}\right)^{e}$。下面的引理很容易验证。

引理 5.3. 设 V,W 是李代数 $\mathcal{L}$ 上的两个酉模，它们分别对应某个共轭线性反 *involution* θ以及正定 *Hermite* 型 $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$。则张量积 $\mathfrak{g}$- 模 $V \otimes W$ 关于 θ 以及如下定义的正定 *Hermite* 型 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是酉的：

$$\langle v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle_V\langle w_1, w_2\rangle_W \quad \textit{for } v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W.$$

注意，g-模 $\left(M_{\mathcal{H}_J,\phi}\right)^{\mathfrak{g}}$ 是一个最高权模，其最高权为 $\phi^{\mathfrak{g}}$，且满足

$$\phi^{\mathfrak{g}}(L_0) = \sum_{j\in J}\frac{j(p-j)}{4p^2}, \quad \phi^{\mathfrak{g}}(C_0) = |J|, \quad \phi^{\mathfrak{g}}(C_i) = \begin{cases}\phi(C_i) = \varphi(C_i) & \text{if } i \in J;\\ 0 & \text{if } i \notin J.\end{cases}$$

命题 5.4. $\left(M_{\mathcal{H}_J,\phi}\right)^{\mathfrak{g}}$ 这个$\mathfrak{g}$-模对于 $\theta_{1,\beta}^+$ 是酉的，当且仅当对所有 $i \in J$，都有 $\beta_i\phi$(复数集$_i$) $\in \mathbb{R}^\times$。

证明。 设 $\left(M_{\mathcal{H}_J,\phi}\right)^{\mathfrak{g}}$ 对于 $\theta_{1,\beta}^+$是酉的。令 v 为$\left(M_{\mathcal{H}_J,\phi}\right)^{\mathfrak{g}}$中的一个非零最高权向量。那么对于任意 $i \in J$，我们有（注意到 $\beta_i\beta_{p-i} = 1$）

$$\begin{aligned}\frac{i}{p}\beta_i\phi(C_i)\langle v,v\rangle &= \beta_i\langle[I_0^{(i)}, I_{-1}^{(p-i)}]v, v\rangle = \beta_i\langle I_0^{(i)}I_{-1}^{(p-i)}v, v\rangle = \beta_i\langle v, \theta_{1,\beta}^+(I_{-1}^{(p-i)})\theta_{1,\beta}^+(I_0^{(i)})v\rangle \\ &= \beta_i\overline{\beta_i\beta_{p-i}}\langle v, I_0^{(i)}I_{-1}^{(p-i)}v\rangle = \overline{\beta_i}\langle v, [I_0^{(i)}, I_{-1}^{(p-i)}]v\rangle = \frac{i}{p}\overline{\beta_i\phi(C_i)}\langle v,v\rangle,\end{aligned}$$

这意味着 $\beta_i\phi$(复数集$_i$)$ = \overline{\beta_i\phi(}$复数集$_i$)。因此 $\beta_i\phi$(复数集$_i$) $\in \mathbb{R}^\times$。

反过来，假设对于所有 $i \in J$，都有 $\beta_i\phi$(复数集$_i$) $\in \mathbb{R}^\times$。注意，泛包络代数$\mathcal{U}(\mathcal{H}_J)$ 有如下分解

$$\mathcal{U}(\mathcal{H}_J) = \mathcal{U}(\mathcal{H}_J \cap \mathfrak{c}) \oplus \left(\sum_{i\in J} \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} I_{-n}^{(i)} \mathcal{U}(\mathcal{H}_J) + \mathcal{U}(\mathcal{H}_J) I_{n-1}^{(i)} \right).$$

用 $\rho: \mathcal{U}(\mathcal{H}_J) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_J \cap \mathfrak{c})$ 表示上述分解中到第一个直和项上的投影。于是空间 $M_{\mathcal{H}_J,\phi}$ 容许一个正定 Hermite 型 $\langle \cdot,\cdot \rangle$，其定义为

$$\langle xv, yv \rangle v = \rho\left(\widetilde{\theta_{1,\beta}^+}(x) y\right) v,$$

其中 x、$y \in \mathcal{U}\left(\sum_{i\in J} \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathbb{C} I_{-n}^{(i)}\right)$，且 $\theta_{1,\beta}^+$ 是 $\mathcal{U}(\mathcal{H}_J)$ 的反对合，它由 $\theta_{1,\beta}^+$ 经下式延拓

$$\widetilde{\theta_{1,\beta}^+}(x_1 \cdots x_k) = \theta_{1,\beta}^+(x_k) \cdots \theta_{1,\beta}^+(x_1) \quad \text{for any } x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{H}_J.$$

于是显然，$\mathcal{H}_J$-模 $M_{\mathcal{H}_J,\phi}$ 对 $\theta_{1,\beta}^+|_{\mathcal{H}_J}$是酉的。

