arXiv:2603.02589v1 [math.AP] 3 Mar 2026

跳跃噪声驱动的线性阻尼 KdV 方程的适定性及不变测度的存在性

Krutika Tawri[1], Roger Temam[2], 和 Xinwu Yang[2]

Abstract. 本文研究一维环面 $\mathbb{T}$ 上受乘性 L´évy 噪声扰动的线性阻尼 KdV 方程。对于任意阻尼系数 $\gamma > 0$，我们证明存在唯一的逐路径弱解，其取值于 $H^2(\mathbb{T})$。

本文第二部分分析这些解的长期行为。由于时间上的跳跃可能显著影响渐近行为，这项研究尤其微妙。我们运用 Maslowski 和 Seidler 的技巧证明，只要摩擦阻尼系数 $\gamma > 0$ 足够大，受平方可积跳跃影响的系统便在 $H^2(\mathbb{T})$中存在不变测度。

1. Introduction

本文研究由 L´évy 噪声驱动的线性阻尼 Korteweg-de Vries（KdV）方程。该 KdV 系统描述一维周期区域 $\mathbb{T}$ 上的浅水波传播，其形式如下：

$$\begin{cases} du(t) + (\partial_x^3 u(t) + u(t)\partial_x u(t) + \gamma u(t))dt \\ \qquad\qquad = G(u(t-))dW(t) + \int_{E_0} K(u(t-),\xi)d\widehat{\pi}(t,\xi) + \int_{E\setminus E_0} \mathscr{K}(u(t-),\xi)d\pi(t,\xi), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，未知函数 u 描述波的位移。我们假设阻尼系数 γ 是严格正的常数。等式右端的随机积分代表 L´évy 噪声的不同影响：项 $G(u)dW$ 使系统随时间连续演化，而另外两项 $\int_{E_0} K(u(t-)\ \xi)d\widehat{\pi}(t,\ \xi)$ 和 $\int_{E\setminus E_0} \mathscr{K}(u(t-)\ \xi)d\pi(t,\ \xi)$ 则以离散脉冲的形式作用于系统。

KdV 方程最初被推导出来，作为描述通道中单向弱非线性波传播的理想模型。在现实环境中，波可能与非均匀介质相互作用。因此，考虑能量耗散和外部激励是很自然的。为此，我们可以考虑由线性阻尼项引起的摩擦耗散效应，以及由随机外力描述的噪声环境效应；后者可解释为弱非线性色散波传播所经介质中的随机涨落（例如，参见 [7, 25, 39]）。这种涨落未必完全是高斯型的，因为介质中可能存在间歇性或脉冲式扰动。为描述此类效应，我们用 L´évy 噪声来模拟外部激励。Lévy 噪声通过允许跳跃和扰动作用于波，从而推广了维纳噪声。

本研究的目标有两个：

(1) 我们证明方程 (1.1) 的逐路径弱解在全局时间范围内存在且唯一；(2) 我们证明方程 $(1.1)_1$ 在 $\mathscr{K} = 0$ 下的动力系统存在不变测度。

在阐述数学框架并陈述主要定理之前，我们先简要回顾这一方向的现有文献。许多研究聚焦于整个实数轴或周期区域上确定性 KdV 方程及其变体的适定性；例如参见 [3, 4, 5, 8, 28, 29, 38, 40]。与（1.1）相应的阻尼确定性系统的长期行为也已得到充分研究，例如见 [20] 和 [31], ，其中分别证明了全局吸引子的存在性及其正则性。

关于确定性 KdV 方程的全局吸引子，详细讨论请参阅 [41,第四章第 7] 节。对于高斯噪声作用下随机 KdV 方程的研究也已相当广泛。在 [14], 中，研究了实数轴上的无阻尼系统（即 $\gamma = 0$）在加性和乘性维纳噪声（$K = \mathscr{K} = 0$）作用下的情形：对于H^1（$\mathbb{R}$）值的加性噪声，在 H^1（$\mathbb{R}$）中证明了全局路径适定性；而对于乘性噪声，则仅在 L^2（$\mathbb{R}$）中证明了鞅解的存在性。在 [15], 中，研究了由 $\mathbb{T}$上的局部化时空白噪声驱动的无阻尼 KdV 系统，作者证明了存在取值于H^s（$\mathbb{T}$）的局部时间唯一的路径解，适用于 $-5/8 < s \leq 0$。此外，在同一篇研究中，还证明了当噪声取值于 L^2（$\mathbb{T}$）时，该系统在 L^2（$\mathbb{T}$）中的全局适定性。在 [16], 中，研究了环面上的无阻尼 KdV 方程在加性、时间白且“空间近似白”的噪声作用下的情形。在 [21], 中，研究了加性维纳噪声驱动的阻尼随机 KdV 方程，该噪声时间白且空间光滑；并证明了对所有 $m \geq 2$，系统在 H^m（$\mathbb{T}$）中具有全局路径适定性。除了适定性之外，若干研究还考察了空间光滑的加性维纳噪声驱动的阻尼随机 KdV 方程的长期统计行为。在 [18]中，证明了当 $K = \mathscr{K} = 0$时，（1.1）所描述的动力学在相空间 H^1（$\mathbb{R}$）中的不变测度存在；而在周期情形下， [21], 给出了 $m \geq 2$ 在 H^m（$\mathbb{T}$）中的不变测度的存在性与唯一性，其中不变测度的唯一性是通过渐近耦合策略证明的，该策略最初在 [22]等早期研究中提出。据我们所知，这是首篇研究 L´évy 噪声驱动的阻尼 KdV 方程的适定性及不变测度存在性的工作。

我们的主要结果是定理3.1 和定理3.2：

- 在定理3.1中，我们证明了方程（1.1）对于一般的 L´évy 噪声具有逐路径解的存在性与唯一性。为了证明定理3.1，我们首先考虑一个忽略大跳跃影响的简化系统，即在（ $\mathscr{K} = 0$ 中令1.1）。我们证明了该简化系统的适定性（见定义3），然后利用标准的“拼接”论证重新加入噪声项。受确定性研究 [40, 41],及其随机扩展 [14, 21],的启发，我们采用抛物正则化技术和 Galerkin 近似来证明定理3.1。

- 在定理3.2 中，我们证明了相空间 H^2（$\mathbb{T}$）中不变测度的存在性，该测度对应于系统（1.1），其中阻尼参数足够大 $\gamma > 0$，并且假设噪声平方可积（即 $\mathscr{K} = 0$）。我们关于不变测度存在性的证明基于 Maslowski 和 Seidler 的经典方法 [30]；这些方法此前也已被用于多项研究中（例如见 [6, 37]及其中的参考文献）。

本文结构安排如下：第2节介绍数学框架，以及方程右端（3.1）中随机项所满足的假设。第3节陈述本文的主要结果。第4.1节针对以正则化系数 $\epsilon > 0$表示的正则化系统，构造 Galerkin 近似。此外，我们采用标准截断函数截断所有非线性项。我们得到逼近方程解的概率分布的先验估计和紧性。随后应用 Skorohod 表示定理，构造一个具有相同分布的序列，该序列在（可能是）新的概率空间上几乎必然收敛，并通过取极限得到正则化方程（4.1）的全局鞅解。极限过程如下：第4.4节中，我们依次令 Galerkin 近似、截断参数 $N \to \infty$ 以及正则化系数 $\epsilon \to 0$趋于极限。第4.5节证明解的路径唯一性。借助 Gy¨ongy 和 Krylov [24], 提出的著名论证（该论证将经典的 Yamada–Watanabe 定理推广到无限维情形），我们得出方程（3.1）存在唯一的逐路径解。第5节中，我们考虑

平方可积的 L´évy 噪声，并取足够大的阻尼系数 $\gamma > 0$，利用 Maslowski-Seidler 定理证明不变测度的存在性 [30]。

2. 数学框架

本节介绍必要的记号和定义。首先，我们定义分析所需的适当函数空间。我们用 $\mathbb{T}$ 表示一维环面。然后，对于任意 $s \in \mathbb{R}$，定义如下：

$$H^s(\mathbb{T}) := \left\{ v \in L^2(\mathbb{T}) : \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+|n|^2)^s |\widehat{v}(n)|^2 < \infty \right\}, \tag{2.1}$$

其中，$\widehat{v}(n)$ 是 v 的傅里叶变换，定义为

$$\widehat{v}(n) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{T}} e^{-inx} v(x)\,dx. \tag{2.2}$$

希尔伯特空间 $H^s(\mathbb{T})$ 在 (2.1) 中定义，并赋予内积

$$\langle v_1, v_2 \rangle_{H^s(\mathbb{T})} := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+|n|^2)^s \widehat{v_1}(n)\overline{\widehat{v_2}(n)}, \quad v_1, v_2 \in H^s(\mathbb{T}).$$

对于任意 $m \in \mathbb{N}$ 和 $v \in H^m(\mathbb{T})$，由傅里叶变换的定义 (2.2) 可得

$$\widehat{\partial_x^k v}(n) = (in)^k \widehat{v}(n), \quad k \le m. \tag{2.3}$$

由 (2.3)、帕塞瓦尔恒等式，以及存在常数 $c = c(m) > 0$ 使得

$$1 + |n|^{2m} \le (1+|n|^2)^m \le c(1+|n|^{2m}),$$

我们得到以下范数等价关系：

$$|v|_{H^m(\mathbb{T})} \sim |v|_{L^2(\mathbb{T})} + |\partial_x^m v|_{L^2(\mathbb{T})}, \quad v \in H^m(\mathbb{T}). \tag{2.4}$$

有时，我们会省略 $\mathbb{T}$，将范数记号 $|\cdot|_{H^s(\mathbb{T})}$ 简写为。

给定一个希尔伯特空间 V，记 $\mathcal{D}([0,T];V)$ 为从 $[0,T]$ 到 V的 càdlàg 函数集合，即右连续且存在左极限的函数。斯科罗霍德空间 $\mathcal{D}([0,T];V)$ 赋予所谓的 Skorohod 拓扑，该拓扑可分且可度量化；更多详情请参见 [2]。

接下来，我们将描述 (1.1) 右端出现的随机项，并在接下来的注释中解释我们作出这些假设的动机（见注释 2.1）。考虑一个可分实希尔伯特空间 U。设 E 为一个可分完备度量空间，其上带有博雷尔 σ-域 $\mathcal{E}$和测度 ν，该测度在 E的有界博雷尔子集上有限。

定义 1. 随机基是一个多元组 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge0}, \mathbb{P}, W, \pi)$，由一个滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge0}, \mathbb{P})$、一个维纳过程 W和一个泊松测度 π组成，并满足以下性质。滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ 满足“通常”条件；也就是说，$\mathcal{F}_0$ 是完备的，且对任意 $t \ge 0$，$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$。过程 W 和 π 相互独立，并满足以下条件：

- W 是相对于滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$的一个取值于 U 的维纳过程。
- π 是定义在 $[0,\infty) \times E$ 上、强度测度为 $dt \otimes d\nu$ 的泊松随机测度，它由一个平稳的 $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$-泊松点过程 Ξ 生成。我们用 $\hat{\pi}$ 表示相应的补偿泊松随机测度，其形式化定义为 $\hat{\pi} = \pi - \nu$。

注 *2.1.* 关于噪声的假设基于以下观察：设 L 是一个取值于实可分希尔伯特空间 U 的 $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$-*L´évy* 过程，不一定是平方可积的。*L´évy–Khintchin* 分解 *[36, Page 53]* 表明，形式上我们可以写作 $L(t) = at + W(t) + \mathcal{L}(t) + \mathcal{P}(t)$，其中 $a \in U$, W是维纳过程，$\mathcal{L}$是若干相互独立的补偿复合泊松过程之和，$\mathcal{P}$ 是复合泊松过程，并且过程 $W, \mathcal{L}$ 和 $\mathcal{P}$ 相互

独立。因此，这表明关于 L 的随机积分可以非正式地分解为 $dL = adt + dW + d\hat{\pi} + d\pi$，其中 $\pi := \sum_{t>0} \delta_{(t,\Delta L(t))}$ 是 L 的跳跃测度，它是定义在 $[0,\infty) \times E$ 上的泊松随机测度，其中 $E := U \setminus \{0\}$；而 $\delta_{(t,\Delta L(t))}$ 是位于 $(t, \Delta L(t))$ 处的狄拉克测度；更多细节请参见 [10, 36]。跳跃测度 π 是满足上述条件的泊松随机测度。相应的平稳 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-泊松点过程 Ξ由 L 的跳跃诱导。π 的强度测度为 $dt \otimes d\nu$，其中 ν 是 L 的 *Lévy* 测度。我们注意到，$\nu(E)$ 可能不是有限的，但 ν在 E 的有界子集上有限。事实上，$(E, \mathcal{E}, \nu)$ 是一个 σ-有限测度空间（见 (A.1)）。我们定义集合 $E_0 := \{x \in U : 0 < |x|_U < 1\}$。由此可得 $\nu(E \setminus E_0) < \infty$。(1.1) 中出现的集合 $E_0 \in \mathcal{E}$选取为使得 $\nu(E \setminus E_0) < \infty$。例如，我们可以取 $E_0 := \{\xi \in U : 0 < |\xi|_U < 1\}$。

接下来，令 $\mathcal{Q}$ 为 W 的协方差算子，并定义 $U_0 := \mathcal{Q}^{1/2}(U)$。然后，对于噪声系数 G 和 K，我们施加以下条件：对每个 $s = 0$，1，2，我们假设

$$G : H^s(\mathbb{T}) \to HS(U_0, H^s(\mathbb{T})), \quad K : H^s(\mathbb{T}) \times E_0 \to H^s(\mathbb{T}),$$

其中，$HS(X, Y)$ 表示从希尔伯特空间 X 到希尔伯特空间 Y 的希尔伯特-施密特算子空间。此外，我们假设噪声系数在空间 $L^2(\mathbb{T})$ $H^1(\mathbb{T})$ $H^2(\mathbb{T})$ 中满足以下线性增长条件和 Lipschitz 条件：存在常数 κ_1，κ_2，$C > 0$，使得

$$\|G(v)\|^2_{HS(U_0,H^s)} \leq \kappa_1(1 + |v|^2_{H^s}), \ v \in H^s(\mathbb{T}), \ s = 0, 1, 2 \tag{A1}$$

$$\int_{E_0} |K(v,\xi)|^2_{H^s} d\nu(\xi) \leq \kappa_2(1 + |v|^2_{H^s}), \ v \in H^s(\mathbb{T}), \ s = 0, 1, 2 \tag{A2}$$

$$\int_{E_0} |K(v,\xi)|^8_{L^2} d\nu(\xi) \leq \kappa_2(1 + |v|^8_{L^2}), \ v \in L^2(\mathbb{T}), \tag{A3}$$

并且，对于 $s = 0$，1，2，我们假设

$$\|G(v) - G(w)\|^2_{HS(U_0,H^s)} + \int_{E_0} |K(v,\xi) - K(w,\xi)|^2_{H^s} d\nu(\xi) \leq C|v - w|^2_{H^s}, \ v, w \in H^s(\mathbb{T}). \tag{A4}$$

注意，由 H¨older 不等式可知，对于 $2 \leq p \leq 8$，存在某个常数 $C = C(\kappa_2, p)$，使得

$$\int_{E_0} |K(v,\xi)|^p_{L^2} d\nu(\xi) \leq C(1 + |v|^p_{L^2}), \qquad v \in L^2(\mathbb{T}). \tag{2.5}$$

我们假设 $\mathscr{K}$： $L^2(\mathbb{T}) \times E \to L^2(\mathbb{T})$ 是可测函数。与 K 相比，我们不对 $\mathscr{K}$ 施加任何增长或 Lipschitz 条件。右端的最后一项（1.1）表示 L´évy 噪声中大跳跃的影响。如果 L´évy 噪声不是平方可积的，那么大跳跃的影响无法在没有这一项的情况下表示；参见[10, 36]。

3. 主要结果

本节将介绍必要的定义，并陈述本文的主要结果：唯一解和不变测度的存在性。对于由 L´évy 噪声驱动的随机偏微分方程，标准做法是先考虑平方可积跳跃噪声，再利用所谓的“拼接”论证，将大跳跃的影响纳入考量。此外，为了证明给出不变测度存在性的第二个主要结果，我们将忽略大跳跃的影响。此后，我们令 $\mathscr{K} = 0$ 取为（1.1）中的量，并考虑以下方程：

$$\begin{cases} du(t) + (\partial_x^3 u(t) + u(t)\partial_x u(t) + \gamma u(t))dt = G(u(t-))dW(t) + \int_{E_0} K(u(t-),\xi)d\hat{\pi}(t,\xi), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

我们首先定义阻尼随机KdV方程（3.1）的两种相关解的概念。鞅解是一种弱解（概率意义下），其随机基（包括底层概率空间、维纳过程和泊松随机测度）本身也作为解的一部分构造。由于鞅解中的概率空间本身也是未知量之一，因此无法预先将初始条件指定为随机变量，而只能通过给定的博雷尔概率测度来规定其分布。

定义 2（（3.1）的鞅解）。假设给定的概率测度 μ_0 满足

$$\int_{L^2} |v|_{L^2}^8 d\mu_0(v) + \int_{H^2} |v|_{H^2}^2 d\mu_0(v) < \infty. \tag{3.2}$$

一对 $(\mathcal{S}, \widetilde{u})$ 称为（3.1）的鞅解，如果

- $\mathcal{S}$ 是一个随机基 $(\Omega\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\ \mathbb{P},\ W,\ \widetilde{\pi})$，如定义 1 中所定义，
- 过程 $\widetilde{u}$ 满足

$$\widetilde{u} \in L^8(\widetilde{\Omega}, L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{T}))) \cap L^2(\widetilde{\Omega}, L^\infty(0,T;H^2(\mathbb{T})))$$

是 $(\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$-适应的，并在 $H^{-2}(\mathbb{T})$ 中具有 c`adl`ag 路径，$\widetilde{\mathbb{P}}$-几乎必然，

- $\widetilde{u}(0)$ is $\widetilde{\mathcal{F}}_0$-可测且分布为 μ_0，并且对每个 $t \in [0,T]$，以下方程

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(t) + \int_0^t (\partial_x^3 \widetilde{u}(s) + \widetilde{u}(s)\partial_x \widetilde{u}(s) + \gamma \widetilde{u}(s))ds &= \widetilde{u}(0) + \int_0^t G(\widetilde{u}(s-))d\widetilde{W}(s) \\ &\quad + \int_{(0,t]} \int_{E_0} K(\widetilde{u}(s-),\xi) d\widehat{\widetilde{\pi}}(s,\xi) \end{aligned} \tag{3.3}$$

以分布的意义成立，且几乎处处关于 $\mathbb{P}$。

接下来，我们将给出方程 (3.1) 的逐路径解的定义。在这种情况下，我们将在预先指定的随机基上构造一个适当的随机过程，使其满足方程 (3.1)。

定义 3（方程 (3.1) 的路径解）。设给定一个如定义 1 中所述的随机基 $\mathcal{S} = (\Omega\ \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}, W, \pi)$，以及一个随机变量 $u_0 \in L^8(\Omega\ \mathcal{F}_0, \mathbb{P}; L^2(\mathbb{T})) \cap L^2(\Omega\ \mathcal{F}_0, \mathbb{P}; H^2(\mathbb{T}))$，其分布为 μ_0，且满足 (3.2)。若一个 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-适应过程 u 满足 u，则称其为方程 (3.1) 的（全局）逐路径解。

$$u \in L^8(\Omega, L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{T}))) \cap L^2(\Omega, L^\infty(0,T;H^2(\mathbb{T})))$$

取值于 c`adl`ag 路径，$\mathbb{P}$-几乎处处成立，并且对每个 $t \in [0,T]$ 都满足以下方程 ，

$$\begin{aligned} u(t) + \int_0^t (\partial_x^3 u(s) + u(s)\partial_x u(s) + \gamma u(s))ds &= u(0) + \int_0^t G(u(s-))dW(s) \\ &\quad + \int_{(0,t]} \int_{E_0} K(u(s-),\xi) d\widehat{\pi}(s,\xi) \end{aligned} \tag{3.4}$$

$\mathbb{P}$-几乎处处成立（在分布的意义下）。

现在我们将陈述本文的主要结果之一，即方程 (3.1) 的逐路径解的存在性。

定理 3.1. 假设给定一个 $\mathcal{F}_0$-可测随机变量 $u_0 : \Omega \to H^2(\mathbb{T})$，使得 $u_0 \in L^8(\Omega\ \mathcal{F}_0, \mathbb{P}; L^2(\mathbb{T})) \cap L^2(\Omega\ \mathcal{F}_0, \mathbb{P}; H^2(\mathbb{T}))$。我们还假设 G 和 K 满足假设 *(A1)-(A4)*。那么，根据定义 *3*，存在唯一的方程 *(3.1)* 的逐路径解 u，其初始条件为 u_0。

接下来，我们将陈述本文的第二个主要结果。对于任意 $u_0 \in H^2(\mathbb{T})$，记 $u(t;\ u_0)$ 为以 3.1 的初始条件 u_0 给定的定理 3.1 的唯一解。我们将转移概率定义如下，

$$P_t(u_0, A) := \mathbb{P}(u(t; u_0) \in A),\ t \geq 0,\ u_0 \in H^2(\mathbb{T}),\ A \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{T})), \tag{3.5}$$

其中，$\mathcal{B}(H^2(\mathbb{T}))$ 是 $H^2(\mathbb{T})$ 上博雷尔可测集的集合。作用于 $C_b(H^2(\mathbb{T}))$（从 $H^2(\mathbb{T})$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续有界可测函数集合）上的相应转移半群 P_t 定义如下：

$$P_t\phi(u_0) := \mathbb{E}[\phi(u(t; u_0))] = \int_{H^2} \phi(v) P_t(u_0, dv),\ t \geq 0,\ \phi \in C_b(H^2(\mathbb{T})). \tag{3.6}$$

对于任意博雷尔概率测度 $\mu \in \mathbf{Pr}(H^2(\mathbb{T}))$，我们定义

$$\mu P_t(A) := \int_{H^2} P_t(u_0, A)\mu(du_0),\ A \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{T})), \tag{3.7}$$

并称 t $\mu \in$Pr$(H^2(\mathbb{T}))$ 是 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 的不变测度，如果对每个 $t \geq$，都有 $\mu P_t = \mu$ 0.

