arXiv:2603.02543v1 [math.CO] 3 Mar 2026

由 AGL(1， q) 构造的手性多面体

Evan Angelone 和Egon Schulte 东北大学，美国马萨诸塞州波士顿，02115

2026年3月4日

摘要

我们给出了一种利用奇素数幂 q 下的一般仿射群 AGL(1， q) 的子群构造手性和正则多面体的方法。具体而言，我们证明，当 $q \equiv 1$ 模 4 时，全群 AGL(1， q) 可作为型为 $\{q-1, q-1\}$ 的手性多面体的自同构群；当 $q \equiv 3$ 模 4 时，则可作为型为 $\{q-1, (q-1)/2\}$ 或 $\{(q-1)/2$ 的手性多面体的自同构群；并计算了每种情形下的亏格。我们还证明，AGL(1， q) 的子群不能作为秩 3 或更高秩正则多胞体的完整自同构群，也不能作为秩 4 或更高秩手性多胞体的完整自同构群。这表明，我们的构造涵盖了这类仿射群所能产生的所有多胞体。

关键词：抽象多胞体、手性多面体、自同构群、一般仿射群

MSC主题分类（2020）：主分类：51M20。次分类：52B15、20B25、05B25

1 引言

抽象多胞体为经典几何多胞体提供了一种组合推广，对其研究揭示了几何、群论与组合学之间的深刻联系。在这些结构中，手性多胞体占据着尤为引人入胜的位置：它们具有完全的旋转对称性，却没有任何反射对称性。手性多胞体的自同构群在旗上有两条轨道，且相邻旗总是位于不同的轨道中。

自 Schulte 和 Weiss [27, 28], 正式引入手性多胞体以来，其构造与分类一直备受关注，近期 Pellicer 出版了全面论述这一主题的《抽象手性多胞体》一书 [26]。正则多胞体已得到广泛研究，人们也已知晓许多构造方法（见 McMullen 和 Schulte [22]）；相比之下，尽管取得了重大进展，手性多胞体仍比正则多胞体更难以捉摸。相当长一段时间内，有限实例

只在秩 3 和 4 中为人所知。秩 5 的有限实例最早见于 Conder、Hubard 和 Pisanski [7], ，而任意高秩手性多胞体的存在性最终由 Pellicer [25]证实。多胞体扩张有助于构造新的有限手性多胞体实例。Cunningham 和 Pellicer [12]证明，每个有限手性 d-多胞体（其棱面必为正则）本身都是某个有限手性 $(d+1)$-多胞体的棱面。

研究具有特定类型群（例如单群、几乎单群或可解群）的手性多胞体，也一直是一个重要的研究方向。例如，Conder、Hubard 和 O'Reilly Regueiro [5] 最近证明，除有限多个 n外，对称群 S_n 和交错群 A_n 都可作为秩为 5 的手性多胞体的自同构群；这拓展了这些作者早先与 Pellicer 合作开展的关于手性 4-多胞体的工作 [6] （另见 Zhang [30]）。Leeman 和 Liebeck [19] 证明了一个引人注目的结果：除少数例外，每个有限单群都是某个手性多面体（3-多胞体）的自同构群。自同构群同构于（或与之相关的）PSL(2， q)、PSL(3， q) 或 PSU(3， q) 的手性多胞体也已有研究；例如，参见 [2, 8, 20, 21]。Conder、Feng 和 Hou [4] 以及 Zhang [31], 介绍了具有可解自同构群的手性多胞体的构造。近期研究还探讨了群阶预先指定为 2^n 或 $2^n p^k$等值的手性多胞体，其中 p 为奇素数 [11, 17], ；类似的研究也见于正则多胞体领域，例如 [15, 16, 29]。

本文利用仿射一般线性群 AGL(1, q)，对奇素数幂 $q \neq 3$ 给出手性多面体的一种构造。群 AGL(1, q) 似乎很适合用来生成手性多面体，我们描述了导出此类多面体的所有可能方式。我们的主要贡献如下。在定理 4.1 中，我们由 AGL(1, q) 中适当的元素对给出手性或正则多面体的一般构造，并刻画所得自同构群何时为涉及平移子群的半直积。定理 4.3 证明，全群 AGL(1, q) 本身确实可以作为一个手性多面体的自同构群出现，并显式确定其型与亏格。特别地，当 $q \equiv 1$ 模 4 时，我们得到施¨莱夫利型$\{q-1, q-1\}$ 且亏格为 $1+q$ $(q-5)/4$ 的手性多面体；而当 $q \equiv 3$ 模 4 时，得到型 $\{(q-1)/2, q-1\}$ 或 $\{(q-1)/2,$ $q-1\}$ 且亏格为 $1+q(q-7)/4$ 的手性多面体。

我们还证明了若干界定本构造适用范围的结果。定理 4.4 表明，在某些情况下，定理 4.1 中的多面体是正则的而非手性的，其自同构群是仿射一般线性群 AΓL(1， q) 的自同构群的一个子群。我们还证明，对于 $q-1$ 的任意因数 n （其中 $n > 2$），存在手性或正则多面体，其组合旋转子群包含于 AGL(1， q) 中，并同构于由 $\mathbb{F}_q$ 的子群与循环群 C_n 构成的半直积（在手性情形下，该群就是完整自同构群）。反过来，定理 4.5 表明，AGL(1， q) 的子群无法生成任何秩为 ≥ 3 的正则多胞体，也无法生成秩为 ≥ 4 的手性多胞体，由此确立了我们的构造对于这一类群而言基本上已达最优。

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾抽象多胞体所需的背景知识，重点介绍如何通过自同构群刻画正则和手性多面体。第 3 节考察 AGL(1， q) 的结构，尤其是元素的阶以及对我们的构造至关重要的性质。第 4 节给出主要结果，介绍构造方法并证明所得手性多面体的存在性。

2 抽象多面体

我们依据 [22, 26, 27] 简要回顾手性和正则（抽象）多胞体的一些基本概念与结果。我们主要关注秩 3 的多胞体，也称为（抽象）多面体。从拓扑角度看，（局部有限的）抽象多面体是曲面上的映射。

一个（抽象） n-多胞形是秩为 n的偏序集 $\mathcal{P}$ 。对每个秩 $j=-1$，0，……，n都存在元素。秩为 j 的元素称为 $\mathcal{P}$的 j-面；当分别为 $j=0$、1或 $n-1$时，则称为顶点、边或棱面。一个 n-多胞形 $\mathcal{P}$ 有两个非真面：极小面 F_{-1} （秩为 -1）和极大面 F_n （秩为 n）。若 $n=3$ ，则 $\mathcal{P}$ 称为多面体。在这种情况下，若不太可能引起混淆，我们用术语“面”表示“2-面”。因此，一个多面体由顶点、边和面以及两个非真面组成。

n-多胞形 $\mathcal{P}$ 的旗（极大全序子集）均包含每个秩 j的一个面，包括非真面（在列出旗的元素时，非真面常常被略去）。一个 n-多胞形 $\mathcal{P}$ 是强旗连通的；也就是说，给定 $\mathcal{P}$的任意两个旗 Φ 与 Ψ ，存在旗序列 $\Phi=\Phi_0$，Φ_1，……，$\Phi_k=\Psi$，使得相继的旗 Φ_{i-1}与Φ_i是相邻的（相差一个面），且对每个 i有 $\Phi\cap\Psi\subseteq\Phi_i$。此外， $\mathcal{P}$ 具有所谓的菱形性质：若 F与 G 是满足 $F<G$ 与$0\leq j\leq n-1$的一个（$j-1$）-面和一个（$j+1$）-面，则恰好存在两个 j-面 H 使得 $F<H<G$。菱形性质意味着，对每个 $j=0$，……，$n-1$，每个旗 Φ 恰好与另一个旗相邻，后者与 Φ 仅在 j-面上不同；该旗称为 Φ的 j-相邻旗，记为 Φ^j。

一个 n-多胞形 $\mathcal{P}$ 称为正则，如果其（自同构）群 $\Gamma(\mathcal{P})$在 $\mathcal{P}$的旗上是传递的。如果 $\mathcal{P}$ 是一个正则 n-多胞形，且 Φ 是 $\mathcal{P}$的一个固定的基旗，则 $\Gamma(\mathcal{P})$由对合生成元 $\rho_0,\ldots,\rho_{n-1}$生成，其中 ρ_j是唯一的自同构，它固定 Φ 的所有面，但不固定 j-面（从而将 Φ映射到其 j-相邻旗 Φ^j）。对于正则多面体，恰好有三个生成元，即 ρ_0,ρ_1,ρ_2。

