飞行途中操控路径，实现基于测量的和乐门容错

Anirudh Lanka，[1] Juan Garcia-Nila，[1] 和 Todd A. Brun[1]
[1]*Department of Electrical & Computer Engineering, University of Southern California, Los Angeles, California*

连续测量式整体量子计算为在量子纠错码中实现通用逻辑计算提供了一条途径。我们提出了一种用于实现基于测量的和乐门的容错框架，该框架利用连续测量和实时反馈。我们表明，非马尔可夫退相干通过量子芝诺效应得到内在抑制，而马尔可夫误差则可通过解码测量记录加以识别，从而揭示演化过程中所占据的旋转综合征子空间。这些信息使我们能够在演化过程中操控整体路径，确保最终演化实现目标逻辑门。我们进一步证明，非绝热效应会导致测量诱导误差，并展示了这些错误也可通过类似协议加以纠正。这种方法放宽了严格的绝热性要求，使整体门能够更快地实现。

arXiv:2603.02552v1 [quant-ph] 3 Mar 2026

I. 引言

量子信息可以编码到高维量子系统中，使得退相干的有害影响在足够微弱的情况下能够通过适当的纠错程序得到抑制 [1–6]。原则上，这使得对高度复杂的量子系统进行稳定化和精确控制成为可能。然而，要使量子信息处理具备计算实用性，量子处理器必须支持实现一组通用量子门。大多数量子纠错码通过多量子比特相互作用实现逻辑操作，这可能导致单个物理错误扩散到多个量子比特，从而破坏容错性。横向逻辑操作避免了这一问题，因此天生具备容错性 [7]。然而，Eastin–Knill定理表明，任何量子纠错码都无法仅通过横向操作实现通用门集 [8]。这促使人们探索规避Eastin–Knill限制的方法，以实现通用容错量子计算 [9–15]。

整体量子计算为实现这一目标提供了一种前景广阔的框架 [16–22]。它利用量子态空间的几何结构，通过循环演化过程中获得的非阿贝尔几何相位来实现逻辑操作。由于这些操作仅取决于演化路径的整体几何性质，而非其具体时间安排，因此它们对某些类别的控制误差和涨落具有内在鲁棒性 [18, 23–32]。此外，还可以将其设计为横向作用，或以限制错误传播的方式作用，从而实现容错 [24]。

在这一范式中，量子门被实现为与控制参数流形中的闭合回路相关联的整体量，并作用于哈密顿量 [19] 的简并本征子空间。当这些本征子空间与量子纠错码的综合征空间重合时，所得整体量对应于逻辑操作。这对应于逻辑操作。然而，这并非实现全几何量子计算的唯一方式。例如，文献 [33] 展示了一种借助量子芝诺效应、完全通过对稳定子生成元进行测量，在稳定子码上实现连续路径全纯变换的方法。测量的反作用驱动演化并生成逻辑门。关键在于，测量结果对应于瞬时码的综合征。这样便有机会对综合征进行解码，并适当地控制系统，使其回到码空间。这不同于传统的基于哈密顿量的全几何量子计算，后者没有测量来揭示路径中的错误。

除了产生几何相位外，芝诺效应还可以抑制非马尔可夫噪声 [34–39]。这是因为连续测量会抑制系统-浴关联；否则，这些关联会在浴记忆时间内逐渐累积，从而使动力学有效地呈现马尔可夫特性，并降低非期望跃迁的速率 [36, 38]。请注意，由于码在每一瞬间都会改变，测量会通过芝诺效应将量子态推向一个瞬时综合征空间 [40, 41]。这种行为类似于动力学解耦与逻辑门的结合：正如快速控制脉冲能够平均掉系统-浴相互作用并滤除低频环境噪声，频繁测量也会截断浴记忆核，并反复将系统推向综合征空间，同时累积几何相位 [42, 43]。在这两种情况下，抑制作用都源于施加了一个快于浴动力学的外部时间尺度。

当系统-浴相互作用在时间上不相关（即马尔可夫）时，噪声会瞬时作用，且没有记忆。因此，噪声诱导动力学发生的时间尺度与测量本身相当。在这种情况下，反复测量稳定子并不能抑制错误的累积：仅仅测量稳定子无法抑制马尔可夫噪声的影响。然而，测量结果对应于瞬时错误症候，可对其进行解码以实施纠错。全几何量子计算范式中的逻辑门对应于控制参数流形中的一条特定

路径。在马尔可夫噪声作用下，系统会发生随机跳跃，而测量结果会显示非平凡综合征。这些信息使我们能够实时“操控”控制路径。因此，在实现所需几何相位的同时，系统可在演化结束时回到码空间。

基于测量的几何量子计算（MHQC）通过绝热地旋转码生成元并对其持续进行弱测量来实现。当测量速率超过旋转速率时，系统以很高的概率被限制在瞬时码空间内。尽管如此，仍存在较小概率，测量反作用会将系统驱动到与旋转码空间正交的子空间中。此类事件类似于由马尔可夫噪声引起的随机量子跳跃。当纠错码满足某些条件（我们将在后文说明）时，这些跃迁可在测量记录中被检测到。随后我们可以实时修改路径，并在保持所需几何相位的同时将系统操控回码空间。因此，该协议在旋转速率的选择上具有很大灵活性：可以以跳跃概率增加为代价更快地执行量子门，而这一增加可通过路径操控加以缓解。

A. 生成整体量

设我们给定了一组相互独立的向量子空间。对这一集合的自然几何描述是复格拉斯曼流形 $\mathcal{B} \equiv G_{N,\,K}(\mathbb{C})$，其定义为

$$\mathcal{B} = \{\mathbb{P} \in M(N,N;\mathbb{C}) | \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}, \mathbb{P}^\dagger = \mathbb{P}, \mathrm{Tr}\ \mathbb{P} = k\}, \quad (1)$$

其中，$M(N,\ N;\ \mathbb{C})$ 是所有 $N \times N$ 复矩阵的集合。因此，$G_{N,\,K}(\mathbb{C})$ 上的每个点都是 K 维子空间，属于 N 维复向量空间。给定子空间的一组基向量并不唯一；不同的基选择通过酉群 $U(K)$ 中的变换相互关联。$\mathcal{B}$ 上给定点处的纤维由该子空间的所有可能的标准正交基组成。所有这类纤维构成一个纤维丛，称为复斯蒂费尔流形 $\mathcal{F} \equiv S_{N,\,K}(\mathbb{C})$，其定义为

$$\mathcal{F} = \{L \in M(N,K;\mathbb{C}) | L^\dagger L = I_K\}, \quad (2)$$

其中，I_K 是 K 维单位矩阵。直观地说，L 的列构成一个子空间的标准正交基。在量子纠错码的语境中，点 $\mathbb{P} \in \mathcal{B}$ 表示对码空间的投影算符，而纤维中位于 $\mathbb{P}$ 之上的点 L 则包含编码态。

N 维酉矩阵的左作用在 $G_{N,\,K}(\mathbb{C})$ 内提供了一个变换：

$$U(N) \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}, \quad (g, \mathbb{P}) \mapsto g\mathbb{P}g^\dagger. \quad (3)$$

将投影映射 $\pi : \mathcal{F} \to \mathcal{B}$ 定义为

$$\pi(L) \equiv LL^\dagger. \quad (4)$$

K 维酉矩阵的右作用提供了一种变换，可作用于与 $\mathcal{B}$ 上的某一点关联的纤维内：

$$\mathcal{F} \times U(K) \to \mathcal{F}, \quad (L,h) \mapsto Lh. \quad (5)$$

因此很容易看出，基底 V 和 Vh 张成相同的子空间，因而对应于 $G_{N,\,K}(\mathbb{C})$ 上的同一点，因为

$$\pi(Lh) = (Lh)(Lh)^\dagger = Lhh^\dagger L^\dagger = LL^\dagger = \pi(L). \quad (6)$$

元组（$\mathcal{F}$，$\mathcal{B}$，π，$U(K)$）就是我们所操作的主丛。

假设点 $\mathbb{P}_0$ 沿着 $\mathcal{B}$ 上的一条曲线移动。不失一般性，假设它是由带参数的酉算符 $V(t)$ 旋转子空间投影算符 $\mathbb{P}_0$ 来驱动的：

$$\mathbb{P}(t) = V(t)\mathbb{P}_0 V^\dagger(t). \quad (7)$$

那么，$\mathcal{F}$ 上的关联曲线取决于其联络。$\mathcal{F}$ 上的典范联络形式定义为 $\mathcal{B}$ 上的一个取值于 $\mathfrak{u}(K)$ 的1-形式：

$$A = L^\dagger(t)\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t}. \quad (8)$$

这是在式（5）中所示变换下保持不变的唯一联络：

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= (L(t)h)^\dagger \frac{\mathrm{d}(L(t)h)}{\mathrm{d}t} \\ &= h^\dagger A h + h^\dagger \mathrm{d}h,\end{aligned} \quad (9)$$

这称为规范 变换。

对于每个 t，存在 $V(t) \in \mathcal{F}$ 使得 $\mathbb{P}(t) = L(t)L^\dagger(t)$。在由 $\mathbb{P}(t)$ 进行频繁测量的条件下，芝诺效应使我们可以用约化态矢量 $|\phi(t)\rangle \in \mathbb{C}^K$ 替代量子态 $|\psi(t)\rangle \in \mathbb{C}^N$：

$$|\psi(t)\rangle = L(t)\,|\phi(t)\rangle\,. \quad (10)$$

芝诺子空间中的动力学由下式给出

$$|\mathrm{d}\psi\rangle = -i[H(t), \mathbb{P}(t)]\,|\psi\rangle\,\mathrm{d}t, \quad (11)$$

（证明见第 A 节）。这里，$\mathbb{P}(t)$ 是投影到瞬时本征空间上的投影算符，而 $H(t)$ 是驱动本征空间之间旋转的哈密顿量。将式（10）代入式（11），得到

$$\frac{\mathrm{d}\big(L(t)\,|\phi(t)\rangle\big)}{\mathrm{d}t} = -i\big[H(t), \mathbb{P}(t)\big]L(t)\,|\phi(t)\rangle\,. \quad (12)$$

假设量子态 $|\psi(t)\rangle$ 是 $\mathbb{P}(t)$ 的本征态，并利用 $L^\dagger(t)L(t) = I_K$ 这一事实，我们有

$$|\mathrm{d}\phi\rangle + L^\dagger \mathrm{d}L\,|\phi(t)\rangle = 0, \quad (13)$$

其解可以表示为

$$|\phi(t)\rangle = \mathcal{P}\exp\left(-\int L^\dagger \mathrm{d}L\right)|\phi(0)\rangle\,, \tag{14}$$

其中 $\mathcal{P}$ 是路径排序算符。因此， $|\psi(t)\rangle$ 可写为

$$|\psi(t)\rangle = L(t)\mathcal{P}\exp\left(-\int L^\dagger \mathrm{d}L\right)L^\dagger(0)\,|\psi(0)\rangle\,. \tag{15}$$

如果子空间沿闭环演化并返回初始子空间 $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(0)$，则几何相位 $\Gamma \in U(K)$ 定义为

$$\Gamma = L^\dagger(0)L(T)\mathcal{P}\exp\left(-\int L^\dagger \mathrm{d}L\right), \tag{16}$$

最终量子态为

$$|\psi(T)\rangle = L(0)\Gamma\,|\phi(0)\rangle\,. \tag{17}$$

曲线 $L(t)$ 的一般解为：

$$L(t) = V(t)L(0)h(t), \tag{18}$$

其中 $h(t) \in U(K)$。直观地说，这可以看作一个两步过程：1）使用 $V(t)$ 旋转基态 $L(0)$，使得 $\pi(L(t)) = \mathbb{P}(t)$，其中 $L(t) \equiv V(t)L(0)$。2）使用 $h(t)$ 在纤维内旋转基态，从而得到 $L(t)$。如果满足条件

$$L^\dagger \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 0 \ \ \forall t \tag{19}$$

，则曲线 $L(t) \in \mathcal{F}$ 称为曲线 的水平提升 $\pi(L(t)) \in \mathcal{B}$ （如图 1 所示）。此时，几何相位可简化为

$$\Gamma = L^\dagger(0)L(T) \in U(K) \tag{20}$$

将式（18）代入式（19），我们得到关于 h（t）的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = -L^\dagger(0)V^\dagger(t)\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}L(0)h(t). \tag{21}$$