现在我们可以准确地陈述下一个主要结果。

定理 3.2. 假设噪声系数 G 和 K 满足假设 (A1)-(A4)。那么，当阻尼系数 $\gamma > 0$足够大时，存在一个不变测度 $\mu \in Pr(H^2(\mathbb{T}))$，它对应于 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 所描述的阻尼 *KdV* 方程 $(3.1)_1$ 在平方可积的 *L ́évy* 噪声驱动下的动力学。

下文将给出定理3.1 和3.2的证明。

4. Existence of pathwise solution

本节将证明我们的第一个主要结果，即定理 3.1。证明的第一步是证明方程（3.1）存在鞅解，其意义见定义 2。随后，我们将在适当的解类中建立此类解的路径唯一性。根据 Gyongy-Watanabe 的经典定理，这将推出逐路径解的存在唯一性。

系统（3.1）解的存在性证明分为三个层次的逼近，分别基于正则化、有限维近似和非线性项截断。首先，通过加入人工黏性对系统（3.1）进行正则化。为证明该系统的适定性，我们采用有限维 Galerkin 近似。此外，该逼近系统包含截断后的非线性项，这些项通过对（3.1）左端出现的两个非线性项应用截断函数得到。截断使漂移项成为全局 Lipschitz 漂移项，从而保证 Galerkin 格式在全时间范围内适定。

4.1. Galerkin 格式。

本节将构造系统（3.1）的近似解。遵循 [14, 21, 40, 41]，我们首先通过加入正则化项 $\epsilon\partial_x^4 u$，对方程（3.1）进行正则化 $0 < \epsilon \leq 1$。

$$\begin{cases} du_\epsilon(t) + \big(\partial_x^3 u_\epsilon(t) + u_\epsilon(t)\partial_x u_\epsilon(t)\big) + \gamma u_\epsilon(t) + \epsilon\partial_x^4 u_\epsilon(t)\big)dt \\ \qquad\qquad = G(u_\epsilon(t-))dW(t) + \displaystyle\int_{E_0} K(u_\epsilon(t-), \xi)d\hat{\pi}(t, \xi), \\ u_\epsilon(0) = u_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

为建立（4.1）的解的存在性，下面将引入一个伽辽金逼近格式。为此，我们定义 H_N 如下：

$$H_N := \mathrm{span}\big\{e^{ikx} : |k| \leq N\big\}. \tag{4.2}$$

我们将（4.1）投影到其傅里叶模 $|k| \leq N$ 上，从而对任意 $N \in \mathbb{N}$，考虑如下 N阶 Galerkin 格式：

$$\begin{cases} du_\epsilon^N(t) + \Big(\theta_N(|u_\epsilon^N(t)|_{H^1})(\partial_x^3 u_\epsilon^N(t) + P_N(u_\epsilon^N(t)\partial_x u_\epsilon^N(t))) + \gamma u_\epsilon^N(t) + \epsilon\partial_x^4 u_\epsilon^N(t)\Big)dt \\ \qquad\qquad = P_N G(u_\epsilon^N(t-))dW(t) + \int_{E_0} P_N K(u_\epsilon^N(t-),\xi)d\widehat{\pi}(t,\xi), \\ u_\epsilon^N(0,x) = P_N u_0(x). \end{cases} \tag{4.3}$$

在这里，为了处理随机性，我们还通过下文定义的截断函数 θ_N 对非线性项进行了截断。令 $\theta(t): [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 为满足以下条件的光滑函数

$$\theta(x) := \begin{cases} 1, & x < \frac{1}{2}; \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

定义 $\theta_N(x) := \theta(\frac{x}{N})$。于是我们注意到，对于任意 $N > 0$, $\theta_N: [0,\infty) \to [0,1]$ 都是满足以下条件的光滑函数

$$\theta_N(x) = \begin{cases} 1, & x < \frac{N}{2}; \\ 0, & x \geq N. \end{cases} \tag{4.4}$$

此外，我们注意到，在（θ_N 4.4）中构造的截断函数是一个 Lipschitz 函数，其 Lipschitz系数与 N无关：

$$|\theta_N'(x)| = \frac{1}{N}\left|\theta'\left(\frac{x}{N}\right)\right| \leq |\theta'|_{L^\infty}, \quad \forall N \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

注意，由于对于任意固定的 $N \in \mathbb{N}$，映射 $v \mapsto \theta_N(|v|_{H^1})v\partial_x v$、 $v \mapsto \epsilon\partial_x^3 v$ 以及 $v \mapsto \partial_x^4 v$ 关于 H_N都是全局 Lipschitz 的，并且 G 和 K 满足 Lipschitz 条件（A1）-（A2），因此根据 u_ϵ^NTheorem 3.，存在 SDE（4.3）的唯一逐路径解3]。

4.2. 矩估计。 本节将获得 Galerkin逼近的估计，这些估计与 N 和 ϵ无关。下文中，符号 C 将表示一个通用常数；除非另有说明，该常数与参数 N 和 ϵ无关。为获得所需的矩估计，我们先定义以下泛函

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0(v) &:= \int_{\mathbb{T}} (v(x))^2 dx, \\ \mathcal{I}_1(v) &:= \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{2}\left((\partial_x v(x))^2 - \frac{1}{6}(v(x))^3\right)dx, \\ \mathcal{I}_2(v) &:= \int_{\mathbb{T}} \left((\partial_x^2 v(x))^2 - \frac{5}{3}v(\partial_x v(x))^2 + \frac{5}{36}(v(x))^4\right)dx. \end{aligned}$$

这些泛函对应于确定性KdV方程的适当守恒量。事实上，确定性KdV方程具有无穷多个守恒量$\mathcal{I}_m$, $m \geq 0$，它们是 $(u、\ \partial_x u、\ \cdots、\ \partial_x^m u)$ 的多项式，其最高阶项为 $L^2(\mathbb{T})$-范数的 $\partial_x^m u$。关于 $\mathcal{I}_m$ 的精确定义和详细讨论，请参阅 [41, 第四章第 7] 节。我们将运用这些泛函，对逼近系统 (4.3) 应用 Itô 公式，以推导适当的界。

我们的主要目标是获得近似解 u_ϵ^N的界，该界与 N 在$L^2_{\mathbb{P}}L^\infty_t H^2_x$中的取值无关。由于我们的空间区域为 $\mathbb{T}$，我们首先尝试为 u_ϵ^N获得一致的 $L^8_{\mathbb{P}}L^\infty_t L^2_x$ 估计，具体见下述定理。

定理 4.1（u_ϵ^N的$L^8_{\mathbb{P}}L^\infty_t L^2_x$）。假设 $u_0 \in L^8(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}; L^2(\mathbb{T}))$，且噪声系数 G 和 K 满足 **(A1)-(A4)** 中所述的假设。则对于任意 $p \in [2,8]$，存在常数 $C = C(T, p, \kappa_1, \kappa_2) > 0$，与 N和 ϵ无关，使得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^p\right] + \epsilon p \mathbb{E}\int_0^T |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{p-2} |\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 ds \le Ce^{CT}(\mathbb{E}|u_0|_{L^2}^p + 1). \tag{4.6}$$

证明。 我们首先引入以下泛函，它是对 $\mathcal{I}_0$ 的一个轻微修改： $L^2(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}$:

$$\tilde{\mathcal{I}}_0(v) := |v|_{L^2}^p.$$

这个修改后的泛函旨在获得 (4.6) 中所述的高阶矩界。注意，一阶和二阶 Fr´echet 导数 $\tilde{\mathcal{I}}_0'$： $L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ 以及 $\tilde{\mathcal{I}}_0''$： $L^2(\mathbb{T}) \to L(L^2(\mathbb{T}), L^2(\mathbb{T}))$ 的 $\tilde{\mathcal{I}}_0$ 表达式如下:

$$\tilde{\mathcal{I}}_0'(v) = p|v|_{L^2}^{p-2}\langle v, \cdot\rangle_{L^2}, \qquad \tilde{\mathcal{I}}_0''(v) = p(p-2)|v|_{L^2}^{p-4}\langle v, \cdot\rangle_{L^2} v + p|v|_{L^2}^{p-2} I.$$

现在，我们将泛函 $\tilde{\mathcal{I}}_0(u_\epsilon^N)$ 的 Itô 公式应用于我们的逼近系统 (4.3)。由此得到:

$$\begin{aligned}
&|u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^p + p\int_0^t |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{p-2}(u_\epsilon^N(s), u_\epsilon^N(s)\partial_x u_\epsilon^N(s))_{L^2}\theta_N(|u_\epsilon^N(s)|_{H^1})ds + \gamma p\int_0^t |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^p ds \\
&+ p\int_0^t |u_\epsilon^N(s)|_{L^2(s)}^{p-2}\left(u_\epsilon^N(s), \partial_x^3 u_\epsilon^N(s)\right)_{L^2}\theta_N(|u_\epsilon^N(s)|_{H^1})ds + \epsilon p\int_0^t |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{p-2}(u_\epsilon^N(s), \partial_x^4 u_\epsilon^N(s))_{L^2} ds \\
&= |u_\epsilon^N(0)|_{L^2}^p + p\int_0^t |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{p-2}(u_\epsilon^N(s), P_N G(u_\epsilon^N(s))dW(s))_{L^2} \\
&+ p\int_0^t\int_{E_0} |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{p-2}(u_\epsilon^N(s), P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi))_{L^2} d\hat{\pi}(\xi, s) \\
&+ \frac{p}{2}\int_0^t |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{p-2}\|G(u_\epsilon^N(s))\|_{HS(U_0,L^2)}^2 ds + \frac{p(p-2)}{2}\int_0^t |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{p-4}\|G^*(u_\epsilon^N(s))u_\epsilon^N(s)\|_{U_0}^2 ds \\
&+ \int_0^t\int_{E_0} |u_\epsilon^N(s) + P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^p - |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^p - p|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{p-2}(u_\epsilon^N(s), P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi))_{L^2} d\pi(\xi, s) \\
&=: |u_\epsilon^N(0)|_{L^2}^p + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

其中 G^* 是 G 的伴随算子。在估计右端各项之前，我们对（4.7）左端各项作一些重要观察。注意，（4.7）左端的第二项和第三项在如下分部积分后消失:

$$\begin{aligned}
\theta_N(|u_\epsilon^N(s)|_{H^1})\left(u_\epsilon^N(s), u_\epsilon^N(s)\partial_x u_\epsilon^N(s)\right)_{L^2} &= \theta_N(|u_\epsilon^N(s)|_{H^1})\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{3}\partial_x (u_\epsilon^N(s,x))^3 dx \\
&= \theta_N(|u_\epsilon^N(s)|_{H^1})\frac{1}{3}(u_\epsilon^N(s,x))^3\Big|_{x=0}^{x=1} = 0,
\end{aligned}$$

and,

$$\begin{aligned}
\theta_N(|u_\epsilon^N(s)|_{H^1})(u_\epsilon^N(s), \partial_x^3 u_\epsilon^N(s))_{L^2} &= \theta_N(|u_\epsilon^N(s)|_{H^1})\left[u_\epsilon^N(s,x)\partial_x^2 u_\epsilon^N(s,x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \partial_x u_\epsilon^N \partial_x^2 u_\epsilon^N dx\right] \\
&= -\theta_N(|u_\epsilon^N(s)|_{H^1})\int_0^1 \frac{1}{2}\partial_x[(\partial_x u_\epsilon^N(s,x))^2]dx \\
&= -\frac{1}{2}\theta_N(|u_\epsilon^N(s)|_{H^1})(\partial_x u_\epsilon^N(s,x))^2\Big|_{x=0}^{x=1} = 0.
\end{aligned}$$

此外，经过两次分部积分后，我们可以将（4.7）左端的最后一项改写如下

$$\epsilon p \int_0^t |u_\epsilon^N(s)|^{p-2}(u_\epsilon^N(s), \partial_x^4 u_\epsilon^N(s))_{L^2} ds = \epsilon p \int_0^t |u_\epsilon^N(s)|^{p-2} |\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|^2 ds.$$

因此，应用上述三个等式后，方程（4.7）左侧可化简为以下表达式：

$$\text{LHS of (4.7)} = |u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^p + \gamma p \int_0^t |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^p ds + \epsilon p \int_0^t |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{p-2} |\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 ds. \tag{4.8}$$

接下来，我们将估计（4.7）右侧各项，并分别处理各项 I_j；$j = 1, 2, .., 5$。首先，我们对方程（4.7）两边取 $\sup_{t\in[0,t']}$，其中任意 $t' \geq 0$，然后取期望。利用 Burkholder-Davis-Gundy（BDG）不等式和增长假设（A1），我们得到对于 I_1，有：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{t\in[0,t']} |I_1(t)| &\leq C\mathbb{E} \left(\int_0^{t'} |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{2(p-1)} \|G(u_\epsilon^N(s))\|_{HS(U_0,L^2)}^2 ds \right)^{1/2} \\
&\leq C\mathbb{E} \left(\int_0^{t'} |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{2(p-1)} (1 + |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2) ds \right)^{1/2} \\
&\leq C\mathbb{E} \left(\sup_{t\in[0,t']} |u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^p \int_0^{t'} |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{p-2} (1 + |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2) ds \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{4}\mathbb{E} \sup_{t\in[0,t']} |u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^p + C\mathbb{E} \int_0^{t'} |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{p-2} ds + C\mathbb{E} \int_0^{t'} |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^p ds \\
&\leq \frac{1}{4}\mathbb{E} \sup_{t\in[0,t']} |u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^p + C \left(1 + \mathbb{E} \int_0^{t'} |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^p ds \right),
\end{aligned} \tag{4.9}$$

其中，常数 $C = C(p, T)$ 仅取决于 p 和 T。对项 I_2 应用类似的论证可得，对于某个常数 $C > 0$，有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{t\in[0,t']} |I_2(t)| &\leq C \left(\mathbb{E} \int_0^{t'} \int_{E_0} |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{2p-2} |P_N K(u_\epsilon^N(s), \xi))|_{L^2}^2 d\pi(\xi, s) \right)^{1/2} \\
&\leq C\mathbb{E} \left(\int_0^{t'} |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{2(p-1)} (1 + |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2) ds \right)^{1/2} \\
&\leq C\mathbb{E} \left(\sup_{t\in[0,t']} |u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^p \int_0^{t'} |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{p-2} (1 + |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2) ds \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{4}\mathbb{E} \sup_{t\in[0,t']} |u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^p + C\mathbb{E} \int_0^{t'} |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{p-2} ds + C\mathbb{E} \int_0^{t'} |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^p ds \\
&\leq \frac{1}{4}\mathbb{E} \sup_{t\in[0,t']} |u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^p + C \left(1 + \mathbb{E} \int_0^{t'} |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^p ds \right),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

接下来我们考虑项 I_3。回顾在（A1）中陈述的关于 G 的增长条件。在这一增长假设下，我们得到

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|I_3(t)|\leq C\mathbb{E}\int_0^{t'}|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{p-2}(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2)ds\leq C\left(1+\mathbb{E}\int_0^{t'}|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^p ds\right).$$

为估计 I_4 项，我们注意到（A1）给出，

$$\begin{aligned}\|G(u_\epsilon^N(s))^*u_\epsilon^N(s)\|_{U_0}^2&\leq\|G(u_\epsilon^N(s))^*\|_{HS(U_0,L^2)}^2|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2\\&=\|G(u_\epsilon^N(s))\|_{HS(U_0,L^2)}^2|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2\leq C(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2)|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

因此，对于 I_4 我们得到以下界，

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|I_4(t)|\leq C\mathbb{E}\int_0^{t'}|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{p-2}\left(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2\right)ds\leq C\left(1+\mathbb{E}\int_0^{t'}|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^p ds\right).\tag{4.11}$$

为估计 I_5，我们首先回顾任意希尔伯特空间中给出的以下标准不等式H 和 $y,\ k\in H$ （参见例如 [9]）：

$$\left||y+k|_H^p-|y|_H^p-p|y|_H^{p-2}\langle y,k\rangle_H\right|\leq(p^2-p)2^{p-3}\left(|y|_H^{p-2}|k|_H^2+|k|_H^p\right),\tag{4.12}$$

取 $H:=L^2(\mathbb{T})$ $y:=u_\epsilon^N(s)$ 以及 $k:=P_NK(u_\epsilon^N(s)\ \xi)$ 代入（4.12），并调用增长条件（A3）可得

(4.13)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|I_5|&\leq C\mathbb{E}\int_0^{t'}\int_{E_0}|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{p-2}|K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^2+|K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^p d\nu(\xi)ds\\&\leq C\mathbb{E}\int_0^{t'}|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{p-2}(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2)+(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^p)ds\leq C\left(1+\mathbb{E}\int_0^{t'}|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^p ds\right).\end{aligned}$$

因此，汇总所有项 $I_j;\ 1\leq j\leq 5$ 并将（4.8）代入（4.7），我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}\left[|u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^p+\gamma p\int_0^{t'}|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^p ds+\epsilon p\int_0^{t'}|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{p-2}|\partial_x^2u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2ds\right]\\\leq\frac{1}{2}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^p+C\left(1+\mathbb{E}\int_0^{t'}|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^p ds\right).\end{aligned}$$

重新排列各项可得，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}\left[|u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^p\right]+2\gamma p\int_0^T|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^p ds+2\epsilon p\mathbb{E}\int_0^{t'}|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{p-2}|\partial_x^2u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2ds\\\leq C\left(\mathbb{E}|u_0|_{L^2}^p+1+\int_0^{t'}\mathbb{E}\sup_{t''\in[0,s]}|u_\epsilon^N(t'')|_{L^2}^p ds\right).\end{aligned}$$

最后应用格朗沃尔不等式，并令 $t':=T$，得到

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left[|u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^p\right]+\epsilon p\mathbb{E}\int_0^T|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{p-2}|\partial_x^2u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2ds\leq Ce^{CT}(\mathbb{E}|u_0|^p+1),$$

其中，$C=C(p,\ T,\ \kappa_1,\ \kappa_2)$ 与 $\epsilon,\ N$ 无关。 □

接下来，我们将为 u_ϵ^N在更高正则性的空间中得到一致估计；具体而言，在 $L^2_{\mathbb{P}}L^\infty_tH^2_x$中使用不变的 $\mathcal{I}_2$。为证明这些界，我们将使用若干经典不等式，例如一维 Agmon不等式和 Sobolev 插值不等式，下面回顾这些不等式

。首先回顾**Agmon不等式**（例如参见 [41, 第二章第一节。3]）：对于 $v \in H^s$（$\mathbb{T}$），$s \geq 1$,

$$|v|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq C|v|^{1/2}_{L^2(\mathbb{T})} \left(|\partial_x v|_{L^2(\mathbb{T})} + |v|_{L^2(\mathbb{T})}\right)^{1/2}. \tag{4.14}$$

接下来，我们陈述**Sobolev 插值不等式**：设 $0 \leq s_1 < s < s_2$ 和 $\theta \in (0,1)$ 满足$s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$。假设 $v \in H^{s_2}(\mathbb{T})$。那么

$$|v|_{H^s(\mathbb{T})} \leq C|v|^{1-\theta}_{H^{s_1}(\mathbb{T})}|v|^{\theta}_{H^{s_2}(\mathbb{T})}, \tag{4.15}$$

其中，C 是一个仅依赖于 s_1, s_2, θ 的通用常数。我们将这个插值不等式简记为 $H^s(\mathbb{T}) = [H^{s_2}(\mathbb{T}) H^{s_1}(\mathbb{T})]_\theta$。现在我们转而证明以下高正则性估计。

定理 *4.2*（$L^2_{\mathbb{P}} L^\infty_t H^2_x$关于 u^N_ϵ 的估计）。设 $u_0 \in L^8(\Omega\ \mathcal{F}_0, \mathbb{P}; L^2(\mathbb{T})) \cap L^2(\Omega\ \mathcal{F}_0, \mathbb{P}; H^2(\mathbb{T}))$，并假设噪声系数 G 和 K 满足 *(A1)-(A4)*。那么存在常数$C = C(\kappa_1, \kappa_2, T) > 0$，其与 N和 ϵ 无关，使得

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |\partial_x^2 u^N_\epsilon(t)|^2_{L^2}\right] + \epsilon\mathbb{E}\int_0^T |\partial_x^4 u^N_\epsilon(s)|^2_{L^2}\, ds \leq Ce^{CT}\left(\mathbb{E}|u_0|^8_{L^2} + \mathbb{E}|\partial_x^2 u_0|^2_{L^2} + 1\right). \tag{4.16}$$

因此，对于某个与 N 和 ϵ 无关的 $C > 0$，我们有

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |u^N_\epsilon(t)|^2_{H^2}\right] + \epsilon\mathbb{E}\int_0^T |u^N_\epsilon(s)|^2_{H^4}\, ds \leq Ce^{CT}\left(\mathbb{E}|u_0|^8_{L^2} + \mathbb{E}|\partial_x^2 u_0|^2_{L^2} + 1\right). \tag{4.17}$$

证明。考虑如下定义的泛函 $\mathcal{I}_2 : H^2(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{I}_2(v) := \int_{\mathbb{T}} \left((\partial_x^2 v(x))^2 - \frac{5}{3}v(x)(\partial_x v(x))^2 + \frac{5}{36}(v(x))^4\right) dx. \tag{4.18}$$

首先注意到该泛函 $\mathcal{I}'$ 的两个 Fr´echet 导数：$H^2(\mathbb{T}) \to H^{-2}(\mathbb{T})$ 和 $\mathcal{I}'' : H^2(\mathbb{T}) \to L\ H^2\ \mathbb{T})\ H^{-2}(\mathbb{T})$：（

(4.19)

$$\langle \mathcal{I}_2'(v), w\rangle = \int_{\mathbb{T}} \left(2\partial_x^2 v(x)\partial_x^2 w(x) - \frac{5}{3}(\partial_x v(x))^2 w(x) - \frac{5}{3}\partial_x(v(x)^2)\partial_x w(x) + \frac{5}{9}(v(x))^3 w(x)\right) dx,$$

$$\langle \mathcal{I}_2''(v)h, w\rangle = \int_{\mathbb{T}} \Bigg(\partial_x^2 h(x)\partial_x^2 w(x) + \frac{5}{3}v(x)^2 h(x)w(x) + \frac{10}{3}\partial_x v(x)\partial_x h(x)w(x) + \frac{10}{3}v(x)\partial_x^2 h(x)w(x) + \frac{10}{3}h(x)\partial_x^2 v(x)w(x)\Bigg) dx.$$

对 (4.3 应用 Itˆo 公式，取泛函 $\mathcal{I}_2(u_\epsilon^N)$，得到 4.2
(0)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_2(u_\epsilon^N(t)) + \int_0^t (\mathcal{I}_2'(u_\epsilon^N(s)), \theta_N(|u_\epsilon^N(s)|_{H^1})(\partial_x^3 u_\epsilon^N(s) + u_\epsilon^N(s)\partial_x u_\epsilon^N(s)))_{L^2} ds \\
&+ \int_0^t (\mathcal{I}_2'(u_\epsilon^N(s)), \gamma u_\epsilon^N(s) + \epsilon \partial_x^4 u_\epsilon^N(s))_{L^2} ds \\
&= |\partial_x^2 u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^2 - \frac{5}{3}\int_{\mathbb{T}} u_\epsilon^N(t,x)(\partial_x u_\epsilon^N(t,x))^2 dx + \frac{5}{36}|u_\epsilon^N(t)|_{L^4}^4 \\
&+ 2\gamma \int_0^t |\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 ds - 5\gamma \int_0^t \int_{\mathbb{T}} u_\epsilon^N(s,x)(\partial_x u_\epsilon^N(s,x))^2 dx ds + \frac{5}{9}\gamma \int_0^t |u_\epsilon^N(s)|_{L^4}^4 ds \\
&+ 2\epsilon \int_0^t |\partial_x^4 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 ds + \epsilon\left[\frac{5}{3}\int_0^t \int_{\mathbb{T}} (\partial_x u_\epsilon^N(s,x))^2 \partial_x^4 u_\epsilon^N(s,x) dx ds + \frac{5}{9}\int_0^t ((u_\epsilon^N(s))^3, \partial_x^4 u_\epsilon^N(s))_{L^2} ds\right] \\
&= \mathcal{I}_2(u_\epsilon^N(0)) + \int_0^t (\mathcal{I}_2'(u_\epsilon^N(s)), P_N G(u_\epsilon^N(s)) dW(s))_{L^2} + \int_0^t \int_{E_0} (L'(u_\epsilon^N(s)), P_N K(u_\epsilon^N(s), \xi))_{L^2} d\widehat{\pi}(\xi, s) \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{Tr}(\mathcal{I}_2''(u_\epsilon^N(s)) P_N G(u_\epsilon^N(s)) P_N G(u_\epsilon^N(s))^*) ds \\
&+ \int_0^t \int_{E_0} \left(\mathcal{I}_2(u_\epsilon^N(s) + P_N K(u_\epsilon^N(s), \xi)) - \mathcal{I}_2(u_\epsilon^N(s)) - \left(\mathcal{I}_2'(u_\epsilon^N(s)), P_N K((u_\epsilon^N(s), \xi))\right)_{L^2}\right) d\pi(\xi, s) \\
&=: \mathcal{I}_2(u_\epsilon^N(0)) + R_1(t) + R_2(t) + R_3(t) + R_4(t).
\end{aligned}$$