一个抽象 n-多胞形 $\mathcal{P}$ 是手性的，如果 $\Gamma(\mathcal{P})$在旗上有两个轨道，使得相邻旗位于不同的轨道中。如果 $\mathcal{P}$ 是一个手性 n-多胞形，且同样 Φ 是一个基旗，则 $\Gamma(\mathcal{P})$由元素 $\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-1}$生成，其中 σ_j将 Φ 映射到$(\Phi^{j-1})^j$，即 Φ的$(j-1)$-相邻旗 Φ^{j-1} 的 j-相邻旗。注意，这些乘积

$$\sigma_i\cdot\ldots\cdot\sigma_j\ \ (1\leq i<j\leq n-1)$$

它们都是对合，但生成元 σ_i 本身不是。对于手性多面体 $\mathcal{P}$，只有两个生成元： σ_1， σ_2，且 $(\sigma_1\sigma_2)^2=1$。在这种情况下，如果面和顶点图都是有限的，那么 σ_1 会固定 Φ 中的基面，并循环置换其顶点； σ_2 会固定基顶点，并循环置换从该顶点引出的边；对合 $\sigma_1\sigma_2$则固定基边，交换其两个顶点，同时交换在基边处相交的两个面。

正则或手性多胞体的自同构群还满足一项涉及指定生成元的重要交性质。反过来，如果群 Γ 具有一组合适的生成元 ρ_0，…，ρ_{n-1}或 σ_1，…，σ_{n-1}，且满足这一交性质，那么 Γ 就是某个正则或手性 n-多胞体的自同构群。

对于手性多面体，交性质的形式很简单：

$$\langle \sigma_1 \rangle \cap \langle \sigma_2 \rangle = \{1\}.$$

对于具有生成元 ρ_0, ρ_1, ρ_2的正则多面体，元素 $\sigma_1 := \rho_0\rho_1$ 与 $\sigma_2 := \rho_1\rho_2$生成自同构群 $\Gamma(\mathcal{P})$ 的（组合）旋转子群 $\Gamma^+(\mathcal{P})$，并且与手性情形中的生成元共享许多性质，包括交性质。反之，若群 Γ 具有两个生成元 σ_1, σ_2，满足关系$(\sigma_1\sigma_2)^2 = 1$且具有交性质，则 Γ 是某个手性多面体的自同构群，或是某个正则多面体的自同构群的旋转子群。该多面体是手性的，当且仅当不存在 $\Gamma(\mathcal{P})$的二阶群自同构 ρ，使得 $\rho(\sigma_2) = \sigma_2^{-1}$且 $\rho(\sigma_1) = \sigma_1\sigma_2^2$，或等价地，$\rho(\sigma_2) = \sigma_2^{-1}$且 $\rho(\tau) = \tau$。（对于正则多面体，由 ρ_2 作共轭将给出这样的群自同构。）

对于正则或手性多面体，所有面都具有相同数目的顶点，且所有顶点都位于相同数目的边上。若多面体 $\mathcal{P}$ 的所有面都是某个 s的 s边形，且所有顶点的价均为 t，则称 $\mathcal{P}$ 为型 $\{s, t\}$。手性多面体是可定向曲面上的映射，而正则多面体的曲面可以是可定向的或不可定向的。

3 群仿射一般线性群$(1, q)$

设 p 为奇素数，q 为 p的幂，且 $q = p^l$。设 $q - 1 = 2^e q'$，其中 $e \geq 1$ 且 q'为奇数，并令 $r := (q-1)/2 = 2^{e-1}q'$。若 $q \equiv 1$ 模4，则必然 $e \geq 2$ 且 r 为偶数；若 $q \equiv 1$ 模4，则 $e = 1$ 且 $r = q'$ 为奇数。

回顾一下，$\mathbb{F}_q^*$是一个阶为 $q-1$的循环群。对于群中的一个元素 g，记 $o(g)$为其阶。特别地，若 $\mathbb{F}_q^* = \langle \gamma \rangle$，则

$$o(\gamma^m) = (q-1)/\gcd(q-1, m)$$

对每个正 m均成立。

我们用 Aut($\mathbb{F}_q$)表示 $\mathbb{F}_q$的域自同构群。于是，Aut($\mathbb{F}_q$)是一个由弗罗贝尼乌斯自同构 $\varphi: x \to x^p$ 生成的阶为 l 的循环群（见 [18]）。注意，作为一个阶为 l的循环群，Aut($\mathbb{F}_q$)含有对合，当且仅当 l 为偶数。在这种情况下，$\mathbb{F}_q$ 的对合自同构为 $\varphi^{l/2} : x \to x^{p^{l/2}} =: \underline{x}$。注意，对所有 $x \in \mathbb{F}_q$，均有 $x = \underline{x}$。

全文中，记 AGL$(1, q)$为作用于有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的一维仿射空间的仿射群（即具有 q 个点、并与 $\mathbb{F}_q$ 自身等同的仿射直线）。该群的阶为 $q(q-1)$，由所有如下定义的仿射变换 $\alpha(a, b) : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ 组成：

$$\alpha(a, b)(x) := ax + b,$$

对于 $a \in \mathbb{F}_q^*$、$b \in \mathbb{F}_q$。注意

$$\alpha(a, b)\,\alpha(a', b') = \alpha(aa', ab' + b).$$

对于 $b \in \mathbb{F}_q$，仿射一般线性群 AGL(1, q) 中的元素 $\alpha(1, b)$ 称为由 b 平移。这些 q 平移是平移子群的元素

$$T \coloneqq \{\alpha(1, b) \mid b \in \mathbb{F}_q\}$$

仿射一般线性群 AGL(1, q) 的元素，且非平凡时阶为 p 。注意， T 是 AGL(1, q) 的一个初等阿贝尔正规子群，同构于 $\mathbb{F}_q$。众所周知，

$$\mathrm{AGL}(1, q) \cong T \rtimes \mathrm{GL}(1, q) \cong \mathbb{F}_q \rtimes \mathbb{F}_q^*.$$

备注。 或者，也可以将 $\mathrm{AGL}(1, q)$ 定义为由形如以下形式的 2×2 矩阵 A 构成的群，其中矩阵的元素取自 $\mathbb{F}_q$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 a、$b \in \mathbb{F}_q$、 $a \neq 0$。在该群对 $\mathbb{F}_q^2$ 的作用下， $\mathbb{F}_q^2$ 上的仿射直线 $y = 1$ 是不变的，并且

$$A \cdot [x, 1]^t = [ax + b, 1]^t = [\alpha(a, b)(x), 1],$$

其中 t 表示转置。不过，我们更倾向于直接研究 *AGL(1,* q) 对仿射直线 $\mathbb{F}_q$ 的作用，如上所述。

仿射一般线性群 AGL(1, q) 中的变换具有以下性质。

引理 3.1。 设 $a \in \mathbb{F}_q^*$、 $b \in \mathbb{F}_q$。那么，

(a) $\alpha(a, b)^{-1} = \alpha(a^{-1}, -a^{-1}b)$。***(b)*** 对于 $k \geq 0$， $\alpha(1, b)^k = \alpha(1, kb)$。***(c)*** 对于 $a \neq 1$, $k \geq 0$， $\alpha(a, b)^k = \alpha(a^k, \frac{a^k-1}{a-1}b)$。***(d)*** 在仿射一般线性群 *AGL(1,* q) 中， $\alpha(a, b)$， $a \neq 1$ 的阶与 a 在 $\mathbb{F}_q^*$ 中的阶相同。特别地， $\alpha(a, b)$ 在 $a \neq 1$ 下的阶为 $q - 1$ ，当且仅当 $\mathbb{F}_q^* = \langle a \rangle$。***(e)*** $\alpha(a, b)$ 是对合，当且仅当 $a = -1$。

证明。 这些性质显而易见。(c)、(d) 和 (e) 部分可直接由此得出

$$\alpha(a, b)^k(x) = a(a^{k-1}x + a^{k-2}b + \ldots + ab + b) + b = a^k x + \tfrac{a^k-1}{a-1}b.$$

特别地， $\alpha(a, b)^k = 1$ 属于仿射一般线性群(1, q)，当且仅当 $a^k = 1$ 属于$\mathbb{F}_q^*$。(d)的第二部分以及(e)部分分别对应于情形 $k = q - 1$ 或 $k = 2$。 □

两个对合的乘积是一个平移；事实上， $\alpha(-1, b)\alpha(-1, c) = \alpha(1, b - c)$。若 $b \neq c$ ，则其阶为 p ；若 $b = c$，则其为平凡的。类似地，一个平移与一个对合的乘积（无论次序如何）都是一个对合。因此， T 是指数 2 的一个子群，包含于

$$H \coloneqq \langle \alpha(-1, c) \mid c \in \mathbb{F}_q \rangle = \{\alpha(1, b), \alpha(-1, c) \mid b, c \in \mathbb{F}_q\}, \tag{1}$$

它同时也是仿射一般线性群(1, q)的正规子群。注意， H 与 $T \rtimes C_2$同构，其中任意对合 $\alpha(-1, c)$ 都可以作为 C_2的生成元。

