SIP 类与四参数分拆恒等式

Runqiao Li 德克萨斯大学里奥格兰德河谷分校数学系，美国德克萨斯州爱丁堡市，邮编 78541 runqiao.li@utrgv.edu 或 runqaoli@outlook.com

arXiv:2603.02575v1 [math.CO] 3 Mar 2026

摘要。分拆的四参数权重在整数分拆理论中发挥着重要作用，因为它与多种统计量相关，包括交错和与 BG-秩。2022年，Andrews 引入了 SIP 类，并借此回顾了若干经典分拆恒等式，提出了新的组合学见解。本文扩展了 SIP 类，并提供了一种研究分拆的四参数权重的统一方法。我们以具有位置奇偶性的分拆为例，给出了与这些分拆集合相关的四参数分拆恒等式。此外，作为推论，我们还分别给出了记录 BG-秩，以及奇数项数量与交错和联合分布的生成函数。

关键词： 可分整数分拆类、分拆中的奇偶性、四参数生成函数。

美国数学学会分类：05A17, 11P84, 11P82

1 引言

分拆是由正整数组成的有限弱递减序列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_\ell)$；若该序列严格递减，则称其为严格分拆。$\lambda_i$ for$1 \le i \le \ell$中的每一项称为 λ 的一部，其中 $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5, \ldots\ldots$是奇数下标部分，$\lambda_2, \lambda_4, \lambda_6, \ldots\ldots$是偶数索引部分。部的个数称为 λ 的长度，记作 $\ell(\lambda)$。分拆的权记作 $|\lambda|$，定义为其各部之和。若 $|\lambda| = n$，则称 λ 是 n 的一个分拆，并记作 $\lambda \vdash n$。所有分拆组成的集合记作 $\mathcal{P}$。

贯穿本文始终，我们还将使用 q-Porchhamer 符号，其定义如下 .

$$(a;q)_0 := 1, \quad (a;q)_n := \prod_{i=0}^{n-1}(1-aq^i) \quad \text{and} \quad (a;q)_\infty := \lim_{n\to\infty}(a;q)_n,$$

其中 a 和 q 是复变量，且无穷乘积在 $|q| < 1$时收敛。我们还采用以下缩写

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k; q)_n := (a_1;q)_n (a_2;q)_n \cdots (a_k;q)_n$$

and

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k; q)_\infty := (a_1;q)_\infty (a_2;q)_\infty \cdots (a_k;q)_\infty,$$

其中 a_i是复变量。

在分拆理论中，生成函数是连接组合方面与解析方面的桥梁。通过考察各种分拆统计量，我们通常可以得到分拆恒等式的多变量推广。2011年，Savage 和 Sills [15] 为小 G¨ ollnitz 恒等式及其双变量推广给出了新的求和侧。设 $\mathcal{G}_1$ 为偶数索引部分均为偶数的严格分拆集合， $\mathcal{G}_2$ 为奇数下标部分均为偶数的严格分拆集合。设 $o(\lambda)$表示分拆λ中奇数项的个数，他们证明了以下结果。

定理 1.1 （Savage 和 Sills，2011年）。

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{G}_1} x^{o(\lambda)}q^{|\lambda|}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n q^{\binom{2n}{2}}(-q/x;q^4)_n}{(q^2;q^2)_{2n}}=\frac{(-xq;q^4)_\infty}{(q^2;q^4)_\infty}, \tag{1.1}$$

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{G}_1} x^{o(\lambda)}q^{|\lambda|}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n q^{\binom{2n+1}{2}}(-1/xq;q^4)_n}{(q^2;q^2)_{2n}}=\frac{(-xq^3;q^4)_\infty}{(q^2;q^4)_\infty}. \tag{1.2}$$

最近， [14]中的作者重新研究了这些分拆集合，并考察了一种不同的统计量。对于一个分拆 $\lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ldots,\ \lambda_\ell)$，交错和定义为

$$a(\lambda):=\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3-\cdots+(-1)^{\ell-1}\lambda_\ell.$$

定理 1.2 （Li，2025年）。

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{G}_1} z^{a(\lambda)}q^{|\lambda|}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n q^{\binom{2n}{2}}(-zq;q^4)_n}{(q^4;q^4)_n(z^2q^2;q^4)_n}=\frac{(-zq;q^4)_\infty}{(z^2q^2;q^4)_\infty}=\frac{1}{(zq;q^4)_\infty(z^2q^6;q^8)_\infty}, \tag{1.3}$$

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{G}_2} z^{a(\lambda)}q^{|\lambda|}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n q^{\binom{2n+1}{2}}(-zq^{-1};q^4)_n}{(q^4;q^4)_n(z^2q^2;q^4)_n}=\frac{(-zq^3;q^4)_\infty}{(z^2q^2;q^4)_\infty}=\frac{1}{(zq^3;q^4)_\infty(z^2q^2;q^8)_\infty}. \tag{1.4}$$

自然会想到，我们能否将上述恒等式统一起来。也就是说，对于每个 $\mathcal{G}_1$ 和 $\mathcal{G}_2$，我们希望找到一个三变量生成函数，同时记录奇数项的数量、交错和以及分拆的权。

Andrews 最早针对所有分拆 [2] 的集合研究了这个问题。

定理 1.3 （Andrews，2004年）。

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}} x^{o(\lambda)}z^{a(\lambda)}q^{|\lambda|}=\frac{(-xzq;q^2)_\infty}{(x^2q^2;q^4)_\infty(z^2q^2;q^4)_\infty(q^4;q^4)_\infty} \tag{1.5}$$

注记 1.4。 在他的论文中，Andrews 考察的不是交错和，而是 λ 的共轭分拆中奇数项的数量。但通过组合论证可以看出，这两个统计量是等价的。

后来，Boulet [10] 在整数分拆上引入了四参数权重，并给出了与之相关的分拆恒等式。给定一个分拆 $\lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots\ldots,\ \lambda_\ell)$，四参数权重 $\omega(\lambda)$ 定义为

$$\omega(\lambda):=a^{\sum\lceil\frac{\lambda_{2i-1}}{2}\rceil}b^{\sum\lfloor\frac{\lambda_{2i-1}}{2}\rfloor}c^{\sum\lceil\frac{\lambda_{2i}}{2}\rceil}d^{\sum\lfloor\frac{\lambda_{2i}}{2}\rfloor},$$

其中，每个求和均遍历所有正整数 i，并且对于 $i>\ell$，我们取 $\lambda_i=0$ 。从图形上看，这个权表示我们按如下方式填充 λ 的 Ferrers 图。

a	b	a	b	a	b	a
c	d	c	d	c	d	
a	b	a	b			
c	d					

定理 1.5 (Boulet, 2006)。所有分拆集合的四参数生成函数为

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}}\omega(\lambda)=\frac{(-a;Q)_\infty(-abc;Q)_\infty}{(ab;Q)_\infty(ac;Q)_\infty(Q;Q)_\infty}, \tag{1.6}$$

其中 $Q:=abcd$。

注意，根据 $\omega(\lambda)$ 的定义，要得到 $x^{o(\lambda)}z^{a(\lambda)}q^{|\lambda|}$，我们只需令 $a\to xzq$、$b\to zq/x$、$c\to xq/z$ 和 $d\to q/xz$。因此，（1.5）是（1.6）的一个推论；如果我们能得到 $\mathcal{G}_1$ 和 $\mathcal{G}_1$的四参数权生成函数，就能立即统一定理 1.1 和定理 1.2。

事实证明，可分整数分拆（SIP）类可以推广，以适用于四参数权的研究。除了 $\mathcal{G}_1$ 和 $\mathcal{G}_1$ 之外，我们还将考察以下分拆集合，以更好地展示这种方法。令 $\mathcal{P}_1$ 为偶数索引部分为偶数的普通分拆集合，$\mathcal{P}_2$ 为奇数索引部分为偶数的普通分拆集合。我们的主要结果如下。