这里需要指出的是，在化简左端时，我们还用到了以下恒等式，该式可由分部积分得到:

$$\int_0^t \left(\mathcal{I}_2'(u_\epsilon^N(s)), \theta_N(|u_\epsilon^N(s)|_{H^1})(\partial_x^3 u_\epsilon^N(s) + u_\epsilon^N(s)\partial_x u_\epsilon^N(s))\right)_{L^2} ds = 0.$$

我们将其余项移至左端，并记为:
(4.21)

$$\begin{aligned}
L_1(t) + L_2(t) + L_3(t) + L_4(t) := &-\frac{5}{3}\int_{\mathbb{T}} u_\epsilon^N(t,x)(\partial_x u_\epsilon^N(t,x))^2 dx - 5\gamma \int_0^t \int_{\mathbb{T}} u_\epsilon^N(s,x)(\partial_x u_\epsilon^N(s,x))^2 dx ds \\
&+ \frac{5\epsilon}{3}\int_0^t \int_{\mathbb{T}} (\partial_x u_\epsilon^N(s,x))^2 \partial_x^4 u_\epsilon^N(s,x) dx ds + \frac{5\epsilon}{9}\int_0^t ((u_\epsilon^N(s))^3, \partial_x^4 u_\epsilon^N(s))_{L^2} ds.
\end{aligned}$$

本证明接下来的目标是对以下各项 R_j， L_j，$j = 1$，2，3，4 得到适当的估计。我们先处理右端各项。利用式（ $\mathcal{I}_2'$）中给出的公式4.19，我们将 R_1 改写如下:

$$\begin{aligned}
R_1(t) &= 2\int_0^t (\partial_x^2 u_\epsilon^N(s), \partial_x^2 P_N G(u_\epsilon^N(s)) dW(s)) - \frac{5}{3}\int_0^t ((\partial_x u_\epsilon^N(s))^2, P_N G(u_\epsilon^N(s)) dW(s)) \\
&- \frac{5}{3}\int_0^t (\partial_x (u_\epsilon^N(s))^2, \partial_x P_N G(u_\epsilon^N(s)) dW(s))_{L^2} + \frac{5}{9}\int_0^t ((u_\epsilon^N(s))^3, \partial_x P_N G(u_\epsilon^N(s)) dW(s))_{L^2} \\
&=: R_{1,1}(t) + R_{1,2}(t) + R_{1,3}(t) + R_{1,4}(t).
\end{aligned}$$

接下来，我们对上面给出的 $\mathbb{E}\sup^{t\in[0,t']}$ 关于 R_1 的方程两边应用 A1 增长假设（4.1 定理中得到的界以及 BDG 不等式，即可得到

对于 $p=2$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|R_{1,1}(t)| &\le C\mathbb{E}\left(\int_0^{t'}|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2\|\partial_x^2 P_N G(u_\epsilon^N(s))\|_{HS(U_0,L^2)}^2 ds\right)^{1/2}\\
&\le C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,t']}|\partial_x^2 u_\epsilon^N(t)|_{L^2}\left(\int_0^{t'}\|\partial_x^2 P_N G(u_\epsilon^N(s))\|_{HS(U_0,L^2)}^2 ds\right)^{1/2}\right]\\
&\le \frac{1}{100}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|\partial_x^2 u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^2 + C\mathbb{E}\int_0^{t'}\|G(u_\epsilon^N(s))\|_{HS(U_0,H^2)}^2 ds\\
&\le \frac{1}{100}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|\partial_x^2 u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^2 + C\mathbb{E}\int_0^{t'}\left(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2+|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2\right)ds\\
&\le \frac{1}{100}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|\partial_x^2 u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^2 + C\left(1+\mathbb{E}|u_0|_{L^2}^2+\mathbb{E}\int_0^{t'}|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 ds\right).
\end{aligned}$$

同样，我们也发现，对于 $R_{1,\ 2}$，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|R_{1,2}(t)| &= C\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}\left|\int_0^{t'}((\partial_x u_\epsilon^N(s))^2, P_N G(u_\epsilon^N(s))dW(s))_{L^2}\right|\\
&\le \mathbb{E}\left(\int_0^{t'}|\partial_x u_\epsilon^N(s)|_{L^4}^4\|G(u_\epsilon^N(s))\|_{HS(U_0,L^2)}^2 ds\right)^{1/2}\\
&\le \mathbb{E}\left(\int_0^{t'}|\partial_x u_\epsilon^N(s)|_{L^4}^4\left(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2\right)ds\right)^{1/2}.
\end{aligned}\tag{4.22}$$

为估计 (4.22) 的右端，我们注意到，一维情况下的索伯列夫嵌入 $H^{1/4}(\mathbb{T})\hookrightarrow L^4(\mathbb{T})$ 以及 Sobolev 插值不等式 $H^{5/4}(\mathbb{T})=[H^2(\mathbb{T})\ L^2(\mathbb{T})]_{5/8}$ 可得，

$$|\partial_x u_\epsilon^N(s)|_{L^4}\le C|u_\epsilon^N(s)|_{H^{5/4}}\le C|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{3/8}\left(|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{5/8}+|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{5/8}\right).$$

因此，b 定理4.1，对于 $p=4$，存在某个常数 C，其与 N 和 ϵ 无关，我们有 ，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_0^{t'}|\partial_x u_\epsilon^N(s)|_{L^4}^4 ds\right)^{1/2} &\le C\mathbb{E}\left(\int_0^{t'}\left(|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^4+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{3/2}|\partial_x^2(s)u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{5/2}\right)ds\right)^{1/2}\\
&\le C\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^2 + C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,t']}|u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^{3/4}|\partial_x^2 u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^{5/4}\right]\\
&\le C+\frac{1}{100}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|\partial_x^2 u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^2 + C\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^4\\
&\le C(1+\mathbb{E}|u_0|_{L^2}^4)+\frac{1}{100}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|\partial_x^2 u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

此外，注意到由定理4.1 可知，对于 $p=6$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_0^{t'}|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2|\partial_x u_\epsilon^N(s)|_{L^4}^4ds\right)^{1/2}&\leq C\mathbb{E}\left(\int_0^{t'}|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^6+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{7/2}|\partial_x^2u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{5/2}\right)^{1/2}\\&\leq C\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^3+C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,t']}|u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^{7/4}\sup_{t\in[0,t']}|\partial_x^2u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^{5/4}\right]\\&\leq C+\frac{1}{100}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|\partial_x^2u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^2+C\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^6\\&\leq C(1+\mathbb{E}|u_0|_{L^2}^6)+\frac{1}{100}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|\partial_x^2u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

结合这两个估计与（4.22），我们得到$R_{1,2}$的以下界：

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|R_{1,2}(t)|\leq C(1+\mathbb{E}|u_0|_{L^2}^6)+\frac{2}{100}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|\partial_x^2u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^2.$$

接下来，我们将为项$R_{1,3}$求界。为此，我们应用 BDG 不等式，利用连续嵌入 $H^{1/4}(\mathbb{T})\hookrightarrow L^4(\mathbb{T})$, 并结合插值不等式 $H^{1/4}(\mathbb{T})=[H^2(\mathbb{T})\ L^2(\mathbb{T})]_{1/8}$ 以及定理 4.1 中 $p=6$ 的界，从而得到：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|R_{1,3}(t)|&\leq C\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}\left|\int_0^t\left(\partial_x(u_\epsilon^N(s))^2,\partial_xP_NG(u_\epsilon^N(s))dW(s)\right)\right|\\&\leq C\mathbb{E}\left(\int_0^{t'}|u_\epsilon^N(s)|_{L^4}^4\|G(u_\epsilon^N(s))\|_{HS(U_0,H^2)}^2ds\right)^{1/2}\\&\leq C\mathbb{E}\left(\int_0^{t'}\left(|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^4+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{7/2}|\partial_x^2u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{1/2}\right)\left(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2+|\partial_x^2u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2\right)ds\right)^{1/2}\\&\leq C\left(1+\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^6\right)+\frac{1}{100}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|\partial_x^2u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^2\\&\leq C(1+\mathbb{E}|u_0|_{L^2}^6)+\frac{1}{100}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|\partial_x^2u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

最后，我们将处理 R_1 的展开式中的最后一项 $R_{1,\ 4}$。注意，BDG 不等式、索伯列夫不等式 $H^{1/3}(\mathbb{T})=[H^2(\mathbb{T})\ L^2(\mathbb{T})]_{1/6}\hookrightarrow L^6(\mathbb{T})$, 以及定理4.1 中结合 $p=8$ 得到的界，共同给出

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|R_{1,4}(t)|&=C\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}\left|\int_0^t\left((u_\epsilon^N(s))^3,P_NG(u_\epsilon^N(s))dW(s)\right)\right|\\&\leq C\mathbb{E}\left(\int_0^{t'}|u_\epsilon^N(s)|_{L^6}^6(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2)ds\right)^{1/2}\\&\leq C\mathbb{E}\left(\int_0^{t'}\left(|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^6+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^5|\partial_x^2u_\epsilon^N(s)|_{L^2}\right)\left(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2\right)ds\right)^{1/2}\\&\leq C\left(1+\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^8\right)+\frac{1}{100}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|\partial_x^2u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^2\\&\leq C(1+\mathbb{E}|u_0|_{L^2}^8)+\frac{1}{100}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|\partial_x^2u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{4.23}$$

综合上文对 $R_{1,\ j}$、 $j=1$，2，3，4 所导出的估计，我们对 R_1 得到

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|R_1(t)|\leq C(1+\mathbb{E}|u_0|_{L^2}^8)+\frac{5}{100}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|\partial_x^2u_\epsilon^N(t)|+C\mathbb{E}\int_0^{t'}|\partial_x^2u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2ds.$$

项 R_2 的估计与项 R_1 的估计推导方式相同，因此这里略去这些计算，并陈述最终得到的界，

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|R_2(t)|\leq C(1+\mathbb{E}|u_0|_{L^2}^8)+\frac{5}{100}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|\partial_x^2u_\epsilon^N(t)|+C\mathbb{E}\int_0^{t'}|\partial_x^2u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2ds.$$

现在我们转向项 R_3。我们回顾一下，$\{e_n\}_{n=0}^\infty$ 是 U_0的标准正交基。我们还回顾一下， $\mathcal{I}_2$ 的二阶弗雷歇导数由式（4.19）给出。那么， R_3 的被积函数可写为:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_n\langle(P_NG(u_\epsilon^N(s)))^*\mathcal{I}_2''(u_\epsilon^N(s))P_NG(u_\epsilon^N(s))e_n,e_n\rangle_{U_0}\\
&=\frac{1}{2}\sum_n\langle\mathcal{I}_2''(u_\epsilon^N(s))P_NG(u_\epsilon^N(s))e_n,P_NG(u_\epsilon^N(s))e_n\rangle\\
&=\sum_n\Big[|\partial_x^2P_NG(u_\epsilon^N(s))e_n|_{L^2}^2+\frac{5}{6}((u_\epsilon^N(s))^2P_NG(u_\epsilon^N(s))e_n,P_NG(u_\epsilon^N(s))e_n)_{L^2}\\
&+\frac{5}{6}\int_{\mathbb{T}}u_\epsilon^N(s,x)\partial_x(P_NG(u_\epsilon^N(s,x))e_n)^2dx+\frac{5}{3}(u_\epsilon^N(s)\partial_x^2P_NG(u_\epsilon^N(s))e_n,P_NG(u_\epsilon^N(s))e_n)_{L^2}\\
&+\frac{5}{3}(P_NG(u_\epsilon^N(s))e_n\partial_x^2u(s),P_NG(u_\epsilon^N(s))e_n)_{L^2}\Big]\\
&:=R_{3,1}(s)+\cdots+R_{3,5}(s).
\end{aligned}\tag{4.24}$$

我们将分别为每一项 $R_{3,\ j}$、 $j=1$、2、3、4、5 求出界。对于 $R_{3,\ 1}$，增长假设（A1）立即给出

$$|R_{3,1}(s)|\leq\sum_n|P_NG(u_\epsilon^N(s))e_n|_{H^2}^2\leq\|G(u_\epsilon^N(s))\|_{HS(U_0,H^2)}^2\leq C(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2+|\partial_x^2u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2).\tag{4.25}$$

下一项$R_{3,\ 2}$ 可通过类似方法，利用（A1）处理，

$$\begin{aligned}
|R_{3,2}(s)|&=|\frac{5}{6}\sum_n((u_\epsilon^N(s))^2P_NG(u_\epsilon^N(s))e_n,P_NG(u_\epsilon^N(s))e_n)|\leq\frac{5}{6}|u_\epsilon^N(s)|_{L^\infty}^2\|G(u_\epsilon^N(s))\|_{HS(U_0,L^2)}^2\\
&\leq C\left(|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}|\partial_xu_\epsilon^N(s)|_{L^2}\right)\left(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2\right)\\
&\leq C(|\partial_x^2u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^6+1).
\end{aligned}$$

通过类似的论证，并结合插值不等式 $[H^2(\mathbb{T})\ L^2(\mathbb{T})]_{1/8} = H^{1/4}(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^4(\mathbb{T})$ 和 H¨older 不等式，我们得到对于$R_{3,\ 3}$ 有

$$\begin{aligned}
|R_{3,3}(s)| &= |\frac{5}{6}\sum_n \left(\partial_x^2 u_\epsilon^N(s), (P_N G(u_\epsilon^N(s))e_n)^2\right)_{L^2}| \leq \frac{5}{6}|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}\sum_n |P_N G(u_\epsilon^N(s))e_n|_{L^4}^2 \\
&\leq \frac{5}{6}|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}\sum_n |P_N G(u_\epsilon^N(s))e_n|_{L^4}^2 \\
&\leq C|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}\left(\sum_n |P_N G(u_\epsilon^N(s))e_n|_{H^2}^2\right)^{1/8}\left(\sum_n |P_N G(u_\epsilon^N(s))e_n|_{L^2}^2\right)^{7/8} \\
&\leq C|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}\left(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{1/4}+|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{1/4}\right)\left(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{7/4}\right) \\
&\leq C(|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2+|u_\epsilon^N(s)_{L^2}^6+1).
\end{aligned}$$

接下来我们处理项 $R_{3,\ 4}$。分部积分两次后，我们写成

$$\begin{aligned}
R_{3,4}(s) &= -\frac{10}{3}\sum_n (\partial_x P_N G(u_\epsilon^N(s))e_n, (\partial_x u_\epsilon^N(s))(P_N G(u_\epsilon^N(s))e_n))_{L^2} - \frac{10}{3}\sum_n ((\partial_x P_N G(u_\epsilon^N(s))e_n)^2, u_\epsilon^N(s))_{L^2} \\
&= \frac{5}{3}\sum_n (\partial_x^2 u_\epsilon^N(s), (P_N G(u_\epsilon^N(s))e_n)^2)_{L^2} - \frac{10}{3}\sum_n ((\partial_x P_N G(u_\epsilon^N(s))e_n)^2, u_\epsilon^N(s))_{L^2}.
\end{aligned}$$

上式右侧的两项都可以像 $R_{3,\ 3}$ 那样进行估计。对于第二项，我们还使用插值恒等式 $[H^2(\mathbb{T})\ L^2(\mathbb{T})]_{5/8} = H^{5/4}(\mathbb{T})$，从而得出

$$|R_{3,4}(s)| \leq C(|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 + |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^6 + 1).$$

最后一项 $R_{3,\ 5}$ 采用相同的处理方法：

$$|R_{3,5}(s)| \leq C(|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 + |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^6 + 1).$$

结合右侧的五个估计（4.24），对 $\mathbb{E}\sup^{t\in[0,t']}$ 两边取上确界，并回顾定理 4.1 中关于 $p = 6$ 的估计，我们得出

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']}|R_3(t)| \leq C\left(1+\mathbb{E}|u_0|_{L^2}^6 + \mathbb{E}\int_0^{t'}|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 ds\right).$$

接下来，我们关注方程（ R_4 4.20）中出现的最后一项。利用定义（4.18）和（4.19），我们写成

$$\begin{aligned}
R_4(t) = \int_0^t\int_{E_0}\int_{\mathbb{T}}\Big(&(\partial_x^2 P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi))^2 + \frac{5}{6}(u_\epsilon^N(s))^2(P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi))^2 \\
&+ \frac{5}{9}u_\epsilon^N(P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi))^3 + \frac{5}{9}(P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi))^4 - \frac{5}{3}\big(u_\epsilon^N(s)(\partial_x P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi))^2 \\
&+ P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi)\big[(\partial_x P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi))^2 + 2(\partial_x u_\epsilon^N(s))(\partial_x P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi))\big]\big)\Big)dxd\nu(\xi)ds \\
=: (R_{4,1}+\cdots+R_{4,7})(t).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

接下来，我们将分别给出以下各项的界：$R_{4、\ j}$、 $j = 1、2、\ldots\ldots、7$。首先，注意到噪声系数 K 的增长假设（A2）表明

$$\begin{aligned}
|R_{4,1}(t)| &\leq \int_0^t\int_{E_0}|P_N\partial_x^2 K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^2 d\nu(\xi)ds \leq \int_0^t\int_{E_0}|K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{H^2}^2 d\nu(\xi)ds \\
&\leq C\int_0^t(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2+|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2)ds.
\end{aligned}$$

接下来，注意到增长假设（A2）以及插值 $H^1(\mathbb{T}) = [H^2(\mathbb{T}) \ L^2(\mathbb{T})]_{1/2} \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{T})$ 表明

$$
\begin{aligned}
|R_{4,2}(t)| &\leq \frac{5}{6}\int_0^t |u_\epsilon^N(s)|_{L^\infty}^2 \left(\int_{E_0} |P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^2 \, d\nu(\xi)\right) ds \\
&\leq C\int_0^t (|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 + |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2})(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2) ds \\
&= C\int_0^t \left[|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 + |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^4 + |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2} + |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^3|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}\right] ds \\
&\leq C\left(1+\int_0^t \left[|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^6 + |\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2\right] ds\right).
\end{aligned}
$$

接下来，我们利用插值恒等式 $H^{1/6}(\mathbb{T}) = [H^2(\mathbb{T}) \ L^2(\mathbb{T})]_{1/12} \hookrightarrow L^3(\mathbb{T})$、Sobolev 嵌入 $H^2(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{T})$ 以及假设（A2），得到对于 $R_{4,\ 3}$，以下估计：

$$
\begin{aligned}
|R_{4,3}(t)| &\leq \frac{5}{9}\int_0^t |u_\epsilon^N(s)|_{L^\infty} \left(\int_{E_0} |P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^3}^3 d\nu(\xi)\right) ds \\
&\leq C\int_0^t |u_\epsilon^N(s)|_{L^\infty} \left(\int_{E_0} |K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^{11/4} \left(|K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^{1/4} + |\partial_x^2 K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^{1/4}\right) d\nu(\xi)\right) ds \\
&\leq C\int_0^t |u_\epsilon^N(s)|_{L^\infty} \left(\int_{E_0} \left(|K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^3 + |K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^{11/4}|\partial_x^2 K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^{1/4}\right) d\nu(\xi)\right) ds.
\end{aligned}
$$

接下来，我们对上述不等式的第二项应用 Hölder 不等式，得到

$$
\begin{aligned}
|R_{4,3}(t)| &\leq C\int_0^t |u_\epsilon^N(s)|_{L^\infty} \left(\int_{E_0} |K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^{22/7} d\nu(\xi)\right)^{7/8} \left(\int_{E_0} |\partial_x^2 K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^2 d\nu(\xi)\right)^{1/8} ds \\
&\quad + C\int_0^t |u_\epsilon^N(s)|_{L^\infty}(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^3) ds \\
&\leq C\int_0^t (|u_\epsilon^N(s)|_{L^2} + |\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}) \left(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^3 + |\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{1/4} + |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{11/4}|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{1/4}\right) ds \\
&\leq C\int_0^t \left(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^6 + |\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2\right) ds.
\end{aligned}
$$

结合连续嵌入 $H^{1/4}(\mathbb{T}) = [H^2(\mathbb{T}) \ L^2(\mathbb{T})]_{1/8} \hookrightarrow L^4(\mathbb{T})$、增长假设（A2）和（2.5），类似的论证可得

$$
\begin{aligned}
|R_{4,4}(t)| &\leq C\int_0^t \int_{E_0} |P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^4}^4 d\nu(\xi) ds \\
&\leq C\int_0^t \int_{E_0} \left(|K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^4 + |K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^{7/2}|\partial_x^2 K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^{1/2}\right) d\nu(\xi) ds \\
&\leq C\int_0^t \left[(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^4) + \left(\int_{E_0} |K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^{14/3} d\nu(\xi)\right)^{3/4} \left(\int_{E_0} |\partial_x^2 K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^2 d\nu(\xi)\right)^{1/4}\right] ds \\
&\leq C\int_0^t \left((1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^4) + (1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{7/2})(1+|u_\epsilon(s)^N|_{L^2}^{1/2} + |\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{1/2}\right) ds \\
&\leq C\int_0^t \left(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^6 + |\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2\right) ds.
\end{aligned}
$$

$R_{4,\ 5}$ 的界很容易得到:

$$
\begin{aligned}
|R_{4,5}(t)| &\le C\int_0^t\int_{E_0}(u_\epsilon^N(s),(\partial_x P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi))^2)_{L^2}d\nu(\xi)ds\\
&\le C\int_0^t |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}\left(\int_{E_0}|\partial_x P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^4}^2 d\nu(\xi)\right)ds.
\end{aligned}
$$

接下来，利用 Sobolev 插值 $H^{5/4}(\mathbb{T}) = [H^2(\mathbb{T})\ L^2(\mathbb{T})]_{5/8}$、连续嵌入$H^{1/4}(\mathbb{T})\hookrightarrow L^4(\mathbb{T})$、增长假设（A2）和（2.5），我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{E_0}|\partial_x P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^4}^2 d\nu(\xi) \le C\int_{E_0}\big(|K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^{3/4}|\partial_x^2 K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^{5/4}+|K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^2\big)d\nu(\xi)\\
&\quad\le C\left(\int_{E_0}|K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^2 d\nu(\xi)\right)^{3/8}\left(\int_{E_0}|\partial_x^2 K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^2 d\nu(\xi)\right)^{5/8}\\
&\qquad + C\int_{E_0}|K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^2 d\nu(\xi)\\
&\quad\le C\Big(\big(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2\big)^{3/8}\big(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2+|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2\big)^{5/8}+\big(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2\big)\Big)\\
&\quad\le C\big(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^4+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{3/4}|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{5/4}\big).
\end{aligned}
$$

因此可得

$$
\begin{aligned}
|R_{4,5}(t)| &\le C\int_0^t\big(|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^3+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^5+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{7/4}|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{5/4}\big)ds\\
&\le C\int_0^t\big(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^6+|\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2\big)ds.
\end{aligned}
$$