仿射一般线性群$(1,q)$的自同构群已知为 $A\Gamma L(1,q)$，它由所有“半仿射”变换 $\gamma(a,b,\sigma)$组成：$\mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$定义为

$$\gamma(a,b)(x) \coloneqq ax^\sigma + b,$$

对于 $a \in \mathbb{F}_q^*$, $b \in \mathbb{F}_q$, $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$，其中 $x^\sigma := \sigma(x)$（见 [1, 第 98] 页）。注意，$A\Gamma L(1,q)$ 由 $\mathbb{F}_q$ 上的半线性变换群以及 $AGL(1,q)$ 的平移子群 T生成。若 q是素数，它就与 $AGL(1,q)$ 相同；若 q 不是素数，则它严格大于 $AGL(1,q)$。

随后，我们需要关于 $AGL(1,q)$ 的二阶群自同构的以下简单引理。

引理 3.2。设 $\rho := \gamma(a,b,\sigma)$ 是仿射一般线性群$(1,q)$ 的群自同构，其中 $a \in \mathbb{F}_q^* b \in \mathbb{F}_q$，且 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$ 不是恒等映射。若 ρ 是对合，则 σ 也是对合（因此 l 是偶数且 $\sigma = \varphi^{l/2}$），并且 $aa^\sigma = 1$ 和 $ab^\sigma + b = 0$。

证明。计算该方程两边的值

$$x = \rho^2(x) = a(ax^\sigma + b)^\sigma + b = a(a^\sigma x^{\sigma^2} + b^\sigma) + b = aa^\sigma x^{\sigma^2} + ab^\sigma + b,$$

该式对所有 $x \in \mathbb{F}_q$ 成立，分别在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 处取值。由此立即得到 $ab^\sigma + b = 0$ 和 $aa^\sigma = 1$，从而对所有 $x \in \mathbb{F}_q$ 有 $x^{\sigma^2} = x$。由此可知 σ 也是一个对合。 □

接下来我们给出一些技术引理，它们稍后将用于确定 $\mathbb{F}_q^*$ 中某些元素的阶。

引理 3.3. 设 u、v 为正整数，且设 u 为奇数。则当 v 为奇数时，最大公约数$(2u, u+v) = 2$ 最大公约数$(2u, v)$，而当 v 为偶数时，最大公约数$(2u, u+v)$ =最大公约数$(2u, v)/2$。

证明。注意 u 为奇数。若 v 也为奇数，则显然

$$\gcd(2u,v) = \gcd(u,v) = \gcd(u,u+v) = \gcd(2u,u+v)/2.$$

类似地，若 v 为偶数，则

$$\gcd(2u,v) = 2\,\gcd(u,v) = 2\,\gcd(u,u+v) = 2\,\gcd(2u,u+v).$$

□

对于正整数 m，我们用 $t(m)$ 表示满足 $2^l \mid m$ 的最大整数 l。

引理 3.4. 设 q 是奇素数幂，设 $q-1 = 2^e q' = 2r$ 满足 $e \geq 1$ 且 q' 为奇数，并设 $1 \leq m \leq q-1$。那么，

$$\gcd(q-1, r+m) = \begin{cases} \gcd(q-1,m), & \text{if } e \geq 2 \text{ and } t(m) \leq e-2; \\ 2\gcd(q-1,m), & \text{if } t(m) = e-1, \\ \gcd(q-1,m)/2, & \text{if } t(m) \geq e. \end{cases}$$

证明。以下论证将依赖于 e和 t（m）。整个过程中，我们只需考虑 $q-1$ 的因数 d。显然，若 d 也是 r 的因数，则 $d \mid q-1,\ m$ 当且仅当 $d \mid q-1,\ r+m$。因此，限制在 r 的因数范围内时，$q-1,\ m$ 与 $q-1,\ r+m$ 这两对数具有相同的因数集合。$q-1$ 中不整除 r 的因数只有形如 $d=2^e s$ 且满足 $s \mid q'$ 的那些。

首先，假设 $e \geq 2$ 和 $t(m) \leq e-2$。那么必有 $q \equiv 1$ 模 4。我们已经知道，当限制在 r的因数范围内时，数对 $q-1, m$ 和 $q-1, r+m$ 具有相同的因数。但现在 $t(m) \leq e-2$，因此，$q-1$ 的每个因数，只要也是 m 或$r+m$的因数，便是 r的因数，从而 $\gcd(q-1,m) = \gcd(q-1,r+m)$，如所求。

设 $e \geq 1$ 和 $t(m) \geq e-1$。那么也有 $t(r+m) \geq e-1$。因此，$q-1$、m、$r+m$ 都能被 2^{e-1}整除，它们两两之间的最大公因数也能被 2^{e-1}整除。令$u := r/2^{e-1} = (q-1)/2^e = q'$和 $v := m/2^{e-1}$。那么 u是奇数；若 $t(m) = e-1$，则 v是奇数；但若 $t(m) \geq e$，则 v 是偶数。现在由引理 3.3可知，对于 $t(m) = e-1$,

$$\gcd(q-1, r+m) = 2^{e-1}\ \gcd(2u, u+v) = 2^e\ \gcd(2u, v) = 2\ \gcd(q-1, m),$$

且对于 $t(m) \geq e$,

$$\gcd(q-1, m) = 2^{e-1}\ \gcd(2u, v) = 2^e\ \gcd(2u, u+v) = 2\ \gcd(q-1, r+m).$$

□

前一个引理使我们能够比较 $\mathbb{F}_q^*$ 中某些元素的阶。

引理 3.5. 设 $\mathbb{F}_q^* = \langle\gamma\rangle$ 和 $1 \leq m \leq q-1$。则 $\mathbb{F}_q^*$ 中 γ^m 和 $-\gamma^{-m}$ 的阶之间有如下关系：

$$o(-\gamma^{-m}) = \begin{cases} o(\gamma^m), & \text{if } e \geq 2 \text{ and } t(m) \leq e-2; \\ o(\gamma^m)/2, & \text{if } t(m) = e-1; \\ 2\,o(\gamma^m), & \text{if } t(m) \geq e. \end{cases}$$

证明。由于 γ^m 和 γ^{-m} 的阶相同，我们可以用 $n := q-1-m$ 替换 m，然后比较 γ^n 和 $-\gamma^n$。注意

$$-\gamma^n = (-1)\gamma^n = \gamma^r\gamma^n = \gamma^{r+n}$$

其中仍有 $q-1 = 2r$。因此，$-\gamma^n$ 的阶为 $(q-1)$/最大公约数$(q-1, r+n)$。接下来注意，Lemma 3.4 中关于 $t(m)$ 的情形假设等价于关于 $t(n)$ 的相应假设；事实上，若 $t(m) \leq e-1$（或 $t(n) \leq e-1$），则 $t(n) = t(m)$；并且 $t(n) \geq e$ 当且仅当 $t(m) \geq e$。然后，最大公约数$(q-1, r+n)$ 和最大公约数$(q-1,$ $n)$ 之间的关系如引理 3.4 所述。由此可知，γ^m 和 $-\gamma^{-m}$ 的阶之间的关系正如引理中所述。

□

4 手性多面体的构造

在本节中，我们将介绍一种一般性构造方法，从仿射一般线性群 $\mathrm{AGL}(1,\ q)$ 的某些子群构造手性或正则多面体 $\mathcal{P}$。这相当于描述一对子群的生成元 $\sigma_1,\ \sigma_2$，其中该子群

Γ 属于 $\mathcal{P}$ 的自同构群 $\Gamma(\mathcal{P})$，若 $\mathcal{P}$ 是手性的，则该子群与 $\Gamma(\mathcal{P})$ 相同；若 $\mathcal{P}$ 是正则的，则该子群在 $\Gamma(\mathcal{P})$ 中的指数为 2；等价地，也可以描述一对生成元 σ_2，τ，其中 τ 是受 $\tau = \sigma_1\sigma_2$ 约束的对合。当且仅当相应的群 Γ 不存在满足 $\rho(\sigma_2) = \sigma_2^{-1}$ 且 $\rho(\tau) = \tau$ 的对合自同构 ρ 时，该多面体才是手性的。我们假设 $q \neq 3$，因为 AGL(1，3) 的阶为 6，对于手性或正则多面体的群而言太小了。

仿射一般线性群 $\mathrm{AGL}(1, q)$ 中对合的特殊性质，严格限制了对合乘积 $\sigma_1\sigma_2$ 的可能取值（若 Γ 要成为仿射一般线性群 $\mathrm{AGL}(1, q)$ 的子群）。事实上，根据引理 3.1，$\sigma_1\sigma_2$ 必须是由 $x \mapsto -x + c$，$c \in \mathbb{F}_q$ 给出的形如 $\alpha(-1, c)$ 的变换。仿射一般线性群 $\mathrm{AGL}(1, q)$ 中恰好有 q 个这样的变换。

我们从

$$\sigma_2 \coloneqq \alpha(a, b),\ \tau \coloneqq \alpha(-1, c), \tag{2}$$

其中 $a \in \mathbb{F}_q^*$, $b, c \in \mathbb{F}_q$, $a \neq \pm 1$，并且重要的是，

$$c \neq 2b/(1 - a). \tag{3}$$

关于 c 的后一条件稍后就会明了，但在本文后文中也会多次出现。现在定义

$$\sigma_1 \coloneqq \tau\sigma_2^{-1} = \alpha(-1, c)\,\alpha(a^{-1}, -a^{-1}b) = \alpha(-a^{-1}, a^{-1}b + c). \tag{4}$$