最后，在一个稳定子码上进行量子计算的情形下，我们希望在码 $\mathcal{C} = \mathbb{P}(0)$上施加逻辑酉算符 $U \in U(K)$。此处，施加逻辑酉算符等价于找到一条回路 $\mathbb{P}(t) \in \mathcal{B}$，使得 $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(T)$，其水平提升产生几何相位 $\Gamma = U$。

B. 基于测量的完整子量子计算

假设我们有一族随时间变化的 $[\![n, k, d]\!]$ 量子稳定子码。每个码都有一个稳定子群 $S(t)$，其生成元为 $\{g_i(t)\}_{i=1}^{n-k}$。时刻 $t = 0$ 的码是我们开始时采用的标准码，并且

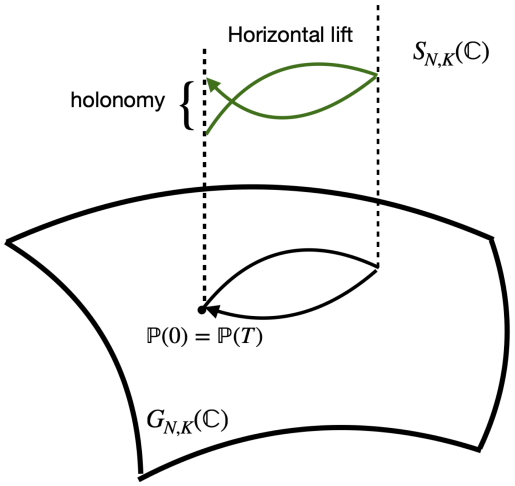


图1. 水平提升是$S_{N,\,K}(\mathbb{C})$中的一条唯一曲线，其底流形为$G_{N,\,K}(\mathbb{C})$。初始点 $V(0)$与终点 $V(T)$之差即为几何相位。

结束时，其所有稳定子都是本征值为 ±1 的泡利算符。一般性不失地，希尔伯特空间可以分解为所有稳定子生成元的共同特征子空间的直和：

$$\mathcal{H}(t) = \bigoplus_{s=0}^{2^{n-k}} \mathcal{H}_s(t). \tag{22}$$

按照约定，同时 $+1$本征子空间被选为码空间，记为 $\mathcal{H}_0(t)$。所有本征空间均为 2^k重简并。将到标准码空间上的投影算符定义为

$$\mathbb{P}_0 \equiv \mathbb{P}(0) = \prod_{j=1}^{n-k} \frac{I + g_j(0)}{2}. \tag{23}$$

假设我们希望施加的逻辑门为

$$G = \exp\left(i\theta H\right), \tag{24}$$

其中， H 是泡利逻辑算符， θ 是任意旋转角。我们可以通过均匀旋转码空间，直至旋转形成一个闭环并返回原始码空间，从而生成几何相位；该几何相位对应于标准码上的逻辑操作。

为了旋转码空间，定义一个泡利算符 X（不要与单量子比特泡利矩阵 σ^x混淆），使其满足以下条件：

$$\exists g \in S(0),\ \{X, g\} = 0, \tag{25a}$$
$$\{X, H\} = 0, \tag{25b}$$
$$\exp\left(2\pi i X\right) = I. \tag{25c}$$

利用 X，我们定义一族酉算符：

$$V(t) = \exp\left(i\omega_H t H\right)\exp\left(i\omega t X\right), \tag{26}$$

其中 ω 是旋转速率，且 $\omega_H = \frac{\theta}{2\pi}\omega$。投影到旋转码空间上的投影算符为

$$\mathbb{P}(t) = V(t)\mathbb{P}_0 V^\dagger(t), \tag{27}$$

相应的旋转后稳定子生成元为

$$g(t) = V(t) g V^\dagger(t). \tag{28}$$

通过测量瞬时码空间投影算符 $\mathbb{P}(t)$ 或其稳定子生成元 $\{g_j(t)\}_{j=1}^{2^{n-k}}$，可以将量子态推向瞬时码空间。对旋转稳定子进行连续弱测量时，量子态的动力学可由含时随机薛定谔方程描述：

$$\begin{aligned} |\mathrm{d}\psi\rangle = &-\frac{\kappa}{2}\sum_j \big(g_j(t) - \langle g_j(t)\rangle\big)^2 |\psi\rangle \,\mathrm{d}t \\ &+ \sqrt{\kappa}\big(g_j(t) - \langle g_j(t)\rangle\big)|\psi\rangle \,\mathrm{d}W_t^{(j)}, \end{aligned} \tag{29}$$

其中，κ 为测量强度，$\mathrm{d}W_t^{(j)}$ 为维纳增量，由均值为零、方差为 $\mathrm{d}t$ 的高斯随机变量定义，对应于 j^{th}连续测量。该过程总共持续 $T = 2\pi/\omega$，此时码空间将旋转一周并回到原始码空间；编码态应获得所需的几何相位。旋转速率取决于测量速率：测量必须快于码空间的旋转速度，这样量子态才能以高概率始终保持在 $+1$本征子空间中。ω 的选择至关重要：旋转既不能太快，否则可能导致量子态跃迁至错误空间；也不能太慢，否则会延长门时间。

命题1 ([33])。 假设稳定子码 $\mathcal{C}$以速率 ω 通过 $V(t)$连续旋转。从$|\psi(0)\rangle \in \mathcal{C}$开始，以速率 κ连续测量旋转的稳定子生成元，则综合征空间之间不发生跃迁的概率为

$$1 - p_{\text{jump}} = \frac{1}{2}\left[1 + \left(1 - \frac{\omega\theta^2}{2\pi\kappa}\right)\exp\left(-\frac{4\pi\omega}{\kappa}\right)\right]. \tag{30}$$

用密度矩阵而非态矢量来表示动力学很有帮助，因为我们分析的是可能产生混合态的噪声过程的影响。与 $|\psi\rangle$ 对应的密度矩阵为 $\rho \equiv |\psi\rangle\langle\psi|$。要推导 $\rho(t)$的动力学，应用伊藤乘积法则：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\rho &= |\mathrm{d}\psi\rangle\langle\psi| + |\psi\rangle\langle\mathrm{d}\psi| + |\mathrm{d}\psi\rangle\langle\mathrm{d}\psi| \\ &= \kappa\sum_j \mathcal{D}[g_j(t)]\rho\mathrm{d}t + \sqrt{\kappa}\mathcal{H}[g_j(t)]\rho\mathrm{d}W_t^{(j)}, \end{aligned} \tag{31}$$

其中超算符 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{H}$ 定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{D}[A]\rho &\equiv A\rho A^\dagger - \frac{1}{2}\{A^\dagger A, \rho\} \\ \mathcal{H}[A]\rho &\equiv A\rho + \rho A^\dagger - 2\langle A\rangle\rho. \end{aligned} \tag{32}$$

需要注意的是，该演化纯粹由一次单个 稳定子测量[33]的反作用所驱动。因此，这些测量可视为非选择性的。然而，为了进行纠错（如后文所述），我们会利用测量结果。

如果满足绝热条件且系统始终处于瞬时码空间中，则可通过求水平提升得到瞬时代码态：

引理1。 演化路径为 $V(t)$ 的瞬时代码态为

$$|\bar{\psi}(t)\rangle = V(t)\exp(-i\bar{\theta}(t)H)\,|\bar{\psi}\rangle\,, \tag{33}$$

其中，$\bar{\theta}(t) = -\frac{\theta}{4\pi}\sin(2\omega t)$ 为部分逻辑旋转角。

Proof. See Section C. □

量子纠错码总是对应着一组（并非唯一的）可纠正错误。和乐过程中，码会持续演化，经过一系列瞬时码空间，并最终在过程结束时回到原始码空间。因此，我们要求所有旋转码仍能纠正 $\mathcal{E}$。这意味着它们必须满足纠错的 Knill-Laflamme条件：

$$\mathbb{P}(t)E_b^\dagger E_a \mathbb{P}(t) = \gamma_{ab}(t)\mathbb{P}(t), \tag{34}$$

这等价于

$$\mathbb{P}_0\big[V^\dagger(t)E_b^\dagger V(t)\big]\big[V^\dagger(t)E_a V(t)\big]\mathbb{P}_0 = \gamma_{ab}(t)\mathbb{P}_0. \tag{35}$$

换言之，我们需要原始码能够纠正旋转后的错误 $\{V^\dagger(t)E_a V(t)\}$。下述定理给出了旋转算子 X 满足纠错条件的充分条件：

定理 1 ([33])。对于可纠正错误集为 $\mathcal{E}$的稳定子码，使所有旋转码都能纠正 $\mathcal{E}$ 的一组充分条件是

- $X > d-1$的汉明重量。
- 与 X反对易的、与 X 的汉明距离为 $d-1$ （ d为偶数时为$d-2$）的所有稳定子。
- 所有与 X 的汉明距离在 $d-1$($d-2$ 以内（ d为偶数时）的逻辑算符都与 X 对易，并与 H反对易。

这些条件的关键在于，旋转算符 X 的综合征必须不同于任意一对可纠正错误乘积的综合征。简单的数值搜索表明，对于完美 $[\![5,1,3]\!]$ 码和 Steane $[\![7,1,3]\!]$码，这些条件无法满足；不过，对于 Shor $[\![9,1,3]\!]$码则可以满足。原因是前两种码的综合征数量不足，无法同时容纳 X 和 EX $\forall E \in \mathcal{E}$ 以及所有其他可纠正错误。不过，即使某个码不满足这些条件，也可以添加辅助量子比特，使该方案得以实现[33]。

C. 本文安排

本文其余部分安排如下。在第 II节中，我们探讨如何在执行基于测量的和乐门时，从根本上抑制非马尔可夫噪声的影响。具体而言，我们考察两个简单的例子：静态噪声和 $1/f$ 噪声，后者在此建模为具有洛伦兹谱密度的单涨落子，并通过数值结果表明，当测量强度远大于噪声强度时，噪声的影响可以得到缓解。我们还表明，当噪声为马尔可夫噪声（时间上不相关）时，仅通过测量稳定子无法抑制其影响：我们需要进行错误纠错。我们将在第 III节介绍一种实现方法。正如逻辑门由演化路径表征一样，在这一范式中，纠错也是通过修改演化路径来完成的。

测量本质上具有随机性：测量有小概率会将系统推向与瞬时码空间正交的子空间。该概率与门的速度成正比：门越快，概率越高。不过，我们可以修改路径，引导系统回到码空间，同时仍然执行正确的逻辑操作。在第 IIIE 节中，我们将说明，通过改变路径（无需额外开销），对于给定的成功概率，我们可以更快地执行门操作。我们将在第 IV 节中给出总结性评述和未来研究方向。

II. 抑制非马尔可夫噪声

众所周知，频繁测量可以将系统冻结在被测可观测量的某个本征子空间中，这种现象称为量子芝诺效应。许多研究尝试利用这一效应来抑制非马尔可夫误差。在本研究中，我们考察了即使测量可观测量持续旋转时，如何抑制非马尔可夫噪声。具体而言，我们考虑三种不同的噪声模型：静态噪声、$1/f$ 噪声和白噪声。在这些例子中，系统动力学中的随机性起到了传统开放系统设置中“热浴”的作用。静态噪声是热浴记忆核宽度无限大的极端情况，白噪声的记忆为零，而 $1/f$ 噪声的记忆宽度有限，处于两者之间。这里以及本文其余部分，我们使用 $[\![3,1,3]\!]$ 比特翻转码及其码空间来展示该方案的特性

$$\mathcal{H}_0 = \mathrm{span}(\{|000\rangle, |111\rangle\}), \tag{36}$$

以及稳定子生成元

$$g_1 = \sigma_1^z\sigma_2^z, \tag{37a}$$
$$g_2 = \sigma_2^z\sigma_3^z. \tag{37b}$$

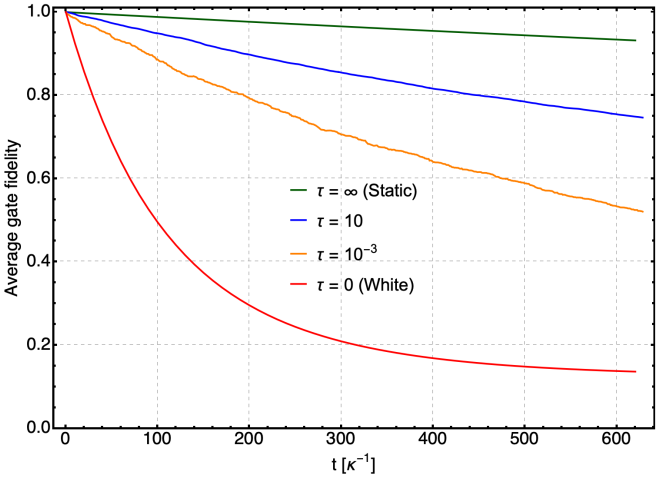


图 2. 存在静态噪声、 $1/f$噪声（ τ取不同值）和白噪声（马尔可夫误差）时的平均门保真度。频繁测量使系统动力学进入芝诺区，并抑制非马尔可夫噪声，从而减缓平均码态保真度的衰减。对于给定的测量速率，减小脉冲寿命 τ会使时间关联更快衰减，因此动力学实际上更接近马尔可夫过程。在纯马尔可夫噪声极限下，频繁测量无法抑制误差。图中数据为对 1000 条轨迹进行系综平均的结果。