现在，对 $n \in \mathbb{Z}^\times$、u、$w \in \left(M_{\mathcal{H}_J,\phi}\right)^{\mathfrak{g}}$，我们有（注意到 $\beta_i\overline{\beta_{p-i}} = 1$）

$$\begin{aligned}
\langle L_n u, w\rangle &= \sum_{j\in J} \frac{1}{2\phi(C_j)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle I_k^{(j)} I_{n-k-1}^{(p-j)} u, w\rangle = \sum_{j\in J} \frac{1}{2\phi(C_j)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle u, \theta_{1,\beta}^+\left(I_{n-k-1}^{(p-j)}\right) \theta_{1,\beta}^+\left(I_k^{(j)}\right) w\rangle \\
&= \sum_{j\in J} \frac{\overline{\beta_j\beta_{p-j}}}{2\phi(C_j)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle u, I_{-n+k}^{(j)} I_{-k-1}^{(p-j)} w\rangle = \sum_{j\in J} \frac{1}{2\overline{\phi(C_j)}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle u, I_k^{(j)} I_{-n-k-1}^{(p-j)} w\rangle \\
&= \langle u, L_{-n} w\rangle = \langle u, \theta_{1,\beta}^+(L_n) w\rangle.
\end{aligned}$$

由于 L_0 在 $\left(M_{\mathcal{H}_J,\phi}\right)^{\mathfrak{g}}$ 上半单地作用，显然有 $\langle L_0 u, w\rangle = \langle u, L_0 w\rangle$。此外，对任意 $i \in J^c$、$n \in \mathbb{Z}$、u、$w \in \left(M_{\mathcal{H}_J,\phi}\right)^{\mathfrak{g}}$，我们有 $\langle I_n^{(i)} u, w\rangle = 0 = \langle u, \theta_{1,\beta}^+(I_n^{(i)}) w\rangle$。因此我们有

$$\langle xu, w\rangle = \langle u, \theta_{1,\beta}^+(x) w\rangle \quad \text{for any } x \in \mathfrak{g}, u, w \in \left(M_{\mathcal{H}_J,\phi}\right)^{\mathfrak{g}}.$$

这表明 $\mathfrak{g}$-模 $\left(M_{\mathcal{H}_J,\phi}\right)^{\mathfrak{g}}$ 对于 $\theta_{1,\beta}^+$是酉的。 □

命题 5.5. $\mathfrak{g}$-模 $\left(V_{\mathcal{V},\psi|_{\mathcal{V}}}\right)^e$ 对于 $\theta_{1,\beta}^+$ 是酉的，当且仅当 ψ(复数集$_0$) $\geq 1, \psi(L_0) \geq 0$，或者存在整数 $m \geq 2$ 以及 $r,s \in \mathbb{Z}$ 使得

$$0 \leq r < s < m, \quad \psi(C_0) = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \quad \psi(L_0) = \frac{(mr+s)^2 - 1}{4m(m+1)}.$$

证明。 由于 $\mathcal{H}\left(V_{\mathcal{V},\psi|_{\mathcal{V}}}\right)^e = 0$，显然 $\mathfrak{g}$-模 $\left(V_{\mathcal{V},\psi|_{\mathcal{V}}}\right)^e$ 对于 $\theta_{1,\beta}^+$ 是酉的，当且仅当 $\mathcal{V}$-模 $V_{\mathcal{V},\psi|_{\mathcal{V}}}$ 对于 $\theta_{1,\beta}^+|_{\mathcal{V}} = \theta_1^+$ 是酉的。然后由命题 2.9 可得。 □

定理 5.6. 最高权为 φ 的不可约最高权 $\mathfrak{g}$-模对于共轭线性反对合 $\theta_{1,\beta}^+$ 是酉的，当且仅当以下两个陈述成立。

(1) $\beta_i\varphi$(复数集$_i$) $\in \mathbb{R}^\times$ 对所有 $i \in J$;

(2) φ(复数集$_0$) $\geq |J| + 1, \varphi(L_0) \geq \sum_{j\in J} j(p-j)4p^2$，或者存在一个整数 $m \geq 2$和 $r,s \in \mathbb{Z}$使得

$$0 \leq r < s < m, \quad \varphi(C_0) = |J| + 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \quad \varphi(L_0) = \sum_{j\in J} \frac{j(p-j)}{4p^2} + \frac{(mr+s)^2 - 1}{4m(m+1)}.$$

证明。 由引理 5.3、命题 5.4和命题 5.5可知。 □

将由 ω 定义的 g 上的 Chevalley 对合记为

$$\omega(L_n) = -L_{-n},\ \omega(I_n^{(i)}) = -I_{-n}^{(p-i)},\ \omega(C_j) = -C_j \text{ for any } n \in \mathbb{Z}, 1 \le i \le p-1, 0 \le j \le p-1.$$