我们令 $\Gamma \coloneqq \langle\sigma_1, \sigma_2\rangle = \langle\tau, \sigma_2\rangle$。根据构造，$\sigma_1\sigma_2 = \tau$ 是一个对合。

注意，σ_2 和 σ_1 在 Γ 中的阶，分别就是 a 和 $-a^{-1}$ 在 $\mathbb{F}_q^*$中的阶，并且它们之间的关系如引理 3.5 所述。例如，若 a 的阶为 $q - 1$（即 a生成 $\mathbb{F}_q^*$），那么当 $q \equiv 1$模 4 时，$-a^{-1}$ 的阶也为 $q - 1$；但当$q \equiv 3$ 模 4 时，其阶为（$q - 1$）/2 。

接下来我们证明 Γ 具有交性质，也就是说，$\langle\sigma_1\rangle \cap \langle\sigma_2\rangle = \{1\}$。设$\sigma_1^i = \sigma_2^j$，其中 i 和 j，即

$$\alpha((-a^{-1})^i, \tfrac{(-a^{-1})^i - 1}{(-a^{-1}) - 1}(a^{-1}b + c)) \;=\; \alpha(a^j, \tfrac{a^j - 1}{a - 1}b).$$

那么必然有 $a^j = (-a^{-1})^i$，因此$a^{-1}b + c = b$。后一个等式立即给出（$b + ac$）（$a - 1$）$= -b$（$1 + a$），从而 $c = 2b/$（$1 - a$）。这正是上文排除的 c 值。因此，Γ 具有交性质。

注意，如果 $c = 2b/(1 - a)$，交性质确实不成立。事实上，在这个特定情形下，验证交性质归结为求解方程 $a^j = (-a^{-1})^i$，或者等价地，求解 $a^{i+j} = (-1)^i$；但对于任意 q 和 a，许多对 i，j 都满足此方程。

对于一个已知具备手性所需全部自同构的多面体，判断它究竟是否为手性多面体而非正则多面体，往往是一项艰巨的任务。在当前情形下，我们可以排除 $\mathcal{P}$ 是一个正则多面体且其完整自同构群 $\Gamma(\mathcal{P})$ 包含于仿射一般线性群 $\mathrm{AGL}(1, q)$ 的可能性，尽管其旋转子群 Γ 确实完全包含于仿射一般线性群 $\mathrm{AGL}(1, q)$ 中。

事实上，假设 $\mathcal{P}$ 是正则的。那么，其完整自同构群 $\Gamma(\mathcal{P})$ 由对合 ρ_0、ρ_1、ρ_2生成，并包含 Γ 作为子群（指数为 1 或 2）。若 ρ_0、ρ_1、ρ_2属于 $\mathrm{AGL}(1, q)$，那么根据引理 3.1，每个 ρ_i 必定都具有以下形式

$\alpha(-1,\ c)$，其中 $c \in \mathbb{F}_q$，因此

$$\Gamma \le \Gamma(\mathcal{P}) = \langle \rho_0, \rho_1, \rho_2 \rangle \le H.$$

但是，由于 $a \neq \pm 1$，$\sigma_2 = \alpha(a,\ b) \notin H$，这就产生了矛盾。下面的定理 4.5 将重新审视这一系列论证，并证明仿射一般线性群 AGL(1，q) 的任何子群都不可能成为高秩多面体的正则多面体的自同构群。请注意，上述推理还表明，如果 $\mathcal{P}$ 是正则的，那么其旋转子群 Γ 在完整自同构群 $\Gamma(\mathcal{P})$ 中的指数必为 2。因此，无论 $\mathcal{P}$ 是手性的还是正则的，它都是可定向的。

不过，前面的论证尚未证明 $\mathcal{P}$ 的手性。仍有可能存在 Γ 的二阶群自同构 ρ，使得 $\rho(\sigma_2) = \sigma_2^{-1}$ 且 $\rho(\tau) = \tau$。虽然一般情况下要证明这一点似乎相当困难，但当 $\Gamma =$ AGL(1，q) 时，我们将排除此种可能。

定理 4.1. 设 q 为奇素数幂，$q \neq 3$，且 $\Gamma := \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$，其中生成元$\sigma_1$ 和 σ_2 的定义如(2)和(4)所示，且 $a \in \mathbb{F}_q^*$, $b, c \in \mathbb{F}_q$, $a \neq \pm 1$以及 $c \neq 2b/(1-a)$。设$\mathbb{F}_q^* = \langle \gamma \rangle$和 $a = \gamma^m$, $1 \le m < q-1$。此外，设 $T_\Gamma := T \cap \Gamma$和 $H_\Gamma := H \cap \Gamma\ (\cong T_\Gamma \rtimes C_2)$。那么，

(a) Γ 要么是某个手性多面体的群，要么是某个正则多面体$\mathcal{P}$的旋转子群；两种情况下，其指定生成元均为 σ_1, σ_2。
(b) $\mathcal{P}$ 的型为 $\{s, t\}$，其中 $s = o(-a^{-1})$ 和 $t = o(a)$ 分别是 $\mathbb{F}_q^*$中 $-a^{-1}$ 和 a 的阶。

(c) $\Gamma \cong T_\Gamma \rtimes \langle \sigma_2 \rangle$ 如果 最大公约数$(q-1, m) \mid r$ 且 $\Gamma \cong H_\Gamma \rtimes \langle \sigma_2 \rangle$ 如果 最大公约数$(q-1, m) \nmid r$。

(d) $H_\Gamma = N(\tau)$，其中 $N(\tau)$ 表示 $\tau = \sigma_1\sigma_2$在 Γ中的正规闭包。

(e) T_Γ 包含由加法群 $\mathbb{F}_q$ 中秩至少为 $\lceil$对数$_p((q-1)/$ 最大公约数$(q-1, m))\rceil$的子群 $M_\Gamma := \langle (a^k - 1)g \mid k \ge 0 \rangle$的元素所作的所有平移，其中$g := c - \frac{2b}{1-a}$。*(f)* $T_\Gamma \cong \mathbb{F}_q$，至少在 m 和 $q-1$ 互素或 q 本身是素数时成立。

(g) $\Gamma =$ 仿射一般线性群$(1, q)$ 当且仅当以下情况之一成立：最大公约数$(q-1, m) = 1$（即 $\mathbb{F}_q^* = \langle a \rangle$），或 $q \equiv 3$ 模 4且最大公约数$(q-1, m) = 2$。

证明。关于第三部分，回想一下 $\tau = \sigma_1\sigma_2 = \alpha(-1,\ c) \in \Gamma$。于是

$$\sigma_2\tau\sigma_2^{-1} = \alpha(a, b)\,\alpha(-1, c)\,\alpha(a^{-1}, -a^{-1}b) = \alpha(-1, 2b + ac),$$

根据我们对 c 的初始假设，有 $2b + ac \neq c$。由此可知，τ 和 $\sigma_2\tau\sigma_2^{-1}$ 是两个不同的对合，因此它们的乘积是 T 中的一个平移。注意 $T \cap \langle \sigma_2 \rangle = 1$。

接下来注意，$\Gamma = N(\tau) \cdot \langle \sigma_2 \rangle$，它是子群的乘积，其中 $N(\tau)$ 是 Γ 中 τ 的正规闭包，此处由共轭元 $\sigma_2^k\tau\sigma_2^{-k}$、$k \ge 0$ 生成。举例说明这一点，将类似 $\tau\sigma_2^i\tau\sigma_2^j\tau\sigma_2^l$ 的元素写成以下形式

$$\tau \cdot (\sigma_2^i\tau\sigma_2^{-i}) \cdot (\sigma_2^{i+j}\tau\sigma_2^{-(i+j)}) \cdot \sigma_2^{l+(i+j)}.$$

另一方面，τ的所有共轭元都具有形式 $\alpha(-1, d)$，$d \in \mathbb{F}_q$，因此 $N(\tau)$ 位于H_Γ中。尚需考察 $H_\Gamma \cap \langle \sigma_2 \rangle$。注意，$T_\Gamma$ 是 H_Γ 的指数 2 子群，并且$H_\Gamma \cong T_\Gamma \rtimes \langle \tau \rangle$。