接下来，通过分部积分，我们将$R_{4,\ 6}$ 改写如下:

$$
\begin{aligned}
R_{4,6}(t) &= \int_0^t\int_{E_0}\big(P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi),(\partial_x P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi))^2\big)_{L^2}d\nu(\xi)ds\\
&= \frac{1}{2}\int_0^t\int_{E_0}\big(\partial_x(P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi))^2,\partial_x(P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi))\big)_{L^2}d\nu(\xi)ds\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^t\int_{E_0}\big((P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi))^2,\partial_x^2(P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi))\big)_{L^2}d\nu(\xi)ds.
\end{aligned}
$$

我们利用 Sobolev 插值不等式和连续嵌入 $H^{1/4}(\mathbb{T}) = [H^2(\mathbb{T})\ L^2(\mathbb{T})]_{1/8}\hookrightarrow L^4(\mathbb{T})$ 来估计上式右端，如下，

$$
\begin{aligned}
R_{4,6}(t) &\le C\int_0^t\int_{E_0}|P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^4}^2|\partial_x^2 P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}d\nu(\xi)ds\\
&\le C\int_0^t\int_{E_0}|K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^{7/4}(|K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^{1/4}+|\partial_x^2 K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^{1/4})|\partial_x^2 K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}d\nu(\xi)ds\\
&\le C\int_0^t\int_{E_0}\big(|K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^2|\partial_x^2 K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}+|K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^{7/4}|\partial_x^2 K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^{5/4}\big)d\nu(\xi)ds.
\end{aligned}
$$

接下来，我们将求出上述不等式右端两项的界。对于第一项，利用增长假设（A2）和（2.5），我们得到，

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{E_0} |K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^2 |\partial_x^2 K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2} d\nu(\xi) ds \\
&\le \int_0^t \int_{E_0} \big(|K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^4 + |\partial_x^2 K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^2\big) d\nu(\xi) ds \\
&\le C\int_0^t \big(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^4 + |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 + |\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2\big) ds \le C\int_0^t (1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^6 + |\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2) ds.
\end{aligned}$$

对于剩余项，我们发现

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{E_0} |P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^{7/4} |\partial_x^2 P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^{5/4} d\nu(\xi) ds \\
&\qquad \le \int_0^t \left(\int_{E_0} |K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^{14/3} d\nu(\xi)\right)^{3/8} \left(\int_{E_0} |\partial_x^2 K(u_\epsilon^N(s),\xi)|_{L^2}^2 d\nu(\xi)\right)^{5/8} ds \\
&\qquad \le C\int_0^t (1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{14/3})^{3/8} (1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 + |\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2)^{5/8} ds \\
&\qquad \le C\int_0^t (1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^6 + |\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2) ds.
\end{aligned}$$

上述两个估计对 $R_{4,\ 6}$ 意味着

$$|R_{4,6}(t)| \le C\int_0^t (1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^6 + |\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2) ds.$$

式（4.26）中的最后一项 $R_{4,\ 7}$ 与项 $R_{4,\ 6}$ 的处理完全相同，因此我们得到，

$$|R_{4,7}(t)| \le C\int_0^t (1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^6 + |\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2) ds.$$

现在，我们汇总式（$R_{4,\ j}$；$j = 1, \ldots, 7$ 中各项的估计，并对$\mathbb{E}\sup^{t\in[0,t']}$ 两边取上确界。对于式（4.20）右端的最后一项 R_4：

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']} |R_4(t)| \le C\mathbb{E}\int_0^{t'} (1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^6 + |\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2) ds.$$

此外，利用定理4.1 中令 $p = 6$所得的界，我们得出

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']} |R_4(t)| \le C\left(1+\mathbb{E}|u_0|_{L^2}^6 + \mathbb{E}\int_0^{t'} |\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 ds\right).$$

在为（4.20）右端各项找到适当的界之后，我们现在转而讨论（4.20）左端各项，它们在（4.21）中定义。我们从 L_1开始。通过分部积分并利用索伯列夫嵌入 $H^{1/4}(\mathbb{T}) = [H^2(\mathbb{T})\ L^2(\mathbb{T})]_{1/8} \hookrightarrow L^4(\mathbb{T})$，我们得到：

$$\begin{aligned}
L_1(t) &= -\frac{5}{3}\int_{\mathbb{T}} u_\epsilon^N(t,x)(\partial_x u_\epsilon^N(t,x))^2 dx = \frac{5}{6}\int_{\mathbb{T}} (u_\epsilon^N(t,x))^2 \partial_x^2 u_\epsilon^N(t,x) dx \\
&\le \frac{5}{6}|u_\epsilon^N(t)|_{L^4}^2 |\partial_x^2 u_\epsilon^N(t)|_{L^2} \\
&\le C(|u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^2 + |u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^{7/4} |\partial_x^2 u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^{1/4}) |\partial_x^2 u_\epsilon^N(t)|_{L^2} \\
&\le \frac{1}{8}|\partial_x^2 u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^2 + C\big(|u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^8 + 1\big).
\end{aligned}$$

项 L_2 的处理方式类似，

$$|L_2(t)| \leq \frac{1}{8}\int_0^t |\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 ds + C\int_0^t (1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^8)ds.$$

对于 L_3，我们使用嵌入 $H^{1/4}(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^4(\mathbb{T})$ 和 Sobolev 插值不等式$H^{5/4}(\mathbb{T}) = [H^4(\mathbb{T}) \; L^2(\mathbb{T})]_{5/16}$，得到：

$$\begin{aligned}
|L_3(t)| &= C\epsilon\int_0^t\int_{\mathbb{T}} (\partial_x u_\epsilon^N(s,x))^2(\partial_x^4 u_\epsilon^N(s,x))dxds \leq C\epsilon\int_0^t |\partial_x u_\epsilon^N(s)|_{L^4}^2 |\partial_x^4 u_\epsilon^N(s)|_{L^2} ds \\
&\leq C\epsilon\int_0^t \left(|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 |\partial_x^4 u_\epsilon^N(s)| + |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{11/8} |\partial_x^4 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{13/8}\right) ds \\
&\leq \frac{\epsilon}{50}\int_0^t |\partial_x^4 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 ds + C\epsilon\int_0^t (1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^8)ds.
\end{aligned}$$

类似地，嵌入 $H^{1/3}(\mathbb{T}) = [H^4(\mathbb{T}) \; L^2(\mathbb{T})]_{1/12} \hookrightarrow L^6(\mathbb{T})$ 对最后一项 L_4给出：

$$\begin{aligned}
|L_4(t)| &= C\epsilon\int_0^t\int_{\mathbb{T}} (u_\epsilon^N(s))^3(\partial_x^4 u_\epsilon^N(s))ds \leq C\epsilon\int_0^t |u_\epsilon^N(s)|_{L^6}^3 |\partial_x^4 u_\epsilon^N(s)|_{L^2} ds \\
&\leq C\int_0^t \left(|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^3 |\partial_x^4 u_\epsilon^N(s)| + |u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{11/4} |\partial_x^4 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{5/4}\right) ds \\
&\leq \frac{\epsilon}{50}\int_0^t |\partial_x^4 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 ds + C\epsilon\int_0^t (1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^8)ds.
\end{aligned}$$

因此，结合上述关于 L_j, $j=1,2,3,4$ 的估计，取 $\mathbb{E}$ 上确界$t\in[0,t']$ 并应用定理4.1 （针对 $p=8$），我们得到 (4.20) 左端各项合并后的结果：

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,t']} |(L_1+L_2+L_3+L_4)(t)|\right] \leq \frac{1}{4}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']} |\partial_x^2 u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon}{25}\int_0^t |\partial_x^4 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 ds + C(1+\mathbb{E}|u_0|_{L^2}^8).$$

因此，汇总 (R_i, L_i； $i=1,..,4$ 中各项的估计后，我们得出

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,t']} |\partial_x^2 u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^2 + \epsilon\mathbb{E}\int_0^{t'} |\partial_x^4 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 ds \leq C\left(1+\mathbb{E}|u_0|_{L^2}^8 + \mathbb{E}|\partial_x^2 u_0|_{L^2}^2 + \mathbb{E}\int_0^{t'} |\partial_x^2 u_\epsilon^N(s)|_{L^2} ds\right).$$

然后，我们应用格朗沃尔引理，得到所需结果（4.16），即

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left[|\partial_x^2 u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^2\right] + \epsilon\mathbb{E}\int_0^T |\partial_x^4 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 ds \leq Ce^{CT}\left(\mathbb{E}|u_0|_{L^2}^8 + \mathbb{E}|\partial_x^2 u_0|_{L^2}^2 + 1\right).$$

特别地，利用（2.4）中给出的范数等价关系（适用于 $m=2$），以及定理 4.1 中得到的低阶估计，我们由（4.16）得到（4.17）。至此，定理4.2 的证明完成。□

4.3. **紧性**。 得益于定理4.1- 4.2中得到的界，我们可以在相应空间的弱-*拓扑下，得到近似解 u_ϵ^N 沿某个子序列收敛。然而，要将 $N\to\infty$代入方程（4.3）中的非线性项时，这些弱-*收敛结果并不足够。因此，为了提升这种收敛方式，我们将导出（紧致性）结果，涉及上述近似解的概率分布的紧性。我们的紧致性论证基于以下版本的Aubin-Lions定理（例如，见 [33, 引理 4。3]）：由于 $H^2(\mathbb{T}) \subset\subset H^1(\mathbb{T})$，以下嵌入是紧的；

$$L^\infty(0,T;H^2(\mathbb{T})) \cap W^{1/4,2}(0,T;H^{-2}(\mathbb{T})) \subset\subset L^p(0,T;H^1(\mathbb{T})) \qquad \forall p>1. \tag{4.27}$$

因此，为了应用（4.27），我们将在分数阶Sobolev空间中推导近似解 u_ϵ^N的时间界。首先，我们注意到以下引理，它为（4.3）右侧的随机积分提供所需的时间分数阶导数界，其阶数严格小于 $\frac{1}{2}$。

引理4.3. 对每一个 $\alpha\in(0,1/2)$，存在常数 $C=C(\alpha,T)>0$ 使得：

$$\mathbb{E}\left\|\int_0^\cdot G(u_\epsilon^N(s))dW(s)\right\|^2_{H^\alpha(0,T;L^2(\mathbb{T}))}\leq C\mathbb{E}\int_0^T\|G(u_\epsilon^N(s))\|^2_{HS(U_0,L^2(\mathbb{T}))}ds\leq C,$$

$$\mathbb{E}\left\|\int_0^\cdot\int_{E_0}K(u_\epsilon^N(s),\xi)d\widetilde{\pi}(s,\xi)\right\|^2_{H^\alpha(0,T;L^2(\mathbb{T}))}\leq C\mathbb{E}\int_0^T\int_E|K(u_\epsilon^N(s),\xi)|^2_{L^2(\mathbb{T})}d\nu(\xi)ds\leq C.$$

证明。 该定理的证明是标准的。感兴趣的读者可参阅 [19, 引理2.1]以及 [11, 引理3.4]以了解其证明。 □

接下来，我们求其余（确定性）漂移项的分数阶时间导数的界，它们出现在（4.3）中。然后，利用引理 4.3 我们将得到近似解所需的界 u_ϵ^N。

定理4.4 （分数阶Sobolev估计）。 对于任意固定的 $\alpha\in(0,1/2)$，存在常数$C>0$，其仅依赖于 T、α 以及初始数据 u_0，使得

$$\mathbb{E}\|u_\epsilon^N\|^2_{H^\alpha(0,T;H^{-2}(\mathbb{T}))}\leq C. \tag{4.28}$$

证明。 在前面的结果引理 4.3中，我们得到了方程右端随机积分（4.3）的时间分数阶导数的界。因此，现在我们考虑（4.3）中的其余漂移项：

(4.29)

$$\begin{aligned}
&\left\|u_0^N-\int_0^\cdot\partial_x^3u_\epsilon^N(s)ds-\int_0^\cdot P_N(\theta_N(|u_\epsilon^N(s)|_{L^2})u_\epsilon^N(s)\partial_xu_\epsilon^N(s))ds-\int_0^\cdot\epsilon\partial_x^4u_\epsilon^N(s)ds\right\|^2_{H^\alpha(0,T;H^{-2})}\\
&\leq C\left\|u_0^N-\int_0^\cdot\partial_x^3u_\epsilon^N(s)ds-\int_0^\cdot P_N(\theta_N(|u_\epsilon^N(s)|_{L^2})u_\epsilon^N(s)\partial_xu_\epsilon^N(s))ds-\int_0^\cdot\epsilon\partial_x^4u_\epsilon^N(s)ds\right\|^2_{H^1(0,T;H^{-2})}\\
&\leq C\left\|u_0^N-\int_0^\cdot\partial_x^3u_\epsilon^N(s)ds-\int_0^\cdot P_N(\theta_N(|u_\epsilon^N(s)|_{L^2})u_\epsilon^N(s)\partial_xu_\epsilon^N(s))ds-\int_0^\cdot\epsilon\partial_x^4u_\epsilon^N(s)ds\right\|^2_{L^2(0,T;H^{-2})}\\
&+C\left(\int_0^T|\partial_x^3u_\epsilon^N(s)|^2_{H^{-2}}ds+\int_0^T|u_\epsilon^N(s)\partial_xu_\epsilon^N(s)|^2_{H^{-2}}ds+\epsilon^2\int_0^T|\partial_x^4u_\epsilon^N(s)|^2_{H^{-2}}ds\right)\\
&\leq C\left(|u_0^N|^2_{L^2}+\int_0^T|\partial_x^3u_\epsilon^N(s)|^2_{H^{-2}}ds+\int_0^T\theta_N(|u_\epsilon^N(s)|_{H^1})|u_\epsilon^N(s)\partial_xu_\epsilon^N(s)|^2_{H^{-2}}ds+\epsilon^2\int_0^T|\partial_x^4u_\epsilon^N(s)|^2_{H^{-2}}ds\right)\\
&=:C\big(|u_0^N|^2_{H^{-2}}+I_1+I_2+I_3\big).
\end{aligned}$$

接下来注意到，对于任意 $v\in H^2(\mathbb{T})$，通过分部积分可得

$$|(\partial_x^3u_\epsilon^N,v)_{L^2}|=|(\partial_xu_\epsilon^N,\partial_x^2v)_{L^2}|\leq|\partial_xu_\epsilon^N|_{L^2}|v|_{H^2}.$$

因此，$|\partial_x^3u_\epsilon^N|_{H^{-2}}\leq|\partial_xu_\epsilon^N|_{L^2}$。类似地，我们有 $|\partial_x^4u_\epsilon^N|_{H^{-2}}\leq|\partial_x^2u_\epsilon^N|_{L^2}$.

因此，通过直接应用定理4.2中得到的界，我们可以得出

$$\mathbb{E}[I_1+I_3]\leq C+C\epsilon^2\leq C.$$

对于 I_2，根据索伯列夫嵌入 $H^2(\mathbb{T})\hookrightarrow L^4(\mathbb{T})$ 以及定理 4.2，我们注意到

$$\mathbb{E}\int_0^T\theta_N(|u_\epsilon^N(s)|_{H^1})|u_\epsilon^N(s)\partial_xu_\epsilon^N(s)|^2_{H^{-2}}ds\leq C\mathbb{E}\int_0^T|u_\epsilon^N(s)|^2_{L^4}ds\leq C\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|u_\epsilon^N(t)|^2_{H^2}\leq C.$$

结合关于 I_1、I_2和 I_3 的估计，我们完成了定理 4.4 的证明。 □

现在利用这一时间正则性结果，我们证明以下紧性结 lt.

命题 4.5。 解的概率分布序列 $\left(u_\epsilon^N\right)_{N=1}^\infty$ 在 (4.3)中，在$L^2(0,T;\ H^1(\mathbb{T}))$内是胎紧的。

证明。 本命题的证明依赖于紧嵌入（4.27）。为此，我们先定义如下有界球，（

4.30)

$$B_r := \left\{v \in L^2(0,\quad T; H^2(\mathbb{T})) \cap W^{1/4,2}(0,T;H^{-2}(\mathbb{T})) : \|v\|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{T}))} + \|v\|_{W^{1/4,2}(0,T;H^{-2}(\mathbb{T}))} \le r\right\}.$$

紧嵌入（4.27）进而推出 B_r 在 $L^2(0,T;\ H^1(\mathbb{T}))$ 中是紧的。根据定理 4.2 和 4.4 并应用切比雪夫不等式，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[u_\epsilon^N \notin B_r\right] &\le \mathbb{P}\left(\|u_\epsilon^N\|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{T}))} > \frac{r}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\|u_\epsilon^N\|_{W^{1/4,2}(0,T;H^{-2}(\mathbb{T}))} > \frac{r}{2}\right)\\ &\le \frac{4}{r^2}\left(\mathbb{E}\|u_\epsilon^N\|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{T}))} + \mathbb{E}\|u_\epsilon^N\|_{W^{1/4,2}(0,T;H^{-2}(\mathbb{T}))}\right)\\ &\le \frac{C}{r^2},\end{aligned} \tag{4.31}$$

其中常数 C 与 N 和 ϵ无关。这表明 $\left(u_\epsilon^N\right)_{N=1}^\infty$ 的概率分布在 $L^2(0,T;\ H^1(\mathbb{T}))$ 中构成胎紧测度序列。□

回顾定义 2 中，我们要求鞅解是一个过程，其在空间 `上的右连续且有左极限`样本路径属于 $H^{-2}(\mathbb{T})$。这一判据使我们获得了随机积分良定义所需的噪声系数的可测性。因此，为了得到一个右连续且有左极限的候选解，我们必须证明近似解的概率分布在 u_ϵ^N带 Skorohod 拓扑的右连续且有左极限函数空间中是紧的；该空间是可分且可度量化的，见下文及 [2]。Skorohod 拓扑的分析较为复杂。然而，Aldous 的一项经典结果给出了一个等价条件，我们将在下述定理中重述该条件。

定理 4.6 (Aldous 紧性判据 [1])。 设(S,d) 为一个可分完备度量空间，且 $X_N = (X_N(t))^{t\in[0,T]}$为定义在滤过概率空间$(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)^{t\ge 0})$上的一列 S 值随机过程，其中每个 X_N都是$(\mathcal{F}_t)^{t\in[0,T]}$-适应的，并且在 S 中具有右连续且有左极限的样本路径。假设以下条件成立：

(i) 存在一个稠密子集 $D \subset [0,T]$，使得对每个 $t \in D$，$X_N(t)$ 的分布序列在 S 中是胎紧的。*(ii)* 对每个 $\eta > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对于每个由 T 所界定的$(\tau_N)_{N=1}^\infty$ 的$(\mathcal{F}_t)^{t\ge 0}$-停时序列，

$$\sup_{N\ge 1}\ \sup_{0\le t\le\delta} \mathbb{P}\big(d(X_N((\tau_N+t)\wedge T), X_N(\tau_N)) > \eta\big) \le \varepsilon.$$

那么，序列$(X_N)^{n\ge 1}$在 *Skorokhod* 空间 $\mathcal{D}([0,T];\ S)$中是胎紧的。

利用 Aldous 紧性判据定理 4.6，我们将为近似解的概率分布建立如下紧性结果。

命题 4.7。 近似解 $\left(u_\epsilon^N\right)_{N=1}^\infty$ 的分布序列在赋予 *Skorohod* 拓扑的空间 $\mathcal{D}([0,T];\ H^{-2}(\mathbb{T}))$ 中是胎紧的。

证明。 我们将验证定理 4.6 中的两个条件，其中 $S := H^{-2}(\mathbb{T})$ 和 $X_N := u_\epsilon^N$。

步骤 1. 满足定理 4.6 中的假设 (i)。换言之，我们将证明，对于每个 $t \in [0,T]$，取值于$L^2(\mathbb{T}$的随机变量 $\left(u_\epsilon^N(t)\right)_{N=1}^\infty$ 的概率分布序列在 $H^{-2}(\mathbb{T})$中是胎紧的。

令 $B_r := \{v \in L^2(\mathbb{T}) : |v|_{L^2} \le r\}$。由 Sobolev嵌入定理可知， B_r 紧嵌入于 $H^{-2}(\mathbb{T})$中。现在应用切比雪夫不等式和定理 4.1，可得，对任意 $t \in [0,T]$，有

$$\mathbb{P}(u_\epsilon^N(t) \notin B_r) = \mathbb{P}(|u_\epsilon^N(t)|_{L^2} > r) \le \frac{\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^2}{r^2} \le \frac{C}{r^2}, \tag{4.32}$$

其中 C 与 N 和 t相互独立。这表明 $\left(u_\epsilon^N(t)\right)_{N=1}^{\infty}$ 的概率分布在 $H^{-2}(\mathbb{T})$ 中是胎紧的。**步骤 2：** 接下来，我们将证明近似解 u_ϵ^N满足定理 4.6中的假设 (ii)。换言之，我们将证明，对于每个由 $\tau_N)_{N=1}^{\infty}$ 组成的 $\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$- 停时序列，且其由 T 所界定，以下条件 $\mathbb{P}$- 几乎处处成立。

$$\lim_{t'\to 0^+}\sup_{N\in\mathbb{N}}\sup_{t\in[0,t']}\mathbb{E}\left|u_\epsilon^N((\tau_N+t)\wedge T) - u_\epsilon^N(\tau_N)\right|_{H^{-2}}^2 = 0. \tag{4.33}$$

我们考虑由函数 4.3满足的随机偏微分方程（ u_ϵ^N，并注意到，对于固定的 t ，应用 H¨older 不等式可得:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|u_\epsilon^N((\tau_N+t)\wedge T) - u_\epsilon^N(\tau_N)\right|_{H^{-2}}^2 \\
&\le t\cdot\mathbb{E}\int_{\tau_n}^{(\tau_n+t)\wedge T}|\partial_x^3 u_\epsilon^N(s)|_{H^{-2}}^2 ds + t\cdot\mathbb{E}\epsilon^2\int_{\tau_n}^{(\tau_n+t)\wedge T}|\partial_x^4 u_\epsilon^N(s)|_{H^{-2}}^2 ds \\
&+ t\cdot\mathbb{E}\int_{\tau_n}^{(\tau_n+t)\wedge T}|\theta_N(|u_\epsilon^N(s)|_{H^1})u_\epsilon^N(s)\partial_x u_\epsilon^N(s)|_{H^{-2}}^2 ds \\
&+ \mathbb{E}\left|\int_{\tau_n}^{(\tau_n+t)\wedge T} P_N G(u_\epsilon^N(s))dW(s)\right|_{H^{-2}}^2 + \mathbb{E}\left|\int_{\tau_n}^{(\tau_n+t)\wedge T}\int_{E_0} P_N K(u_\epsilon^N(s),\xi)d\widehat{\pi}(\xi,s)\right|_{H^{-2}}^2, \\
&=: J_1(t)+J_2(t)+J_3(t)+J_4(t)+J_5(t).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

因此，我们的目标是证明 $\lim_{t'\to 0^+}\sup_{N\in\mathbb{N}}\sup_{t\in[0,t']}J_i\ (t) = 0$ 对于 $i = 1、2、3、4、5$ 成立。注意，根据定理 4.2，存在某个 C ，与 N 和 ϵ 以及 R无关，使得:

$$\begin{aligned}
J_1(t) &\le t\cdot\mathbb{E}\int_{\tau_n}^{(\tau_n+t)\wedge T}|\partial_x^3 u_\epsilon^N(s)|_{H^{-2}}^2 ds \le t\cdot T\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|\partial_x^2 u_\epsilon^N|_{L^2}^2 \le Ct, \\
J_2(t) &\le t\cdot\epsilon^2\mathbb{E}\int_{\tau_n}^{(\tau_n+t)\wedge T}|\partial_x^4 u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 ds \le Ct, \\
J_3(t) &\le Ct\cdot\mathbb{E}\int_{\tau_n}^{(\tau_n+t)\wedge T}|u_\epsilon^N(s)|_{H^2}^2 ds \le Ct.
\end{aligned}$$