定理 1.6。以下四参数分拆恒等式成立。

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{G}_1}\omega(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^nQ^{\binom{n}{2}}(-b;Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}=\frac{(-a;Q)_\infty}{(ab;Q)_\infty}, \tag{1.7}$$

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{G}_2}\omega(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^{-n}Q^{\binom{n+1}{2}}(-c^{-1};Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}=\frac{(-abc;Q)_\infty}{(ab;Q)_\infty}, \tag{1.8}$$

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_1}\omega(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q^n(-aQ^{-1};Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{abQ^n(-a;Q)_n}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n}=\frac{(-a;Q)_\infty}{(ab;Q)_\infty(Q;Q)_\infty}, \tag{1.9}$$

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_2}\omega(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q^n(-1/d;Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{abQ^n(-Q/d;Q)_n}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n}=\frac{(-Q/d;Q)_\infty}{(ab;Q)_\infty(Q;Q)_\infty}. \tag{1.10}$$

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍 SIP 类及其一个四参数推广。第 3 节和第 4 节分别证明关于 $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ 和 $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$的四参数恒等式。最后，在第 5 节中，我们给出由四参数恒等式推导出的推论。我们还简要讨论了所介绍方法的一些潜在应用，这可能会引出进一步的研究。

2 可分整数分拆类

SIP 类 waw 最初由 Andrews 在 [3] 中提出。

定义 2.1. 给定一个分拆集合 $\mathcal{S}$，若存在一个子集 $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$ 和一个整数 $k > 0$，使得对每个分拆 $\lambda \in \mathcal{S}$，都存在唯一的一对分拆 $(\beta,\ \mu)$，其中 $\beta \in \mathcal{B}$满足 $\ell(\beta) = \ell(\lambda)$，$\mu$ 是由 k 的倍数组成的分拆，且 $\ell(\mu) \leq \ell(\lambda)$，并且对所有 i都有 $|\lambda_i| = |\beta_i| + |\mu_i|$，则称 $\mathcal{S}$ 为一个基为 $\mathcal{B}$ 、模数为 k的 SIP 类。这里，若$i > \ell(\mu)$，则取 $\mu_i = 0$ 。

备注 2.2。 Andrews 所采用的定义是为满足某些间隔条件的分拆量身定制的。尽管它看起来与我们在此给出的定义不同，但本质上二者等价。

SIP 类为求得集合 $\mathcal{S}$ 的生成函数提供了一种自然的方法。按分拆的长度进行计数，

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{S}} q^{|\lambda|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{S} \\ \ell(\lambda)=n}} q^{|\lambda|}.$$

现在，对于每个 n，内层求和可以写成

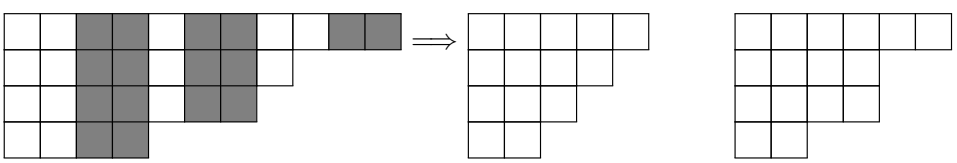
$$\sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{S} \\ \ell(\lambda)=n}} q^{|\lambda|} = B(n;q) \times \frac{1}{(q^k;q^k)_n},$$

其中， $B(n;q)$ 是基 $\mathcal{B}$ 中长度为 n 的分拆的生成函数。由于部可被 k 整除且长度不超过 n 的分拆显然由 $1/(q^k;q^k)_n$ 生成，这便可直接由 λ 与 (β,μ) 之间的对应关系得出。因此，我们得到以下结论。

Th定理 2.3 (Andrews，2022年)。 若 $\mathcal{S}$ 是一个基为 $\mathcal{B}$ 、模数为 k 的 *SIP* 类 ，

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{S}} q^{|\lambda|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(n;q)}{(q^k;q^k)_n}. \tag{2.1}$$

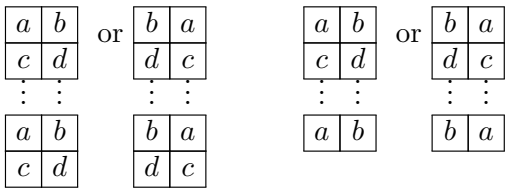
我们希望将这一表达式推广，以研究四参数权重 $\omega(\lambda)$。为此，最好从组合视角理解 SIP 类的构造。以 $\mathcal{G}_1$ 为例，我们断言它是一个模数为 2 的 SIP 类。给定一个分拆 $\lambda \in \mathcal{G}_1$，我们不断从其 Ferrers 图中减去宽度为 2 的列，直到任意两行之间的间隔都为 1 或 2。将剩余部分视为分拆 β 的 Ferrers 图，并将所有减去的列合在一起视为分拆 μ 的 Ferrers 图。具体如下所示。



显然， μ 是一个仅含偶数部分的分拆，且 $\lambda_i = \beta_i + \mu_i$。令 $\mathcal{B}_{\mathcal{G}_1}$ 为偶数索引部分均为偶数的分拆集合，并且 $1 \leq \lambda_i - \lambda_{i+1} \leq 2$，那么该集合将是基，且 $\beta \in \mathcal{B}_{\mathcal{G}_1}$。因此，我们得到了使 $\mathcal{G}_1$ 成为 SIP 类所需的基和模数。

用类似的论证可以看出， $\mathcal{G}_2$、 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 也都是模 2 的 SIP 类，而且我们也可以分别求出它们的基。

现在，对于四参数权重，如果 $\mathcal{S}$ 是一个以 $\mathcal{B}$ 为基、模数为 2 的 SIP 类，那么我们减去的列属于以下几种类型。



令 $B(n;\ a,b,c,d)$ 表示以该基为基础、长度为 n 的分拆的四参数生成函数。当 $k=2$ 时，定理 2.3 可扩展如下。

定理 2.4。 如果 $\mathcal{S}$ 是一个以 $\mathcal{B}$ 为基、模数为2的 *SIP* 类，

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{S}}\omega(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(2n;a,b,c,d)}{(ab,Q)_n(Q;Q)_n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(2n+1;a,b,c,d)}{(ab,Q)_{n+1}(Q;Q)_n}. \tag{2.2}$$

因此，要得到 $\mathcal{S}$ 的四参数生成函数，只需考虑以 $\mathcal{B}$ 为基的分拆。这也将是本文余下部分的主要方法。为求完整，我们还给出下文将用到的恒等式。

T第一个是 q-二项式定理的有限形式。根据 [1,公式 (3.3.6)] ，

$$(-z;q)_n=\sum_{k=0}^{n}z^k q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q. \tag{2.3}$$

下一个是 Heine 的 q-类比高斯求和公式 [13, 公式 (1.5.1)]。

定理 2.5 （q-高斯求和）。 对于 $|q|<1$ 且 $|c/ab|<1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n(b;q)_n}{(q;q)_n(c;q)_n}\left(\frac{c}{ab}\right)^n=\frac{(c/a;q)_\infty(c/b;q)_\infty}{(c;q)_\infty(c/ab;q)_\infty} \tag{2.4}$$

最后，我们还需要以下关于 q-二项式系数的递推关系。

定理 2.6 （ q-二项式系数的递推关系）。 对于 $n\geq m\geq 0$,

$$\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}_q=q^m\begin{bmatrix}n-1\\m\end{bmatrix}_q+\begin{bmatrix}n-1\\m-1\end{bmatrix}_q, \tag{2.5}$$

$$\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}_q=\begin{bmatrix}n-1\\m\end{bmatrix}_q+q^{n-m}\begin{bmatrix}n-1\\m-1\end{bmatrix}_q. \tag{2.6}$$