回顾一下，

$$\sigma_2^k = \alpha(a,b)^k = \alpha(a^k, \tfrac{a^k-1}{a-1}b)$$

对每个 $k \geq 0$。然后，由于 $\langle\sigma_2\rangle$ 与 T 的交集平凡，我们有 $\sigma_2^k \in H_\Gamma$ 当且仅当 $a^k = \pm 1$ 属于 $\mathbb{F}_q^*$；这里，$a^k = 1$ 当且仅当 σ_2^k 是平凡的。由此可知，$H_\Gamma \cap \langle\sigma_2\rangle \neq 1$ 当且仅当 $-1 \in \langle a\rangle$ 属于 $\mathbb{F}_{q^\circ}^*$ 现在回想一下，$a = \gamma^m$，其中 $\mathbb{F}_q^* = \langle\gamma\rangle$。那么，$a^k = -1$ 当且仅当 $\gamma^{mk} = \gamma^r$，也就是说，当且仅当 $mk \equiv r$ 模 $q-1$。当且仅当 $\gcd(q-1,\ m) \mid r$ 时，该方程关于 k 有解。由此可知，当且仅当 $\gcd(q-1,\ m) \mid r$ 时，$H_\Gamma \cap \langle\sigma_2\rangle \neq 1$。

若 $\gcd(q-1, m) \mid r$，则 H_Γ 与子群 $\langle\sigma_2\rangle$ 有非平凡交，而其子群 T_Γ 则没有。因此，$\Gamma \cong T_\Gamma \ltimes \langle\sigma_2\rangle$。比较群阶可得 $N(\tau) = H_\Gamma$。

若 $\gcd(m, q-1) \nmid r$，则还有 $N(\tau) \cap \langle\sigma_2\rangle = 1$，因为 $N(\tau)$ 包含于 H_Γ，因此 $\Gamma \cong N(\tau) \ltimes \langle\sigma_2\rangle$。然而，乘积 $H_\Gamma \cdot \langle\sigma_2\rangle$ 是 Γ 的一个子群，与 $H_\Gamma \rtimes \langle\sigma_2\rangle$ 同构，且阶与 Γ 相同。因此 $N(\tau) = H_\Gamma$ 且 $\Gamma \cong H_\Gamma \ltimes \langle\sigma_2\rangle$。至此，定理第三和第四部分的证明完成。

作为初等阿贝尔群 T 的子群，群 T_Γ 本身也是初等阿贝尔群。为求其秩，我们先计算 $N(\tau)$ 的生成元，发现它们为

$$\sigma_2^k \tau \sigma_2^{-k} = \alpha(-1, \tfrac{a^k-1}{a-1} \cdot 2b + a^k c),\ k \geq 0.$$

于是 Γ 包含以下平移

$$\beta_k := \sigma_2^k \tau \sigma_2^{-k} \tau = \alpha(1, \tfrac{a^k-1}{a-1} \cdot 2b + (a^k-1)c) = \alpha(1, (a^k-1)(c - \tfrac{2b}{1-a})) = \alpha(1, (a^k-1)g),$$

其中 $g = c - \frac{2b}{1-a}$ 如定理中所定义。注意，根据我们对 c 的假设，$g \neq 0$，且 g 不依赖于 k。因此，对每个 k，β_k 都是由 $(a^k-1)g$ 给出的平移。由此可知，T_Γ 包含由子集生成的 $\mathbb{F}_q$ 的子群 M_Γ 中各元素对应的所有平移

$$M'_\Gamma := \{(a^k-1)g \mid k \geq 0\}.$$

现在回想一下，$a = \gamma^m$，其阶为 $o(a) = (q-1)/$ 最大公约数$(q-1,\ m)$。这表明 M'_Γ 包含 $(q-1)$/最大公约数$(q-1,\ m)$ 个平移，因此 M_Γ 的秩至少为

$$\lceil \log_p((q-1)/\gcd(q-1, m)) \rceil.$$

因此，若 m 与 $q-1$ 互素（从而 $\langle a\rangle = \mathbb{F}_q$），则 M_Γ 的秩等于 $\mathbb{F}_q$ 的秩，进而等于 $T_\Gamma \cong \mathbb{F}_{q^\circ}$ 即使最大公约数$(q-1,\ m) = 2$，这一结论仍然成立；事实上，若$q = p^l$，且 $l \geq 1$，则 $p^{l-1}(p-2) > 1$，所以 $(p^l-1)/2 > p^{l-1}$，得到

$$\lceil \log_p((q-1)/\gcd(q-1, m)) \rceil \geq l,$$

这正是 $\mathbb{F}_q$ 的秩。（类似的论证表明，对于 $\gcd(q-1,\ m)$ 的任意取值，对于所有满足 $\gcd(q-1,\ m)$ 的 q，M_Γ 的秩都是 l。）此外，无论 m 如何，只要 q 本身是素数，那么 $T_\Gamma \cong \mathbb{F}_q$；这也涵盖了前一条结论中的情形 $l = 1$。

还需证明定理的最后一部分。若 m 和 $q-1$ 互素，则由 (c) 部分可得，

$$\Gamma \cong T_\Gamma \rtimes \langle\sigma_2\rangle \cong \mathbb{F}_q \rtimes \mathbb{F}_q^* \cong \mathrm{AGL}(1, q)$$

因此 $\Gamma =$ 仿射一般线性群$(, q)$。若 $q \equiv 3$ 模 4 且 gcd$(q-1, m) = 2$，则上述讨论表明 $T_\Gamma \cong \mathbb{F}_q$ 仍然成立，因此 H_Γ 的阶为 $2q$。此外，由于 gcd$(q-1, m) = 2$，生成元 σ_2 的阶为 $(q-1)/2$。由于 gcd$(m, q-1) = 2 \not| r$，(c) 部分由此给出阶为 $q(q-1)$ 的半直积 $\Gamma \cong H_\Gamma \ltimes \langle \sigma_2 \rangle$，进而可得 $\Gamma =$ 仿射一般线性群$(, q)$。

反之，若 $\Gamma =$ AGL$(1, q)$，则 $T_\Gamma \cong \mathbb{F}_q$。现在回想 (c) 部分所述的 Γ的两种可能性，并注意到 Γ 的阶为 $q(q-1)$。由此可知，在第一种情形下（当 gcd$(m, q-1) \mid r$时），元素 σ_2 的阶为 $q-1$，即 $o(a) = q-1$；这迫使 gcd$(m, q-1) = 1$。在第二种情形下（当 gcd$(m, q-1) \not| r$时），H_Γ 的阶为 $2q$，而 σ_2 的阶为 $(q-1)/2 = r$，从而 gcd$(m, q-1) = 2$ 且 $q \equiv 3$ 模 4。 □

注 1. 设 q 为奇素数幂，$q \neq 3$，且令 $a \in \mathbb{F}_q^*$、b，$c \in \mathbb{F}_q$、$a \neq \pm 1$ 和 $c \neq 2b/(1-a)$。令 $\Gamma := \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$，其生成元 σ_1，σ_2 如 (2) 和 (4) 中所定义，并令 $\mathcal{P}(a, b, c)$ 表示定理 4.1 中与 Γ相关联、型为 $\{s, t\}$ 的多面体。那么，对偶多面体 $\mathcal{P}(a, b, c)^*$由下式给出

$$\mathcal{P}(a, b, c)^* = \mathcal{P}(-a, b + ac, c).$$

事实上，该对偶多面体与 Γ 的生成元对 σ_1^*、σ_2^* 相关，其中 Γ 由下式给出

$$\sigma_1^* := \sigma_2^{-1} = \alpha(a^{-1}, -a^{-1}b), \quad \sigma_2^* := \sigma_1^{-1} = \alpha(-a, b + ac).$$

注意，$\tau^* := \sigma_1^* \sigma_2^* = (\sigma_1 \sigma_2)^{-1} = \tau = \alpha(-1、c)$。$\mathcal{P}(a、b、c)^*$ 的施莱夫利型当然由 $\{t, s\}$ 给出，其中 $t = o(a)$和 $s = o(-a^{-1})$；这与 $t = o(\sigma_1^*) = o(a^{-1})$以及 $s = o(\sigma_2^*) = o(-a)$一致。

当定理 4.1 中的群 Γ 是全群仿射一般线性群 AGL$(1、q)$时，会出现一种特别有趣的情形。正如我们将在下文看到的，在这种情况下，相应的多面体确实是手性的。然而，我们将证明，仿射一般线性群 AGL$(1、q)$的某些真子群 Γ 所对应的多面体将是正则的，而不是手性的。

证明需要以下引理。

引理 4.2. 设 $\rho := \gamma(g, h, \sigma)$ 是 仿射一般线性群$(1, q)$的二阶群自同构，其中σ 是自同构群$(\mathbb{F}_q)$ 中的一个对合，且 $g \in \mathbb{F}_q^*$，$h \in \mathbb{F}_q$满足 $gg = 1$，$gh + h = 0$ （见引理 *3.2*）。设 $\Gamma = \langle \sigma_2, \tau \rangle$如定理 *4.1* 中所述，其中 $\sigma_2 = \alpha(a, b)$和 $\tau = \alpha(-1, c)$ 如式 *(2)* 所示。假设ρ 通过共轭作用于 Γ，将其作为群自同构，即 $\rho \Gamma \rho = \Gamma$。

(a) 若 $\rho \sigma_2 \rho = \sigma_2^{-1}$，则 $\overline{a} = a^{-1}$，因此 $a^{p^{l/2}+1} = 1$。
(b) 若 $\rho \sigma_2 \rho = \sigma_2^{-1}$且 $\rho \tau \rho = \tau$，则 $a = a^{-1}$和 g, h 是以下非奇异线性方程组的唯一解

$$\begin{cases} \overline{b} g + (1 - \overline{a}) h = -\overline{a} b \\ \overline{c} g + 2h = c, \end{cases} \tag{5}$$

为简便起见，系统中的变量也记作 g 和 h。(5)的解为

$$g = -\overline{a}\,(\overline{D}/D), \quad h = (\overline{b}c + \overline{a}b\overline{c})/D, \tag{6}$$

其中 $D := 2b - c\,(1 - a)$ 是该线性方程组的（非零）行列式 .