选择这种码纯粹是出于简便性和数值计算上的便利；这些技术可用于任何稳定子码。假设我们希望施加一个σ^z 作用于 $|\mp\rangle$的旋转。满足式（25）的一种旋转算符

$$X = \sigma_1^x\sigma_3^z. \tag{38}$$

注意，这种对稳定子生成元和算符的选择 X 不满足定理 1中所述的条件。不过，非马尔可夫噪声的抑制完全源于频繁进行非选择性稳定子测量；也就是说，并未进行主动纠错。因此，编码态 X 的综合征无需与任何一对可纠正错误之积的综合征不同。因此，我们无需在码中添加辅助量子比特。

A. 静态噪声

我们首先分析一种错误源自恒定哈密顿量项的模型：

$$H_{\mathrm{err}} = \sum_j \lambda_j\sigma_j^\alpha. \tag{39}$$

这里，索引 j 表示量子比特，$\lambda_j \sim U(-\epsilon_{\mathrm{static}}, \epsilon_{\mathrm{static}})$，其中 $\epsilon_{\mathrm{static}}$ 是最大振幅，U 表示均匀分布。这对应于一种具有完全相关（即，

与时间无关）的涨落的噪声模型。特别地，热浴关联函数（省略量子比特索引）为

$$C_{\text{static}}(t) = \langle \lambda(0), \lambda(t) \rangle = \frac{\epsilon_{\text{static}}^2}{3}, \tag{40}$$

也就是说，它具有很强的时间关联，其对应的谱密度为

$$J_{\text{static}}(\Omega) = \frac{\epsilon_{\text{static}}^2}{3} \delta(\Omega). \tag{41}$$

我们还将退相干率 定义为浴关联函数的时间积分：

$$\Gamma_{\text{static}} = \int_0^T C_{\text{static}}(t) \mathrm{d}t = \frac{\epsilon_{\text{static}}^2 T}{3}. \tag{42}$$

图 2展示了在恒定哈密顿量噪声和对旋转稳定子进行测量的条件下，系统的平均行为。具体而言，我们绘制了平均门保真度

$$f(t) = \langle \bar{\psi}(t) | \, \rho(t) \, | \bar{\psi}(t) \rangle \tag{43}$$

随时间（以 $1/\kappa$ 为单位）的变化。我们观察到，频繁测量能够有效抑制非马尔可夫噪声，从而减缓编码态保真度的衰减。

B. $1/f$噪声

为了利用由可纠正误差项构成的缓慢变化随机哈密顿量来模拟低频 $1/f$ 涨落的影响，我们考虑一个仅含单个有效涨落体的简化模型，其时变噪声哈密顿量为

$$H_{\text{err}}(t) = \sum_j \lambda_j(t) \sigma_j^x, \tag{44}$$

其中， j 用于标记每个量子比特， $\lambda_j(t)$是一个随时间变化的标量函数。每个 λ_j 都是一系列指数衰减的随机脉冲之和，这些脉冲以固定速率 γ在随机时刻出现：

$$\lambda_j(t) = \sum_K \epsilon_K \theta(t - t_{j_K}) \exp\left(-\frac{t - t_{j_K}}{\tau} \right). \tag{45}$$

这里，索引 K 用于标记脉冲；脉冲振幅从以零为中心的均匀分布中采样： $\epsilon_K \sim U(-\epsilon_{1/f}, \ \epsilon_{1/f})$，其中$\epsilon_{1/f}$是最大脉冲振幅， $\theta(t)$是赫维赛德阶跃函数，τ 是脉冲寿命。我们令 $\lambda_j(t)$中的脉冲间隔时间相互独立且服从指数分布（即泊松过程）：

$$\Delta t \sim \exp(\gamma). \tag{46}$$

$1/f$ 噪声的浴关联函数为

$$C_{1/f}(t) = \frac{\gamma \tau \epsilon_{1/f}^2}{6} e^{-t/\tau}. \tag{47}$$

请注意，这是一个广义平稳过程的示例。在此，时间关联存在于静态过程与白噪声过程之间的中间状态。其对应的谱密度为

$$J_{1/f}(\Omega) = \frac{\epsilon_{1/f}^2}{3} \frac{\gamma \tau^2}{1 + \Omega^2 \tau^2}. \tag{48}$$

退相干率为

$$\begin{aligned} \Gamma_{1/f} &= \frac{\epsilon_{1/f}^2}{3} \frac{\gamma \tau^2}{2} (1 - e^{-T/\tau}) \\ &\overset{T \gg \tau}{\approx} \frac{\epsilon_{1/f}^2}{3} \frac{\gamma \tau^2}{2}. \end{aligned} \tag{49}$$

为使错误幅度与静态噪声情形相同，我们令 $\Gamma_{\text{static}} = \Gamma_{1/f}$，得到

$$\epsilon_{1/f} = \epsilon_{\text{static}} \sqrt{\frac{2T}{\gamma \tau^2}}. \tag{50}$$

脉冲寿命 τ 对于理解这一噪声过程的马尔可夫性至关重要。它表示噪声引入的“冲击”持续的时间。与此同时，芝诺效应的作用是抑制时间相关的错误。请注意，测量以 κ的速率进行，这对应的时间尺度为 $1/\kappa$。可以将其理解为我们平均进行一次投影测量所需的时间。因此，如果 $\tau > 1/\kappa$，噪声的时间相关性会持续超过一个测量周期，抑制作用也更强。相反，如果 $\tau < 1/\kappa$，系统受到统计上相互独立的脉冲冲击，使得动力学更具马尔可夫性。如图2 所示，取 $\tau = 10$，并令 $\tau = 10^{-3}$ 同时保持 $\kappa = 1$不变。取 $\tau = \infty (\tau = 0$的极限，可恢复静态（白）噪声情形。

虽然具有洛伦兹谱的单个涨落器本身并非 $1/f$ 形式，但已知，按对数均匀分布的独立涨落器系综会在很宽的 $1/f$ 频率范围内产生有效的 [44–46]。

C. 白噪声

这里我们表明，仅靠稳定子测量不足以抑制马尔可夫噪声：必须进行主动纠错，才能纠正马尔可夫误差。误差哈密顿量为

$$H(t) = \sum_i \lambda_j(t) \sigma_j^x, \tag{51}$$

其中， $\lambda_j(t)$ 表示白噪声过程，即其均值为零，且浴关联函数为

$$C(t) = \gamma_{\text{white}} \delta(t). \tag{52}$$

该噪声过程没有时间关联。此哈密顿量下的态动力学也可以用速率为 γ_{white_j} 的林德布拉德方程来表示：

$$\dot{\rho} = \sum_j \gamma_{\text{white}_j} \mathcal{D}[\sigma_j^x] \rho. \tag{53}$$

（证明见第 B节）。为了将误差强度与静态噪声和 $1/f$ 噪声情形进行比较，我们设定 $\Gamma_{\text{white}} = \Gamma_{1/f} = \Gamma_{\text{static}}$。在图 2 中我们展示了，在存在马尔可夫误差时，仅靠稳定子测量无法保持码态保真度。对于马尔可夫噪声，每个时间步内发生态跃迁的概率为 $\mathrm{d}t$ 量级。这类错误无法通过频繁测量来抑制，因此需要完整的纠错来保护量子态。相比之下，对于非马尔可夫噪声，每个时间步内发生态跃迁的概率为 $\mathrm{d}t^2$量级。这就是这些跃迁可以通过量子芝诺效应 [38]加以抑制的原因。在下一节中，我们将介绍一种纠正 马尔可夫误差的方法。

除随机哈密顿量模型外，非马尔可夫动力学还通过多种框架进行了研究，包括 Nakajima–Zwanzig方程 [47]，时间卷积无关（TCL）主方程 [48–50]，后马尔可夫主方程（PMME） [51–53]，系统-浴耦合模型 [54]，以及分级运动方程（HEOM） [55]等数值方法。我们推测，该协议也能抑制源于这一更广泛的非马尔可夫模型类别的噪声。

III. 纠正马尔可夫误差　　OISE

基于测量的和乐过程隐含地涉及对稳定子生成元进行测量；不同的测量结果对应于系统可能所在的不同<stijl id='1'>旋转 综合征空间。尽管我们希望系统始终保持在旋转码空间中，但环境相互作用可能导致其跃迁出该空间。假设可纠正误差 E 在时间 τ发生：

$$|\tilde{\psi}_E(\tau)\rangle = E\,|\bar{\psi}(\tau)\rangle\,. \tag{54}$$

（波浪号的含义将在后文说明。）使用¯引理 1，并定义 $U(t) \equiv V(t)\exp(-i\theta(t)H$，我们得到

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}_E(t)\rangle &= EU(t)\,|\bar{\psi}\rangle \\ &= U(t)\big[U^\dagger(t)EU(t)\big]\,|\bar{\psi}\rangle \\ &= U(t)E(t)\,|\bar{\psi}\rangle\,, \end{aligned} \tag{55}$$

其中我们定义了旋转后的错误

$$E(t) \equiv U^\dagger(t)EU(t). \tag{56}$$

请注意，这个旋转后的错误是 E、EX、 EH 和 EXH的线性组合。

定义$\mathbf{s}_A$ 为一个大小为 $n-k$ 的二进制向量，用来表示算符 A 的综合征（如果相应的稳定子生成元 g_j 与A对易，则 j^{th} 项为 0，否则为 1）。由于 H 是逻辑算符，它与所有未旋转稳定子对易，因此其综合征是平凡综合征。然而，E 和 EX 具有非平凡综合征；此外，根据定理1，它们的综合征彼此不同：

$$\mathbf{s}_{EH} = \mathbf{s}_E \neq \mathbf{s}_{EX} = \mathbf{s}_{EXH}. \tag{57}$$

将两个不同的综合征空间分别记为 $\mathcal{H}_E(0)$ 和$\mathcal{H}_{EX}(0)$，其投影算符分别为 $\mathbb{P}_E$ 和 $\mathbb{P}_{EX}$。于是，我们可以将旋转投影算符写为

$$\mathbb{P}_E(t) = V(t)\mathbb{P}_E V^\dagger(t), \tag{58a}$$

$$\mathbb{P}_{EX}(t) = V(t)\mathbb{P}_{EX} V^\dagger(t). \tag{58b}$$

后续测量以概率方式将量子态推向旋转综合征空间之一，并可能在此过程中引入逻辑误差；我们将由此得到的量子态称为瞬时误差态。

A. 环境误差

测量前的瞬时误差态由式（54）给出。在和乐过程中，稳定子在持续测量的同时也在不断旋转。˜因此，量子态 $|\psi_E(t)\rangle$会趋向于 $\mathcal{H}_E(t)$ 或 $\mathcal{H}_{EX}(t)$，具体取决于 E 的结构。我们将测量后状态记为 $|\psi_E(t)\rangle$。使用原始（未旋转的）码而非旋转后的码来计算该状态更为方便。具体而言，有如下命题：

˜**命题 2**。 在旋转后的稳定子基中测量 $|\psi_E(t)\rangle$ ，等价于先在原始稳定子基中测量 $E(t)\,|\psi\rangle$ ，然后通过 $U(t)$进行旋转。

˜证明。在旋转后的稳定子基中对 $|\psi_E(t)\rangle$ 进行投影测量，会得到处于 $\mathcal{H}_E(t)$ 或 $\mathcal{H}_{EX}(t)$ 中任一者的量子态。假设测量结果对应前者；测量后状态为

$$|\psi_E(t)\rangle = \frac{\mathbb{P}_E(t)\,|\tilde{\psi}_E(t)\rangle}{\sqrt{p_E(t)}}, \tag{59}$$