由 Itˆo 等距性、 G 和 K (A1)-(A2) 中的增长条件以及定理4.1，两项 J_4 和 J_5 可用类似方式处理:

$$(J_4(t)+J_5(t)) \le Ct\cdot\mathbb{E}\int_{\tau_n}^{(\tau_n+t)\wedge T}\left(1+|u_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2\right)ds \le Ct\left(1+\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|u_\epsilon^N(t)|_{L^2}^2\right) \le Ct.$$

We e需要强调的是，该常数 C 与 t'， N 和 ϵ无关。因此可得 t

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\sup_{t\in[0,t']}\mathbb{E}\left|u_\epsilon^N((\tau_n+t)\wedge T) - u_\epsilon^N(\tau_n)\right|_{H^{-2}}^2 \le \sup_{N\in\mathbb{N}}\sup_{t\in[0,t']}(J_1(t)+J_2(t)+J_3(t)+J_4(t)+J_5(t)) \le Ct'.$$

令 $t'\to 0$ ，即可得到所需结果（4.33）。 □

接下来，我们借鉴命题 4.5、命题 4.7 以及 [32, 引理2] 中的证明思路，来证明 $\left(u_\epsilon^N\right)_{N=1}^{\infty}$ 在空间中的紧性

$$\mathcal{X}_u := L^2(0,T;H^1(\mathbb{T}))\cap\mathcal{D}([0,T];H^{-2}(\mathbb{T}))\cap\mathcal{D}([0,T];H_w^2(\mathbb{T})), \tag{4.35}$$

赋予乘积拓扑。这里， $H^2_w(\mathbb{T})$ 表示赋予弱拓扑的空间 $H^2(\mathbb{T})$。

命题 4.8。 近似解的概率分布序列 $\left(u_\epsilon^N\right)_{N=1}^\infty$ 在空间 $\mathcal{X}_u$中是胎紧的。

证明。固定 $\varepsilon > 0$。沿用命题 4.5的类似论证，我们可以定义 $A_1 \subset L^2(0,T;H^1(\mathbb{T}))$ 如下:

$$A_1 := \left\{ v \in L^\infty(0,T;H^2(\mathbb{T})) \cap W^{1/4,2}(0,T;H^{-2}(\mathbb{T}) : \sup_{t\in[0,T]} |v(t)|_{H^2} + \|v\|_{W^{1/4,2}(0,T;H^{-2})} < R \right\},$$

它在 $L^2(0,T;H^1(\mathbb{T}))$ 中是紧的。根据切比雪夫不等式，我们可以选取足够大的 R，使得

$$\mathbb{P}(u_n \notin A_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

接下来，注意到沿用命题 4.7的证明，我们有 $\left(u_\epsilon^N\right)_{N=1}^\infty$ 的概率分布在空间 $\mathcal{D}([0,T];H^{-3}(\mathbb{T}))$ 中是胎紧的。换言之，存在一个紧子集 $A_2 \subset \mathcal{D}(0,T;H^{-3}(\mathbb{T}))$，使得

$$\mathbb{P}(u_n \notin A_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 [32, 引理 2]（另见 [32, 推论 1]），我们推断 $A_1 \cap A_2$ 是$\mathcal{D}([0,T];H^2_w(\mathbb{T}))$ 中的一个紧子集，并且

$$\mathbb{P}(u_n \notin A_1 \cap A_2) \le \mathbb{P}(u_n \notin A_1) + \mathbb{P}(u_n \notin A_2) < \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，我们得出 $\left(u_\epsilon^N\right)_{N=1}^\infty$ 的概率分布在 $\mathcal{D}([0,T];H^2_w(\mathbb{T}))$中是胎紧的。 □

4.4. 取极限 $N \to \infty$。 设 $\mathcal{N}_{\#[0,T)\times E}$为 $[0,T) \times E$上在有界子集上有限的计数测度空间。我们赋予 $\mathcal{N}_{\#[0,T)\times E}$由弱-# 收敛诱导的拓扑。我们称 $\mu_n \to \mu$ 弱–#，如果

$$\int_{[0,T)\times E} f d\mu_n \to \int_{[0,T)\times E} f d\mu \tag{4.36}$$

对每一个有界、连续且在 $[0,T) \times E$中具有有界支集的实值 f。借助于 [13], 中的命题 9.1.IV，我们知道该空间是可分的，并且可由一个完备度量度量化。

我们注意到， $\left(u_0^N, u_\epsilon^N, W, \pi\right)_{N\in\mathbb{N}}$在赋予乘积拓扑的空间中是胎紧的

$$\mathcal{X} := L^2(\mathbb{T}) \times \mathcal{X}_u \times C([0,T],U_0) \times \mathcal{N}^{\#}_{[0,T)\times E} \tag{4.37}$$

我们将 μ_ϵ^N记为 $\left(u_0^N, u_\epsilon^N, W, \pi\right)$ 在 $\mathcal{X}$中的分布。根据 Pro- horov 定理，存在 $\{\mu_\epsilon^N\}_{N\in\Lambda}$ 的一个子序列，对某个可数集合 $\Lambda \subset \mathbb{N}$，使得

$$\mu_\epsilon^N \text{ converges weakly to } \mu_\epsilon \text{ as } N \to \infty \text{ along } \Lambda \text{ on the space } \mathcal{X}. \tag{4.38}$$

通过应用 Jakubowski 在 [27]中给出的 Skorohod 表示定理版本，可将测度的弱收敛提升为几乎必然收敛。

定理 4.9。 假设 $u_0 \in L^8(\Omega\ \mathcal{F}_0,\ \mathbb{P};\ L^2(\mathbb{T})) \cap L^2(\Omega\ \mathcal{F}_0,\ \mathbb{P};\ H^2(\mathbb{T}))$ 的分布为 μ_0。那么存在一个概率空间 $(\widetilde{\Omega}\ \widetilde{\mathcal{F}},\ \widetilde{\mathbb{P}})$[1] 以及 $\mathcal{X}$-值随机变量 $\left(\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_\epsilon, \widetilde{W}, \widetilde{\pi}\right)$ 和 $\left(\widetilde{u}_0^N, \widetilde{u}_\epsilon{}^N, \widetilde{W}_N, \widetilde{\pi}_N\right)_{N\in\Lambda}$ *such that*

[1] $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}}) = ([0,1), \text{Borel sets of } [0,1), \text{Lebesgue measure})$

(i) 对每个 $N \in \Lambda$，$\left(\widetilde{u}_0^N, \widetilde{u}_\epsilon^N, \widetilde{W}_N, \widetilde{\pi}_N\right)$ 的分布为 μ_ϵ^N，$\left(\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_\epsilon, \widetilde{W}, \widetilde{\pi}\right)$ 的分布为 μ_ϵ，且 $\widetilde{u}_0$ 的分布为μ_0，~*(ii)* 以下收敛几乎必然成立（关于 $\mathbb{P}$）：

$$\lim_{N\to\infty}\left(\widetilde{u}_0^N, \widetilde{u}_\epsilon^N, \widetilde{W}_N, \widetilde{\pi}_N\right) = \left(\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_\epsilon, \widetilde{W}, \widetilde{\pi}\right), \tag{4.39}$$

~*(iii)* 对于满足通常条件的某个滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$，$W_N$是一个 $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-维纳过程，且 $\tilde{\pi}_N$ 是具有强度测度$dt \otimes d\nu$的时间齐次泊松随机测度。*(iv)* 对每个 $N \in \Lambda$，$\widetilde{u}_\epsilon^N$都是相对于随机基 $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t^N)_{t\in[0,T]}, \widetilde{W}_N, \widetilde{\pi}_N\right)$ 的 *Galerkin* 格式 *(4.3)* 的解，并且 $\widetilde{u}_\epsilon^N(0) = \widetilde{u}_0^N$, $\widetilde{\mathbb{P}}$-几乎必然成立。

滤过 $(\widetilde{\mathcal{F}}_t^N)_{t\in[0,T]}$按如下方式构造：令 $\mathcal{F}'^N_t$为由随机变量 $\widetilde{u}_\epsilon^N(s)$ $\widetilde{W}_N(s)$ $\widetilde{\pi}_N((0,s]\times\Gamma)$ 所生成的 σ-域，其中 $s \le t$ 取遍所有取值，且 Γ 取遍 E_0中的所有博雷尔子集。然后定义

$$\mathcal{N} := \left\{A \in \widetilde{\mathcal{F}} \mid \widetilde{\mathbb{P}}(A) = 0\right\}, \quad \bar{\mathcal{F}}_t^N := \sigma(\mathcal{F}'_t \cup \mathcal{N}), \quad \widetilde{\mathcal{F}}_t^N := \bigcap_{s\ge t} \bar{\mathcal{F}}_s^N. \tag{4.40}$$

这就在新的概率空间 $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$ 上构造了一个完备、右连续的滤过 $(\widetilde{\mathcal{F}}_t^N)_{t\in[0,T]}$，它依赖于 N, ϵ和截断参数$\widetilde{R}$，噪声过程和~近似解都适应于该滤过。构造使极限过程适应的滤过 $(\mathcal{F}_t^\epsilon)_{t\in[0,T]}$的方法完全相同。

该定理的证明是标准的，因此我们略去。部分 (i)–(iii) 直接由 Skorohod 表示定理推出 [27]。而部分 (iv) 则在[11] 的附录中通过证明新旧解的分布等价得出。部分 (iv) 的一个直接推论是，$\widetilde{u}_\epsilon^N$继承了在定理 u_ϵ^N中为其推导的所有估计 4.1-4.2。

推论 4.10. 令 $\widetilde{u}_\epsilon^N$为定义在 $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t\in[0,T]}, \widetilde{W}, \widetilde{\pi}\right)$ 上的新随机变量，该变量由定理 *4.9*中得到。则 $\widetilde{u}_\epsilon^N$满足以下界，这些界与 N 和 ϵ无关，

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |\widetilde{u}_\epsilon^N(t)|_{L^2}^p\right] + \epsilon p\mathbb{E}\int_0^T |\widetilde{u}_\epsilon^N(s)|_{L^2}^{p-2} |\partial_x^2 \widetilde{u}_\epsilon^N(s)|_{L^2}^2 ds \le Ce^{CT}(\mathbb{E}|u_0|_{L^2}^p + 1). \tag{4.41}$$

and,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |\widetilde{u}_\epsilon^N(t)|_{H^2}^2\right] + \epsilon\mathbb{E}\int_0^T |\widetilde{u}_\epsilon^N(s)|_{H^4}^2 ds \le Ce^{CT}\left(\mathbb{E}|u_0|_{L^2}^8 + \mathbb{E}|\partial_x^2 u_0|_{L^2}^2 + 1\right). \tag{4.42}$$

现在我们回顾一下 Vitali 收敛引理，在本节余下部分中我们将多次用到它，以将几乎必然收敛（4.39）提升为空间 L^p 中的收敛。

引理 4.11 (Vitali 引理)。设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个概率空间，X 是一个 *Banach* 空间。对于某个 $p \in [1,\infty)$，假设我们有一个函数序列 $f, f_1, f_2, \cdots \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; X)$。若$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 满足

(i) $|f_n - f|_X \to 0$ 依概率收敛于 $n \to \infty$;
(ii) 上确界$_{n\ge1}\mathbb{E}|f_n|_X^q < \infty$ 对于某个 $q \in (p,\infty)$,
则 $f_n \to f$属于 $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; X)$。

首先，我们将在以下引理中总结推论 4.10 和引理4.11 的直接推论。

引理 4.12. 极限随机过程 $\widetilde{u}_\epsilon$ 由定理 *4.9* 得到，属于空间$L^8(\widetilde{\Omega}; L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{T}))) \cap L^2(\widetilde{\Omega}; L^2(0,T; H^4(\mathbb{T})))$，并满足以下收敛结果：

(i) $\widetilde{u}_\epsilon^N \to \widetilde{u}_\epsilon$ 在空间 $L^1(\widetilde{\Omega}; L^2(0,T; H^1(\mathbb{T}))) \cap L^2(\widetilde{\Omega}; L^2(0,T; L^2(\mathbb{T})))$ 中当 $N \to \infty$ 沿 Λ 时强收敛，*(ii)* $\widetilde{u}_\epsilon^N \rightharpoonup \widetilde{u}_\epsilon$ 在空间 $L^2(\widetilde{\Omega}; L^2(0,T; H^4(\mathbb{T})))$ 中当 $N \to \infty$ 沿 Λ 时弱收敛，*(iii)* $\widetilde{u}_\epsilon^N \overset{*}{\rightharpoonup} \widetilde{u}_\epsilon$ 在空间 $L^8(\widetilde{\Omega}; L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{T})))$ 中当 $N \to \infty$ 沿 Λ 时弱*收敛。

证明。 (i) 由定理 4.9可知， $\widetilde{u}_\epsilon^N \to \widetilde{u}_\epsilon$ 在空间 $L^2(0,T; H^1(\mathbb{T}))$, $\widetilde{\mathbb{P}}$-几乎处处成立。这意味着 $\widetilde{u}_\epsilon^N \to \widetilde{u}_\epsilon$ 在 $L^2(0,T; H^1(\mathbb{T}))$ 中，且 $L^2(0,T; L^2(\mathbb{T}))$ $\widetilde{\mathbb{P}}$- 几乎处处成立（因此也依概率成立）。此外，我们有

$$\sup_{N\in\Lambda} \widetilde{\mathbb{E}} \int_0^T |\widetilde{u}_\epsilon^N(s)|_{H^1}^2 ds \le \sup_{N\in\Lambda} \left(\widetilde{\mathbb{E}} \sup_{t\in[0,T]} |\widetilde{u}_\epsilon^N(t)|_{H^1}^2 \right) < \infty,$$
$$\sup_{N\in\Lambda} \widetilde{\mathbb{E}} \int_0^T |\widetilde{u}_\epsilon^N(s)|_{L^2}^8 ds \le \sup_{N\in\Lambda} \left(\widetilde{\mathbb{E}} \sup_{t\in[0,T]} |\widetilde{u}_\epsilon^N(t)|_{L^2}^8 \right) < \infty.$$

利用引理 4.11，我们推知该收敛在 $L^1(\widetilde{\Omega}; L^2(0,T; H^1(\mathbb{T}))) \cap L^2(\widetilde{\Omega}; L^2(0,T; L^2(\mathbb{T})))$.

(ii) 根据推论 4.10 和定理 4.2， $\left(\widetilde{u}_\epsilon^N\right)_{N\in\Lambda}$ 在 $L^2(\widetilde{\Omega}; L^2(0,T; H^4(\mathbb{T})))$ 中有界。根据阿劳格鲁定理，每个子序列都存在一个子序列，使其在 $L^2(\widetilde{\Omega}; L^2(0,T; H^4(\mathbb{T})))$ 中弱收敛。

（iii）根据推论 4.10 和定理 4.1，我们有 $\left(\widetilde{u}_\epsilon^N\right)_{N\in\Lambda}$ 在$L^8(\widetilde{\Omega}; L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{T})))$ 中有界。因此可得 $\widetilde{u}_\epsilon^N \overset{*}{\rightharpoonup} \widetilde{u}_\epsilon$ 在 $L^8(\widetilde{\Omega}; L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{T})))$ 中弱收敛，当 $N \to \infty$ 沿着 Λ。

□

接下来，我们将汇总随机积分的收敛结果，首先讨论维纳噪声对应的随机积分。以下结果的证明与 [11] 中给出的引理 5.6 至推论 5.11 的证明完全相同（另见 [33]中的引理 4.14、4.15），并结合 [17]中的引理 2.1。

引理 4.13. 右端的噪声项(4.1) 满足如下收敛：

(1) $P_N G(\widetilde{u}_\epsilon^N) \to G(\widetilde{u}_\epsilon)$ 当 $N \to \infty$ 沿 Λ 时，在空间 $L^2(0,T; HS(U_0, H^1(\mathbb{T})))$ 中 $\widetilde{\mathbb{P}}$-几乎必然成立。*(2)* 过程 $\left(\int_0^t P_N G(\widetilde{u}_\epsilon^N(s-))d\tilde{W}_N(s)\right)_{t\in[0,T]}$ 作为取值于 $L^2(0,T; H^1(\mathbb{T}))$ 的随机变量，当 $N \to \infty$ 时依概率收敛到 $\left(\int_0^t G(\widetilde{u}_\epsilon(s-))dW(s)\right)_{t\in[0,T]}$。*(3)* 过程 $\left(\int_0^t P_N G(\widetilde{u}_\epsilon^N(s-))d\tilde{W}_N(s)\right)_{t\in[0,T]}$ 在 $L^1(\widetilde{\Omega}; L^1(0,T; H^1(\mathbb{T})))$ 中当 $N \to \infty$ 时收敛到过程 $\left(\int_0^t G(\widetilde{u}_\epsilon(s-))dW(s)\right)_{t\in[0,T]}$。

类似地，我们证明以下关于跳跃积分的收敛结果。以下引理的证明见附录A。

引理 4.14. （4.1） 右端的噪声项满足以下收敛性质：

(1) $P_N K(\widetilde{u}_\epsilon^N(s-)\ \xi) \to K(\widetilde{u}_\epsilon(s-)\ \xi)$ 当 $N \to \infty$沿着 Λ, $\widetilde{\mathbb{P}}$-几乎处处在空间 $L^2([0,T]\times E_0, dt\otimes d\nu; H^1(\mathbb{T}))$ 中。*(2)* 过程 $\left(\int_{(0,t]}\int_{E_0} P_N K(\widetilde{u}_\epsilon^N(s-)\ \xi)d\widetilde{\pi}_N(s,\xi)\right)_{t\in[0,T]}$ 作为取值于 $L^2(0,T; H^1(\mathbb{T}))$ 的随机变量，在概率意义下收敛至过程 $\left(\int_{(0,t]}\int_{E_0} K(\widetilde{u}(s-)\ \xi)d\widetilde{\pi}(s,\xi)\right)_{t\in[0,T]}$。

(3) The processes $\left(\int_{(0,t]}\int_{E_0} P_N K(\widetilde{u}_\epsilon^N(s-),\xi)d\widetilde{\pi}_N(s,\xi)\right)_{t\in[0,T]}$ *converge in* $L^1(\widetilde{\Omega};L^1(0,T;H^1(\mathbb{T})))$ *to the process* $\left(\int_{(0,t]}\int_{E_0} K(\widetilde{u}(s-),\xi)d\widetilde{\pi}(s,\xi)\right)_{t\in[0,T]}$.

利用定理 4.9、引理 4.12 和引理4.13-4.14的收敛结果，我们现在可以转向 $N\to\infty$ 逼近系统（4.3）。由此得到正则化系统（4.1）的以下存在性结果。

定理 4.15. 随机基 $\left(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{\mathbb{P}},(\widetilde{\mathcal{F}}_t^\epsilon)_{t\geq0},\widetilde{W},\widetilde{\pi}\right)$ 以及极限随机变量 $\widetilde{u}_\epsilon$由定理 *4.9* 中得到，是方程 (4.1) 的一个全局鞅解，且满足 $\widetilde{u}_\epsilon(0)=\widetilde{u}_0$，其中 $\widetilde{u}_0$ 的分布为 μ_0.

证明。证明的目的是说明，在应用定理 4.9 中的 Skorohod 表示定理后得到的过程 $\widetilde{u}_\epsilon$ 属于空间 $L^8(\widetilde{\Omega};L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{T})))\cap L^2(\widetilde{\Omega};L^2(0,T;H^4(\mathbb{T})))$，且取值于 $\widetilde{u}_\epsilon\in\mathcal{D}([0,T];H^{-2}(\mathbb{T}))$，$\widetilde{\mathbb{P}}$-几乎处处，并且它是方程 (4.1) 的解。为此，我们将利用引理 4.12 中得到的收敛性，将 $N\to\infty$ 代入 (4.3)。首先，回顾一下，引理 4.13–4.14 为我们提供了 (4.3) 右端随机积分所需的收敛性。因此，在本证明的其余部分，我们将简要说明在 (4.3) 左端各项中对$N\to\infty$ 取极限的过程。

取一个向量 $\phi\in H^3(\mathbb{T})$ 和一个集合 $\Gamma\in\widetilde{\mathcal{F}}\otimes\mathcal{B}([0,T])$。由于根据定理 4.9，我们知道 $\widetilde{u}_\epsilon^N\to\widetilde{u}_\epsilon$ 在 $L^1(\widetilde{\Omega};L^1(0,T;H^1(\mathbb{T})))$ 当 $N\to\infty$ 沿着 Λ时，我们很容易得到线性项满足

$$\widetilde{\mathbb{E}}\int_0^T\left|\chi_\Gamma(\phi,\widetilde{u}_\epsilon^N(s)-\widetilde{u}_\epsilon(s))_{L^2}ds\right|\leq CT|\phi|_{H^3}\widetilde{\mathbb{E}}\int_0^T|\widetilde{u}_\epsilon^N(s)-\widetilde{u}_\epsilon(s)|_{L^2}ds\to0, \tag{4.43}$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}\int_0^T\left|\int_0^t\chi_\Gamma(\phi,\gamma\widetilde{u}_\epsilon^N(s)-\gamma\widetilde{u}_\epsilon(s))_{L^2}ds\right|\leq CT|\phi|_{H^3}\widetilde{\mathbb{E}}\int_0^T|\widetilde{u}_\epsilon^N(s)-\widetilde{u}_\epsilon(s)|_{L^2}ds\to0, \tag{4.44}$$

$$\epsilon\widetilde{\mathbb{E}}\int_0^T\left|\int_0^t\chi_\Gamma\left(\phi,\partial_x^4\widetilde{u}_\epsilon^N(s)-\partial_x^4\widetilde{u}_\epsilon(s)\right)_{L^2}ds\right|\leq CT\epsilon|\phi|_{H^3}\widetilde{\mathbb{E}}\int_0^T|\partial_x\widetilde{u}_\epsilon^N(s)-\partial_x\widetilde{u}_\epsilon(s)|_{L^2}ds\to0, \tag{4.45}$$

当 $N\to\infty$ 沿着 Λ 时。接下来需要检验两个截断非线性项的收敛性。为此，我们定义：

$$\begin{aligned}\alpha_N(t):=&\left|\int_0^t\chi_\Gamma\left(\phi,\theta_N(|\widetilde{u}_\epsilon^N(s)|_{H^1})P_N\widetilde{u}_\epsilon^N\partial_x(s)\widetilde{u}_\epsilon^N(s)-\widetilde{u}_\epsilon\partial_x\widetilde{u}_\epsilon(s)\right)_{L^2}ds\right|\\&\leq\left|\int_0^t\theta_N(|\widetilde{u}_\epsilon^N(s)|_{H^1})\chi_\Gamma\left(\phi,P_N(\widetilde{u}_\epsilon^N(s)\partial_x(s)\widetilde{u}_\epsilon^N(s)-\widetilde{u}_\epsilon\partial_x\widetilde{u}_\epsilon(s))\right)_{L^2}ds\right|\\&+\left|\int_0^t\theta_N(|\widetilde{u}_\epsilon^N(s)|_{H^1})\chi_\Gamma\left((I-P_N)\phi,\widetilde{u}_\epsilon(s)\partial_x\widetilde{u}_\epsilon(s)\right)_{L^2}ds\right|\\&+\left|\int_0^t(\theta_N(|\widetilde{u}_\epsilon^N(s)|_{H^1})-1)\chi_\Gamma\left(\phi,\widetilde{u}_\epsilon(s)\partial_x\widetilde{u}_\epsilon(s)\right)_{L^2}ds\right|\\&=:\alpha_{N,1}(t)+\alpha_{N,2}(t)+\alpha_{N,3}(t).\end{aligned}$$