3 具有位置奇偶性的严格分拆

本节将介绍具有位置奇偶性的严格分拆的四参数生成函数。回顾一下， $\mathcal{G}_1$ 和 $\mathcal{G}_2$ 分别是偶数下标部分为偶数和奇数下标部分为偶数的严格分拆集合。 $\mathcal{G}_1$ 和 $\mathcal{G}_2$ 都是模 2 的可分拆分拆类。

3.1 偶数索引部分为偶数的严格分拆

我们已经看到， $B_{\mathcal{G}_1}$（ $\mathcal{G}_1$的基）由 $\mathcal{G}_1$ 中的分拆组成，且满足 $1 \leq \lambda_i - \lambda_{i+1} \leq 2$。令 $B_{\mathcal{G}_1}(n,\ h) := B_{\mathcal{G}_1}(a,\ b,\ c,\ d; n,\ h)$为 $B_{\mathcal{G}_1}$ 中长度为 n且最大部分为 h的分拆的四参数生成函数。

定理 3.1. 以下初始值对$B_{\mathcal{G}_1}(n, h)$成立。

$$B_{\mathcal{G}_1}(0,h) = \begin{cases} 1 & if\ h = 0, \\ 0 & otherwise, \end{cases}$$

and

$$B_{\mathcal{G}_1}(1,h) = \begin{cases} a & if\ h = 1, \\ ab & if\ h = 2, \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

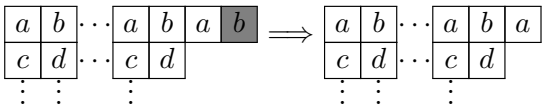
定理 3.2. 以下递推关系对$B_{\mathcal{G}_1}(a, b, c, d;\ \ n, h$成立).

$$B_{\mathcal{G}_1}(n, 2h) = bB_{\mathcal{G}_1}(n, 2h-1) \tag{3.1}$$

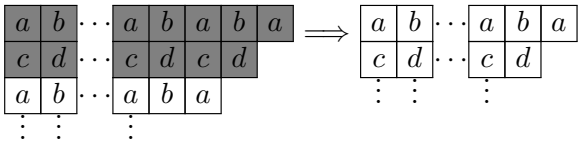
and

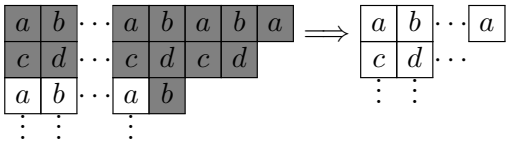
$$B_{\mathcal{G}_1}(n, 2h-1) = aQ^{h-1}B_{\mathcal{G}_1}(n-2, 2h-3) + abQ^{h-1}B_{\mathcal{G}_1}(n-2, 2h-5). \tag{3.2}$$

证明。 我们首先证明（3.1）。在 $\mathcal{B}_{\mathcal{G}_1}$ 中，所有偶数索引部分都必须是偶数。因此，若最大部分为偶数，则 λ_1 与 λ_2 之间的间隔必须为2，且第一行中的最后一个方格必须填入字母 b。因此，若将其从 λ_1中删除，便得到一个基中的分拆，其长度相同，最大部分比 λ小1。如下所示。



接下来，对于（3.2），我们考虑两种不同的情况。若最大部分为 $2h-1$，则次大部分必定为 $2h-2$。将它们从费雷尔图中删去后，我们得到一个长度为 $n-2$、最大部分为 $2h-3$或 $2h-4$ 的基中的分拆。对于后一种情况，我们重复（3.1）的论证，此时最大部分变为 $2h-5$。以下图示说明了这一过程。





至此，证明完毕。 □

By so解递推关系，得到 $B_{\mathcal{G}_1}(n,\ h)$ 的以下表达式。

定理 3.3. 对于任意正整数 n 和 h,

$$B_{\mathcal{G}_1}(2n-1,2h-1)=Q^{\binom{n}{2}+\binom{h-n+1}{2}}a^nb^{h-n}\begin{bmatrix}n-1\\h-n\end{bmatrix}_Q, \tag{3.3}$$

$$B_{\mathcal{G}_1}(2n,2h-1)=Q^{\binom{n+1}{2}+\binom{h-n}{2}}a^nb^{h-n-1}\begin{bmatrix}n-1\\h-n-1\end{bmatrix}_Q, \tag{3.4}$$

$$B_{\mathcal{G}_1}(2n-1,2h)=Q^{\binom{n}{2}+\binom{h-n+1}{2}}a^nb^{h-n+1}\begin{bmatrix}n-1\\h-n\end{bmatrix}_Q, \tag{3.5}$$

$$B_{\mathcal{G}_1}(2n,2h)=Q^{\binom{n+1}{2}+\binom{h-n}{2}}a^nb^{h-n}\begin{bmatrix}n-1\\h-n-1\end{bmatrix}_Q. \tag{3.6}$$

证明。我们首先证明右端满足递推关系。定义 e

$$R_{\mathcal{G}_1}(2n-1,2h-1):=Q^{\binom{n}{2}+\binom{h-n+1}{2}}a^nb^{h-n}\begin{bmatrix}n-1\\h-n\end{bmatrix}_Q,$$

then

$$\begin{aligned}R_{\mathcal{G}_1}(2n-1,2h-1)=&Q^{\binom{n}{2}+\binom{h-n+1}{2}}a^nb^{h-n}\begin{bmatrix}n-1\\h-n\end{bmatrix}_Q\\=&Q^{\binom{n}{2}+\binom{h-n+1}{2}}a^nb^{h-n}\left(Q^{h-n}\begin{bmatrix}n-2\\h-n\end{bmatrix}_Q+\begin{bmatrix}n-2\\h-n-1\end{bmatrix}_Q\right)\\=&Q^{\binom{n-1}{2}+\binom{h-n+1}{2}+h-1}a^nb^{h-n}\begin{bmatrix}n-2\\h-n\end{bmatrix}_Q\\&+Q^{\binom{n-1}{2}+\binom{h-n}{2}+h-1}a^nb^{h-n}\begin{bmatrix}n-2\\h-n-1\end{bmatrix}_Q\\=&Q^{h-1}aR_{\mathcal{G}_1}(2n-3,2h-3)+Q^{h-1}abR_{\mathcal{G}_1}(2n-3,2h-5).\end{aligned}$$

类似地，定义

$$R_{\mathcal{G}_1}(2n,2h-1):=Q^{\binom{n+1}{2}+\binom{h-n}{2}}a^nb^{h-n-1}\begin{bmatrix}n-1\\h-n-1\end{bmatrix}_Q,$$

then

$$R_{\mathcal{G}_1}(2n,2h-1)=Q^{\binom{n+1}{2}+\binom{h-n}{2}}a^nb^{h-n-1}\begin{bmatrix}n-1\\h-n-1\end{bmatrix}_Q$$

$$
\begin{aligned}
=&Q^{\binom{n+1}{2}+\binom{h-n}{2}}a^n b^{h-n-1}\left(Q^{h-n-1}\begin{bmatrix} n-2 \\ h-n-1\end{bmatrix}_Q+\begin{bmatrix} n-2 \\ h-n-2\end{bmatrix}_Q\right)\\
=&Q^{\binom{n}{2}+\binom{h-n}{2}+h-1}a^n b^{h-n-1}\begin{bmatrix} n-2 \\ h-n-1\end{bmatrix}_Q\\
&+Q^{\binom{n}{2}+\binom{h-n-1}{2}+h-1}a^n b^{h-n-1}\begin{bmatrix} n-2 \\ h-n-2\end{bmatrix}_Q\\
=&Q^{h-1}aR_{\mathcal{G}_1}(2n-2,2h-3)+Q^{h-1}abR_{\mathcal{G}_1}(2n-4,2h-5).
\end{aligned}
$$

我们已经证明了（3.3）和（3.4）。注意，（3.5）和（3.6）由（3.1）推出。通过检验初始值，我们完成了证明。 □

Now 我们准备给出与 $\mathcal{G}_1$ 中分拆相关的四参数恒等式 .