其中， $p_E(t)$ 是相应的概率，其表达式如下

$$\begin{aligned} p_E(t) &= \langle\bar{\psi}|\,U^\dagger(t)E\mathbb{P}_E(t)EU(t)\,|\bar{\psi}\rangle \\ &= \langle\bar{\psi}|\,U^\dagger(t)EV(t)E\mathbb{P}_0EV^\dagger(t)\,|\bar{\psi}\rangle \\ &= \langle\bar{\psi}|\,E^\dagger(t)(E\mathbb{P}_0E)E(t)\,|\bar{\psi}\rangle\,, \end{aligned} \tag{60}$$

其中，我们利用了 E 与 H 对易或反对易这一事实，因此可以将 $V(t)$ 替换为 $U(t)$。注意，最后一行恰好是在原始稳定子基中测量 $E(t)\,|\psi\rangle$ 时获得综合征 $\mathbf{s}_E$ 的概率。此外，我们可以将$|\psi_E(t)\rangle$ 重写为

$$|\psi_E(t)\rangle = U(t)\left(\frac{\mathbb{P}_E E(t)\,|\psi\rangle}{\sqrt{p_E(t)}}\right). \tag{61}$$

当量子态投影到$\mathcal{H}_{EX}(t)$时，也有类似的论证。 □

因此，要找到瞬时错误态，我们使用测量算符 $\{\mathbb{P}_E, \mathbb{P}_{EX}\}$测量 $E(t)\,|\psi\rangle$ ，并将测量后状态旋转$U(t)$。根据错误算符 E 是否与 H 和 X对易或反对易，可分为四种情况，每种情况对应投影到子空间 $\mathcal{H}_E(0)$和 $\mathcal{H}_{EX}(0)$的不同概率。这些情况分别对应不同的错误逻辑旋转，记为 $\beta_E(t)$和 $\beta_{EX}(t)$。由此得到的瞬时错误态为

$$|\psi_E(t)\rangle = U(t)\exp\{i\beta_E(t)H\}E\,|\bar{\psi}\rangle \tag{62a}$$
$$|\psi_{EX}(t)\rangle = U(t)\exp\{i\beta_{EX}(t)H\}EX\,|\bar{\psi}\rangle\,. \tag{62b}$$

我们仅展示一个情形的证明，因为其余情形也可采用相同的方法。假设$\{E,H\} = [E,X] = 0$。旋转后的错误 $E(t)$可简化为

$$\begin{aligned} E(t) =& \cos(2\omega_H t)e^{i2\bar{\theta}(t)H}E \\ &+ \sin(2\omega_H t)\sin(2\omega t)EXH \\ &+ i\sin(2\omega_H t)\cos(2\omega t)e^{i2\bar{\theta}(t)H}EH. \end{aligned} \tag{63}$$

测得 $E(t)\,|\psi\rangle$ 的概率（量子态为 $\mathcal{H}_E(0)$）为

$$\begin{aligned} p_E(t) &= \langle\bar{\psi}|\,E^\dagger(t)(E\mathbb{P}_0E)E(t)\,|\bar{\psi}\rangle \\ &= 1-\sin^2(2\omega_H t)\sin^2(2\omega t), \end{aligned} \tag{64}$$

这里用到了 $\langle\psi|\,X\,|\psi\rangle = \langle\psi|\,HX\,|\psi\rangle = 0$这一事实。量子态被投影到

$$\begin{aligned} |\psi_E(t)\rangle =& \frac{U(t)}{\sqrt{p_E(t)}}\left(\cos(2\omega_H t)I - i\sin(2\omega_H t)\cos(2\omega t)H\right) \\ &\times E\exp(-i2\bar{\theta}(t)H)\,|\bar{\psi}\rangle \\ =& U(t)\exp(i\beta_E(t)H)E\,|\bar{\psi}\rangle\,, \end{aligned} \tag{65}$$

其中 $\beta_E(t) = 2\bar{\theta}(t) - \tan^{-1}\left[\tan(2\omega_H t)\cos(2\omega t)\right]$。由此得到 $\mathcal{H}_E(t)$中的瞬时误差态。其余所有情形的概率和错误旋转角也可用类似方法计算，结果列于表 I。

B. 测量诱导的错误

在整体演化过程中，如果稳定子生成元旋转得不够缓慢，量子态可能会错误地跃迁到旋转后的错误空间。假设量子态未同时受到环境噪声的影响，则测量诱导的错误空间上的投影算符为

$$\mathbb{P}_X(\tau) = V(\tau)X\mathbb{P}_0XV^\dagger(\tau). \tag{66}$$

我们可以通过将瞬时代码态 $|\bar{\psi}(\tau)\rangle$投影到 $\mathcal{H}_X(\tau^+)$上，找到瞬时误差态，并对其归一化：

$$\begin{aligned} |\psi_X(\tau)\rangle &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}_X(\tau+h)\,|\bar{\psi}(\tau)\rangle}{\sqrt{\langle\bar{\psi}(\tau)|\,\mathbb{P}_X(\tau+h)\,|\bar{\psi}(\tau)\rangle}} \\ &= U(\tau)\exp(i\beta_X(\tau)H)X\,|\bar{\psi}\rangle\,, \end{aligned} \tag{67}$$

其中，错误的逻辑旋转角 $\beta_X(\tau)$ 为

$$\beta_X(\tau) = 2\bar{\theta}(\tau) + \tan^{-1}\left[2\bar{\theta}(\tau)\right]. \tag{68}$$

在实际系统中，可以通过解码综合征来确定瞬时错误态 E，然后检查它与 H 和 X 是对易还是反对易。我们可以通过追踪旋转稳定子的期望值，并利用其测量电流来获得综合征。

C. 综合征跟踪

假设系统受到某个噪声过程的影响，其动力学由无迹超算符 $\mathcal{L}_N$ 描述。同时，我们连续测量旋转后的稳定子生成元。系统的联合动力学由随机主方程描述：

$$\mathrm{d}\rho = \mathcal{L}_N[\rho]\mathrm{d}t + \kappa\sum_i \mathcal{D}[g_i]\rho\mathrm{d}t + \sqrt{\kappa}\sum_i \mathcal{H}[g_i]\rho\mathrm{d}W_t^{(i)}, \tag{69}$$

与稳定子 g 相关的输出测量电流为

$$Q(t) = \langle g(t)\rangle_{\rho(t)} + \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}\frac{\mathrm{d}W_t}{\mathrm{d}t}. \tag{70}$$

由于 $g(t)$ 是经酉矩阵旋转后的泡利算符，其本征值 ±1 保持不变，因此 $-1 \le \langle g(t)\rangle_{\rho(t)} \le 1$。从编码态出发，只要没有错误，该值就始终保持为 $+1$：密度矩阵完全位于码空间内，在任何错误空间中都没有分量。当某个时刻发生可纠正错误时，一个或多个 错误空间中的分量会增加。这意味着量子态不再严格是旋转稳定子的本征态。我们继续测量稳定子生成元时，多个综合征空间之间的任何叠加都会被消除，量子态也会弛豫至单个 综合征空间。其表现为一个或多个稳定子生成元的期望值发生翻转，具体取决于错误与该生成元是对易还是反对易。然而在实践中，我们无法直接获取期望值，只能从含噪测量电流中推断。因此，必须对电流进行滤波，以估计瞬时错误综合征。在本研究中，我们通过模拟随机主方程来实现这一点。

我们利用测量电流估计密度矩阵 $\hat{\rho}(t)$。重新整理式（70）

Case	$p_{EX}(t)$	$\beta_E(t)$	$\beta_{EX}(t)$
$[E,H]=[E,X]=0$	0	0	N/A
$[E,H]=\{E,X\}=0$	$\sin^2(2\omega t)$	$2\bar{\theta}(t)$ – 正切$^{-1}$ [正切$(2\omega_H t)$ 余弦$(2\omega t)$]	$2\bar{\theta}(t)$
$\{E,H\}=[E,X]=0$	$\sin^2(2\omega t)\sin^2(2\omega_H t)$		$\pi/2$
$\{E,H\}=\{E,X\}=0$	$\cos^2(2\omega t)\sin^2(2\omega_H t)$	$2\bar{\theta}(t)$ – $\tan^{-1}$ [$\tan(2\omega_H t)\cos(2\omega t)$]	0

表 I. 根据错误算符 E 与 H 和 X对易还是反对易，测量将$|\tilde{\psi}_E(t)\rangle$ 投影到 $\mathcal{H}_E$ 或 $\mathcal{H}_{EX}$，概率分别为 $p_E(t)$或 $p_{EX}(t)$，错误的逻辑旋转角分别为 $\beta_E(t)$或 $\beta_{EX}(t)$。

给出维纳增量 $\mathrm{d}W_t$。于是，我们可以将估计器密度矩阵的动力学写为

$$\mathrm{d}\hat{\rho} = \mathcal{L}_N[\hat{\rho}]\mathrm{d}t + \kappa\sum_j \mathcal{D}[g_j(t)]\hat{\rho}\mathrm{d}t + 2\kappa\sum_j \mathcal{H}[g_j(t)]\hat{\rho}(Q_j(t) - \langle g_j(t)\rangle_{\hat{\rho}(t)})\mathrm{d}t. \tag{71}$$

对主方程进行实时积分可给出密度矩阵的估计，综合征计算为 $\{\langle g_j(t)\rangle_{\hat{\rho}(t)}\}$。通常，初态$\hat{\rho}(0)$未知。然而，[56]表明综合征并不依赖于初始条件在码空间中的位置，因此估计器可以假定最大混合码态：

$$\hat{\rho}(0) = \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{2^k-1} |\vec{j}\rangle\langle\vec{j}|, \tag{72}$$

其中右矢和左矢内的 j 采用二进制记数法。

显然，模拟估计器的演化需要计算开销。随着系统规模增大，矩阵维数的指数增长使该方法变得不切实际。然而，这并非执行滤波的唯一方式。例如，可以沿时间依次对测量电流取滑动平均。当滑动窗口以指数衰减加权时，平均电流可用奥恩斯坦-乌伦贝克过程计算，该过程是一个马尔可夫微分方程。因此，滤波可以实时进行[39]。然而，时间平均可能出现虚假“跃迁”；检测它们需要对系统采取启发式处理。也可以使用同时考虑测量与噪声影响的贝叶斯滤波技术[57, 58]。最近，利用循环神经网络对测量电流进行滤波，已在实验上演示了连续时间量子纠错[59]。[60, 61]提供了其他此类技术。

D. 路径设计

如表I所示，对于给定的错误 E 系统最多可处于五种不同的瞬时错误态。

根据错误旋转角的性质，我们将其分为三类：

- 类别 0——无逻辑误差：量子态位于 $\mathcal{H}_E(t)$，且满足 $[E,H]=0$；或者位于 $\mathcal{H}_{EX}(t)$，且满足 $\{E,H\}=\{E,X\}=0$。
- 类别 1——泡利逻辑错误：量子态位于$\mathcal{H}_{EX}(t)$，且满足 $\{E,H\}=0$和 $[E,X]=0$。
- 类别 2——模拟逻辑错误：包括所有其余情况，其中包括由测量错误引起的情况。

回想一下，当联络 $A(t)=0$ 时，提升的垂直分量会消失，使其成为纯水平分量；此时，提升仅取决于演化路径。这为我们提供了一种工具，可适当修改演化路径，从而在错误空间中实现所需的模拟整体性。由于可纠正错误和测量诱导的错误都是泡利算符，我们可以跟踪泡利标架，并在错误空间中继续计算。下面考虑微分几何中的一个著名结果：

命题3. 设 $\gamma:[0,1]\to\mathcal{B}$ 是$\mathcal{B}$中的一条曲线，并令 $L_0\in\pi^{-1}(\mathbb{P}_0)$。则存在唯一的水平提升，位于 $\mathcal{F}$ 中，且满足 $L(0)=L_0$。

证明。由于式(21)右侧是斜厄米的，$h(t)\in U(K)\ \forall t$。设 $L(t)=V(t)L(0)$ 是 $\mathcal{F}$ 中的一条特定曲线，其对应的联络为 $\tilde{A}=\tilde{L}^\dagger\mathrm{d}\tilde{L}$。给定初始条件 $h(0)=I_K$，式(21)的解为

$$h(t) = \mathcal{P}\exp\left(-\int\tilde{A}\right), \tag{73}$$

因此存在唯一的水平提升。 □

命题3的一个直接推论是，对于给定的演化路径，任意综合征空间中纤维上的一点都会得到相同的提升。特别地，对于演化路径 $V(t)$，有

$$\tilde{L}_E(t) = U(t)\tilde{L}_E(0), \tag{74}$$

对于某一点 $L_E(0)\in\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{H}_E(0)$之上。假设在时刻 τ发生了错误，即噪声过程 $\mathcal{N}$ 使量子态