我们将通过证明 $\alpha_{N,j}\to0$ 属于 $L^1(\widetilde{\Omega}\times[0,T])$，$j=1,2,3$，来证明 $\alpha_N\to0$ 属于 $L^1(\widetilde{\Omega}\times[0,T])$。我们先考察项 $\alpha_{N,1}$。利用分部积分公式以及推论

4.10和强收敛（4.12），我们得到

(4.46)
$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbb{E}}\int_0^T \alpha_{N,1}(t)dt = \widetilde{\mathbb{E}}\int_0^T \left| \int_0^t \theta_N(|\widetilde{u}_\epsilon^N(s)|_{H^1})\chi_\Gamma\left(\phi, P_N(\widetilde{u}_\epsilon^N(s)\partial_x\widetilde{u}_\epsilon^N(s) - \widetilde{u}_\epsilon(s)\partial_x\widetilde{u}_\epsilon(s))\right) ds\right| \\
&\le |\phi|_{L^\infty} T\widetilde{\mathbb{E}}\int_0^T \left|(\widetilde{u}_\epsilon^N(s) - \widetilde{u}_\epsilon(s))\partial_x\widetilde{u}_\epsilon^N(s) + \widetilde{u}_\epsilon(s)(\partial_x\widetilde{u}_\epsilon^N(s) - \partial_x\widetilde{u}_\epsilon(s))\right|_{L^1} ds \\
&\le C|\phi|_{L^\infty}\left(\widetilde{\mathbb{E}}\int_0^T |\widetilde{u}_\epsilon^N(s) - \widetilde{u}_\epsilon(s)|_{L^2}^2 ds\right)^{1/2}\left[\left(\widetilde{\mathbb{E}}\sup_{t\in[0,T]}|\widetilde{u}_\epsilon^N(t)|_{H^1}^2\right)^{1/2} + \left(\widetilde{\mathbb{E}}\sup_{t\in[0,T]}|\widetilde{u}_\epsilon(t)|_{H^1}^2\right)^{1/2}\right] \\
&\le C|\phi|_{L^\infty}\left(\widetilde{\mathbb{E}}\int_0^T |\widetilde{u}_\epsilon^N(s) - \widetilde{u}_\epsilon(s)|_{L^2}^2 ds\right)^{1/2} \to 0,
\end{aligned}$$

对于 $\alpha_{N,2}$，由索伯列夫嵌入 $H^1(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{T})$，我们得到

$$\begin{aligned}
\alpha_{N,2}(t) &= \left| \int_0^t \theta_N(|\widetilde{u}_\epsilon^N(s)|_{H^1})\chi_\Gamma\left((I-P_N)\phi, \partial_x\widetilde{u}_\epsilon(s)\right) ds\right| \le |(I-P_N)\phi|_{L^2}\int_0^T |\widetilde{u}_\epsilon(s)\partial_x\widetilde{u}_\epsilon(s)|_{L^2} ds \\
&\le C|(I-P_N)\phi|_{L^2}\sup_{t\in[0,T]}|\widetilde{u}_\epsilon(t)|_{H^1}^2
\end{aligned}$$

~由此可知 $\alpha_{N,2} \to 0$, $d\mathbb{P}\otimes dt$-几乎处处。此外，注意到，

$$\alpha_{N,2} \le 2C|\phi|_{L^2}\sup_{t\in[0,T]}|\widetilde{u}_\epsilon(t)|_{H^1}^2 \in L^1(\widetilde{\Omega}\times[0,T]),$$

由于控制收敛定理，我们可以得出 $\alpha_{N,2} \to 0$ 在 $L^1(\widetilde{\Omega}\times[0,T])$ 中。最后，对于$\alpha_{N,3}$，我们写出

(4.47)
$$\begin{aligned}
\alpha_{N,3}(t) &= \left| \int_0^t (\theta_N(|\widetilde{u}_\epsilon^N(s)|_{H^1}) - 1)\chi_\Gamma\left(\phi, \widetilde{u}_\epsilon(s)\partial_x\widetilde{u}_\epsilon(s)\right)_{L^2} ds\right| \\
&\le T|\phi|_{L^\infty}\sup_{t\in[0,T]}|\widetilde{u}_\epsilon(t)|_{H^1}^2\int_0^T |\theta_N(|\widetilde{u}_\epsilon^N(s)|_{H^1}) - 1| ds
\end{aligned}$$

~接下来我们将证明 $\alpha_{N,3} \to 0$, $d\mathbb{P}\otimes dt$-几乎处处：首先，注意到由推论 4.10 和（4.39），我们有

(4.48)
$$\sup_{t\in[0,T]}|\widetilde{u}_\epsilon(t)|_{H^2} < \infty, \quad \widetilde{\mathbb{P}}\text{-a.s.}$$

~因此，要证明 $\alpha_{N,3} \to 0$, $\mathbb{P}$-几乎必然成立，只需说明右侧的积分

~在（4.47）中几乎必然收敛到 0， $\mathbb{P}$。由（4.48）可推知，对于几乎所有的 $\omega\in\Omega$，我们可以选取足够大的N_0，其取值依赖于 ω，使得对所有 $s\in[0,T]$ 和 $N\ge N_0$，均有 $\theta_N(|\widetilde{u}_\epsilon(s)|_{H^1}) = 1$。注意到$\theta_N$ 是一个满足（4.5）的 Lipschitz 函数，对每个 $N\ge N_0$ 都成立，4

(.49)
$$\int_0^T \left|\theta_N(|\widetilde{u}_\epsilon^N(s)|_{H^1}) - 1\right| ds = \int_0^T \left|\theta_N(|\widetilde{u}_\epsilon^N(s)|_{H^1}) - \theta_N(|\widetilde{u}_\epsilon|_{H^1})\right| ds \le C\int_0^T \left||\widetilde{u}_\epsilon^N(s)|_{H^1} - |\widetilde{u}_\epsilon|_{H^1}\right| ds.$$

~因此，得益于收敛性（4.39），我们得到 $\alpha_{N,3}(t) \to 0$, $d\mathbb{P}\otimes dt$-几乎处处成立。

此外，如上文（4.47）所述，$\alpha_{N,\ 3}$由 $L^1(\widetilde{\Omega}\times[0,T])$中的某个函数控制。因此，再次应用控制收敛定理，可得$\alpha_{N,\ 3} \to 0$属于 $L^1(\widetilde{\Omega}\times[0,T])$。综合$\alpha_{N,\ j}; j = 1,\ 2,\ 3$的收敛结果，我们已经证明

$$\alpha_N \to 0 \text{ in } L^1(\widetilde{\Omega}\times[0,T]).$$

接下来我们考虑以下截断项，

$$\begin{aligned}\beta_N(t) &:= \left| \int_0^t (\theta_N(|\widetilde{u}_\epsilon^N(s)|_{H^1})\partial_x^3\widetilde{u}_\epsilon^N(s) - \partial_x^3\widetilde{u}_\epsilon(s), \phi)_{L^2} ds \right| \\ &\le \left| \int_0^t \theta_N(|\widetilde{u}_\epsilon^N(s)|_{H^1})((\partial_x^3\widetilde{u}_\epsilon^N(s) - \partial_x^3\widetilde{u}_\epsilon(s)), \phi)_{L^2} ds \right| + \left| \int_0^t (\theta_N(|\widetilde{u}_\epsilon^N(s)|_{H^1}) - 1)(\partial_x^3\widetilde{u}_\epsilon(s), \phi)_{L^2} ds \right| \\ &\le |\phi|_{H^2} \int_0^t |\widetilde{u}_\epsilon^N(s) - \widetilde{u}(s)|_{H^1} ds + \int_0^t \left| (\theta_N(|\widetilde{u}_\epsilon^N(s)|_{H^1}) - 1)(\partial_x^3\widetilde{u}_\epsilon(s), \phi)_{L^2} \right| ds =: \beta_{N,1}(t) + \beta_{N,2}(t)\end{aligned}$$

并证明 $\beta_N \to 0$ in $L^1(\widetilde{\Omega} \times [0,T])$。

我们首先注意到 $\beta_{N,1} \to 0$ in $L^1(\widetilde{\Omega} \times [0,T])$，因为我们有

$$\widetilde{\mathbb{E}} \int_0^T \beta_{N,1}(t) dt \le T|\phi|_{H^2} \widetilde{\mathbb{E}} \int_0^T |\widetilde{u}_\epsilon^N(s) - \widetilde{u}_\epsilon(s)|_{H^1} ds \to 0.$$

为处理剩余项 $\beta_{N,2}$，我们首先证明 $\beta_{N,2}(t) \to 0$，$d\mathbb{P} \otimes dt$-几乎处处成立。通过分部积分，我们有

$$\beta_{N,2}(t) \le |\partial_x \phi|_{L^2} \sup_{t\in[0,T]} |\partial_x^2 \widetilde{u}_\epsilon(t)|_{L^2} \int_0^T \left|\theta_N(|\widetilde{u}_\epsilon^N(s)|_{H^1}) - 1\right| ds. \tag{4.50}$$

然后由（4.49），我们得出 $\beta_{N,2}(t) \to 0$，$d\mathbb{P} \otimes dt$-几乎处处成立。此外，回顾 $|\theta_N| \le 1$，并对（4.50）应用杨氏不等式，我们进一步得到

$$\beta_{N,2} \le 4T^2 |\partial_x \phi|_{L^2}^2 \sup_{t\in[0,T]} |\partial_x^2 \widetilde{u}_\epsilon(t)|_{L^2}^2 + 1 \in L^1(\widetilde{\Omega} \times [0,T]).$$

因此，再次应用控制收敛定理可得 $\beta_{N,2} \to 0$ 属于 $L^1(\widetilde{\Omega} \times [0,T])$。这就完成了我们关于 $\beta_N \to 0$ 属于 $L^1(\widetilde{\Omega} \times [0,T])$ 的论断证明。

最后，我们汇总以上所有收敛结果，得出：

$$\begin{aligned}&\chi_\Gamma \widetilde{u}_\epsilon(t) + \int_0^t \chi_\Gamma \left(\theta_N(|\widetilde{u}_\epsilon(s)|_{H^1}) \widetilde{u}_\epsilon(s) \partial_x \widetilde{u}_\epsilon(s) + \partial_x^3 \widetilde{u}_\epsilon(s) + \gamma \widetilde{u}_\epsilon(s) + \epsilon \partial_x^4 \widetilde{u}_\epsilon(s) \right) ds \\ &= \chi_\Gamma \widetilde{u}_0 + \int_0^t \chi_\Gamma G(\widetilde{u}_\epsilon(s-)) dW(s) + \int_0^t \int_{E_0} \chi_\Gamma K(\widetilde{u}_\epsilon(s-), \xi) d\widehat{\widetilde{\pi}}(s, \xi)\end{aligned}$$

几乎必然成立于 $H^{-2}(\mathbb{T})$ 中，对每个 $t \in [0,T]$。此外，由于 $\widetilde{u}_\epsilon$ 具有右连续且有左极限的路径，取值于 $H^{-2}(\mathbb{T})$，$\widetilde{\mathbb{P}}$-几乎必然地，借助 [11], 中的引理 5.13，我们可以证明 $\widetilde{u}_\epsilon$ 满足正则化方程（4.1），其初始条件为 $\widetilde{u}_0$，对所有 $t \in [0,T]$均成立。这就完成了正则化方程（4.1）存在全局鞅解的证明。□

对 $\epsilon \to 0$ 的处理方式类似，此处略去细节。

4.5. **整体路径解**。本节旨在证明方程（3.1）的路径唯一性。由路径唯一性，应用 Gy¨ongy 和 Krylov [24],的一个结果，我们可以得出方程（3.1）存在唯一的逐路径解；该结果是 Watanabe 和 Yamada [42]结果的一个无限维版本。

定义 4（路径唯一性）。我们称随机 KdV 方程（3.1）满足路径唯一性，如果对于相对于同一随机基（Ω u 和 v）的（3.1）的任意一对全局鞅解 sotchastic basis（Ω $\mathcal{F}$，$(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$，$\mathbb{P}$，W，π），都有

$$\mathbb{P}\left[\mathbf{1}_{\{u(0)=v(0)\}}(u(t) - v(t)) = 0 \ \forall t \in [0,T] \right] = 1. \tag{4.51}$$

定理 4.16。 随机 *KdV* 方程（3.1）存在唯一的逐路径解，其意义见定义 4。

证明。设 u 和 v 是相对于同一随机基 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}, W, \pi)$ 的方程 (3.1) 的两个全局鞅解。定义 $\Omega_0 := \{u_0 = v_0\}$，使得 $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$，并且 $w(t) := \mathbf{1}_{\Omega_0}(u(t) - v(t))$。我们将证明

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} |w(t)|_{L^2}^2 = 0.$$

定义

$$\tau_n := \inf\left\{t > 0 : \int_0^t \mathbf{1}_{\Omega_0}|v(s)|_{H^2}^2 ds \geq n\right\} \wedge T.$$

那么 τ_n 是一个停时，且 $\tau_n \nearrow T$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立。由单调收敛定理，只需证明

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[0,\tau_n]} |w(t)|_{L^2}^2 = 0.$$

注意到 w 满足以下方程

$$\begin{cases} dw(t) + \left(\partial_x^3 w(t) + \gamma w(t) + u(t)\partial_x u(t) - v(t)\partial_x v(t)\right) dt \\ \qquad = (G(u(t-)) - G(v(t-)))dW(t) + \int_{E_0}(K(u(t-),\xi) - K(v(t-),\xi))d\hat{\pi}(\xi,t), \\ w(0) = 0. \end{cases} \tag{4.52}$$

应用 Itˆo 公式，其中 $\mathcal{I}_0(w) := |w|_{L^2}^2$ 对（4.52）应用至某个时刻 $t \leq \tau_n$，得到：4.53
( )

$$\begin{aligned} &|w(t)|_{L^2}^2 + 2\gamma\int_0^t |w(s)|_{L^2}^2 ds + 2\int_0^t (w(s), u(s)\partial_x u(s) - v(s)\partial_x v(s))_{L^2} ds \\ &= 2\int_0^t (w(s), (G(u(s)) - G(v(s)))dW(s))_{L^2} ds + 2\int_0^t\int_{E_0} (w(s), K(u(s),\xi) - K(v(s),\xi))_{L^2} d\hat{\pi}(\xi,s) \\ &+ \int_0^t \|G(u(s)) - G(v(s))\|_{HS(U_0,L^2)}^2 ds + \int_0^t\int_{E_0} |K(u(s),\xi) - K(v(s),\xi)|_{L^2}^2 d\pi(\xi,t) \\ &=: B_1(t) + B_2(t) + B_3(t) + B_4(t). \end{aligned}$$

我们取 $\mathbb{E}$ 上确界$_{t\in[0,\tau_n]}$，并估计 B_j； $j = 1$，2、3、4 各项。我们以类似于估计式（4.9）和（4.10）的方式处理项 B_1 和B_2 。应用 BDG 不等式、Lipschitz 条件（A4）和杨氏不等式，可得

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[0,\tau_n]} (|B_1(t)| + |B_2(t)|) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E} \sup_{t\in[0,\tau_n]} |w(t)|_{L^2}^2 + C\mathbb{E}\int_0^{\tau_n} |w(s)|_{L^2}^2 ds. \tag{4.54}$$

对于 B_3 和 B_4 项,利用伊藤等距性以及 A4 上的 Lipschitz 条件 G和 K，可得

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[0,\tau_n]} (|B_3(t)| + |B_4(t)|) \leq C\mathbb{E}\int_0^{\tau_n} |w(s)|_{L^2}^2 ds. \tag{4.55}$$

接下来，我们处理式（4.53）左侧的非线性项。通过分部积分并应用索伯列夫嵌入 $H^2(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{T})$, 可得

$$\begin{aligned} 2\int_0^{\tau_n} (w(s), u(s)\partial_x u(s) - v(s)\partial_x v(s))_{L^2} ds &= \int_0^{\tau_n} (w(s), w(s)\partial_x v(s))_{L^2} \\ &\leq C\int_0^{\tau_n} |w(s)|_{L^2}^2 |v(s)|_{H^2} ds. \end{aligned} \tag{4.56}$$

将（4.54）、（4.55）和（4.56）代回（4.53），可得

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[0,\tau_n]} |w(t)|_{L^2}^2 \leq C\mathbb{E}\int_0^{\tau_n} \left((|v(s)|_{H^2}^2 + C) \sup_{r\in[0,s]} |w(r)|_{L^2}^2\right) ds. \tag{4.57}$$

注意，根据 τ_n 的定义，

$$\int_0^t |v(s)|_{H^2}^2 ds \le n, \quad \mathbb{P}\text{-a.s. for all } t \le \tau_n. \tag{4.58}$$

因此，

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_n} (|v(s)|_{H^2}^2 + C) \sup_{r\in[0,s)} |w(r)|_{L^2}^2 ds\right] \le (n+CT)\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |w(t)|_{L^2}^2\right] < \infty \tag{4.59}$$

由（4.57）、（4.58）和（4.59），我们应用随机 Gronwall 引理 [23, 引理 5。3]从而得出结论

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[0,\tau_n]} |w(t)|_{L^2}^2 = 0,$$

由此完成路径唯一性的证明。 □

随后可将解的路径唯一性转化为分布唯一性，正如 [34] 中定理 2 和定理 11 所证明的那样。因此，我们得到以下推论。

推论 4.17（分布唯一性）。对于任意 $T>0$ 以及每一对全局鞅解（$u^{(i)}$，Ω^i，$\mathcal{F}_i$，$(\mathcal{F}_t^i)_{t\ge0}$，$\mathbb{P}^i$，$W^i$，$\pi^i$）对于（5.1），若初始分布为 $\mathcal{L}_{\mathbb{P}^1}(u_0^{(1)}) = \mathcal{L}_{\mathbb{P}^2}(u_0^{(2)})$，则有

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}^1}(u^{(1)}) = \mathcal{L}_{\mathbb{P}^2}(u^{(2)}) \text{ on } L^2(0,T;H^1(\mathbb{T})) \cap \mathcal{D}([0,T];H^{-2}(\mathbb{T})) \cap \mathcal{D}([0,T];H_w^2(\mathbb{T})), \tag{4.60}$$

其中 $\mathcal{L}(\cdot)$表示分布。

5. Existence of invariant measure

本节中，我们将考虑通过令$\mathscr{K}:=0$ 于（3.1）中得到的随机阻尼KdV方程（3.1）。我们在此重述该方程:

$$du(t) + (\partial_x^3 u(t) + u\partial_x u(t) + \gamma u(t))dt = G(u(t-))dW(t) + \int_{E_0} K(u(t-),\xi)d\widehat{\pi}(t,\xi). \tag{5.1}$$

回顾一下，对任意 $T>0$，定理 3.1（在第 4 节中证明）给出了方程（3.1）的唯一逐路径解 u_T，因此也给出了方程（5.1）在定义 3 意义下的唯一逐路径解。注意，对于任意给定的随机基（Ω $\mathcal{F}$，$(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$，$\mathbb{P}$，W，π），我们可以通过如下定义将该解延拓到整个时间区间$[0,\infty)$：

$$u(t) := u_T(t), \quad \text{if } 0 \le t \le T.$$

我们强调，这样定义 u 是恰当的，因为 u_T 具有逐路径唯一性，这意味着对任意 $0<T_1<T_2$，相应的解 u_{T_1} 和 u_{T_2} 分别在时间区间 $[0,T_1]$ 和 $[0,T_2]$上时，它们在 $[T_1,T_2]$上相等。对于任意适当的初值 u_0，我们将方程（5.1）的这一全局时间唯一逐路径解记为 $u(t):=u(t;\ u_0)$，其中 $t\in[0,\infty)$。

为了证明与 $\{P_t\}_{t\ge0}$（3.6）中定义的半群相关联的（5.1）的不变测度存在，我们将应用 Maslowski-Seidler [30, 命题 31] 的结果，该结果将经典的 Krylov-Bogoliubov 定理推广到赋有弱拓扑的空间。在陈述这一结果之前，我们先引入一些记号。回忆一下，$H_w^2(\mathbb{T})$ 表示空间 $H^2(\mathbb{T})$，并赋予其弱拓扑。我们用 $SC(H_w^2(\mathbb{T})$ 表示关于弱拓扑 $H_w^2(\mathbb{T})$ 序列连续的函数集合。此外，在记号 b（$SC_b(H_w^2(\mathbb{T})$ 中使用下标，还表示要求函数有界。下面回顾以下包含关系:

$$C_b(H_w^2(\mathbb{T})) \subset SC_b(H_w^2(\mathbb{T})) \subset C_b(H^2(\mathbb{T})).$$

现在我们陈述 Maslowski-Seidler 给出的结果，它为半群$\{P_t\}_{t\ge0}$ 存在相应的不变测度提供了充分条件。

定理 5.1 ([30]中的命题 3.1)。设 V为希尔伯特空间。设 $\{P_t\}_{t\geq 0}$为 V上的马尔可夫转移半群，且 $\{P_t^*\}_{t\geq 0}$为其伴随半群，定义为

$$\int_V \phi(x)(P_t^*\mu)(dx) = \int_V P_t\phi(x)\mu(dx), \qquad \phi \in C_b(V_w),\ \mu \in Pr(V). \tag{5.2}$$

假设以下两个条件成立：

(i) 半群 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 在 V中是序列弱费勒的，即对于任意 $t \geq 0$， P_t 将 $C_b(V_w)$映射到 $SC_b(V_w)$，其中 V_w 表示赋予弱拓扑的空间 V。*(ii)* 存在 V上的博雷尔概率测度 ν 和 $T_0 \geq 0$，使得对于任意 $\varepsilon > 0$，存在$R = R(\varepsilon)$ 满足

$$\sup_{T\geq T_0} \frac{1}{T}\int_0^T P_t^*\nu(\{|x|_V > R\})dt < \varepsilon. \tag{5.3}$$

于是， $\{P_t\}_{t\geq 0}$存在一个不变测度。

我们的目标现在是证明， $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 在 (3.6) 中定义的满足定理 5.1 所述的两个条件，其中 $V = H^2(\mathbb{T})$。我们先验证 $\{P_t\}_{t\geq 0}$在 $H^2(\mathbb{T})$中的序列弱费勒性质。

引理 5.2。 转移半群 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 在 (3.6) 中定义，在$H^2(\mathbb{T})$中是序列弱费勒的。换言之，对于任意 $\phi \in C_b(H_w^2(\mathbb{T}))$，有 $P_t\phi \in SC_b(H_w^2(\mathbb{T}))$。

证明。 任取 $\phi \in C_b(H_w^2(\mathbb{T}))$。为了证明 $P_t\phi \in SC_b(H_w^2(\mathbb{T}))$，我们必须证明：对于任意满足 $u_{n0} \rightharpoonup u_0$ 在 $H^2(\mathbb{T})$ 中弱收敛的 $\{u_{n0}\}_{n=0}^{\infty} \subset H^2(\mathbb{T})$ 和 $u_0 \in H^2(\mathbb{T})$，当 $n \to \infty$ 时，$P_t\phi(u_{n0}) \to P_t\phi(u_0)$。

对于任意 $t \geq 0$，我们定义 $u_n(t) := u(t; u_{n0})$ 和 $u(t) := u(t; u_0)$，其中回顾一下， u 表示 the 与初始数据 u_{n0}、u_0分别对应的（5.1）的唯一逐路径解。
我们首先注意到，存在某个足够大的常数 $\mathcal{M} > 0$，使得

$$\sup_{n\geq 0}\left[|u_{n0}|_{H^2}^2 + |u_{n0}|_{L^2}^8\right] < \mathcal{M}.$$

我们还回顾定理 4.1、4.2 和4.4，对于任意 $T > 0$，可得以下关于 u_n的界：

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|u_n(t)|_{L^2}^8 \leq C, \qquad \mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|u_n(t)|_{H^2}^2 \leq C,$$
$$\mathbb{E}\|u_n\|_{W^{1/4,2}(0,T;H^{-2})}^2 \leq C,$$

其中 C 取决于 $\mathcal{M}$， T 但独立于 n。因此，按照命题 4.8中阐述的论证，我们可以证明（u_n）$_{n\geq 0}$ 在空间 $\mathcal{Y}_u$中是胎紧的：

$$\mathcal{Y}_u := L^2_{loc}(0,\infty;H^1(\mathbb{T})) \cap \mathcal{D}_{loc}([0,\infty);H^{-2}(\mathbb{T})) \cap \mathcal{D}_{loc}([0,\infty);H_w^2(\mathbb{T})).$$

将 Jakubowski 对经典斯科罗霍德表示定理的版本应用于序列 $(u_n, W, \pi)_{n\geq 0} \subset \mathcal{Y}_u \times C([0,\infty)\ U) \times \mathcal{N}^{\#}{}_{[0,\infty)\times E}$，如定理 4.9 中所做的那样，我们得到一个概率空间 $(\widetilde{\Omega}\ \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$ 以及 $\mathcal{Y}_u$-值随机变量 $\left(\widetilde{u}, \widetilde{W}, \widetilde{\pi}\right)$和 $\left(\widetilde{u}_{n_k}, \widetilde{W}_{n_k}, \widetilde{\pi}_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$。随后，我们按照（4.40）中的做法适当地定义滤过 $(\mathcal{F}_t^{n_k})_{t\geq 0}$ 和 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 。于是，以下结论成立：

(i) $\left(\widetilde{u}_{n_k}, \widetilde{W}_{n_k}, \widetilde{\pi}_{n_k}\right)$与（$u_{n_k}$， W， π）具有相同的分布，对每个 $k \in \mathbb{N}$ 均成立，并且

$$\lim_{k\to\infty}\left(\widetilde{u}_{n_k}, \widetilde{W}_{n_k}, \widetilde{\pi}_{n_k}\right) = \left(\widetilde{u}, \widetilde{W}, \widetilde{\pi}\right),\ \widetilde{\mathbb{P}}\text{-a.s.} \tag{5.4}$$

(ii) 对每个 n_k， $\widetilde{u}_{n_k}$ 都是关于随机基的 Problem (5.1) 的一个解
$\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t^{n_k})_{t\geq 0}, \widetilde{W}_{n_k}, \widetilde{\pi}_{n_k}\right)$ and $\widetilde{u}_{n_k}(0) = u_{n_k 0}$, $\widetilde{\mathbb{P}}$-a.s.