定理 3.4. $\mathcal{G}_1$ 的四参数生成函数由下式给出

$$
\sum_{\lambda\in\mathcal{G}_1}\omega(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^nQ^{\binom{n}{2}}(-b;Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}=\frac{(-a;Q)_\infty}{(ab;Q)_\infty}.
$$

证明。由 2.4,

$$
\begin{aligned}
\sum_{\lambda\in\mathcal{G}_1}\omega(\lambda)=&1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{B_{\mathcal{G}_1}(2n,2h-1)+B_{\mathcal{G}_1}(2n,2h)}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{B_{\mathcal{G}_1}(2n-1,2h-1)+B_{\mathcal{G}_1}(2n-1,2h)}{(ab;Q)_n(Q;Q)_{n-1}}.
\end{aligned}
$$

对于第一个双重求和，它统计所有此类偶数长度的分拆,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{B_{\mathcal{G}_1}(2n,2h-1)+B_{\mathcal{G}_1}(2n,2h)}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}\sum_{h=0}^{\infty}\left(Q^{\binom{n+1}{2}+\binom{h-n}{2}}a^nb^{h-n-1}\begin{bmatrix} n-1 \\ h-n-1\end{bmatrix}_Q\right.\\
&\left.+Q^{\binom{n+1}{2}+\binom{h-n}{2}}a^nb^{h-n}\begin{bmatrix} n-1 \\ h-n-1\end{bmatrix}_Q\right)\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q^{\binom{n+1}{2}}a^n(1+b)}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}\sum_{h=0}^{\infty}Q^{\binom{h+1}{2}}b^h\begin{bmatrix} n-1 \\ h\end{bmatrix}_Q\\
&\text{(By (2.3) with } z\to bQ \text{ and } q\to Q)\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q^{\binom{n+1}{2}}a^n(1+b)(-bQ;Q)_{n-1}}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q^{\binom{n+1}{2}}a^n(-b;Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}.
\end{aligned}
$$

以及 th　第二个双重求和对应所有此类奇数长度的分拆　　，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{B_{\mathcal{G}_1}(2n-1,2h-1)+B_{\mathcal{G}_1}(2n-1,2h)}{(ab;Q)_n(Q;Q)_{n-1}}\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(ab;Q)_n(Q;Q)_{n-1}}\sum_{h=0}^{\infty}\left(Q^{\binom{n}{2}+\binom{h-n+1}{2}}a^nb^{h-n}\begin{bmatrix}n-1\\h-n\end{bmatrix}_Q\right.\\
&\left.+Q^{\binom{n}{2}+\binom{h-n+1}{2}}a^nb^{h-n+1}\begin{bmatrix}n-1\\h-n\end{bmatrix}_Q\right)\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q^{\binom{n}{2}}a^n(1+b)}{(ab;Q)_n(Q;Q)_{n-1}}\sum_{h=0}^{\infty}Q^{\binom{h+1}{2}}b^h\begin{bmatrix}n-1\\h\end{bmatrix}_Q\\
&(\text{By (2.3) with } z\to bQ \text{ and } q\to Q)\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q^{\binom{n}{2}}a^n(1+b)(-bQ;Q)_{n-1}}{(ab;Q)_n(Q;Q)_{n-1}}\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q^{\binom{n}{2}}a^n(-b;Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_{n-1}}.
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
\sum_{\lambda\in\mathcal{G}_1}\omega(\lambda)=&1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q^{\binom{n+1}{2}}a^n(-b;Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q^{\binom{n}{2}}a^n(-b;Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_{n-1}}\\
=&1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q^{\binom{n}{2}}a^n(-b;Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_{n-1}}\left(\frac{Q^n}{1-Q^n}+1\right)\\
=&1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q^{\binom{n}{2}}a^n(-b;Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q^{\binom{n}{2}}a^n(-b;Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}.
\end{aligned}
$$

由此，我们证明了该定理的第一部分，即级数生成函数。令$a\to\infty$、 $b\to -b$、 $c\to ab$ 和 $q\to Q$ 见（2.4），乘积侧立即可得。证明完毕。

□

3.2 奇数位分量为偶数的严格分拆

$\mathcal{G}_2$的基记为 $B_{\mathcal{G}_2}$，由 $\mathcal{G}_2$ 中的满足 $1\le\lambda_i-\lambda_{i+1}\le 2$的分拆组成。令 $B_{\mathcal{G}_2}(n,\ h):=B_{\mathcal{G}_2}(a,\ b,\ c,\ d;n,\ h)$表示 $B_{\mathcal{G}_2}$ 中长度为 n且最大部分为 h的分拆的四参数生成函数。

定理 3.5. $B_{\mathcal{G}_2}(n,h)$ 的初始值为

$$
B_{\mathcal{G}_2}(0,h)=\begin{cases}1 & if\ h=0,\\ 0 & otherwise,\end{cases}
$$

and

$$B_{\mathcal{G}_2}(1,h)=\begin{cases} ab & \text{if } h=2,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

定理 3.6. $B_{\mathcal{G}_2}(n,h)$满足以下递推关系。

$$B_{\mathcal{G}_2}(n,2h)=abcQ^{h-1}B_{\mathcal{G}_1}(n-2,2h-2)+abQ^{h-1}B_{\mathcal{G}_1}(n-2,2h-4) \tag{3.7}$$

证明。 对于 $\mathcal{G}_2$中的分拆，最大部分只能是偶数，因此我们只需考虑$B_{\mathcal{G}_2}(n,2h)$。若最大部分为 $2h$，则次大部分可以是 $2h-1$ 或$2h-2$。因此，前两部分的权可以是 $abcQ^{h-1}$ 或 abQ^{h-1}。从分拆中删去这两部分后，在第一种情况下，所得分拆的长度为 $2n-2$ ，最大部分为 $2h-2$；在第二种情况下，所得分拆的长度为 $2n-2$ ，最大部分为 $2h-4$。这就解释了递推关系。 □

接下来，我们给出 $B_{\mathcal{G}_2}(n,h)$的闭形式。

定理3.7。 对于任意正整数 n 和 h,

$$B_{\mathcal{G}_2}(2n-1,2h)=Q^{\binom{n+1}{2}+\binom{h-n+1}{2}}c^{n-h-1}d^{-n}\begin{bmatrix}n-1\\ h-n\end{bmatrix}_Q \tag{3.8}$$

$$B_{\mathcal{G}_2}(2n,2h)=Q^{\binom{n+1}{2}+\binom{h-n+1}{2}}c^{n-h}d^{-n}\begin{bmatrix}n\\ h-n\end{bmatrix}_Q. \tag{3.9}$$

证明。 初始值很容易验证。对于递推关系，定义 e

$$R_{\mathcal{G}_2}(2n-1,2h):=Q^{\binom{n+1}{2}+\binom{h-n+1}{2}}c^{n-h-1}d^{-n}\begin{bmatrix}n-1\\ h-n\end{bmatrix}_Q,$$

then

$$\begin{aligned}R_{\mathcal{G}_2}(2n-1,2h)=&Q^{\binom{n+1}{2}+\binom{h-n+1}{2}}c^{n-h-1}d^{-n}\begin{bmatrix}n-1\\ h-n\end{bmatrix}_Q\\ =&Q^{\binom{n+1}{2}+\binom{h-n+1}{2}}c^{n-h-1}d^{-n}\left(Q^{h-n}\begin{bmatrix}n-2\\ h-n\end{bmatrix}_Q+\begin{bmatrix}n-2\\ h-n-1\end{bmatrix}_Q\right)\\ =&Q^{\binom{n}{2}+\binom{h-n+1}{2}+h}c^{n-h-1}d^{-n}\begin{bmatrix}n-2\\ h-n\end{bmatrix}_Q\\ &+Q^{\binom{n}{2}+\binom{h-n}{2}+h}c^{n-h-1}d^{-n}\begin{bmatrix}n-2\\ h-n-1\end{bmatrix}_Q\\ =&abcQ^{h-1}R_{\mathcal{G}_2}(2n-2,2h-2)+abQ^{h-1}R_{\mathcal{G}_2}(2n-2,2h-4).\end{aligned}$$