设V 是 g 的一个不可约最低权模。那么以下作用 on

$$x \cdot w = \omega(x)w \quad \text{for any } x \in \mathfrak{g}, w \in V,$$

使V 成为一个最高权 g-模。我们将所得的模记为V^*。容易验证，存在某个正定厄米型 $< \cdot, \cdot >$ 和$\theta_{1,\beta}^{\dagger}$ 使 V 成为酉模，当且仅当V^* 在 $< \cdot, \cdot >$ 和$\theta_{1,\beta'}^{\dagger}$下是酉的，其中 $\beta' = (\beta'_1, \ldots, \beta'_{p-1})$，且对所有 $1 \le i \le p-1$，均有 $\beta'_i = \beta_{p-i}$。

现在我们可以陈述本节的最后一个定理，它由定理5.2、定理 5.6 以及上述论证得出。

定理 5.7。 对于共轭线性反对合$\theta_{1,\beta}^{\dagger}$，$\mathfrak{g}$ 上的任意不可约酉 *Harish-Chandra* 模都是以下模之一。

(1) $V(a, b, F)$，其中 $a \in \mathbb{R}^\times$、$b \in \frac{1}{2} + \sqrt{-1}\mathbb{R}$，且 $\beta_i F_{p-i}$、$_{i+j}=\overline{F_i}$，对于任意 $j \in col(F)$，$1 \le i \le p-1$；
(2) 最高权为 φ 且满足定理 *5.6* 中条件的最高权模；*(3)* 最低权为 $-\varphi$ 的最低权模，其中 φ 满足定理 *5.6* 中的条件。

致谢： C. Xu 得到中国国家自然科学基金（编号：12261077）的资助。

参考文献

[1] K. Barron. 关于 N = 2 上同调超顶点算子超代数的扭曲模。载于：李理论及其在物理学中的应用。Springer 数学与统计学会议录，第 36 卷。东京：Springer，2013，411-420。1[2] V. Chari 和 A. Pressley。环群的新酉表示。Math. Ann. 275(1986), 87-104。1[3] V. Chari 和 A. Pressley。仿射李代数的一族新的不可约可积模。Math. Ann. 275(1987), 277-562。1[4] V. Chari 和 A. Pressley。Virasoro 代数的酉表示及 Kac 猜想。Compos. Math. 67(1988), 315-342。1, 3[5] B. Feigin 和 D. Fuks。Virasoro 代数上的 Verma 模。Funct. Anal. Appl. 17(1983), no. 3, 91-92。3[6] V. Kac 和 J. Liberati。W_∞代数的酉拟有限维表示。Lett. Math. Phys. 53(2000), 11-27。1[7] N. Kwon。通过仿射李代数上的最高权模研究扭 Heisenberg-Virasoro代数的酉表示。J. Nonlinear Math. Phys. 21(2014), no. 4, 584-592。1[8] D. Liu, Y. Pei, L. Xia 和 K. Zhao。镜像 Heisenberg-Virasoro 代数上的不可约模。Commun. Contemp. Math. 24(2022), 2150026。1[9] O. Mathieu。Virasoro 李代数上的 Harish-Chandra模分类。Invent. Math. 107(1992), 225-234。2[10] R. Moody 和 A. Pianzola。具有三角分解的李代数。CMS 专著系列及高级教材。J. Wiley-Int. Publ. 纽约，1995。2[11] T. Palev。无限矩阵李代数的最高权不可约酉表示。I. 代数 gl(∞)。J. Math. Phys. 31(1990), no. 3, 579-586。1[12] T. Palev。无限矩阵李代数的最高权不可约可酉化表示。代数 A_∞。J. Math. Phys. 31(1990), no. 5, 1078-1084。1[13]C. Xu。gap-p Virasoro代数上的不可约 Harish-Chandra 模分类。J. Algebra 542(2020), 1-34。1, 2, 3[14] C. Xu, F. Chen 和 S. Tan。gap-p Virasoro代数上的非权模。arXiv:2505.15273。4, 5[15] X. Zhang 和 S. Tan。θ-酉表示的 W-代数 W(2, 2)。Linear Multilinear Algebra, 60(2012), no. 5, 533-543。1[16] X. Zhang 和 S. Tan。扭曲 Schr¨odinger-Virasoro 代数的酉表示。J. Algebra Appl. 12(2013), 1250132。1

[17] X. Zhang, S. Tan 和 H. Lian。扭Heisenberg-Virasoro代数的酉模。Algebra Colloq. 26(2019), no. 3, 529-540。 1

C. Xu：中华人民共和国江西省上饶市上饶师范学院数学科学学院，电子邮箱：xiaoxiongxu@126.com