(iii) $\widetilde{u}$是关于随机基 $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}, \widetilde{W}, \widetilde{\pi}\right)$和 $\widetilde{u}(0) = u_0$， $\mathbb{P}$几乎处处成立的 Problem (5.1) 的一个解

注意，由（5.4）可知，对于任意 $t \geq 0$，我们有

$$\widetilde{u}_{n_k}(t) \rightharpoonup \widetilde{u}(t) \text{ weakly in } H^2(\mathbb{T}), \widetilde{\mathbb{P}}\text{-a.s.}$$

此外，由于 $\widetilde{u}_{n_k}$ 和 u_{n_k} 在空间 $\mathcal{Y}_u$中的分布等价，以及控制收敛定理，对于任意 $t \geq 0$，有

$$P_t\phi(u_{n_k 0}) = \mathbb{E}\phi(u_{n_k}(t)) = \widetilde{\mathbb{E}}\phi(\widetilde{u}_{n_k}(t)) \to \widetilde{\mathbb{E}}\phi(\widetilde{u}(t)), \text{ as } k \to \infty \tag{5.5}$$

因此，要完成此引理的证明，我们需要证明

$$\widetilde{\mathbb{E}}\phi(\widetilde{u}(t)) = \mathbb{E}\phi(u(t)) = P_t\phi(u_0). \tag{5.6}$$

由于 $\tilde{u}$ 和 u 均满足方程（5.1），且具有相同的初始条件 u_0，由推论4.17中得到的分布唯一性可直接推出:

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}}(u) = \mathcal{L}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(\widetilde{u}) \text{ on the space } \mathcal{Y}_u. \tag{5.7}$$

因此，我们已经证明了（5.6）。接下来，我们运用路径唯一性和子子序列论证，得出整个序列的收敛性

$$P_t\phi(u_{n0}) \to P_t\phi(u_0), \text{ as } n \to \infty,$$

从而完成了引理 5.2的证明。 □

我们的下一个目标是证明， $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 在（3.6）中定义的对象满足定理 5.1中的第二个假设（ii）。

引理 5.3。 设 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ 为与方程 （5.1）相关的转移半群。则对任意 $\varepsilon > 0$，存在某个 $R = R(\varepsilon) > 0$ 使得

$$\sup_{T\geq 1}\frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{P}(|u(t;0)|_{H^2} > R)dt \leq \sup_{T\geq 1}\frac{\frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}|u(t;0)|_{H^2}^2 dt}{R^2} < \varepsilon. \tag{5.8}$$

为了证明引理 5.3，我们必须证明 $\int_0^t \mathbb{E}|u(s;u_0)|_{H^2}^2 ds$ 是 $O(t)$ $t \to \infty$。下面的两个结果，即定理 5.4 和 5.5，将分别在 $L^2(\mathbb{T})$ 和 $H^2(\mathbb{T})$ 中首先建立所需的线性时间估计。引理 5.3 的证明将留待后面进行。

定理 5.4。 考虑任意 $u_0 \in H^2(\mathbb{T})$，并令 $u(t) := u(t;u_0)$ 为方程 （5.1）在初始条件 u_0下的唯一逐路径解。则对任意 $2 \leq p \leq 8$，有

$$\mathbb{E}|u(t)|_{L^2}^p + \eta(p)\int_0^t \mathbb{E}|u(s)|_{L^2}^p ds \leq |u_0|_{L^2}^p + \tilde{C}_p\kappa_2 \cdot t, \tag{5.9}$$

其中

$$\eta(p) := \gamma p - \big(p(p-1)\kappa_1 + 3\tilde{C}_p\kappa_2\big), \quad \tilde{C}_p := (p^2-p)2^{p-3} > 0. \tag{5.10}$$

因此，如果 γ 充分大，使得 η 在 (5.10) 中所定义者为正，则我们有

$$\mathbb{E}|u(t)|_{L^2}^p + \eta(p)\int_0^t \mathbb{E}|u(s)|_{L^2}^p ds \leq C(t+1), \tag{5.11}$$

其中 $C = C(\kappa_1, \kappa_2, \gamma, C_p, u_0) > 0$。

证明。对方程（5.1）应用 Itô 公式，取关于泛函 $\tilde{\mathcal{I}}_0(v)=|v|_{L^2}^p$ 的情形如定理 4.1的证明，并取期望，得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|u(t)|_{L^2}^p+\gamma p\int_0^t\mathbb{E}|u(s)|_{L^2}^p ds&=|u(0)|_{L^2}^p+\frac{p}{2}\mathbb{E}\int_0^t|u(s)|_{L^2}^{p-2}\|G(u(s))\|_{HS(U_0,L^2)}^2 ds\\&+\frac{p(p-2)}{2}\mathbb{E}\int_0^t|u(s)|_{L^2}^{p-4}\|G^*(u(s))u(s)\|_{U_0}^2 ds\\&+\mathbb{E}\int_0^t\int_{E_0}\Big(|u(s)+K(u(s),\xi)|_{L^2}^p-|u(s)|_{L^2}^p-p|u(s)|_{L^2}^{p-2}(u(s),K(u(s),\xi))\Big)\,d\nu(\xi)ds\\&=:|u(0)|_{L^2}^p+M_1+M_2+M_3,\end{aligned}\tag{5.12}$$

其中 $G^*(u)$ 是 $G(u)$ 的伴随算子。注意，取期望时，两个零均值鞅项会消失。我们将分别给出每个 $M_j;\ j=1,\ 2、3$ 的界。对于项 M_1，根据 A1) 对 G的增长条件假设以及 Hölder 不等式，可得 5.13

$$\frac{p}{2}\mathbb{E}\int_0^t|u(s)|_{L^2}^{p-2}\|G(u(s))\|_{HS(U_0,L^2)}^2 ds\le\frac{p}{2}\kappa_1\mathbb{E}\int_0^t|u(s)|_{L^2}^{p-2}(|u(s)|_{L^2}^2+1)ds\le p\kappa_1\int_0^t\mathbb{E}|u(s)|_{L^2}^p ds\tag{}$$

类似地，对于 M_2，我们得到

$$M_2\le p(p-2)\kappa_1\int_0^t\mathbb{E}|u(s)|_{L^2}^p ds\tag{5.14}$$

为了估计 M_3，我们利用不等式（4.12）、增长条件（A3）以及 Hölder 不等式，得到如下结果

$$\begin{aligned}M_3&=\mathbb{E}\int_0^t\int_{E_0}\Big(|u(s)+K(u(s),\xi)|_{L^2}^p-|u(s)|_{L^2}^p-(u(s),K(u(s),\xi))\Big)d\nu(\xi)ds\\&\le\tilde{C}_p\mathbb{E}\int_0^t\int_{E_0}\Big(|u(s)|_{L^2}^{p-2}|K(u(s),\xi)|_{L^2}^2+|K(u(s),\xi)|_{L^p}^p\Big)d\nu ds\\&\le\tilde{C}_p\kappa_2\mathbb{E}\int_0^t\Big(|u(s)|_{L^2}^{p-2}(1+|u(s)|_{L^2}^2)+(1+|u(s)|_{L^2}^p)\Big)ds\\&\le\tilde{C}_p\kappa_2\int_0^t\Big(3\mathbb{E}|u(s)|_{L^2}^p+1\Big)ds=3\tilde{C}_p\kappa_2\int_0^t\mathbb{E}|u(s)|_{L^2}^p ds+\tilde{C}_p\kappa_2\cdot t\end{aligned}\tag{5.15}$$

因此，将（5.13）、（5.14）和（5.15）代回（5.12），得到（5.16）

$$\mathbb{E}|u(t)|_{L^2}^p+\gamma p\int_0^t\mathbb{E}|u(s)|_{L^2}^p ds\le\mathbb{E}|u_0|_{L^2}^p+\Big(p(p-1)\kappa_1+3\tilde{C}_p\kappa_2\Big)\int_0^t\mathbb{E}|u(s)|_{L^2}^p ds+\tilde{C}_p\kappa_2\cdot t.\tag{}$$

重新整理各项，得到（5.9）。定理 5.4 的证明至此完成。 □

我们将改进定理 5.4 中的界，并在下述定理中于更规则的空间中得到线性时间界。

定理 5.5. 设 $u_0\in H^2(\mathbb{T})$ 是一个确定性函数，且 $u(t):=u(t;u_0)$ 是方程 (5.1) 在初始条件 u_0下的唯一逐路径解。假设选取足够大的 γ，以确保 $\eta(8)>0$，其中 η 定义于 (5.10)。则有

$$\mathbb{E}|\partial_x^2u(t)|_{L^2}^2+\eta''\int_0^t\mathbb{E}|\partial_x^2u(s)|_{L^2}^2 ds\le C(t+1),\tag{5.17}$$

其中，η'' 是一个与 p无关的正数，定义为

$$\eta'':=\frac{197}{50}\gamma-\kappa_1-\kappa_2>0,\tag{5.18}$$

以及 $C = C(\kappa_1, \kappa_2, \gamma, u_0) > 0$。

证明。 我们先回顾泛函 $\mathcal{I}_2(v)$ 的定义，

$$\mathcal{I}_2(v) = \int_{\mathbb{T}} \Big((\partial_x^2 v(x))^2 ds - \frac{5}{3} v(x)(\partial_x v(x))^2 + \frac{5}{36}(v(x))^4 \Big) dx.$$

对泛函 $\mathcal{I}_2(u$应用（5.1）的 Itô 公式，并对等式两边取期望，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|\partial_x^2 u(t)|_{L^2}^2 + \frac{5}{36}\mathbb{E}|u(t)|_{L^4}^4 + 2\gamma\mathbb{E}\int_0^t |\partial_x^2 u(s)|_{L^2}^2 ds + \frac{5}{9}\mathbb{E}\int_0^t |u(s)|_{L^4}^4 ds \\
&= \mathbb{E}\mathcal{I}_2(u_0) + \frac{5}{3}\mathbb{E}\int_{\mathbb{T}} u(t,x)(\partial_x u(t,x))^2 dx + 5\gamma\mathbb{E}\int_0^t \int_{\mathbb{T}} u(s,x)(\partial_x u(s,x))^2 dx ds \\
&+ \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^t \mathrm{Tr}(\mathcal{I}_2''(u(s))G(u(s))G^*(u(s)))ds \\
&+ \mathbb{E}\int_0^t \int_{E_0} \Big(\mathcal{I}_2(u(s) + K(u(s),\xi)) - \mathcal{I}_2(u(s)) - (\mathcal{I}_2'(u(s)), K(u(s),\xi))_{L^2} \Big) d\pi(\xi, s) \\
&=: \mathbb{E}\mathcal{I}_2(u_0) + D_1 + D_2 + D_3 + D_4
\end{aligned} \tag{5.19}$$

我们将对 D_j, $j = 1$、2、3、4 给出估计。首先处理 D_1 项。利用索伯列夫嵌入$H^{1/4}(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^4($ $\mathbb{T})$、Sobolev 插值 $H^{5/4}(\mathbb{T}) = [H^2(\mathbb{T})\ L^2(\mathbb{T})]_{5/8}$、杨氏不等式和 Holder 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
D_1 &= \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}} u(t,x)(\partial_x u(t,x))^2 dx \le \mathbb{E}\Big[|u(t)|_{L^2} |\partial_x u(t)|_{L^4}^2 \Big] \le \mathbb{E}\Big[|u(t)|_{L^2} |u(t)|_{H^{5/4}}^2 \Big] \\
&\le C\mathbb{E}\Big[|u(t)|_{L^2} \big(|u(t)|_{L^2}^2 + |\partial_x^2 u(t)|_{L^2}^{1/4} |u(t)|_{L^2}^{7/4} \big) \Big] \le \frac{1}{2}\mathbb{E}|\partial_x^2 u(t)|_{L^2}^2 + C\mathbb{E}|u(t)|_{L^2}^8.
\end{aligned}$$

同样，在应用杨氏不等式时调整常数，可得

$$D_2 = \mathbb{E}\int_0^t \int_{\mathbb{T}} u(s,x)(\partial_x u(s,x))^2 dx ds \le \frac{\gamma}{100}\int_0^t \mathbb{E}|\partial_x^2 u(s)|_{L^2}^2 ds + C\int_0^t \mathbb{E}|u(s)|_{L^2}^8 ds$$

结合上述对 D_1 和 D_2的估计，由定理5.9，可得

$$\begin{aligned}
D_1 + D_2 &\le \frac{1}{2}\mathbb{E}|\partial_x^2 u(t)|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{100}\int_0^t \mathbb{E}|\partial_x^2 u(s)|_{L^2}^2 ds + C\left(\mathbb{E}|u(t)|_{L^2}^8 + \int_0^t \mathbb{E}|u(s)|_{L^2}^8 ds \right) \\
&\le \frac{1}{2}\mathbb{E}|\partial_x^2 u(t)|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{100}\int_0^t \mathbb{E}|\partial_x^2 u(s)|_{L^2}^2 ds + C(t+1)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

对于 D_3 和 D_4，可以参照定理 4.2 证明中估计（4.24）和（4.26）的论证，并应用定理 5.9，得出

(5.21)

$$D_3 \le \Big(\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\gamma}{100} \Big) \int_0^t \mathbb{E}|\partial_x^2 u(s)|_{L^2}^2 ds + C\int_0^t (\mathbb{E}|u(s)|_{L^2}^8 + 1) ds \le \Big(\frac{\kappa_1}{2} + \frac{\gamma}{100} \Big) \int_0^t \mathbb{E}|\partial_x^2 u(s)|_{L^2}^2 ds + C(t+1)$$

$$D_4 \le \Big(\frac{\kappa_2}{2} + \frac{\gamma}{100} \Big) \int_0^t \mathbb{E}|\partial_x^2 u(s)|_{L^2}^2 ds + C\int_0^t (\mathbb{E}|u(s)|_{L^2}^8 + 1) ds \le \Big(\frac{\kappa_2}{2} + \frac{\gamma}{100} \Big) \int_0^t \mathbb{E}|\partial_x^2 u(s)|_{L^2}^2 ds + C(t+1)$$

因此，将（5.20）和（5.21）代回（5.19），可得

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}|\partial_x^2 u(t)|_{L^2}^2 + \left(\frac{197}{100}\gamma - \frac{\kappa_1}{2} - \frac{\kappa_2}{2} \right) \int_0^t \mathbb{E}|\partial_x^2 u(s)|_{L^2}^2 ds \le C(t+1). \tag{5.22}$$

至此，我们完成了对（5.17）的证明。 □

如前所述，借助定理5.5中得到的界，引理5.3的证明是直接的。

引理的证明5.3。现在令 γ 足够大，使得 η 在（5.10）中定义的量对 $p=8$为正。于是由定理5.4、定理5.5 以及范数等价关系（2.4），可得

$$\int_0^t \mathbb{E}|u(s;0)|_{H^2}^2 ds \le C(t+1), \tag{5.23}$$

其中 $C=C(\kappa_1,\ \kappa_2,\ \gamma)$。对于每个 $\varepsilon>0$，我们可以选取充分大的 $R=R(\varepsilon)$，使得 at

$$\frac{2C}{R^2}<\varepsilon. \tag{5.24}$$

由切比雪夫不等式、（5.23）和（5.24）可得

$$\sup_{T\ge 1}\frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{P}(|u(t;0)|_{H^2}>R)\le \sup_{T\ge 1}\frac{\frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}|u(t;0)|_{H^2}^2}{R^2}<\frac{2C}{R^2}<\varepsilon, \tag{5.25}$$

这就完成了引理5.3的证明。 □

现在，根据引理 5.2 和引理 5.3 中得到的结果，我们可以验证定理 5.1 中陈述的两个条件均已满足。因此，我们完成了第二个主要结果定理 3.2 的证明，即证明了随机阻尼 KdV 方程（$\{P_t\}_{t\ge 0}$ 5.1）所描述动力学对应的转移半群 存在不变测度。

Appendix A. Proof of Convergence Lemma 4.14

在本附录中，我们在抽象框架下证明引理 4.14 。本节首先回顾关于补偿泊松随机测度的随机积分框架 $\hat{\pi}$ (例如，参见 [10, 26])。

我们假设滤过概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)^{t\in[0,T]},\ \mathbb{P})$ 满足通常条件。记 $\mathcal{P}_{[0,T]}$ 为乘积空间 $\Omega\times[0,T]$ 上的可预测 σ-代数。

现在我们回顾此前的记号和假设：设 U 是一个实可分希尔伯特空间，并令 $E:=U\setminus\{0\}$。我们可以在 E 上赋予度量 d，使其如 [11, Example A.8] 中所述成为完备且可分的。在这个特定度量下，子集 $B\subset E$ 有界，当且仅当 B 与 0 分离。我们用 $\mathcal{E}$ 表示 E 的 Borel σ- 代数。我们假设对于某个测度 ν（例如 L´évy 测度），空间（$E,\ \mathcal{E},\ \nu$）是可测的。我们不假设 $\nu(E)$ 有限，但假设 ν 在 E 的有界子集上有限。将 E 如下划分，

$$E=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\left\{x\in E: m^{-1}<|x|_U<m\right\}=:\bigcup_{m\in\mathbb{N}}A_m, \tag{A.1}$$

并注意到 $\nu(A_m)<\infty$ 对每个 $m\in\mathbb{N}$ 都成立，我们看到（$E,\ \mathcal{E},\ \nu$）是 σ-有限的。我们进一步定义

$$E_0:=U\setminus\{x\in U: 0<|x|_U<1\},$$

从而有 $\nu(E\setminus E_0)<\infty$。

设 Ξ 是定义在 E 上、具有可数定义域 $\mathfrak{D}(\Xi)\subset(0,\ \infty)$ 的平稳泊松点过程，其强度测度为 $dt\otimes d\nu$。该过程 Ξ 自然诱导出一个泊松随机测度。本节将考虑由强度为 $dt\otimes d\nu$ 的平稳点过程在 $[0,T]\times E$ 上诱导出的泊松随机测度。

接下来，我们讨论由这类 Ξ 诱导的泊松随机测度所对应的随机积分被积函数的空间。设 V 为实可分希尔伯特空间。对任意 $q\in[1,\infty]$，我们将可料的、 L^q-可积过程的空间定义为

$$\mathbf{F}^q_{\nu,T}(V):=L^q(\Omega\times[0,T]\times E,\mathcal{P}_{[0,T]}\otimes\mathcal{E},d\mathbb{P}\otimes dt\otimes d\nu;V).$$

回顾一下，对任意 $g \in \mathbf{F}^1_{\nu,T}(V)$，我们有

$$I^{\pi}_t(g) := \int_{(0,t]} \int_E g(s,\xi)\, d\pi(s,\xi) = \sum_{s\in(0,t]\cap\mathfrak{D}(\Xi)} g(s,\Xi(s)),$$

而对于下面关于补偿测度的随机积分：$\widehat{\pi} := \pi - \nu$ 对于被积函数 $g \in \mathbf{F}^2_{\nu,T}(V)$，它是一个取值于 V 的平方可积鞅：

$$I^{\widehat{\pi}}_t(g) := \int_0^t \int_{E_0} g(s,\xi) d\widehat{\pi}(s,\xi). \tag{A.2}$$

定理 A.1. 对每个 $N \in \mathbb{N}$，设 $K_N, K \in \mathbf{F}^2_{\nu,T}(V)$，并设 π_N, π 是定义在 $[0,T]\times E$ 上、强度均为 $dt\otimes d\nu$ 的泊松随机测度。假设以下收敛几乎处处成立：$\mathbb{P}$

$$K_N \to K \ \text{in}\ L^2([0,T]\times E_0; dt\otimes d\nu; V),$$
$$\pi_N \to \pi \ \text{in}\ \mathcal{N}^{\#}_{[0,T]\times E}.$$

那么，取一个子序列后，取值于 $L^2(0,T;V)$ 的过程序列 $\left(I^{\widehat{\pi}_N}_t(K_N)\right)_{t\in[0,T]}$ 几乎必然收敛到取值于 $L^2(0,T;V)$ 的过程 $\left(I^{\widehat{\pi}}_t(K)\right)_{t\in[0,T]}$。

本定理的证明依赖于以下两个引理。

Lemma A.2. 对于每个 $N \in \mathbb{N}$，考虑 $g_N \in \mathbf{F}^2_{\nu,\ T}(V)$ 的序列，满足

$$\lim_{N\to\infty} g_N = 0 \ \text{in}\ L^2([0,T]\times E; dt\otimes d\nu; V), \qquad \mathbb{P}\text{-}a.s. \tag{A.3}$$