证明。 σ_2 被 ρ 共轭元为

$$\begin{aligned}\rho\sigma_2\rho(x) \;=\; \rho\sigma_2(g\overline{x}+h) \;&=\; \rho(a(g\overline{x}+h)+b)\\ &=\; g\,\overline{(ag\overline{x}+ah+b)}+h\\ &=\; (g\overline{g})\overline{a}x+g\overline{a}\overline{h}+g\overline{b}+h \;=\; \overline{a}x+g\overline{a}\overline{h}+g\overline{b}+h.\end{aligned}\tag{7}$$

如果该共轭元要与 $\sigma_2^{-1}=\alpha(a^{-1},\ -a^{-1}b)$ 重合，那么

$$a^{-1}x-a^{-1}b=\overline{a}x+g\overline{a}\overline{h}+g\overline{b}+h$$

对于所有 $x\in\mathbb{F}_q$，因此

$$\overline{a}=a^{-1},\ g\overline{a}\overline{h}+g\overline{b}+h=-a^{-1}b.\tag{8}$$

特别地，这证明了引理的第一部分。注意，$a=a^{-1}$ 仅意味着 $a^{p^l/2+1}=1$。此外，根据假设，$gh+h=0$，因此利用 $a=a^{-1}$，我们可以将（8）中的第二个方程改写为

$$\overline{b}g+(1-\overline{a})h=-\overline{a}b,\tag{9}$$

这就是 g 和 h 中（5）的第一个线性方程。

类似地，τ 被 ρ 共轭所得的共轭元为

$$\begin{aligned}\rho\tau\rho(x) \;=\; \rho\tau(g\overline{x}+h) \;&=\; \rho(-(g\overline{x}+h)+c)\\ &=\; g\,\overline{(-g\overline{x}-h+c)}+h\\ &=\; -(g\overline{g})x-g\overline{h}+g\overline{c}+h \;=\; -x-g\overline{h}+g\overline{c}+h.\end{aligned}\tag{10}$$

如果这个 c 共轭与 τ 本身重合，则 $c=-gh+gc+h$，因此

$$\overline{c}g+2h=c,\tag{11}$$

这就是关于 g 和 h的式（5）中的第二个线性方程。这里，我们再次利用了$gh+h=0$。

因此，若$\rho\sigma_2\rho=\sigma_2^{-1}$和 $\rho\tau\rho=\tau$均成立，则式（9）和（11）中的方程给出关于 g和 h 的式（6）中的线性方程组，其行列式为 $D=2b-c(1-a)=2b-c(1-\overline{a})$。

现在回顾式（2）：我们对 Γ 的生成元σ_2,τ所设的参数 a,b,c 初始条件包括条件 $c\neq 2b/(1-a)$，该条件确保了Γ的交性质。这表明该线性方程组是非奇异的，并且关于 g 和 h有唯一解。考虑到$a=a^{-1}$，解可表示为

$$g=\frac{-2\overline{a}b-c(1-\overline{a})}{2\overline{b}-\overline{c}(1-\overline{a})}=-\overline{a}\,\frac{\overline{D}}{D},\quad h=\frac{\overline{b}c+\overline{a}b\overline{c}}{2\overline{b}-\overline{c}(1-\overline{a})}=\frac{\overline{b}c+\overline{a}b\overline{c}}{D}.$$

然后我们可以验证确实有 $gg=1$和 $gh+h=0$，正如我们的假设所要求的那样。 □

下一个定理讨论最有趣的情形，即定理 4.1 中的群 Γ是全群仿射一般线性群 $\mathrm{AGL}(1,\ q)$。当且仅当最大公约数 $\gcd(q-1,\ m)=1$ 或

$q \equiv 3$ 模 4，且最大公约数$(q-1, m) = 2$。

定理 4.3。设 q 为奇素数幂，$q \neq 3$，并令 $\Gamma := \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$，其中生成元$\sigma_1$ 和 σ_2 的定义如（2）和（4）所示，且 $a \in \mathbb{F}_q^*$, $b, c \in \mathbb{F}_q$, $a \neq \pm 1$和 $c \neq 2b/(1-a)$。设 $\mathbb{F}_q^* = \langle \gamma \rangle$ 和 $a = \gamma^m$, $1 \leq m < q-1$，并令最大公约数$(q-1, m) = 1$（即 $\mathbb{F}_q^* = \langle a \rangle$）或$q \equiv 3$ 模 4 且最大公约数$(q-1, m) = 2$。那么，

(a) $\Gamma =$ 仿射一般线性群$(1, q)$ 和 Γ 是一个手性多面体 $\mathcal{P}$ 的群，其指定生成元为σ_1, σ_2。

(b) 若 最大公约数$(q-1, m) = 1$，则 $\mathcal{P}$要么是型 $\{q-1, q-1\}$、亏格为 $1 + q(q-5)/4$（当$q \equiv 1$ 模 4时），要么是型 $\{(q-1)/2, q-1\}$、亏格为 $1 + q(q-7)/4$（当 $q \equiv 3$ 模 4时）。

(c) 若 $q \equiv 3$ 模 4，且 最大公约数$(q-1, m) = 2$，则 $\mathcal{P}$是多面体 $\mathcal{P}(-a, b+ac, c)$的对偶。该多面体由定理 *4.1* 针对参数 $-a, b+ac, c$ 构造，且属于 *(b)* 部分所述的多面体。

证明。根据定理 4.1，我们知道相应的多面体 $\mathcal{P}$ 是手性的或正则的。此外，根据我们对 m的假设，群 Γ 是仿射一般线性群 AGL$(1, q)$ 的全群。

回顾注 1，$\mathcal{P}$ 的对偶由 $\mathcal{P}(-a, b+ac, c)$ 给出，它是与 Γ的生成元 σ_2^{-1},σ_1^{-1}相关联的多面体。现在注意到 $-a = (-1)a = \gamma^r \gamma^m = \gamma^{r+m}$，其中同样有 $r = (q-1)/2$。若 $q \equiv 3$ 模 4，则 r 为奇数，因此 gcd$(q-1, m) = 2$当且仅当 gcd$(q-1, r+m) = 1$。由此可知，当我们从 a 转到 $-a$或反向转换时，便是在定理不同部分（第二部分或第三部分）所涵盖的多面体之间切换。因此，若 $q \equiv 3$ 模 4，则第三部分中的多面体是第二部分中多面体的对偶多面体，反之亦然。

在一般情况下，$\mathcal{P}$ 是施莱夫利型 $\{s, t\}$，其中 $s = o(-a^{-1})$，且 $t = o(a)$。特别地，$t = (q-1)/\gcd(q-1, m)$，因此，当 gcd$(q-1, m) = 1$时，$t = q-1$；而当 gcd$(q-1, m) = 2$时，$t = (q-1)/2$。根据引理 3.5，s 的值取决于 e，如下所示。首先注意，若 $q \equiv 1 \mod 4$，则 $e \geq 2$；若 $q \equiv 3 \mod 4$，则 $e = 1$。因此，当 gcd$(q-1, m) = 1$时，$t(m) = 0$；当 gcd$(q-1, m) = 2$ 且 $q \equiv 3 \mod 4$时，$t(m) \geq 1$。接着，引理 3.5 表明

$$s = \begin{cases} q-1 = t & \text{if } q \equiv 1 \bmod 4 \text{ and } \gcd(q-1, m) = 1 \\ (q-1)/2 = t/2 & \text{if } q \equiv 3 \bmod 4 \text{ and } \gcd(q-1, m) = 1 \\ q-1 = 2t & \text{if } q \equiv 3 \bmod 4 \text{ and } \gcd(q-1, m) = 2 \end{cases}$$