类似地，定义

$$R_{\mathcal{G}_2}(2n,2h):=Q^{\binom{n+1}{2}+\binom{h-n+1}{2}}c^{n-h}d^{-n}\begin{bmatrix}n\\ h-n\end{bmatrix}_Q,$$

then

$$R_{\mathcal{G}_2}(2n,2h)=Q^{\binom{n+1}{2}+\binom{h-n+1}{2}}c^{n-h}d^{-n}\begin{bmatrix}n\\ h-n\end{bmatrix}_Q$$

$$
\begin{aligned}
=&Q^{\binom{n+1}{2}+\binom{h-n+1}{2}}c^{n-h}d^{-n}\left(Q^{h-n}\begin{bmatrix}n-1\\h-n\end{bmatrix}_Q+\begin{bmatrix}n-1\\h-n-1\end{bmatrix}_Q\right)\\
=&Q^{\binom{n}{2}+\binom{h-n+1}{2}+h}c^{n-h}d^{-n}\begin{bmatrix}n-1\\h-n\end{bmatrix}_Q\\
&+Q^{\binom{n}{2}+\binom{h-n}{2}+h}c^{n-h}d^{-n}\begin{bmatrix}n-1\\h-n-1\end{bmatrix}_Q\\
=&abcQ^{h-1}R_{\mathcal{G}_2}(2n-2,2h-2)+abQ^{h-1}R_{\mathcal{G}_2}(2n-2,2h-4).
\end{aligned}
$$

我们完成证明。 □

现在，我们准备给出 $\mathcal{G}_2$的四参数恒等式。

定理 3.8. *$\mathcal{G}_2$ 的四参数生成函数由下式给出*

$$
\sum_{\lambda\in\mathcal{G}_2}\omega(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^{-n}Q^{\binom{n+1}{2}}(-c^{-1};Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}=\frac{(-abc;Q)_\infty}{(ab;Q)_\infty}.
$$

证明. 由定理2.4,

$$
\begin{aligned}
\sum_{\lambda\in\mathcal{G}_2}\omega(\lambda)=&1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{B_{\mathcal{G}_2}(2n,2h)}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{B_{\mathcal{G}_2}(2n-1,2h)}{(ab;Q)_n(Q;Q)_{n-1}}\\
=&1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}\sum_{h=0}^{\infty}Q^{\binom{n+1}{2}+\binom{h-n+1}{2}}c^{n-h}d^{-n}\begin{bmatrix}n\\h-n\end{bmatrix}_Q\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(ab;Q)_n(Q;Q)_{n-1}}\sum_{h=0}^{\infty}Q^{\binom{n+1}{2}+\binom{h-n+1}{2}}c^{n-h-1}d^{-n}\begin{bmatrix}n-1\\h-n\end{bmatrix}_Q\\
=&1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^{-n}Q^{\binom{n+1}{2}}}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}\sum_{h=0}^{\infty}Q^{\binom{h+1}{2}}c^{-h}\begin{bmatrix}n\\h\end{bmatrix}_Q\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^{-n}Q^{\binom{n+1}{2}}}{(ab;Q)_n(Q;Q)_{n-1}}\sum_{h=0}^{\infty}Q^{\binom{h+1}{2}}c^{-h-1}\begin{bmatrix}n-1\\h\end{bmatrix}_Q\\
&\text{(By (2.3) with } z\to c^{-1}Q \text{ and } q\to Q)\\
=&1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^{-n}Q^{\binom{n+1}{2}}(-Q/c;Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^{-1}d^{-n}Q^{\binom{n+1}{2}}(-Q/c;Q)_{n-1}}{(ab;Q)_n(Q;Q)_{n-1}}\\
=&1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^{-n}Q^{\binom{n+1}{2}}(-Q/c;Q)_{n-1}}{(ab;Q)_n(Q;Q)_{n-1}}\left(\frac{1+Q^n/c}{1-Q^n}+c^{-1}\right)\\
=&1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^{-n}Q^{\binom{n+1}{2}}(-c^{-1};Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^{-n}Q^{\binom{n+1}{2}}(-c^{-1};Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}.
\end{aligned}
$$

因此，我们得到了所需的生成函数级数形式。令 $a\to\infty$、 $b\to-c^{-1}$、$c\to ab$ 和 $q\to Q$ 满足 (2.4)，乘积侧便立即得出。至此，证明完成。 □

4 具有位置奇偶性的普通分拆

本节讨论具有位置奇偶性的普通分拆。回想一下， $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 分别表示偶数索引部分为偶数和奇数下标部分为偶数的普通分拆集合。它们都是模 2 的 SIP 类。我们将沿用第 3 节中的步骤：给出初始值和递推关系，求解递推关系，然后得出恒等式。

4.1 偶数索引部分为偶数的普通分拆

设 $\mathcal{B}_{\mathcal{P}_1}$ 是 $\mathcal{P}_1$ 的基，则 $\mathcal{B}_{\mathcal{P}_1}$ 由 $\mathcal{P}_1$ 中满足 $0 \leq \lambda_i - \lambda_{i+1} \leq 1$ 的分拆组成。设 $B_{\mathcal{P}_1}(n,h) := B_{\mathcal{P}_1}(a,b,c,d;n,h)$ 为 $\mathcal{B}_{\mathcal{P}_1}$ 中长度为 n 且最大部分为 h 的分拆的四参数生成函数。

定理 4.1。 $B_{\mathcal{P}_1}(n,h)$ 的初始值为

$$B_{\mathcal{P}_2}(0,h) = \begin{cases} 1 & \text{if } h = 0, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

and

$$B_{\mathcal{P}_2}(1,h) = \begin{cases} a & \text{if } h = 1, \\ ab & \text{if } h = 2, \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

定理 4.2。 对于任意正整数 n 和 h,

$$B_{\mathcal{P}_1}(n,2h-1) = aB_{\mathcal{P}_1}(n,2h-2), \tag{4.1}$$

$$B_{\mathcal{P}_1}(n,2h) = Q^h B_{\mathcal{P}_1}(n-2,2h) + Q^h B_{\mathcal{P}_1}(n-2,2h-1). \tag{4.2}$$

将它们合并，得到

$$B_{\mathcal{P}_1}(n,2h) = Q^h B_{\mathcal{P}_1}(n-2,2h) + aQ^h B_{\mathcal{P}_1}(n-2,2h-2). \tag{4.3}$$

证明。 证明过程与定理 3.2 类似，因此这里略去。 . □

定理 4.3. 对于任意正整数 n 和 h,

$$B_{\mathcal{P}_1}(2n,2h) = a^{h-1}Q^{\binom{h}{2}+n}\begin{bmatrix} n-1 \\ h-1 \end{bmatrix}_Q, \tag{4.4}$$

$$B_{\mathcal{P}_1}(2n+1,2h) = (1+b)a^h Q^{\binom{h}{2}+n}\begin{bmatrix} n-1 \\ h-1 \end{bmatrix}_Q, \tag{4.5}$$

$$B_{\mathcal{P}_1}(2n,2h-1) = a^{h-1}Q^{\binom{h-1}{2}+n}\begin{bmatrix} n-1 \\ h-2 \end{bmatrix}_Q, \tag{4.6}$$

$$B_{\mathcal{P}_1}(2n+1,2h-1) = (1+b)a^h Q^{\binom{h-1}{2}+n}\begin{bmatrix} n-1 \\ h-2 \end{bmatrix}_Q. \tag{4.7}$$