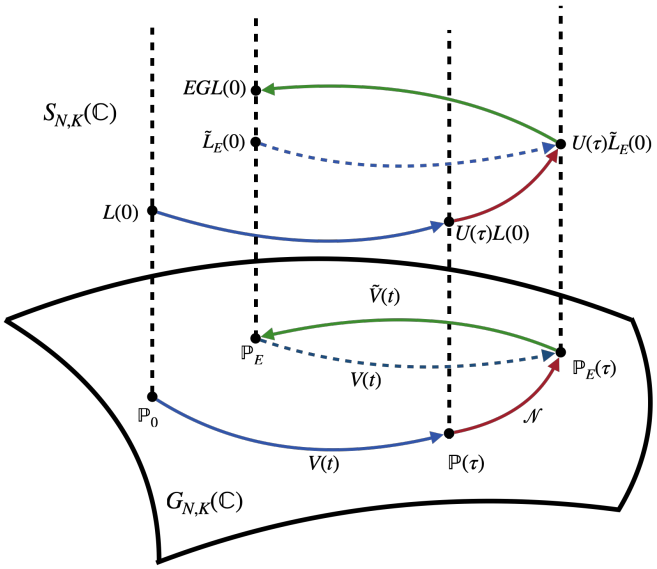


图3. 通过动态路径调制实现实时纠错。这里，黑色虚线表示相应子空间上的纤维。蓝色实线曲线表示由路径 $V(t)$ 引起的实际演化，蓝色虚线曲线表示一种 *emulated* 演化。根据命题3，$\mathcal{F}$上的点在演化路径 $V(t)$ 中获得相同的幺正变换 $U(t)$。假设 $U(\tau)\,\tilde{L}_E(0)$ 是瞬时误差态，则可得到 $L_E(0)$，并可将路径修改为 $V(t)$；在以 $T=2\pi/\omega$ 结束演化时，模拟和乐为 G。请注意，图中描绘的情形是瞬时误差态属于 $\mathcal{H}_E(\tau)$。类似地，系统也可以占据 $\mathcal{H}_{EX}(\tau)$ 或 $\mathcal{H}_X(\tau)$。

从旋转码空间跃迁 $\mathbb{P}(\tau)$到旋转后的错误空间 $\mathbb{P}_E(\tau)$。根据式(62)，我们可以计入错误的影响，从而得到 $\mathcal{H}_E(\tau)$的基：

$$\tilde{L}_E(\tau)=U(\tau)e^{i\beta_E(\tau)H}EL(0). \tag{75}$$

比较式（74）和式（75），我们有

$$\tilde{L}_E(0)=Ee^{-i\beta(\tau)H}L(0). \tag{76}$$

如图3所示。注意，同样的论证也适用于 $\mathcal{H}_{EX}$ 和 $\mathcal{H}_X$ 。考虑以下修正演化路径的拟设：

$$\tilde{V}(t)=e^{i\tilde{\omega}_H(t-\tau)H}V(t), \tag{77}$$

其中，$\tilde{\omega}_H=\theta\omega/(2\pi)$对应于一个校正角 θ。根据误差的类别，该角满足以下定理：

定理2。假设在沿路径 $V(t)$执行和乐过程期间，马尔可夫误差 E 发生于时间 τ。通过将路径修改为 $V(t)$，其中

$$\tilde{\theta}=\begin{cases}0, & \textit{for class 0},\\ \dfrac{\pi/2}{1-\frac{\tau}{T}\left[1-\mathrm{sinc}(2\omega\tau)\right]}, & \textit{for class 1},\\ -\dfrac{\beta_E(\tau)+2\theta}{1-\frac{\tau}{T}\left[1-\mathrm{sinc}(2\omega\tau)\right]}, & \textit{for class 2},\end{cases} \tag{78}$$

并继续演化，直至 $T=2\pi/\omega$，即可得到 $L_E(T)=EGL(0)$。

证明。假设跃迁后的量子态投影到 $\mathcal{H}_E(\tau)$。根据式（18），在 τ 处发生跃迁后， $\mathcal{F}$ 上的点可写为

$$\tilde{L}_E(\tau)=V(\tau)\tilde{L}_E(0)h_E(\tau), \tag{79}$$

由于应用 $V(t)$，在 $L_E(0)$上进行提升

$$\begin{aligned}h_E(\tau)&=\tilde{L}_E^{\dagger}(0)V^{\dagger}(\tau)\tilde{L}_E(\tau)\\&=\tilde{L}_E^{\dagger}(0)V^{\dagger}(\tau)U(\tau)\tilde{L}_E(0),\end{aligned} \tag{80}$$

其中，第二行是命题3的推论。

在此阶段，假设路径变为$\tilde{V}(t)$，我们应用式（21）求出 $h_E(t)$ 在 $L_E(0)$ 处的有效提升：

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{h}_E}{\mathrm{d}t}=-\tilde{L}_E^{\dagger}(0)\tilde{V}^{\dagger}(t)\frac{\mathrm{d}\tilde{V}(t)}{\mathrm{d}t}\tilde{L}_E(0)\tilde{h}_E(t). \tag{81}$$

为确保演化在τ处平滑过渡，我们要求

$$\tilde{V}(\tau)=V(\tau) \tag{82a}$$
$$\tilde{h}_E(\tau)=h_E(\tau). \tag{82b}$$

由式（77），可得

$$\tilde{V}^{\dagger}(t)\frac{\mathrm{d}\tilde{V}(t)}{\mathrm{d}t}=i\omega\left[\left(\frac{\theta+\tilde{\theta}}{2\pi}\right)He^{i2\omega tX}+X\right]. \tag{83}$$

将式（83）代入式（81），并利用$\mathbf{s}_X\neq\mathbf{0}$这一事实，可得

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{h}_E}{\mathrm{d}t}=-i\left(\frac{\theta+\tilde{\theta}}{2\pi}\right)\omega\cos(2\omega t)\tilde{L}_E^{\dagger}(0)H\tilde{L}_E(0)\tilde{h}_E(t). \tag{84}$$

将上述方程从 τ 积分至终止时刻$T=2\pi/\omega$，并利用 $\tilde{L}_E^{\dagger}(0)\tilde{L}_E(0)=I_K$，可得

$$\begin{aligned}\tilde{h}_E(2\pi/\omega)=&\tilde{L}_E^{\dagger}(0)\exp\left[i\left(\frac{\theta+\tilde{\theta}}{2\pi}\right)\sin(2\omega\tau)H\right]\\&\times\tilde{L}_E(0)h_E(\tau).\end{aligned} \tag{85}$$

on $\mathcal{F}$ 上的终点为

$$\tilde{L}_E(2\pi/\omega)=\tilde{V}(2\pi/\omega)\tilde{L}_E(0)\tilde{h}_E(2\pi/\omega). \tag{86}$$

根据 E 与 H 是对易还是反对易，我们有两种情况（X 在此无关紧要）。先假设 $\{E,H\}=0$；终点为

$$\tilde{L}_E(\tau)=E\exp\Bigg[i\Big(\frac{\tilde{\theta}}{2\pi}\omega\tau-(\theta+\tilde{\theta})-\frac{\tilde{\theta}}{4\pi}\sin(2\omega\tau)-\beta_E(\tau)\Big)H\Bigg]L(0). \tag{87}$$

将其与期望的终点 $L_E(\tau)=Ee^{i\theta H}L(0)$ 进行比较，可得

$$\tilde{\theta}=-\frac{\beta_E(\tau)+2\theta}{1-\frac{\tau}{T}(1-\mathrm{sinc}(2\omega\tau))}. \tag{88}$$

相反，若 $[E,H]=0$，

$$\tilde{\theta}=\frac{\beta_E(\tau)}{1-\frac{\tau}{T}(1-\mathrm{sinc}(2\omega\tau))}. \tag{89}$$

根据表 I，$\beta_E(\tau)=0$ 在此情形下，得到 $\theta=0$。由此进而得到 $V(t)=V(t)$，也就是说，无需改变路径。

类似地，若将瞬时误差态投影到 $\mathcal{H}_{EX}(\tau)$，则 $\mathcal{F}$ 上的终点为

$$\tilde{L}_{EX}(2\pi/\omega)=\tilde{V}(2\pi/\omega)\tilde{L}_{EX}(0)\tilde{h}_{EX}(2\pi/\omega). \tag{90}$$

根据 E 与 H 以及 X是对易还是反对易，共有四种情形。采用类似的方法，可计算出新的旋转角，并在第 D 节中汇总。

□

下面通过一个简单示例来说明这种方法。考虑能够纠正单量子比特马尔可夫比特翻转的 $[\![3,1,3]\!]$ 比特翻转码，即 $\mathcal{E}=\{\sigma^0,\sigma_1^x,\sigma_2^x,\sigma_3^x\}$，其中 σ^0 为单位矩阵（即无错误）。该码必须满足定理 1中概述的条件，才能执行纠错。简单的数值搜索表明，不存在满足所需条件的 X。因此，我们向该码添加两个辅助量子比特，并将其初始化为 $|0\rangle$。更新后的稳定子生成元为

$$g_1=\sigma_1^z\sigma_2^z, \tag{91a}$$
$$g_2=\sigma_2^z\sigma_3^z, \tag{91b}$$
$$g_3=\sigma_4^z \tag{91c}$$
$$g_4=\sigma_5^z. \tag{91d}$$

我们希望施加一个采用 $\theta=\pi/6$的 $\bar{\sigma}^z$ 旋转。逻辑算符 H 以及合适的旋转算符 X为

$$H=\sigma_1^z\sigma_2^z\sigma_3^z \tag{92a}$$
$$X=\sigma_1^x\sigma_3^z\sigma_4^x\sigma_5^x. \tag{92b}$$

综合征	错误	错误类别
0000	I	0
1000	σ_1^x	2
1100	σ_2^x	2
0100	σ_3^x	2
0010	σ_4^x	0
0001	σ_5^x	0
0011	$X\sigma_1^x$	1
0111	$X\sigma_2^x$	1
1111	$X\sigma_3^x$	0
1001	$X\sigma_4^x$	1
1010	$X\sigma_5^x$	1
1011	X	2

表 II. $[\![3,1,3]\!]$ 码在 τ 纠正单量子比特马尔可夫位翻转错误的路径解码表。

请注意，经调整的码还可以纠正辅助量子比特上的任意错误，因为它们被初始化为稳定子量子态。错误可能来自两个来源：量子比特上的马尔可夫环境误差，或由码空间的非绝热旋转引起的错误。相应的旋转错误空间为 $\mathcal{H}_E(\tau)$和 $\mathcal{H}_{EX}(\tau)\forall E\in\mathcal{E}$ 当错误使量子态在 τ处发生跃迁。由于$\mathbf{s}_E\neq\mathbf{s}_{EX}$，这些错误空间可通过测量稳定子生成元加以区分。用于解码错误及相关路径变化的查找表见表 II。

我们假设一个简单的噪声模型：以均匀速率 γ 发生的马尔可夫单量子比特位翻转错误。将这些错误与对旋转后的稳定子生成元的连续测量相结合，系统动力学由随机主方程建模

$$\mathrm{d}\rho=\gamma\sum_j\mathcal{D}[\sigma_j^x]\rho\mathrm{d}t+\kappa\sum_j\mathcal{D}[g_j(t)]\rho\mathrm{d}t+\sqrt{\kappa}\sum_j\mathcal{H}[g_j(t)]\rho\mathrm{d}W_t^j. \tag{93}$$

图4展示了系统沿路径 $V(t)$（即路径不变）在环境噪声影响下进行整体演化的3条示例轨迹。具体而言，图 4(a) 展示了无错误时旋转稳定子期望值的演化。这可由所有稳定子期望值均位于 $+1$这一特征加以识别。时间单位由 ω^{-1}设定。由于没有跃迁，演化结束时的量子态应已在原始码空间中获得所需的几何相位。

接下来，我们着重对比测量误差与环境误差。我们首先考虑错误仅源于测量缺陷的情形，即设定 $\gamma = 0$ 和 $\omega/\kappa = \mathcal{O}(10^{-1})$。这将导致概率为 $\approx 36\%$的测量误差。如图4(b)所示，在时刻 $t \approx 3$，我们观察到稳定子1、3和4的期望值从 $+1$ 突然转变为 -1，对应的综合征值为1011。参照表 II，这与 X 错误一致，正如码空间的非绝热旋转所预期的那样。为纠正该错误，路径$\tilde{}$随后由 $V(t)$改为 $V(t)$，其中 θ 对应于2 类错误。假设没有进一步的跃迁，所需逻辑门将在错误空间 $\mathcal{H}_X$中施加。$\bar{}$最终量子态将为 $|\psi(T)\rangle = XG\,|\psi\rangle$。