设 f_0、f_1 和 f_2 分别表示 $\mathcal{P}$ 的顶点数、边数和面数，并设 $\chi = f_0 - f_1 + f_2$ 表示底层（可定向）曲面的欧拉示性数，$g = 1 - \chi/2$ 表示其亏格。若 gcd$(q-1, m) = 1$ 且 $q \equiv 1$ 模 4，则其型为 $\{q-1, q-1\}$，且 $(f_0, f_1, f_2) = (q, q(q-1)/2, q)$，因此 $\chi = q(5-q)/2$ 且 $g = 1 + q(q-5)/4$。另一方面，若 gcd$(q-1, m) = 1$ 且 $q \equiv 3$ 模 4，则其型为 $\{(q-1)/2, q-1\}$，且 $(f_0, f_1, f_2) = (q, q(q-1)/2, 2q)$，因此 $\chi = q(7-q)/2$ 且 $g = 1 + q(q-7)/4$。最后，若 $q \equiv 3$ 模 4 且 gcd$(q-1, m) = 2$，则其型为 $\{q-1, (q-1)/2\}$，且 $(f_0, f_1, f_2) = (2q, q(q-1)/2, q/2)$，因此 $\chi = q(7-q)/2$ 且 $g = 1 + q(q-7)/4$。后一种情形中的多面体是第二种情形中多面体的对偶多面体。

剩下要证明 $\mathcal{P}$ 是手性的。我们需要排除存在一个 Γ 的二阶群自同构 ρ，使得 $\rho(\sigma_2) = \sigma_2^{-1}$ 且 $\rho(\tau) = \tau$ 的可能性。不过现在 $\Gamma =$ 仿射一般线性群 $(1, q)$，因此其自同构群由 AΓL$(1, q)$ 给出。

现在反设 ρ 存在且 $\mathcal{P}$ 是正则的。那么 $\Gamma(\mathcal{P})$ 同构于 $A\Gamma L(1,q)$ 的子群 $\langle \Gamma, \rho \rangle$。我们之前已经说明，$\rho$ 不可能属于仿射一般线性群$(1,q)$ 本身，否则 $\Gamma(\mathcal{P})$ 就会属于仿射一般线性群$(1,q)$。因此，ρ 是 $A\Gamma L(1,q)$ 的一个对合 $\gamma(g,h,\sigma)$，其形式如引理 3.2 所述；也就是说，$g \in \mathbb{F}_q^*$、$h \in \mathbb{F}_q$、$gg^\sigma = 1$、$gh^\sigma + h = 0$，且 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$ 是一个对合。若 $q = p^l$ 且 l 为奇数，则后一条件已构成矛盾；事实上，回想一下，只有当 $q = p^l$ 且l 为偶数时，$\mathbb{F}_q^*$ 才允许存在二阶域自同构。

现在回想一下，根据假设，要么最大公约数$(q-1,m) = 1$（因此 a 的阶为 $p^l - 1$），要么$q \equiv 3$ 模 4 且最大公约数$(q-1,m) = 2$。若 $q \equiv 3$ 模 4，则我们必然有 $q = p^l$，其中 l为奇数，因此后一种情形已经解决。（或者，我们可以诉诸对偶性。）在前一种情形中，a生成 $\mathbb{F}_q^*$，我们同样得到矛盾；事实上，由引理 4.2 的第一部分，$a^{p^{l/2}+1} = 1$，因此 a的阶必须严格小于$p^l - 1 = (p^{l/2}+1)(p^{l/2}-1)$。注意，我们的论证仅诉诸引理 4.2 的第一部分。 □

对于两个最小的素数幂 $q = 5$ 和 $q = 7$，定理 4.3 给出两个熟悉的手性环面映射：$\{4,4\}_{(1,2)}$，其自同构群为仿射一般线性群$(1,5) \cong C_5 \rtimes C_4$，阶为 20；以及 $\{3,6\}_{(1,2)}$和 $\{6,3\}_{(1,2)}$，其自同构群为仿射一般线性群$(1,7) \cong C_7 \rtimes C_6$，阶为 42。

存在许多真子群 Γ，使得定理 4.1 中的多面体 $\mathcal{P}$ 确实是正则的。引理 4.2 的陈述暗示了若干可能性。下述定理涵盖了所有所需的群自同构 ρ 由 $A\Gamma L(1, q)$ 中的对合元确定的可能情形。然而，一般而言，群自同构 Γ也可能以其他方式产生。

定理 4.4。设 q 为奇素数幂，$q = p^l$ 为偶数，且 $\Gamma := \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$，其中生成元 σ_1 和 σ_2 按 (2) 和 (4)中的定义取值，且 $a \in \mathbb{F}_q^*$, $b, c \in \mathbb{F}_q$, $a \neq \pm 1, c \neq 2b/(1-a)$。假设 $a^{p^{l/2}+1} = 1$（因此，a 在 $\mathbb{F}_q^*$ 中的阶 $o(a)$ 整除 $p^{l/2}+1$），并再次令 $\mathcal{P}$ 表示与 Γ关联的多面体。那么，

(a) $\mathcal{P}$ 是一个型为 $\{s,t\}$ 的正则多面体，其中 $s = o(-a^{-1})$ 以及 $t = o(a)$。
(b) $\Gamma(\mathcal{P}) \cong \Gamma \rtimes C_2$ 和 Γ 同构于 $\Gamma(\mathcal{P})$ 的旋转子群。
(c) 更明确地说，$\Gamma(\mathcal{P})$ 同构于仿射一般线性群 $A\Gamma L(1, q)$ 的子群 $\Lambda := \langle \Gamma, \rho \rangle$，其中$\rho := \gamma(g, h, \sigma)$ 是 $AGL(1, q)$ 唯一确定的二阶群自同构，使得σ 是 $Aut(\mathbb{F}_q)$ 中的对合，并且 $g \in \mathbb{F}_q^*$, $h \in \mathbb{F}_q$ 是由 *(6)* 给出的 *(5)* 中线性方程组的唯一解（因此 $gg = 1$, $gh + h = 0$）。Λ 的指定生成元为 $\rho_0 := \tau\rho$, $\rho_1 := \sigma_2\rho$, $\rho_2 := \rho$。

证明。回想一下，$\Gamma = \langle \sigma_2, \tau \rangle$ 且 $\tau = \sigma_1\sigma_2$。现在，反向执行引理 4.2 证明中的步骤可知，$A\Gamma L(1, q)$ 的对合 ρ确实以正确的方式共轭生成元 σ_2, τ，即

$$\rho\sigma_2\rho = \sigma_2^{-1}, \quad \rho\tau\rho = \tau.$$

因此，$\mathcal{P}$ 是正则的。由于 ρ 不属于 $AGL(1, q)$，Λ 的子群 Γ 的指数为 2。

此外，ρ_0，ρ_1，ρ_2 是对合，且 $\sigma_1 = \rho_0\rho_1$、$\sigma_2 = \rho_1\rho_2$、$\tau = \rho_0\rho_2$。最后，

$$\Gamma(\mathcal{P}) \cong \Lambda \cong \Gamma \rtimes \langle\rho\rangle \cong \Gamma \rtimes C_2.$$

□

请注意，要为与 Γ 相关联的多面体是手性还是正则建立一般判据似乎很困难。

我们作如下补充观察。

注 2. 设 q 是奇素数幂，$q \neq 3$，令 $q-1 = 2r = 2^e q'$ 为奇数的 q'，并令 $n \mid (q-1)$，$n \neq 1, 2$。则存在一个手性或正则多面体 $\mathcal{P}$，其自同构群包含仿射一般线性群 AGL(1，q) 的一个指数为 1 或 2 的子群，该子群同构于 $\mathbb{F}_q$ 的一个子群与循环群 C_n 的半直积，并且其型为

(a) $\{n, n\}$、$\{n/2, n\}$ 或 $\{2n, n\}$，分别当 $q \equiv 1$ 模 4 和 $n \equiv 0$ 模 4、$n \equiv 2$ 模 4 或 n 为奇数时。
(b) 当 $q \equiv 3$ 模 4 且 n 分别为偶数或奇数时，$\{n/2, n\}$ 或 $\{2n, n\}$。
可按如下方式证明。定义 $m := (q-1)/n$。于是还有 $m \mid (q-1)$。我们采用定理 4.1 的记号。特别地，$a = \gamma^m$ 的阶为 n，因此对应的多面体具有 Schl¨afli 型 $\{s, t\}$，其中 $t = n$。根据引理 3.5，若 $q \equiv 1$ 模 4，因而 $e \geq 2$，则当 $t(m) \leq e-2$（即 $n \equiv 0$ 模 4）时，$s = o(-a^{-1})$ 等于 n；当 $t(m) = e-1$（即 $n \equiv 2$ 模 4）时，等于 $n/2$；当 $t(m) = e$（即 n 为奇数）时，则等于 $2n$。类似地，若 $q \equiv 3$ 模 4，因而 $e = 1$，则当 m 为奇数（即 n 为偶数）时，s 等于 $n/2$；当 m 为偶数（即 n 为奇数）时，则等于 $2n$。

我们从 AGL(1，q) 构造多面体时，会涉及参数 a，b，c，并且可能得到多个具有相同类型 $\{s, t\}$ 的多面体。相同类型的多面体何时同构，是一个值得探究的问题。