证明. 设 $R_{\mathcal{P}_1}(2n,2h)$ 和 $R_{\mathcal{P}_1}(2n+1,2h)$ 分别为 (4.4) 和 (4.5) 的右端。则

$$\begin{aligned}
R_{\mathcal{P}_1}(2n,2h) =& a^{h-1}Q^{\binom{h}{2}+n}\begin{bmatrix} n-1 \\ h-1 \end{bmatrix}_Q \\
=& a^{h-1}Q^{\binom{h}{2}+n}\left(Q^{h-1}\begin{bmatrix} n-2 \\ h-1 \end{bmatrix}_Q + \begin{bmatrix} n-2 \\ h-2 \end{bmatrix}_Q\right) \quad \text{(by (2.5))} \\
=& a^{h-1}Q^{h+\binom{h}{2}+n-1}\begin{bmatrix} n-2 \\ h-1 \end{bmatrix}_Q + a^{h-1}Q^{h+\binom{h-1}{2}+n-1}\begin{bmatrix} n-2 \\ h-2 \end{bmatrix}_Q \\
=& Q^h R_{\mathcal{P}_1}(2n-2,2h) + aQ^h R_{\mathcal{P}_1}(2n-2,2h-2)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
R_{\mathcal{P}_1}(2n+1,2h) =& (1+b)a^hQ^{\binom{h}{2}+n}\begin{bmatrix} n-1 \\ h-1 \end{bmatrix}_Q \\
=& (1+b)a^hQ^{\binom{h}{2}+n}\left(Q^{h-1}\begin{bmatrix} n-2 \\ h-1 \end{bmatrix}_Q + \begin{bmatrix} n-2 \\ h-2 \end{bmatrix}_Q\right) \quad \text{(by (2.5))} \\
=& (1+b)a^hQ^{h+\binom{h}{2}+n-1}\begin{bmatrix} n-2 \\ h-1 \end{bmatrix}_Q + (1+b)a^hQ^{h+\binom{h-1}{2}+n-1}\begin{bmatrix} n-2 \\ h-2 \end{bmatrix}_Q \\
=& Q^h R_{\mathcal{P}_1}(2n-1,2h) + aQ^h R_{\mathcal{P}_1}(2n-1,2h-2).
\end{aligned}$$

因此它们满足所需的 (4.3)。注意，(4.6) 和 (4.7) 可由 (4.1) 推出。初始值很容易验证，至此证明完毕。 □

定理 4.4。 $\mathcal{P}_1$ 的四参数生成函数为

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_1}\omega(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q^n(-aQ^{-1};Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{abQ^n(-a;Q)_n}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n} = \frac{(-a;Q)_\infty}{(ab;Q)_\infty(Q;Q)_\infty}.$$

证明。 注意

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_1}\omega(\lambda) =& 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{B_{\mathcal{P}_1}(2n,2h)+B_{\mathcal{P}_1}(2n,2h+1)}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n} \\
&+ \frac{a(1+b)}{1-ab} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{B_{\mathcal{P}_1}(2n+1,2h)+B_{\mathcal{P}_1}(2n+1,2h+1)}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n}.
\end{aligned}$$

现在，由于

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{B_{\mathcal{P}_1}(2n,2h)+B_{\mathcal{P}_1}(2n,2h+1)}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n} \\
=& \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}\sum_{h=0}^{\infty}\left(a^{h-1}Q^{\binom{h}{2}+n}\begin{bmatrix} n-1 \\ h-1 \end{bmatrix}_Q + a^hQ^{\binom{h}{2}+n}\begin{bmatrix} n-1 \\ h-1 \end{bmatrix}_Q\right) \\
=& \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+a)Q^n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}\sum_{h=0}^{\infty}a^{h-1}Q^{\binom{h}{2}}\begin{bmatrix} n-1 \\ h-1 \end{bmatrix}_Q
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\text{(By (2.3) with } z \to aQ \text{ and } q \to Q) \\
=&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^n(-a;Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} \frac{B_{\mathcal{P}_1}(2n+1,2h)+B_{\mathcal{P}_1}(2n+1,2h+1)}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n} \\
=&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n} \sum_{h=0}^{\infty} \left((1+b)a^h Q^{\binom{h}{2}+n} \begin{bmatrix} n-1 \\ h-1 \end{bmatrix}_Q + (1+b)a^{h+1} Q^{\binom{h}{2}+n} \begin{bmatrix} n-1 \\ h-1 \end{bmatrix}_Q \right) \\
=&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+a)(1+b)Q^n}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n} \sum_{h=0}^{\infty} a^h Q^{\binom{h}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ h-1 \end{bmatrix}_Q \\
&\text{(By (2.3) with } z \to aQ \text{ and } q \to Q) \\
=&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{aQ^n(1+b)(-a;Q)_n}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n},
\end{aligned}
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_1} \omega(\lambda) =&1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^n(-a;Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n} + \frac{a(1+b)}{1-ab} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{aQ^n(1+b)(-a;Q)_n}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n} \\
=&1+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^{n+1}(-a;Q)_{n+1}}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{aQ^n(1+b)(-a;Q)_n}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n} \\
=&1+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^{n+1}(-a;Q)_{n+1}}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{aQ^n(-a;Q)_n}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{abQ^n(-a;Q)_n}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n} \\
=&1+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^n(-a;Q)_n}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n} \left(\frac{Q(1+aQ^n)}{1-Q^{n+1}} + a \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{abQ^n(-a;Q)_n}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n} \\
=&1+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^n(-a;Q)_n}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n} \left(\frac{a+Q}{1-Q^{n+1}} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{abQ^n(-a;Q)_n}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n} \\
=&1+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^{n+1}(-aQ^{-1};Q)_{n+1}}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{abQ^n(-a;Q)_n}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n} \\
=&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^n(-aQ^{-1};Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{abQ^n(-a;Q)_n}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n}.
\end{aligned}
$$

这样，我们就得到了生成函数的级数表达式。接下来建立乘积侧。对于任意整数 $N \geq 0$，令

$$
F_1(N) := \sum_{n=0}^{N} \frac{Q^n(-aQ^{-1};Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n} + \sum_{n=0}^{N} \frac{abQ^n(-a;Q)_n}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n}
$$

and

$$
T_1(N) := \frac{(-a;Q)_N}{(ab;Q)_{N+1}(Q;Q)_N}.
$$

很容易看出

$$F_1(0) = 1 + \frac{ab}{1-ab} = \frac{1}{1-ab} = T_1(0).$$

注意到

$$\begin{aligned}
&T_1(N+1) - T_1(N)\\
=&\frac{(-a;Q)_{N+1}}{(ab;Q)_{N+2}(Q;Q)_{N+1}} - \frac{(-a;Q)_N}{(ab;Q)_{N+1}(Q;Q)_N}\\
=&\frac{(-a;Q)_N}{(ab;Q)_{N+1}(Q;Q)_N}\left(\frac{1+aQ^N}{(1-abQ^{N+1})(1-Q^{N+1})} - 1\right)\\
=&\frac{(-a;Q)_N}{(ab;Q)_{N+1}(Q;Q)_N} \times \frac{aQ^N + Q^{N+1} + abQ^{N+1} - abQ^{2N+2}}{(1-abQ^{N+1})(1-Q^{N+1})}\\
=&\frac{(-a;Q)_N}{(ab;Q)_{N+1}(Q;Q)_N} \times \frac{aQ^N + Q^{N+1} + abQ^{N+1} - abQ^{2N+2} + a^2bQ^{2N+1} - a^2bQ^{2N+1}}{(1-abQ^{N+1})(1-Q^{N+1})}\\
=&\frac{(-a;Q)_N}{(ab;Q)_{N+1}(Q;Q)_N} \times \frac{Q^{N+1}(1+aQ^{-1})(1-abQ^{N+1}) + abQ^{N+1}(1+aQ^N)}{(1-abQ^{N+1})(1-Q^{N+1})}\\
=&\frac{Q^{N+1}(-aQ^{-1};Q)_{N+1}}{(ab;Q)_{N+1}(Q;Q)_{N+1}} + \frac{abQ^{N+1}(-a;Q)_{N+1}}{(ab;Q)_{N+2}(Q;Q)_{N+1}}\\
=&F_1(N+1) - F_1(N).
\end{aligned}$$