最后，图4(c) 显示了另一条轨迹，其参数为 $\gamma/\kappa = \mathcal{O}(10^{-4})$ 和 $\omega/\kappa = \mathcal{O}(10^{-2})$。这会导致 X 错误，近似概率为 6%。在此参数范围内，跃迁主要由环境噪声引起。图中，稳定子 1 和 2 被翻转，而稳定子 3 和 4 保持不变。这对应于 σ_2^x 错误，即 2 类错误。若不再发生跃迁，改变路径应当在错误空间$\mathcal{H}_{\sigma_2^x}$ 中，结合$\bar{}$最终量子态 $|\psi(T)\rangle = \sigma_2^x G\,|\psi\rangle$下实现所需的逻辑门。

一旦马尔可夫误差（包括测量诱发的误差）使量子态跃迁至综合征空间，$\tilde{}$我们就将路径从 $V(t)$ 改为 $V(t)$，并采用适当的新逻辑旋转角 θ。我们将量子态 ρ 的品质因数定义如下：

$$F(\rho) = \max_{E\in\mathcal{E}} |\,\langle\bar{\psi}|\,G^\dagger E^\dagger \rho E G\,|\bar{\psi}\rangle\,|, \tag{94}$$

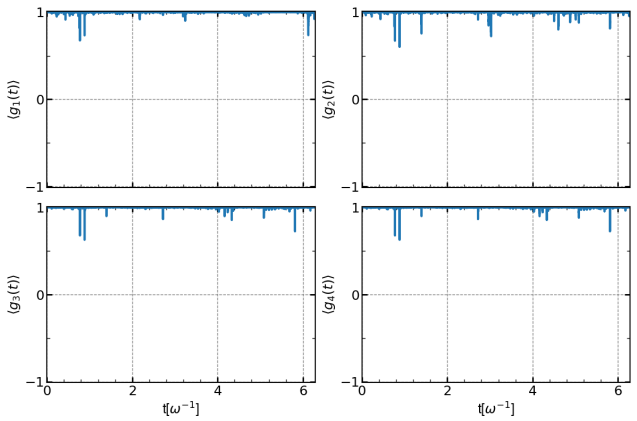
即，混合态与 ρ 任意一个目标纯错误态之间的最大保真度。图5(a) 展示了这一指标的系综平均值，该值根据2000条轨迹的最终量子态计算得出。这里，$\omega/\kappa = 0.1$。这表明，通过改变路径可以抑制马尔可夫错误的影响。需要指出的是，此处考虑的路径自适应方案仅针对单次跃迁，但原则上可以推广到处理任意次数的跃迁，从而实现所需的纠错水平。

E. 加速门

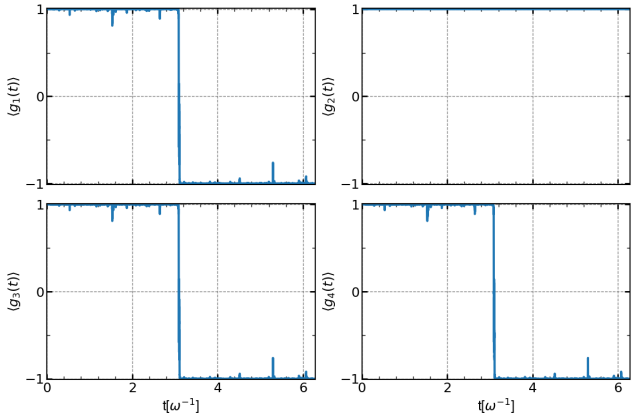
根据构造，实现该流程并施加所需逻辑门所需的总时间为

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{95}$$

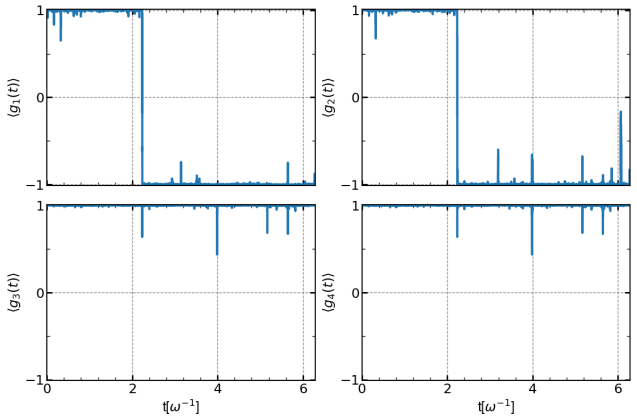
角频率 ω 的选择至关重要。如果 ω 过大，系统会发生过快的旋转，从而增加跃迁到错误子空间的可能性。反之，如果 ω 过小，演化就会变慢，并延长门时间。



(a)

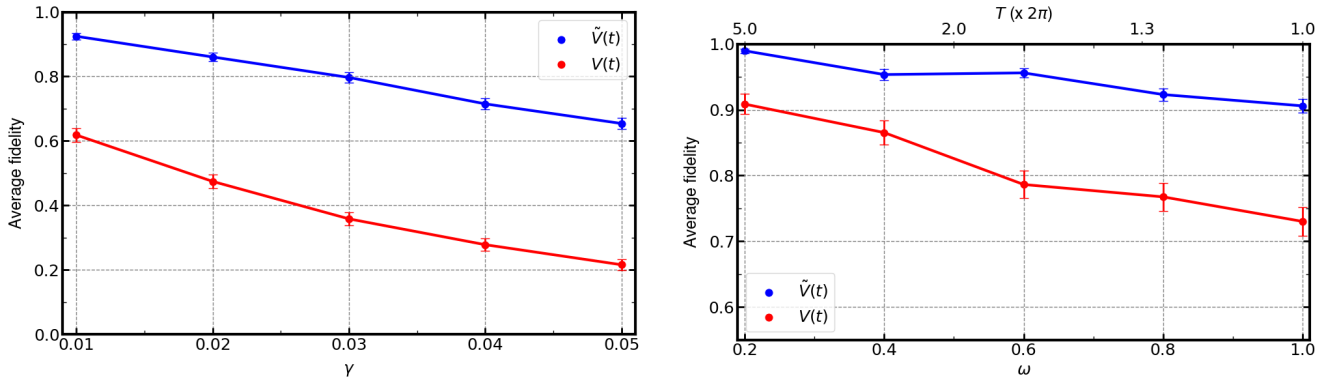


(b)



(c)

图4. 旋转后的稳定子生成元期望值的演化。(a) 期望值始终接近 $+1$，这表明演化过程中没有错误。(b) 将错误率有意设为 $\gamma = 0$，并选择旋转速率使得 $\omega/\kappa = 0.1$ （对应的跳跃概率为 $\approx 36\%$）。我们观察到在 $t \approx 3$ 处出现综合征1011，对应于一种 X 错误，该错误完全由码空间的非绝热旋转导致。(c) 另一条轨迹，其中 $\gamma/\kappa = \mathcal{O}\,(10^{-4})$，且 $\omega/\kappa = \mathcal{O}\,(10^{-2})$。综合征1100对应于 σ_2^x 错误。



(a) (b)

图 5. 平均保真度 $\mathbb{E}[\mathcal{F}(\rho(T))]$ 随以下因素的变化：(a) 错误率 γ，其中 $\rho(t)$ 通过对方程 (93) 进行数值积分得到；(b) 旋转速率 ω（等价地，最终演化时间 T）。当量子态在 τ跃迁到综合征空间时，路径从 $V(\tau)$ 改为 $\tilde{V}(\tau)$。所考察的码是含有 2 个辅助量子比特的 $[\![3,1,3]\!]$ 比特翻转码，辅助量子比特初始化为 $|00\rangle$。逻辑算符 $H=\otimes_{i=1}^{3}\sigma_i^z$、逻辑旋转角 $\theta=\pi/6$ 和 $X=\sigma_1^x\sigma_3^z\sigma_4^x\sigma_5^x$。图中数据取自 2000 条轨迹组成的系综平均。

如上一节所示，连续测量诱发的错误是 马尔可夫跳跃。这使得我们能够实时修改演化路径，以纠正此类错误。因此，对绝热性的严格要求可以放宽：要实现较高的成功概率，并不一定需要缓慢且高度绝热的演化。

等价地，我们可以在实现预期几何相位的同时缩短门时间。图 5(b)对此进行了说明——我们绘制了目标量子态的系综平均保真度（定义见方程 (94)）随总门时间 T的变化。数据取自 2000 条随机轨迹的平均。在此模拟中，我们采用 $[\![3,1,3]\!]$比特翻转码，其中 $H=\bar{\sigma}^x$，$X=\sigma_1^x\sigma_3^z$，旋转角为 $\theta=\frac{\pi}{6}$。结果表明，对于给定的成功概率，与路径保持固定的情形相比，在演化过程中自适应地修改路径可以缩短门时间。这展示了在演化过程中途修改路径能够加速几何门的一个实例。

IV. 讨论

摘要——本文研究了环境噪声对基于测量的几何量子计算（MHQC）的影响。首先，我们考察了时间相关（非马尔可夫）噪声的效应。该协议本身涉及稳定子测量。这会有效截断记忆核，并通过量子芝诺效应抑制非马尔可夫噪声。我们通过两个简单的例子展示了这一点：恒定哈密顿量误差和低频 $1/f$ 噪声。然而，当噪声在时间上不相关（即为马尔可夫噪声）时，仅进行稳定子测量并不能抑制错误。在这种情况下，我们可以利用测量电流以执行纠错。

我们提出了一种在执行 MHQC 的同时进行马尔可夫误差校正的方法。马尔可夫错误会导致量子态跃迁到某个（旋转后的）综合征空间：稳定子测量通过（旋转后的）综合征揭示其所在空间。需要注意的一个关键点是，与离散时间量子纠错（QEC）不同，该协议可能会根据错误的结构产生额外的逻辑相位旋转。然而，我们证明，这一相位可以被唯一确定，并且可以计算瞬时误差态。利用解码得到的错误，我们展示了如何改变演化路径（无需额外开销），使系统在演化结束时回到原始错误空间，同时实现所需的逻辑门。将系统带回错误空间的选择是任意的；我们也可以让它回到原始码空间。不过，在某些情况下，前一种选择可能更可取，例如错误发生在演化的最后阶段时。此时，若要将系统从错误空间带回码空间，就需要额外进行一次旋转；以几何方式（因此也就是绝热地）执行这一步并无必要。由于假设所有错误都是泡利算符，我们可以选择让系统回到原始错误空间，并在经典层面记录泡利错误，直到需要执行非克利福德门；届时，再横向地校正累积的泡利错误。

接下来，我们研究了偶发测量诱导误差的影响。这类错误源于码未能绝热地旋转。与环境错误一样，这些错误可以视为马尔可夫跳跃。我们证明，当码满足某些条件时，便能在整个演化过程中唯一识别这些错误。我们还展示了如何引导路径，以纠正测量诱导的错误，同时实现

正确的逻辑门。这种方法在选择旋转速率时也更具灵活性：如果允许改变路径，就能加快门操作。

未来方向——在这项工作中，我们展示了如何抵消逻辑门执行期间单个马尔可夫可纠正错误的影响。一个自然的拓展是考虑多个可纠正错误。连续测量为逻辑计算带来了显著优势：在逻辑门运行期间，测量通过综合征揭示错误（延迟很小）。这使用户能够在演化过程中追踪所有错误。随后，可以进行纠正，或实时追踪错误，以限制不可纠正错误的各个分量。这种能力本质上受错误综合征解码问题的限制。对于结构化的码，例如表面码或低密度奇偶校验码，已有已知的高效解码器。例如，最小权重完美匹配（MWPM）算法为表面码提供了一种多项式时间解码器。通常，在存在泡利马尔可夫噪声的表面码存储实验中，会以固定时间间隔测量稳定子，并利用整个综合征体来识别错误。这种技术可以改为输入连续时间测量电流，这些电流会在不规则的时间间隔发生符号翻转。此外，如何在限制经典处理开销的同时找到有效的滤波技术，也是一个值得关注的工程问题。