虽然群 AGL(1，q) 本身可以产生手性多面体，但下一个定理表明，AGL(1，q) 的任何子群都不可能成为（非退化）正则多面体，或高秩手性或正则多胞体的自同构群。请注意，在此背景下，AGL(1，q) 的二面体子群由两个对合生成，而这两个对合的乘积必然是一个平移，因此这些子群必然同构于 D_p。因此，在秩 2 中（此时每个多胞体都是正则的），只有 AGL(1，q) 的二面体子群 D_p 才是正则多胞体的自同构群；在此情形下，它们是 p 边形。

定理 4.5. 设 q 为奇素数幂。
(a) 不存在秩大于或等于 *3* 且其自同构群同构于 仿射一般线性群(1, q) 的子群的正则多胞体。*(b)* 不存在秩大于或等于 *4* 且其自同构群同构于 仿射一般线性群(1, q) 的子群的手性多胞体。*(c)* 如果一个型为 $\{s, t\}$ 的手性多面体的自同构群同构于 仿射一般线性群(1, q) 的子群，那么 $s, t \mid (q-1)$。

证明。我们已经提到，AGL(1,3) 作为一个群太小，不可能出现，因此可以假设 $q \neq 3$。

对于 (a) 部分，只需证明秩 3 的情形不存在。设 $\mathcal{P}$ 是一个正则多面体，其自同构群 $\Gamma(\mathcal{P}) = \langle \rho_0, \rho_1, \rho_2 \rangle$ 是仿射一般线性群 AGL(1, q) 的子群。那么 ρ_0、ρ_1、ρ_2 和 $\rho_0\rho_2$ 都是对合，且必须属于仿射一般线性群 AGL(1, q) 的子群 H。另一方面，对合 $\rho_0\rho_2$ 是 H 中两个不同对合的乘积，因此也必须是平移，这不可能。

对于 (b) 部分，设 $n \geq 4$ 和 $\mathcal{P}$ 是一个手性 n-多胞体，其自同构群$\Gamma(\mathcal{P}) = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \rangle$ 是仿射一般线性群 AGL(1, q) 的子群。我们证明，这将迫使 σ_2 成为对合，这是不可能的。事实上，$\tau_{12} := \sigma_1\sigma_2$、$\tau_{23} := \sigma_2\sigma_3$ 和 $\tau_{123} := \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ 都是 $\Gamma(\mathcal{P})$ 中的对合，因此属于 H。于是，$\sigma_3 = \tau_{12}\tau_{123}$ 和 $\sigma_1 = \tau_{123}\tau_{23}$ 必须是 T 中的平移，因此 H 的元素 $\sigma_2 = \sigma_1^{-1}\tau_{123}\sigma_3^{-1}$ 是两个平移与一个对合的乘积，必定是对合。（注意，类似的论证也适用于秩至少为 4 的正则多胞体的旋转子群 $\Gamma^+(\mathcal{P})$，并可再次证明这种情形下不存在。）

对于 (c) 部分，考虑生成元 σ_2（例如）。我们知道，对于某些 $a \in \mathbb{F}_q^*$ 和 $b \in \mathbb{F}_q$，$\sigma_2 = \alpha(a,\ b)$。现在，如果 $a \neq 1$，那么 $o(\sigma_2) = o(a)\ |(q-1)$，结论即得。还需排除 $a = 1$ 这种可能性。事实上，在这种情况下，σ_2 将是一个平移，因此 $\sigma_1 := \tau_{12}\sigma_2^{-1}$（其中 $\tau_{12} := \sigma_1\sigma_2$ 与前面相同）将是 H 中的一个对合，这不可能。证明 $o(\sigma_1)\ |(q-1)$ 的方法类似。 □

定理 4.5(c) 的结论是，我们上述的构造代表了从 AGL(1，q) 直接导出手性多面体的唯一可能方式。

上一证明中所述的类似论证也适用于大多数非手性 2-轨道多面体和多胞体，以及大多数由尾三角形 C-群导出的交错半正则多胞体（见 [13, 23]）。它们的自同构群不可能是 AGL(1，q) 的子群。

致谢

我们感谢一位匿名审稿人对论文所作的认真初审，并提出了非常宝贵的改进建议。

参考文献

[1] E.F. Assmus 和 J.D. Key，《设计及其编码》，剑桥大学出版社，1992年。[2] A. Breda d'Azevedo 和 D.A. Catalano。对于每个有限域 K，SL(3, K) 和 PSL(3, K) 的强映射对称性，《代数与应用杂志》**20** (2021年)，论文编号 2150048。[3] A. Breda D'Azevedo、G.A. Jones 和 E. Schulte，小秩手性多胞体的构造，《加拿大数学杂志》**63**(2011年)，1254–1283。

[4] M.D.E. Conder、Y.-Q. Feng、D.-D. Hou，具有可解自同构群的 $\{4,4,4\}$ 型手性多胞体的两个无限族，《代数杂志》569 (2021年)，713–722。[5] M. Conder、I. Hubard 和 E. O'Reilly-Regueiro，具有交错或对称自同构群的大秩手性多胞体的构造，Adv. Math. 452 (2024年)，文章编号 109819。[6] M.D.E. Conder、I. Hubard、E. O' Reilly Regueiro 和 D. Pellicer，以交错群或对称群为自同构群的手性 4-多胞体的构造，J. Algebraic Combin. 42 (2015年)，225–244。[7] M. Conder、I. Hubard 和 T. Pisanski，手性多胞体的构造。《伦敦数学会杂志》(2) 77 (2008年)，115–129。[8] M.D.E. Conder、P. Potoˇcnik、J. ˇSirˇan。射影线性群上的正则超地图。《澳大利亚数学会杂志》85 (2008年)，155–175。[9] H.S.M. Coxeter，《扭曲蜂窝》，数学科学会议委员会区域会议数学系列丛书第 4 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1970年。[10] H.S.M. Coxeter 和 W.O.J. Moser，《离散群的生成元与关系》，施普林格出版社，第 4 版，1980年。[11] G. Cunningham，紧致手性多面体，《组合数学》38 (2018年)，115–142。[12] G. Cunningham 和 D. Pellicer，手性多胞体的手性扩张，《离散数学》330 (2014年)，51–60。[13] I. Hubard，群构造的双轨道多面体，《欧洲组合数学杂志》31 (2010年)，943–960。[14] I. Hubard 和 D. Leemans，手性多胞体与铃木单群，载于：《刚性与对称》（编者：R. Connelly、A. Ivi´c Weiss、W. Whiteley），菲尔兹研究所通讯，第 70 卷，2014年，155–175。[15] D.-D. Huo、Y.-Q. Feng 和 D. Leemans，2 的幂阶正则多胞体，《离散与计算几何》64 (2020年)，339–346。[16] D.-D. Huo、Y.-Q. Feng 和 D. Leemans，阶为 $2^n p$ 的正则三维多胞体，J. Group Theory，2025年。[17] D.-D. Hou、T.-T. Zheng 和 R.-R. Guo，具有可解自同构群的 $\{4,8\}$ 型手性三维多胞体的四个无限族，《离散数学》347 (2024年)，第 113843 号。[18] S. Lang，《代数》，第 3 版，艾迪生-韦斯利出版公司，1993年。[19] D. Leemans 和 M.W. Liebeck，手性多面体与有限单群，《伦敦数学会通报》49 (2017年)，581–592。

[20] D. Leemans、J. Moerenhout 和 E. O'Reilly Regueiro，射影线性群作为手性多胞体的自同构群，*J. Geom.* **108**（2017年），675–702。[21] D. Leemans 和 A. Vandenschrick，关于以群 PSL(3, q) 为自同构群的手性多胞体，*J. Lond. Math. Soc.* **106** （2022年），85–111。[22] P. McMullen 和 E. Schulte，抽象正则多胞体，剑桥大学出版社，2002年。[23] B. Monson 和 E. Schulte，半正则多胞体与合并C群，*Adv.Math.***229** （2012年），2767–2791。[24] B. Monson 和 A. I. Weiss，艾森斯坦整数及相关C群，*GeometriaeDedicata* **66** （1997年），99–117。[25] D. Pellicer，高秩手性多胞体的一种构造，《离散数学》**310**（2010年），1222–1237。[26] D. Pellicer，《抽象手性多胞体》，剑桥大学出版社，2025年。[27] E. Schulte 和 A.I. Weiss，手性多胞体，载于《应用几何与离散数学（维克托·克利纪念文集）》（P. Gritzmann 和 B. Sturmfels 编），DIMACS离散数学与理论计算机科学丛书，第4卷，美国数学会和计算机协会，493–516，1991年。[28] E. Schulte 和 A. I. Weiss，手性与射影线性群。《离散数学》**13**（1994年），221–261。[29] E. Schulte 和 A. I. Weiss。多胞体、其群与实现问题，*Periodica Math. Hungarica* **53**（2006年），231–255。[30] W.-J. Zhang，具有对称自同构群的三族无限手性4-多胞体，*J. Algebraic Combin.***57** （2023年），421–438。[31] W.-J. Zhang，关于具有可解自同构群的型为 $\{4, 4, ..., 4\}$ 的手性多胞体的更多结果，*J. Group Theory* **26** （2023年），1231–1265。