因此，我们通过归纳法证明了对于所有 $N \geq 0$， $F_1(N) = T_1(N)$。令 $N \to \infty$，证明即告完成。 □

4.2 奇数下标部分为偶数的普通分拆

显然， $\mathcal{P}_2$ 的基记为 $\mathcal{B}_{\mathcal{P}_2}$，由 $\mathcal{P}_2$ 中所有满足 $0 \leq \lambda_i - \lambda_{i+1} \leq 1$ 的分拆组成。令 $B_{\mathcal{P}_2}(n,h) = B_{\mathcal{P}_2}(a,b,c,d;n,h)$ 为 $\mathcal{B}_{\mathcal{P}_2}$ 中长度为 n 且最大部分为 h 的分拆的四参数生成函数。

定理 4.5. $B_{\mathcal{P}_2}(n,h)$ 的初始值为

$$B_{\mathcal{P}_2}(0,h) = \begin{cases} 1 & \text{if } h = 0,\\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and

$$B_{\mathcal{P}_2}(1,h) = \begin{cases} ab & \text{if } h = 2,\\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定理 4.6. 对于任意正整数 n 和 h，有

$$B_{\mathcal{P}_2}(n,2h) = Q^h B_{\mathcal{P}_2}(n-2,2h) + d^{-1}Q^h B_{\mathcal{P}_2}(n-2,2h-2). \tag{4.8}$$

证明。 证明过程与定理 3.6 类似，因此此处略去。 □

定理 4.7。 对于任意正整数 n 和 h,

$$B_{\mathcal{P}_2}(2n,2h)=Q^{\binom{h}{2}+n}(1+d^{-1})d^{1-h}\begin{bmatrix}n-1\\h-1\end{bmatrix}_Q, \tag{4.9}$$

$$B_{\mathcal{P}_2}(2n-1,2h)=abQ^{\binom{h}{2}+n-1}d^{1-h}\begin{bmatrix}n-1\\h-1\end{bmatrix}_Q. \tag{4.10}$$

证明。 初始值显然容易验证。只需证明它们满足式 (4.8) 中的递推关系。分别用 $R_{\mathcal{P}_2}(2n,\ 2h)$ 和 $R_{\mathcal{P}_2}(2n-1,\ 2h)$ 表示式 (4.9) 和 (4.10) 的右端，则

$$\begin{aligned}
R_{\mathcal{P}_2}(2n,2h)=&Q^{\binom{h}{2}+n}(1+d^{-1})d^{1-h}\begin{bmatrix}n-1\\h-1\end{bmatrix}_Q\\
=&Q^{\binom{h}{2}+n}(1+d^{-1})d^{1-h}\left(Q^{h-1}\begin{bmatrix}n-2\\h-1\end{bmatrix}_Q+\begin{bmatrix}n-2\\h-2\end{bmatrix}_Q\right)\quad\text{(by (2.5))}\\
=&Q^{h+\binom{h}{2}+n-1}(1+d^{-1})d^{1-h}\begin{bmatrix}n-2\\h-1\end{bmatrix}_Q\\
&+d^{-1}Q^{h+\binom{h-1}{2}+n-1}(1+d^{-1})d^{2-h}\begin{bmatrix}n-2\\h-1\end{bmatrix}_Q\\
=&Q^hR_{\mathcal{P}_2}(2n-2,2h)+d^{-1}Q^hR_{\mathcal{P}_2}(2n-2,2h-2)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
R_{\mathcal{P}_2}(2n-1,2h)=&abQ^{\binom{h}{2}+n-1}d^{1-h}\begin{bmatrix}n-1\\h-1\end{bmatrix}_Q\\
=&abQ^{\binom{h}{2}+n-1}d^{1-h}\left(Q^{h-1}\begin{bmatrix}n-2\\h-1\end{bmatrix}_Q+\begin{bmatrix}n-2\\h-2\end{bmatrix}_Q\right)\quad\text{(by (2.5))}\\
=&abQ^{h+\binom{h}{2}+n-2}d^{1-h}\begin{bmatrix}n-2\\h-1\end{bmatrix}_Q\\
&+abd^{-1}Q^{h+\binom{h-1}{2}+n-2}d^{2-h}\begin{bmatrix}n-2\\h-1\end{bmatrix}_Q\\
=&Q^hR_{\mathcal{P}_2}(2n-3,2h)+d^{-1}Q^hR_{\mathcal{P}_2}(2n-3,2h-2).
\end{aligned}$$

初始值很容易验证，因此证明完成。 □

定理 4.8。 $\mathcal{P}_2$ 的四参数生成函数为

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_2}\omega(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q^n(-1/d;Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{abQ^n(-Q/d;Q)_n}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n}=\frac{(-Q/d;Q)_\infty}{(ab;Q)_\infty(Q;Q)_\infty}.$$

证明。 注意到

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_2}\omega(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{B_{\mathcal{P}_2}(2n,2h)}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{B_{\mathcal{P}_1}(2n+1,2h)}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n}$$

$$
\begin{aligned}
=&1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+d^{-1})Q^n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}\sum_{h=0}^{\infty}Q^{\binom{h}{2}}d^{1-h}\begin{bmatrix}n-1\\h-1\end{bmatrix}_Q\\
&+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{abQ^n}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n}\sum_{h=0}^{\infty}Q^{\binom{h}{2}}d^{1-h}\begin{bmatrix}n\\h-1\end{bmatrix}_Q\\
&\text{(By (2.3) with } z\to d^{-1}Q \text{ and } q\to Q)\\
=&1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+d^{-1})Q^n(-Q/d;Q)_{n-1}}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{abQ^n(-Q/d;Q)_n}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n}\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q^n(-1/d;Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{abQ^n(-Q/d;Q)_n}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n}.
\end{aligned}
$$

因此我们 证明了生成函数的级数表达式。对于乘积侧， t
p

$$
F_2(N):=\sum_{n=0}^{N}\frac{Q^n(-1/d;Q)_n}{(ab;Q)_n(Q;Q)_n}+\sum_{n=0}^{N}\frac{abQ^n(-Q/d;Q)_n}{(ab;Q)_{n+1}(Q;Q)_n}
$$

and

$$
T_2(N):=\frac{(-Q/d;Q)_N}{(ab;Q)_{N+1}(Q;Q)_N}.
$$

显然可以看出

$$
F_2(0)=1+\frac{ab}{1-ab}=\frac{1}{1-ab}=T_2(0).
$$

注意

$$
\begin{aligned}
T_2(N+1)-T_2(N)=&\frac{(-Q/d;Q)_{N+1}}{(ab;Q)_{N+2}(Q;Q)_{N+1}}-\frac{(-Q/d;Q)_N}{(ab;Q)_{N+1}(Q;Q)_N}\\
=&\frac{(-Q/d;Q)_N}{(ab;Q)_{N+1}(Q;Q)_N}\left(\frac{1+Q^{N+1}/d}{(1-abQ^{N+1})(1-Q^{N+1})}-1\right)\\
=&\frac{(-Q/d;Q)_N}{(ab;Q)_{N+1}(Q;Q)_N}\left(\frac{Q^{N+1}(1+1/d)}{(1-Q^{N+1})}+\frac{abQ^{N+1}(1+Q^{N+1}/d)}{(1-abQ^{N+1})(1-Q^{N+1})}\right)\\
=&\frac{Q^{N+1}(-1/d;Q)_{N+1}}{(ab;Q)_{N+1}(Q;Q)_{N+1}}+\frac{abQ^{N+1}(-Q/d;Q)_{N+1}}{(ab;Q)_{N+2}(Q;Q)_{N+1}}\\
=&F_2(N+1)-F_2(N).
\end{aligned}
$$