这一方案依赖于在旋转稳定子生成元的同时，对其进行连续测量的能力。虽然我们已经从理论上证明了这一概念，但要证明其在实验上的可行性，描述实现此类测量的物理机制至关重要。一种实现此类测量的方法，是通过某个哈密顿量将以稳定子码编码的数据量子比特寄存器与一个“监测”寄存器耦合；只有当数据寄存器在瞬时码空间之外存在分量时，该哈密顿量才会使辅助量子比特发生拉比振荡 [39]。同时测量辅助量子比特寄存器，就等价于对旋转稳定子进行弱测量。未来工作的一个目标，是在近期量子处理器上展示切实可行的操作流程。

在这项工作中，我们通过简单的例子表明，非马尔可夫噪声可以得到抑制，并推测一大类时间相关噪声模型也可以用类似的方法加以抑制。动力学解耦（DD）与量子芝诺效应有着密切联系，这一类比进一步增强了我们对这一观点的信心。尽管如此，[62] 展示了一个具有非马尔可夫行为、却无法通过动力学解耦抑制的噪声过程反例。另一方面，也存在某些没有芝诺区域、但能通过 DD 解耦的模型 [63]。因此，若能找到一个数学上严谨的论证，说明初始衰减曲线与解耦之间的联系，将会很有帮助。

这一方案可用于在稳定子码中实现非克利福德逻辑门。魔态蒸馏、晶格手术和码切换协议是实现同一目标的其他技术。第一种方法利用称为“魔态”的特殊量子态，通过门隐形传态实现一组完备的逻辑操作 [9]。第二种方法通过“拼接”和“切割”拓扑码的片区来创建逻辑门 [11]。第三种方法与全同伦计算类似：它允许在一个或多个码之间切换，以横向地执行某些门，从而维持容错性 [64]。因此，值得将各协议的资源开销与这种基于测量的全同伦量子计算进行比较。

致谢

本材料基于美国陆军研究实验室和美国陆军研究办公室根据合同/资助编号 W911NF2310255 提供或部分提供的支持，以及美国国家科学基金会资助 FET-2316713 的支持。

[1] T. Brun 和 D. Lidar，*Quantum Error Correction*（剑桥大学出版社，2013 年）。[2] E. Dennis、A. Kitaev、A. Landahl 和 J. Preskill，《拓扑量子存储器》，《数学物理学杂志》**43**，4452–4505（2002 年）。[3] D. Aharonov 和 M. Ben-Or，具有恒定错误率的容错量子计算（1999 年），arXiv:quant-ph/9906129 [quant-ph]。[4] E. Knill、R. Laflamme 和 W. H. Zurek，《弹性量子计算》，《科学》**279**，342（1998 年），https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.279.5349.342

[5] P. W. Shor，容错量子计算，第37届计算机科学基础会议论文集，56（1996）。[6] A. Kitaev，基于任意子的容错量子计算，《物理学年鉴》**303**，2（2003）。

[7] D. Gottesman，量子纠错与容错量子计算导论，应用数学专题讨论会论文集**68**，13（2010），arXiv:0904.2557。

[8] B. Eastin 和 E. Knill，关于横向编码量子门集的限制，《物理评论快报》**102**，110502（2009）。

[9] P. Sales Rodriguez、J. M. Robinson、P. N. Jepsen、Z. He、C. Duckering、C. Zhao、K.-H. Wu、J. Campo、K. Bagnall、M. Kwon、T. Karolyshyn、P. Weinberg、M. Cain、S. J. Evered、A. A. Geim、M. Kalinowski、S. H. Li、T. Manovitz、J. Amato-Grill、J. I. Basham、L. Bernstein、B. Braverman、A. Bylinskii、A. Choukri、R. J. DeAngelo、F. Fang、C. Fieweger、P. Frederick、D. Haines、M. Hamdan、J. Hammett、N. Hsu、M.-G. Hu、F. Huber、N. Jia、D. Kedar、M. Kornjaˇca、F. Liu、

J. Long, J. Lopatin, P. L. S. Lopes, X.-Z. Luo, T. Macrì, O. Markovi´c, L. A. Mart´ınez-Mart´ınez, X. Meng, S. Ostermann, E. Ostroumov, D. Paquette, Z. Qiang, V. Shofman, A. Singh, M. Singh, N. Sinha, H. Thoreen, N. Wan, Y. Wang, D. Waxman-Lenz, T. Wong, J. Wurtz, A. Zhdanov, L. Zheng, M. Greiner, A. Keesling, N. Gemelke, V. Vuleti´c, T. Kitagawa, S.-T. Wang, D. Bluvstein, M. D. Lukin, A. Lukin, H. Zhou和S. H. Cant´u，逻辑魔法态蒸馏的实验演示，《自然》645, 620–625（2025年）。[10] P. Prabhu和C. Chamberland，由时间编码格点手术优化的新型魔法态蒸馏工厂（2022年），arXiv:2210.15814 [quant-ph]。[11] D. Horsman, A. G. Fowler, S. Devitt和R. V. Meter，通过格点手术实现表面码量子计算，《新物理学杂志》14, 123011（2012年）。[12] I. Besedin, M. Kerschbaum, J. Knoll, I. Hesner, L. B¨odeker, L. Colmenarez, L. Hofele, N. Lacroix, C. Hellings, F. Swiadek, A. Flasby, M. Bahrami Panah, D. Colao Zanuz, M. M¨uller和A. Wallraff，在两个距离为三的重复码上利用超导量子比特实现的晶格手术，《自然·物理》10.1038/s41567-025-03090-6（2026年）。[13] C. Gerhard和T. A. Brun，量子纠错检测码中的弱容错计算（2025年），arXiv:2408.14828 [quant-ph]。[14] I. Pogorelov, F. Butt, L. Postler, C. D. Marciniak, P. Schindler, M. M¨uller和T. Monz，实验性容错码切换（ 2024 2403 13732 ），[ ] arXiv: . quant-ph .[15] Y. Ouyang, Y. Jing和G. K. Brennen，使用置换不变码实现低开销量子计算的免测量码切换协议，《PRX量子》6, 040341（2025年）。[16] P. Zanardi和M. Rasetti，整体量子计算，《物理快报A辑》264, 94（1999年）。[17] C. Wassner, T. Guaita, J. Eisert和J. Carrasco，整体量子计算：一种可扩展的绝热架构（2025年），arXiv:2502.17188 [quant-ph]。[18] I. Fuentes-Guridi, F. Girelli和E. R. Livine，存在退相干情况下的整体量子计算，《物理评论快报》94, 10.1103/Phys- RevLett.94.020503（2005年）。[19] L.-A. Wu, P. Zanardi和D. A. Lidar，无退相干子空间中的整体量子计算，《物理评论快报》95, 130501（2005年）。[20] O. Oreshkov, T. A. Brun和D. A. Lidar，稳定子码上容错几何量子计算的方案，《物理评论A》80, 022325（2009年）。[21] G. Feng, G. Xu和G. Long，非绝热几何量子计算的实验实现，《物理评论快报》110, 190501（2013年）。[22] K. Toyoda, K. Uchida, A. Noguchi, S. Haze和S. Urabe，几何单量子比特操作的实现，《物理评论A》87, 052307（2013年）。[23] C. Cesare, A. J. Landahl, D. Bacon, S. T. Flammia和A. Neels，绝热拓扑量子计算，《物理评论A》92, 012336（2015年）。[24] O. Oreshkov, T. A. Brun和D. A. Lidar，容错几何量子计算，《物理评论快报》102, 070502 2009年( )。[25] P. V. Buividovich和V. I. Kuvshinov，控制参数取值存在随机误差时整体量子计算的保真度

A 73, 10.1103/PhysRevA.73.022336 (2006), arXiv:quant- ph/0601146.[26] P. Solinas, P. Zanardi, and N. Zangh`ı, 非阿贝尔整体量子门对参数噪声的鲁棒性，《物理评论A》70, 10.1103/Phys- RevA.70.042316 (2004).[27] T. Chen, P. Shen, and Z.-Y. Xue, 通过在超导电路上进行编码实现鲁棒且快速的几何量子门，《物理评论应用》14, 10.1103/Phys- RevApplied.14.034038 (2020).[28] Y. Liang, T. Chen, and Z.-Y. Xue, 通过循环演化保护实现鲁棒的几何量子门，APL Quantum 2, 10.1063/5.0249368 (2025).[29] P. Shen, Y. Liang, T. Chen, and Z.-Y. Xue, 加速超鲁棒非绝热几何量子门，《物理评论A》108, 10.1103/PhysRevA.108.032601 (2023).[30] G. Florio, P. Facchi, R. Fazio, V. Giovannetti, and S. Pas- cazio, 用于整体量子计算的鲁棒量子门，《物理评论A》73, 022327 (2006).[31] P. Solinas, M. Sassetti, P. Truini, and N. Zanghi, 量子整体门的稳定性，《新物理学杂志》14, 10.1088/1367-2630/14/9/093006 (2012).[32] M. S. Sarandy and D. A. Lidar, 绝热开放量子系统中的阿贝尔与非阿贝尔几何相位，《物理评论A》73, 10.1103/PhysRevA.73.062101 (2006).[33]A. Lanka, J. Garcia-Nila, and T. A. Brun, 基于连续测量的整体量子计算 (2025), arXiv:2510.06725 [quant-ph].[34] P. Facchi, 量子芝诺效应、绝热性与动力学超选择规则，载于 *Fundamental Aspects of Quantum Physics* 2003 197 221 (WORLD SCIENTIFIC,) p. – .[35] P. Facchi and S. Pascazio, 量子芝诺子空间，《物理评论快报》89, 080401 (2002).[36] J. G. Nila and T. A. Brun, 马尔可夫与非马尔可夫模型中的连续量子纠错，《物理评论A》113, 022442 (2026).[37] A. La nka, S. Hegde, and T. A. Brun, 针对任意噪声优化连续时间量子纠错 (2026), arXiv:2506.21707 [quant-ph].[38] O. Oreshkov and T. A. Brun, 针对非马尔可夫退相干的连续量子纠错，《物理评论A》76, 022318 (2007).[39] Y.-H. Chen a nd T. A. Brun, 通过成对局域相互作用实现连续量子错误检测与抑制，《物理评论研究》2, 043093 (2020).[40] E. Brion, G. Harel, N. Kebaili, V. M. Akulin, and I. Dumer, 通过芝诺效应保护相干性，Euro- physics Letters 66, 157 (2004).[41] C. J. G. Mommers and E. Sj¨oqvist, 利用离散 holonomy 实现通用量子计算与量子纠错，《物理评论A》105, 022402 (2022).[42] L. Viola and S. Lloyd, 两态量子系统中的退相干动力学抑制，《物理评论A》58, 2733 1998( ).[43] K. Khodjasteh and D. A. Lidar, 容错量子动力学解耦，《物理评论快报》95, 180501 (2005).[44] E. Paladino, Y. M. Galperin, G. Falci, and B. L. Alt- shuler, 1/f噪声：对固态量子信息的影响，Rev. Mod. Phys. 86, 361 (2014).[45] E. Milotti, 1/f噪声：教学性综述 (2002), arXiv:0204033 [physics.class-ph].

[46] S. Machlup, 半导体中的噪声：双参数随机信号的频谱，《应用物理学杂志》25, 341 1954( ). [47] R. Zwanzig, 开放量子系统中马尔可夫与非马尔可夫动力学之间的突变，《化学物理杂志》33, 1338 (1960). [48] J. Chen, E. Crowder, L. Xiang, and D. Davidovic, 四阶时间卷积无关方法基准测试：评估四阶近似的可用性与可靠性，APL Quantum 2, 026109 (2025). [49] L. Lampert, S. Gadamsetty, S. Chaudhary, Y. Pei, J. Chen, E. Crowder, and D. Davidovi´c, 六阶时间卷积无关主方程及其后续发展：晚时重求和、两类发散与有效性范围，《物理评论A》111, 042214 (2025). [50] Z. Xia, J. Garcia-Nila, and D. A. Lidar, 马尔可夫与非马尔可夫主方程与腔中量子比特精确可解模型的比较，《物理评论应用》22, 10.1103/physrevapplied.22.014028 (2024). [51] A. Shabani and D. A. Lidar, 通过测量方法构造完全正的后马尔可夫主方程，《物理评论A》71, 020101 (2005). [52] H. Zhang, B. Pokharel, E. Levenson-Falk, and D. Li- dar, 基于层析重构预测非马尔可夫超导量子比特动力学，《物理评论应用》17, 054018 (2022). [53] C. Sutherland, T. A. Brun, and D. A. Lidar, 后马尔可夫主方程的非马尔可夫性，《物理评论A》98, 042119 (2018). [54] S. Pang, T. A. Brun, and A. N. Jordan, 开放量子系统中马尔可夫与非马尔可夫动力学之间的突变 (2017), arXiv:1712.10109 [quant- ph].

[55]Y. Tanimura，开放量子动力学的数值“精确”方法：运动层级方程（heom），《化学物理杂志》153（2020）。[56] C. Ahn、A. C. Doherty 和 A. J. Landahl，通过量子反馈控制实现连续量子纠错，《物理评论A》65, 10.1103/PhysRevA.65.042301（2002）。[57] A. Lanka 和 T. Brun，通过连续测量改进量子点单光子源，《物理评论A》108，053711（2023）。[58] I. Convy、H. Liao、S. Zhang、S. Patel、W. P. Livingston、H. N. Nguyen、I. Siddiqi 和 K. B. Whaley，用于超导量子比特连续量子纠错的机器学习，《新物理学杂志》24，063019（2022）。[59] I. Convy 和 K. B. Whaley，量子错误检测的对数贝叶斯方法，《Quantum》6，680（2022）。[60] R. Mohseninia、J. Yang、I. Siddiqi、A. N. Jordan 和 J. Dressel，通过连续奇偶测量实现始终开启的量子错误跟踪，《Quantum》4，358（2020）。[61] B. A. Chase、A. J. Landahl 和 J. Geremia，用于连续时间量子纠错的高效反馈控制器，《物理评论A》77，032304（2008）。[62] D. Burgarth、P. Facchi、M. Fraas 和 R. Hillier，无法通过周期性自旋回波脉冲进行动力学解耦的非马尔可夫噪声，《SciPost物理学》11，10 21468 11 2 027 2021 . / scipostphys. . . ( )。[63] C. Arenz、R. Hillier、M. Fraas 和 D. Burgarth，通过动力学解耦区分退相干与其他量子理论，《物理评论A》92，022102（2015）。[64] J. T. Anderson、G. Duclos-Cianci 和 D. Poulin，Steane码与Reed–Muller量子码之间的容错转换，《物理评论快报》113，080501（2014）。

附录 A：量子芝诺动力学

假设希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的量子系统受一系列由随时间变化的可观测量族所进行的测量控制

$$O(t) = U(t,0)O_0U^\dagger(t,0), \tag{A1}$$

其中 $U(t,\ 0)$ 是一个酉矩阵，且 $O_0 \equiv O(0)$。要使测量对量子态产生非平凡影响，我们要求

$$[U(t_1,0), U(t_2,0)] \neq 0 \quad \forall t_1 \neq t_2, \tag{A2}$$

否则，对 $O(t)$ 进行投影测量不会对量子态产生任何影响。在一个很短的时间间隔 δt 内，演化酉算符可表示为

$$U(t+\delta t, t) = \exp(-iH(t)\delta t) + \mathcal{O}(\delta t^2), \tag{A3}$$

其中 $H(t)$ 可以是随时间变化的哈密顿量。显然，当 $\delta t \ll 1$, $U(t+\delta t,\ t) \approx I$ 时，即幺正变换是微弱的；测量可观测量也只会发生微小的旋转。注意， $O(t)$ 始终保持厄米性，其本征值也保持不变，因为酉变换会保留本征值。于是，我们可以将旋转后的可观测量写为

$$O(t) = \sum_s \alpha_s \mathbb{P}_s(t), \tag{A4}$$

其中 $\mathbb{P}_s(t)$ 是投影到 α_s-本征子空间上的投影算符；我们将其记为 $\mathcal{H}_s(t)$。注意，我们也可以将 $O(t)$ 写为

$$O(t) = \sum_s \alpha_s \left[U(t,0)\mathbb{P}_s(0)U^\dagger(t,0)\right], \tag{A5}$$

也就是说，旋转后的可观测量的本征空间上的投影算符也通过相同的幺正变换演化。

假设量子态 $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}_0(t)$ 受到 $O(t+\delta t)$ 的投影测量。那么量子态保持在 $\mathcal{H}_0(t+\delta t)$ 中的概率为

$$\begin{aligned} p_0 &= \langle\psi(t)|\,\mathbb{P}_0(t+\delta t)\,|\psi(t)\rangle \\ &= \langle\psi(t)|\,U(t+\delta t,t)\mathbb{P}_0(t)U^\dagger(t+\delta t,t)\,|\psi(t)\rangle \\ &= 1-\mathcal{O}(\delta t^2), \end{aligned} \tag{A6}$$

也就是说，从 α_0 本征子空间出发，当后续测量之间的时间间隔为 $\delta t \ll 1$ 时，演化到具有相同本征值的本征子空间的概率接近于 1。换言之，在演化过程中，所有量子态都被“限制”在各自的子空间中；这些子空间在形式上称为 量子芝诺子空间(QZS)。量子态演化为

$$\begin{aligned} |\psi(t+\delta t)\rangle &= \frac{\mathbb{P}_0(t+\delta t)\,|\psi(t)\rangle}{\sqrt{p_0}} \\ &= |\psi(t)\rangle - i[H(t),\mathbb{P}_0(t)]\delta t + \mathcal{O}(\delta t^2). \end{aligned} \tag{A7}$$

在极限 $\delta t \to 0$ 下，我们得到描述量子态演化的马尔可夫微分方程:

$$|\mathrm{d}\psi\rangle = -i[H(t),\mathbb{P}_0(t)]\,|\psi\rangle\,\mathrm{d}t. \tag{A8}$$

˜需要注意的是，该演化并非幺正演化，因为 $H(t) \equiv [H(t)\ \mathbb{P}_0(t)]$ 是反厄米的。不过，正如我们将看到的，这种动力学可以在芝诺子空间中产生闭合回路的几何相位。

附录 B：白噪声产生林德布拉德动力学

为简单起见，我们考虑单个量子比特。但对于多量子比特系统，结果也类似。设哈密顿量为

$$H(t) = \lambda(t)X, \tag{B1}$$

其中 X 表示泡利 X 算符，而 $\lambda(t)$表示白噪声:

$$\langle\lambda(t)\rangle = 0 \quad \forall t \tag{B2a}$$

$$\langle\lambda(t),\lambda(t')\rangle = \sigma^2\delta(t-t'). \tag{B2b}$$

在 $H(t)$作用下的态动力学为

$$\dot{\rho} = -i[H(t),\rho(t)]. \tag{B3}$$

我们为以下内容定义一个拟设 对应酉传播子 U 的伊藤随机微分方程（SDE） $_t$:

$$\mathrm{d}U_t = AU_t\mathrm{d}t + BU_t\mathrm{d}W_t, \tag{B4}$$

其中 W_t 是维纳过程，其增量满足

$$\mathbb{E}[\mathrm{d}W_t] = 0,\ \mathrm{d}W_t^2 = \sigma^2\mathrm{d}t, \tag{B5}$$

以及与 $\mathrm{d}W_t$ 无关的算子系数 A 和 B。对 $U_tU_t^\dagger = I$ 应用 Itô 乘积法则，可得

$$(A + A^\dagger + \sigma^2BB^\dagger)\mathrm{d}t + (B+B^\dagger)\mathrm{d}W_t = 0. \tag{B6}$$

整理 $\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}W_t$ 的系数，可得条件

$$\begin{aligned} A + A^\dagger + \sigma^2 B B^\dagger = 0 \\ B + B^\dagger = 0. \end{aligned} \tag{B7}$$

令 $B = -iX$；这满足 B 为反厄米算符。满足另一条件的 A 的一个最简解为 $A = -\sigma^2 X/2$。因此， U_t 的 Itˆo 随机微分方程为

$$\mathrm{d}U_t = -\frac{\sigma^2 X}{2} U_t \mathrm{d}t - iX U_t \mathrm{d}W_t. \tag{B8}$$

令 $\rho(t) = U_t \rho(0) U_t^\dagger$，并应用 Itˆo 乘积法则：

$$\mathrm{d}\rho = -i[X, \rho]\mathrm{d}W_t + \sigma^2 \left(X\rho X - \frac{1}{2}\{X^2, \rho\} \right) \mathrm{d}t. \tag{B9}$$

我们注意到，该方程包含一个描述幺正演化的随机李维超算符，以及一个描述耗散的确定性林德布拉德超算符。请注意，该方程描述了白噪声下<strong单条轨迹的演化。取期望并利用 $\mathbb{E}[\mathrm{d}W_t] = 0$，可得系综平均态 ˆ$\rho(t)$ $= \mathbb{E}[\rho(t)]$ 的确定性主方程：

$$\dot{\hat{\rho}} = \sigma^2 \left(X\hat{\rho}X - \hat{\rho} \right). \tag{B10}$$

附录 C：瞬时代码态

如果对瞬时码空间投影算符的测量总是得到结果 $+1$，那么量子态始终处于 $+1$-芝诺子空间中。于是， $\mathcal{B}$ 上的曲线为

$$\mathbb{P}(t) = V(t) \mathbb{P}_0 V^\dagger(t). \tag{C1}$$

其在 $\mathcal{F}$ 上的对应曲线可通过求解微分方程式（19）得到：

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = -L^\dagger(0) \left(V^\dagger(t) \frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} \right) L(0) h(t). \tag{C2}$$

将式（26）代入式（C2），可得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}\phi} &= -i\omega L^\dagger(0) \left(\frac{\theta}{2\pi} H e^{i2\omega t X} + X \right) L(0) h(t) \\ &= -i\omega \frac{\theta}{2\pi} \cos(2\omega t) L^\dagger(0) H L(0) h(t) \\ &\quad + \omega \frac{\theta}{2\pi} \sin(2\omega t) L^\dagger(0) H X L(0) h(t) \\ &\quad - i\omega L^\dagger(0) X L(0) h(t). \end{aligned} \tag{C3}$$

（0）的各列表示原始码空间的基态，即码字。由于 X是一个错误算符， XL（0）和 HXL（0）是正交子空间中的基态，因此 $L^\dagger$（0）XL（0） $=L^\dagger$（0）HXL（0） $= 0$。于是，式（C2）的解为

$$\begin{aligned} h(t) &= \exp\left(-i \frac{\theta}{2\pi} L^\dagger(0) H L(0) \int_{t'=0}^{t} \cos(2t') \mathrm{d}t' \right) h(0) \\ &= \exp\left(-i \frac{\theta}{4\pi} \sin(2\omega t) L^\dagger(0) H L(0) \right) h(0). \end{aligned} \tag{C4}$$

根据假设， $h(0) = I_{2^k}$。此外，很容易看出，对于任意算符 A， $L^\dagger(0) e^A L(0) = \exp[L^\dagger(0) A L(0)]$。接下来

$$h(t) = L^\dagger(0) \exp\left(-i \frac{\theta}{4\pi} \sin(2\omega t) H \right) L(0), \tag{C5}$$

曲线 $L(t)$可以写成

$$L(t) = V(t) \exp\left(-i\frac{\theta}{4\pi}\sin(2\omega t)H\right) L(0), \tag{C6}$$

其中我们使用了以下事实： $L(0)L^\dagger(0) = \mathbb{P}_0$ 与 H对易。利用公式（15），处于 t 的量子态可写为

$$|\bar{\psi}(t)\rangle = V(t) \exp\left(-i\frac{\theta}{4\pi}\sin(2\omega t)H\right) |\bar{\psi}\rangle\,. \tag{C7}$$

附录 D：更新后的旋转角

根据 E 与 H 和 X对易还是反对易，我们有四种情况。新的旋转角为：

Case	$\mathcal{H}_E(\tau)$	氢$_{EX}(\tau)$
$[E,H]=[E,X]=0$	0	N/A
$[E,H]=\{E,X\}=0$	0	$-\dfrac{\beta_{EX}(\tau)+2\theta}{1-\frac{\tau}{T}(1-\text{sinc函数}(2\omega\tau))}$
$\{E,H\}=[E,X]=0$	$-\dfrac{\beta_E(\tau)+2\theta}{1-\frac{\tau}{T}(1-\text{sinc函数}(2\omega\tau))}$	$\dfrac{\beta_{EX}(\tau)}{1-\frac{\tau}{T}(1-\text{sinc函数}(2\omega\tau))}$
$\{E,H\}=\{E,X\}=0$	$-\dfrac{\beta_E(\tau)+2\theta}{1-\frac{\tau}{T}(1-\text{sinc函数}(2\omega\tau))}$	0

表 III. 在错误算符 E、哈密顿量 H 和泡利算符 X 之间具有不同对易关系和反对易关系时的旋转角 $\mathcal{H}_E(\tau)$ 和 $\mathcal{H}_{EX}(\tau)$。对于 0 类误差，路径保持不变；而 1类和2类误差需要将 $\tilde{V}(t)$ 调整为相应值。