通过归纳法，对于所有 $N\geq 0$，我们有 $F_2(N)=T_2(N)$。令 $N\to\infty$，证明完成。 □

5 结论

我们已将具有位置奇偶条件的分拆作为例子，而根据我们发现的四参数恒等式，定理 1.1 与定理 1.2 的统一便可立即得出。

定理 5.1。

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{G}_1} x^{o(\lambda)}z^{a(\lambda)}q^{|\lambda|}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n z^n q^{2n^2-n}(-zq/x;q^4)_n}{(z^2q^2;q^4)_n(q^4;q^4)_n}=\frac{(-xzq;q^4)_\infty}{(z^2q^2;q^4)_\infty}, \tag{5.1}$$

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{G}_2} x^{o(\lambda)}z^{a(\lambda)q^{|\lambda|}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n z^n q^{2n^2+n}(-zq^{-1}/x;q^4)_n}{(z^2q^2;q^4)_n(q^4;q^4)_n}=\frac{(-xzq^3;q^4)_\infty}{(z^2q^2;q^4)_\infty}. \tag{5.2}$$

证明。分别令定理 3.4 和定理 3.8 中的 $a\to xzq$、 $b\to zq/x$、 $c\to xq/z$ 和 $d\to q/xz$ 。于是得到所需的恒等式。 □

采用相同的代换，我们还可以得到以下由定理 4.4 和定理 4.8 推导出的恒等式。

定理 5.2。

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_1} x^{o(\lambda)}z^{a(\lambda)}q^{|\lambda|}=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{4n}(-xzq^{-3};q^4)_n}{(z^2q^2;q^4)_n(q^4;q^4)_n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^2q^{4n+2}(-xzq;q^4)_n}{(z^2q^2;q^4)_{n+1}(q^4;q^4)_n}\\ =&\frac{(-zxq;q^4)_\infty}{(z^2q^2;q^4)_\infty(q^4;q^4)_\infty},\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_2} x^{o(\lambda)}z^{a(\lambda)}q^{|\lambda|}=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{4n}(-xz/q;q^4)_n}{(z^2q^2;q^4)_n(q^4;q^4)_n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^2q^{4n}(-xzq^3;Q)_n}{(z^2q^2;q^4)_{n+1}(q^4;q^4)_n}\\ =&\frac{(-xzq^3;q^4)_\infty}{(z^2q^2;q^4)_\infty(q^4;q^4)_\infty}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

本文旨在拓展 SIP 类的思想，并提供一种研究分拆的四参数权重的统一方法。这种权重已受到诸多研究，参见例如 [8,9,16] 。在 [9]，中，作者利用四参数权重研究分拆的 BG-秩；该概念最初由 Berkovich 和 Garvan 在 [5] 中提出。给定一个分拆 λ， λ 的 BG-秩记作 BG(λ)，其值为奇数下标的奇部件的数量减去偶数下标的奇部件的数量。这一统计量具有丰富的性质，并有一个有趣的推广，称为 GBG 秩，示例参见 [4,6,7,12] 。利用我们的四参数恒等式，还可以给出以下生成函数。

定理 5.3。

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{G}_1} z^{BG(\lambda)}q^{|\lambda|}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n q^{2n^2-n}(-zq;q^4)_n}{(q^2;q^2)_{2n}}=\frac{(-zq;q^4)_\infty}{(q^2;q^4)_\infty}, \tag{5.5}$$

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{G}_2} z^{BG(\lambda)}q^{|\lambda|}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n} q^{2n^2+n}(-zq^{-1};q^4)_n}{(q^2;q^2)_{2n}}=\frac{(-q^3/z;q^4)_\infty}{(q^2;q^4)_\infty}. \tag{5.6}$$

证明。 令定理 3.4 和定理 3.8 中的 $a\to zq$、 $b\to q/z$、 $c\to q/z$ 和 $d\to zq$ ，即可立即得到这些结果。 □

定理 5.4。

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_1} z^{BG(\lambda)}q^{|\lambda|}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{4n}(-zq^{-3};q^4)_n}{(q^2;q^2)_{2n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{4n+2}(-zq;q^4)_n}{(q^2;q^2)_{2n+1}}=\frac{(-zq;q^4)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}, \tag{5.7}$$

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_2} z^{BG(\lambda)}q^{|\lambda|}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{4n}(-z^{-1}q^{-1};q^4)_n}{(q^2;q^2)_{2n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{4n+2}(-z^{-1}q^3;Q)_n}{(q^2;q^2)_{2n+1}}=\frac{(-z^{-1}q^3;q^4)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}. \tag{5.8}$$

证明。 将定理 4.4 和定理 4.8 中的 $a\to zq$、 $b\to q/z$、 $c\to q/z$ 和 $d\to zq$ 代入，即完成证明。 □

近年来，关于 SIP 类有了一些新的发现，更多详情请参见 [11,17] 。探寻他们工作中 SIP 类的四参数扩展将会很有趣。此外，我们提到，Boulet 在 [10] 中为所有分拆和所有严格分拆的集合提供了四参数生成函数的乘积形式。在 [9], 中，作者通过关于最大部分的递推关系给出了级数形式。我们也很想知道通过 SIP 类能够得到何种生成函数。

参考文献

[1] G. E. Andrews，《分拆理论》，剑桥大学出版社（1998）。[2] G. E. Andrews，论 *Richard Stanley* 的一个分拆函数，《电子组合学杂志》，**11(2)**（2004–6）（Stanley 纪念文集卷）。[3] G. E. Andrews，可分整数分拆类，《美国数学会汇刊 B 辑》，**9**（2022），619–647。[4] A. Berkovich 和 A. Dhar，关于具有有界最大部分且模素数固定整数 *GBG* 秩的分拆，《组合年刊》29（2025），第 4 期，1063–1076。[5] A. Berkovich 和 F. Garvan，关于 *Ramanujan* 模 *5* 分拆同余的 *Andrews-Stanley* 精细化及其推广，《美国数学会汇刊》358（2006），第 2 期，703–726。[6] A. Berkovich 和 F. Garvan，分拆的 *BG*-秩及其应用，《应用数学进展》40（2008），第 3 期，377–400。[7] A. Berkovich 和 F. Garvan，*GBG* 秩与 t-核 I：计数与 4-核，《组合数论杂志》1（2009），第 3 期，237–252。[8] A. Berkovich 和 A. K. Uncu，关于 *Schmidt* 问题及其变体的有限类比，《洛塔尔组合学研讨会》88（[2023–2024]），文章 B88b，共 18 页。[9] A. Berkovich 和 A. K. Uncu，关于偶下标奇部件和奇下标奇部件数量固定的分拆，《数论杂志》，**167**（2016），7–30。[10] C. E. Boulet，一个四参数分拆恒等式，《拉马努金杂志》，**12**（2006），315–320。

[11] Y. H. Chen、T. Y. He、F. Tang 和 J.J. Wei，若干可分整数分拆类，《国际数论杂志》20（2024），第 5 期，1353–1371。[12] H. Cho、E. Kim、H-H.Lee、K.Lee、A. J.Yee 和 J. Yoo，普通、自共轭和加倍互异分拆的 *GBG*-秩生成函数，《拉马努金杂志》68（2025），第 4 期，论文编号 94，共 21 页。[13] G. Gasper 和 M. Rahman，基本超几何级数，剑桥大学出版社（2009）。[14] R. Li，分拆分析与新的小 *G ¨ollnitz* 恒等式，arXiv:2510.23233[15] S. D. Savage 和 A. V. Sills，关于 *Gessel* 和 *Stanton* 的一个恒等式以及新的小 *G ¨ollnitz* 恒等式，《应用数学进展》，**46**（2011），563–575。[16] S. Fu 和 J. Zeng，一种统一的组合方法，用于精细化的小 *G ¨ollnitz* 恒等式及 *Cap- parelli* 的伴随恒等式，《离散数学》343（2020），第 2 期，111650，共 8 页。[17] T. Y. He、C. S. Huang、H. X. Li 和 X. Zhang，可分整数分拆类与满足同余条件的分拆，《拉马努金杂志》67（2025），第 2 期，论文编号 36，共 18 页。