则下列收敛成立：

$$\left(I^{\widehat{\pi}_N}_t(g_N)\right)_{t\in[0,T]} \to 0 \quad \text{in probability in}\ L^2(0,T;V).$$

若将 $\widehat{\pi}_N$ 替换为 $\widehat{\pi}$，则同样的结论成立。

证明。本引理的证明沿用了 [11, 推论 510]的技巧。（另见 [33, 引理 415]）。回顾 π_N 具有强度 $dt\otimes d\nu$，对于每个 $N\in\mathbb{N}$。则对任意 ε，$\delta>0$，我们记

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\int_0^T |I^{\widehat{\pi}_N}_t(g_N)|^2_V dt > T\varepsilon^2\right] &\le \mathbb{P}\left[\sup_{t\in[0,T]} |I^{\widehat{\pi}_N}_t(g_N)|_V > \varepsilon\right] =: \mathbb{P}(\mathcal{M}_N)\\ &= \mathbb{P}(\mathcal{M}_N\cap\mathcal{J}_N) + \mathbb{P}(\mathcal{M}_N\cap\mathcal{J}_N^c) \le \mathbb{P}(\mathcal{J}_N) + \mathbb{P}(\mathcal{M}_N\cap\mathcal{J}_N^c),\end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{J}_N := \left\{\int_0^T \int_{E_0} |g_N(s,\xi)|^2_V d\nu(\xi) ds > \delta\varepsilon^2\right\}.$$

我们首先处理第二项 $\mathbb{P}(\mathcal{M}_N\cap\mathcal{J}_N^c)$。根据 [12, 定理 3.8] 中给出的平方可积鞅的极大不等式（另见 [12, 命题 4.16]），我们知道

$$\mathbb{P}(\mathcal{M}_N\cap\mathcal{J}_N^c) \le \delta.$$

接下来，我们处理另一项 $\mathbb{P}(\mathcal{J}_N)$。感谢几乎必然收敛（从而依概率收敛）的假设（A.3），我们可以选择一个 $N\in\mathbb{N}$ 足够大，以确保

$$\mathbb{P}(\mathcal{J}_N) \le \delta.$$

综合上述关于 $\mathbb{P}(\mathcal{J}_N)$ 和 $\mathbb{P}(\mathcal{M}_N\cap\mathcal{J}_N^c)$ 的界，并注意到 $\delta>0$ 是任意的，我们便完成了证明：$\left(I^{\widehat{\pi}_N}_t(g_N)\right)_{t\in[0,T]} \to 0$ 在 $L^2(0,T;V)$ 中依概率成立。当我们将 $\widehat{\pi}_N$ 替换为 $\widehat{\pi}$ 时，同样的论证仍然适用。□

下一个结果讨论如何用 $K \in \mathbf{F}^2_{\nu,T}(V)$ 上具有有界支集的有界连续函数来逼近该对象；这些函数定义了 $[0,T) \times E$ 中的弱–# 收敛$\pi_N \to \pi$，且该收敛在 $\mathcal{N}_{\#[0,T]\times E}$, $\mathbb{P}$-几乎处处成立。在陈述下一个结果之前，我们先回顾一下（例如参见 [10, 26]）：

(1) $\mathbf{F}^1_{\nu,\,T}(V) \cap \mathbf{F}^2_{\nu,\,T}(V)$ 在 $\mathbf{F}^2_{\nu,\,T}(V)$ 中稠密。**(2)** 关于随机测度 π 的随机积分仅对 $\mathbf{F}^1_{\nu,\,T}(V)$ 中的被积函数有定义，而关于补偿泊松随机测度 $\widehat{\pi}$ 的随机积分仅对 $\mathbf{F}^2_{\nu,\,T}(V)$ 中的被积函数有定义。因此，该公式

$$\begin{aligned}\int_{(0,t]}\int_E f(s,\xi)\,d\widehat{\pi}(s,\xi) &= \int_{(0,t]}\int_E f(s,\xi)\,d\pi(s,\xi) - \int_0^t\int_E f(s,\xi)\,d\nu(\xi)\,ds \\ &= \sum_{s\in(0,t]\cap\mathfrak{D}(\Xi)} f(s,\Xi(s)) - \int_0^t\int_E f(s,\xi)\,d\nu(\xi)\,ds\end{aligned}$$

仅对被积函数 $f \in \mathbf{F}^1_{\nu,\,T}(V) \cap \mathbf{F}^2_{\nu,\,T}(V)$ 成立。

因此，在下面的证明中，我们确保逼近被积函数是在适当的空间中构造的。

引理 A.3. 设 $K \in \mathbf{F}^2_{\nu,\,T}(V)$。那么，对于任意 $\delta > 0$，存在一个过程 $F\colon \Omega \times [0,T] \times E \to V$，属于 $\mathbf{F}^1_{\nu,\,T}(V) \cap \mathbf{F}^2_{\nu,\,T}(V)$，使得

(i) F 具有以下形式：

$$F(\omega,t,\xi) := \sum_{j=1}^n F_j(\omega,t,\xi) = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{D_j}(\omega) h_{s_j,r_j}(t) f_{B_j}(\xi) v_j,$$

对于某些 $D_j \in \mathcal{F}_{s_j}$、$B_j \in \mathcal{E}$、$v_j \in V$。这里，对于每个 $j = 1$、$\cdots$、n

$$\begin{aligned}&F_j \in \mathbf{F}^1_{\nu,T}(V) \cap \mathbf{F}^2_{\nu,T}(V),\\ &h_{s_j,\,r_j}\colon\ [0,T] \to [0,1] \text{ 是连续的，并且对于 } s_j \geq 0、f_{B_j}\text{，其支集包含}\\ &\text{于 } [s_j,T] \text{ 中：}\ E \to [0,1] \text{ 是连续的，并且在 } E\text{中具有有界支集。}\end{aligned} \tag{A.4}$$

因此，对于几乎所有的 $\omega \in \Omega$，$F(\omega、\cdot、\cdot)$ 是连续且有界的，并且在 $[0,T] \times E$中具有有界支集。

(ii) 以下界成立：

$$\mathbb{E}\int_0^T\int_{E_0} |K(t,\xi) - F(t,\xi)|_V^2 d\nu(\xi)dt < \delta. \tag{A.5}$$

证明。 **步骤 1**：令 Leb_T表示 $[0,T]$上的勒贝格测度。由于 $\mathbb{P} \times Leb_T \times \nu$是 $\Omega \times [0,T] \times E$上的 σ-有限测度，简单函数在 $\mathbf{F}^2_{\nu,\,T}(V)$ 中稠密。因此，在本步骤中，我们首先假设 K 是一个简单函数，并将在步骤 5 中对任意 K 建立所需结果。基于此，假设 K 具有以下形式：

$$K(\omega,t,\xi) := \mathbb{1}_D(\omega)\mathbb{1}_{[s,r)}(t)\mathbb{1}_B(\xi)v, \quad D \in \mathcal{F}_s,\, B \in \mathcal{E}, \text{ and } v \in V. \tag{A.6}$$

注意，对于无界集合， B 我们可以将 $B = \bigcup_{m\in\mathbb{N}}(B \cap A_m)$ 写成不交并，其中$\lrcorner A_m := A_{m+1} \setminus A_m$ 对于 A_m 在划分（A.1）中定义的。然后我们可以将示性函数 $\mathbb{1}_B$分解如下：

$$\mathbb{1}_B = \sum_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{B\cup\tilde{A}_m}. \tag{A.7}$$

In 在这种情况下， K 可以由以下简单函数序列逼近 ，

$$\tilde{K}_m(\omega,t,\xi) = \mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{1}_{[s,r)}(t)\mathbb{1}_{B\cap\tilde{A}_m}(\xi)v. \tag{A.8}$$

因此，在以下分析中，为简单起见，我们假设 B 在（A.6）中是有界的。

为了得到 K所需的逼近，我们将为示性函数 $\mathbb{1}_{[s,r)}$ 和 $\mathbb{1}_B$寻找光滑的近似解。

步骤 2：我们从 $\mathbb{1}_B$开始。由于 B 有界， $\nu(B) < \infty$，这要归功于 [35, 第二章定理 1。2], 对任意 $\varepsilon > 0$, 我们可以选取 B_1、 $B_2 \in \mathcal{E}$ 使得
（1） $B_1 \subset B \subset B_2$，（2） B_1 是
闭的且 B_2 是开的，（3） ν（
$B_2 \setminus B_1$） $< \varepsilon$。
我们可以定义函数

$$f_B(\xi) := \frac{d(\xi, B_2^c)}{d(\xi, B_1) + d(\xi, B_2^c)}.$$

我们随后可以验证 f_B： $E \to [0,1]$ 是连续的， $f_B = 1$ 在 B_1 上且 $f_B = 0$ 在 B_2之外。**步骤 3**：接下来，我们逼近时间示性函数$\mathbb{1}_{(s,\ r]}$。对 $\varepsilon > 0$，我们定义一个连续函数$h_{s,\ r}$： $[0,T] \to [0,1]$，使得对 $t \in [0,s]$有 $h(t) = 0$，在（s， $s+\varepsilon$]上线性增加到 1，在（$s+\varepsilon$， r]上等于 1，并在（r， $(r+\varepsilon) \wedge T$]上线性减小到 0。

第 4 步：我们验证

$$F(\omega, t, \xi) := \mathbb{1}_A(\omega) h_{s,r}(t) f_B(\xi) v$$

满足要求。注意到 $F \in \mathbf{F}^1_{\nu,T}(V) \cap \mathbf{F}^2_{\nu,T}(V)$、以及 $F(\omega, \cdot, \cdot)$ 是具有有界支集的连续有界函数。接下来，我们检验（A.5）。回顾一下，对于 K和 F，二者的支集均包含于 B_2, $dt \otimes d\mathbb{P}$-几乎处处。此外，

$$K(t,\xi) \neq F(t,\xi) \text{ only if } t \in (s, s+\varepsilon] \cup (r, (r+\varepsilon) \wedge T] \text{ or } \xi \in B_2 \setminus B_1, \ \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

由此可得，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \int_0^T \int_{E_0} |K(t,\xi) - F(t,\xi)|_V^2 d\nu(\xi) dt = \mathbb{E} \int_0^T \int_{E_0 \cap B_2} |K(t,\xi) - F(t,\xi)|_V^2 d\nu(\xi) dt \\
&\leq \mathbb{E} \int_{(s,s+\varepsilon] \cup (r,(r+\varepsilon)\wedge T]} \int_{E_0 \cap B_2} 4|v|_V^2 d\nu(\xi) dt + \mathbb{E} \int_0^T \int_{(E_0 \cap B_2) \setminus B_1} 4|v|_V^2 d\nu(\xi) dt \\
&\leq (8\nu(E_0 \cap B_2) + 4T)\varepsilon |v|_V^2.
\end{aligned}$$

由于 $\nu(B_2 \setminus B_1) < \varepsilon$ 由构造可知，且 $\nu(B) < \infty$，我们得到

$$\nu(E_0 \cap B_2) \leq \nu(B_2) \leq \nu(B) + \nu(B_2 \setminus B_1) < \infty.$$

取 $\varepsilon < \dfrac{\delta}{(8\nu(E_0 \cap B_2) + 4T)|v|_V^2}$，我们得出（A.5）成立，从而完成了 K 是简单函数的情形的证明。

第 5 步：接下来，我们对任意的 $K \in \mathbf{F}^2_{\nu,T}(V)$ 证明该结论。回顾一下，简单函数在 $\mathbf{F}^2_{\nu,T}(V)$ 中稠密，因此对任意的 δ，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$\mathbb{E} \int_0^T \int_{E_0} \left| K(t,\xi) - \sum_{j=1}^n K_j(t,\xi) \right|_V^2 d\nu(\xi) dt < \frac{\delta}{2},$$

其中

$$K_j(\omega, t, \xi) := \mathbb{1}_{D_j}(\omega) \mathbb{1}_{[s_j, r_j)}(t) \mathbb{1}_{B_j}(\xi) v_j, \quad \text{for some } D_j \in \mathcal{F}_{s_j},\ B_j \in \mathcal{E}, \text{ and } v_j \in V. \tag{A.9}$$

此处，可测集 B_j 可能无界。不过，在这种情况下，我们可以使用特征-˜化（A.7），并用（ K_j 中给出的 K_m 对每个A.8）进行逼近。为避免符号过于繁杂，为简单起见，我们因此假设（ B_j A.9）中的每个都是有界的。

由于每个 K_j 都是简单的，按照步骤 1–4 中给出的论证，我们得出存在$F_j \in \mathbf{F}^1_{\nu,T}(V) \cap \mathbf{F}^2_{\nu,T}(V)$，使得

$$F_j(\omega,t,\xi) = \mathbb{1}_{D_j}(\omega)h_{s_j,r_j}(t)f_{B_j}(\xi)v_j,$$

其中 $h_{s_j,\ r_j}$，f_{B_j} 满足 (A.4)。此外，

$$\mathbb{E}\int_0^T \int_{E_0} |K_j(t,\xi) - F_j(t,\xi)|_V^2 d\nu(\xi)dt < \frac{\delta}{2n}.$$

最后，定义

$$F(\omega,t,\xi) := \sum_{j=1}^n F_j(\omega,t,\xi).$$

由此可得 $F \in \mathbf{F}^1_{\nu,\ T}(V) \cap \mathbf{F}^2_{\nu,\ T}(V)$，根据三角不等式可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^T \int_{E_0} |K(t,\xi) - F(t,\xi)|_V^2 d\nu(\xi)dt &\le \mathbb{E}\int_0^T \int_{E_0} \left|K(t,\xi) - \sum_{j=1}^n K_j(t,\xi)\right|_V^2 d\nu(\xi)dt \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \mathbb{E}\int_0^T \int_{E_0} |K_j(t,\xi) - F_j(t,\xi)|_V^2 d\nu(\xi)dt < \frac{\delta}{2} + n\cdot\frac{\delta}{2n} = \delta.\end{aligned}$$

□

接下来，我们终于给出定理 A.1 的证明。

定理 *A.1* 的证明。考虑 $K \in \mathbf{F}^2_{\nu,\ T}(V)$。那么，对于任意 $\delta,\ \varepsilon > 0$，根据引理A.3，我们知道存在 $F \in \mathbf{F}^1_{\nu,\ T}(V) \cap \mathbf{F}^2_{\nu,\ T}(V)$，它几乎处处连续、有界且具有有界支集，使得

$$\mathbb{E}\int_0^T \int_{E_0} |K(t,\xi) - F(t,\xi)|_V^2 d\nu(\xi)dt < \delta\varepsilon^2. \tag{A.10}$$

此外，函数 F 具有以下形式：

$$F(\omega,t,\xi) := \sum_{j=1}^m F_j(\omega,t,\xi) := \sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{D_j}(\omega)h_{s_j,r_j}(t)f_{B_j}(\xi)v_j, \quad D_j \in \mathcal{F}_{s_j}, v_j \in V, \tag{A.11}$$

其中，对于每个 $j = 1,..,m$，函数 $F_j \in \mathbf{F}^1_{\nu,T}(V) \cap \mathbf{F}^2_{\nu,T}(V)$ 以及函数 $h_{s_j,r_j}\colon [0,T] \to [0,1]\tilde{}$ 和 $f_{B_j}\colon E \to [0,1]$ 均为连续、有界且具有有界支集。通过重写

$$I_t^{\hat{\pi}^N}(K_N) - I_t^{\hat{\pi}}(K) = I_t^{\hat{\pi}^N}(K_N - K) + I_t^{\hat{\pi}^N}(K - F) + \left(I_t^{\hat{\pi}^N}(F) - I_t^{\hat{\pi}}(F)\right) + I_t^{\hat{\pi}}(F - K),$$

我们可以将该事件拆分为

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\int_0^T |I_t^{\hat{\pi}^N}(K_N) - I_t^{\hat{\pi}}(K)|_V^2 dt > 4\varepsilon\right] &\le \mathbb{P}\left[\int_0^T |I_t^{\hat{\pi}^N}(K_N - K)|_V^2 dt > \varepsilon\right] + \mathbb{P}\left[\int_0^T |I_t^{\hat{\pi}^N}(K - F)|_V^2 dt > \varepsilon\right] \\ &\quad + \mathbb{P}\left[\int_0^T |I_t^{\hat{\pi}^N}(F) - I_t^{\hat{\pi}}(F)|_V^2 dt > \varepsilon\right] + \mathbb{P}\left[\int_0^T |I_t^{\hat{\pi}}(F - K)|_V^2 dt > \varepsilon\right] \\ &=: P_1^N + P_2^N + P_3^N + P_4.\end{aligned}$$

我们将对 $P_j^N; j = 1,2,3,4$ 逐项获得估计，从项 P_1^N 开始。由于$K_N \to K$在 $L^2([0,T] \times E_0; dt \otimes d\nu; V)$ 中，$\mathbb{P}$- 几乎必然，我们援引引理 A.2，并得出存在一个 N，使得对任意 $n \ge N$ 我们有

$$P_1^n < \delta.$$

接下来，由切比雪夫不等式、Itˆo 等距性和（A.10），我们得到关于项 P_2^N的结论

$$P_2^N \le \frac{\mathbb{E}\int_0^T \int_{E_0} |K(t,\xi)-F(t,\xi)|_V^2 d\nu(\xi)dt}{\varepsilon^2} < \delta, \qquad \text{for every } N \in \mathbb{N}.$$

项 P_4 以类似方式处理，我们有，

$$P_4 < \delta.$$

最后，我们将注意力转向项 P_3^N。由于 $F_j \in \mathbf{F}^1_{\nu,T}(V) \cap \mathbf{F}^2_{\nu,T}(V)$，我们可以写成

$$I_t^{\widehat{\pi}^N}(F) = I_t^{\pi^N}(F) + \int_0^t \int_{E_0} F(s,\xi)d\nu(\xi)ds, \quad I_t^{\widehat{\pi}}(F) = I_t^{\pi}(F) + \int_0^t \int_{E_0} F(s,\xi)d\nu(\xi)ds.$$

回顾一下， $\pi_N \to \pi$ 几乎必然地属于 $\mathcal{N}^{\#}_{[0,\infty)\times E}$，其赋有弱-# 拓扑（定义见（4.36））， 且 π_N, π的强度为 $dt \otimes d\nu$，我们可以得出 $I_t^{\pi^N}(F) \to I_t^{\pi}(F)$，当 $N \to \infty$, $dt \otimes d\mathbb{P}$-几乎必然地成立于 V。因此，

$$I_t^{\widehat{\pi}^N}(F) \to I_t^{\widehat{\pi}}(F), \quad \text{as } N \to \infty,\ dt \otimes d\mathbb{P}\text{-a.s. in } V. \tag{A.12}$$

对于 F 给由（A.11）给出，以及积分算子 $I_t^{\widehat{\pi}^N}$和 $I_t^{\widehat{\pi}}$的线性性，我们有

$$I_t^{\widehat{\pi}^N}(F) = \sum_{j=1}^m I_t^{\widehat{\pi}^N}(F_j), \quad I_t^{\widehat{\pi}}(F) = \sum_{j=1}^m I_t^{\widehat{\pi}}(F_j).$$

因此，要证明项 P_3^N 的有界性，只需证明对每个 $j = 1$、$\cdots$、m，都有:

$$\int_0^T |I_t^{\widehat{\pi}^N}(F_j)|_V^2 dt \to \int_0^T |I_t^{\widehat{\pi}}(F_j)|_V^2 dt, \text{ as } N \to \infty, \mathbb{P}\text{-a.s.} \tag{A.13}$$

˜注意到，函数 $h_{s_j,\ r_j}(t)f_{B_j}(\xi)$ 在 $[0,T]\times E$ 上连续。因此，沿用 (A.12) 中的相同思路，并利用 $\pi_N \to \pi$ 在赋予弱-# 拓扑的 $\mathcal{N}^{\#}_{[0,\infty)\times E}$ 中的定义，可得

$$\mathbb{1}_{D_j} v_j \int_0^T \int_{E_0} h_{s_j,r_j}(t)\tilde{f}_{B_j}(\xi)d\widehat{\pi}^N(t,\xi) \to \mathbb{1}_{D_j} v_j \int_0^T \int_{E_0} h_{s_j,r_j}(t)\tilde{f}_{B_j}(\xi)d\widehat{\pi}(t,\xi)$$

当 $N \to \infty, \mathbb{P}$ 时，在 V 中几乎必然成立。

因此，对于几乎每个 $\omega \in \Omega$，都存在某个 $M = M(\omega) > 0$，使得

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} |I_t^{\widehat{\pi}^N}(F_j)|_V \le |v_j|_V \sup_{N\in\mathbb{N}} \left| \int_0^T \int_{E_0} h_{s_j,r_j}(t)\tilde{f}_{B_j}(\xi)d\widehat{\pi}^N(t,\xi) \right| \le M|v_j|_V, \quad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

因此，A.13) 可由前两个等式以及支配收敛定理的应用得到。由此可得

$$\int_0^T |I_t^{\widehat{\pi}^N}(F)|_V^2 dt \to \int_0^T |I_t^{\widehat{\pi}}(F)|_V^2 dt, \text{ as } N \to \infty, \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

这表明，当 N 充分大时，有

$$P_3^N < \delta.$$

汇总关于 P_j^N 的估计； $j = 1$，2，3，4，即完成证明。 □

Acknowledgment

K. Tawri 衷心感谢美国国家科学基金会项目 DMS- 2553666（原 DMS-2407197）的资助。X. Yang 衷心感谢印第安纳大学研究基金的资助。

References

[1] David Aldous。《停时与紧性》。《概率年刊》，6(2):335 – 340，1978。22[2] Patrick Billingsley。《概率测度的收敛》。John Wiley & Sons，2013。3，22[3] Jerry Bona 和 Ridgway Scott。《分数阶Sobolev空间中的Korteweg–de Vries方程解》。《杜克数学杂志》，43(1):87 – 99，1976。1[4] Jerry L Bona 和 Ronald Smith。《Korteweg-de Vries 方程的初值问题》。《伦敦皇家学会哲学汇刊》A辑：数学与物理科学，278(1287):555–601，1975。1[5] Jean Bourgain。《某些格子子集的傅里叶变换限制现象及其在非线性演化方程中的应用：第二部分：KdV方程》。《几何与泛函分析》，3(3):209–262，1993。1[6] Zdzis-law Brze´zniak、El˙zbieta Motyl 和 Martin Ondrejat。《无界二维区域中随机Navier–Stokes方程的不变测度》。《概率年刊》，45(5):3145 – 3201，2017。2[7] Hong-Young Chang、Chuong Lien、S Sukarto、S Raychaudhuri、J Hill、E K Tsikis 和 K E Lonngren。《非静止等离子体中离子声孤子的传播》。《等离子体物理与受控聚变》，28(4):675，1986年4月。1[8] James Colliander、Markus Keel、Gigliola Staffilani、Hideo Takaoka 和 Terence Tao。《在 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T}$ 上KdV方程和修正KdV方程的尖锐全局适定性》。《美国数学会杂志》，16(3):705–749，2003。1[9] Justin Cyr、Phuong Nguyen、Sisi Tang 和 Roger Temam。《具有L´evy噪声的随机偏微分方程局部与全局存在性结果综述》。《离散与连续动力系统A辑》，40(10):5639，2020。7，10[10] Justin Cyr、Sisi Tang 和 Roger Temam。《无限维空间中关于L´evy过程的随机积分的两种设定比较》。《数学在力学中的应用趋势》，第289–373页，2018。4，36，38[11] Justin Cyr、Sisi Tang 和 Roger Temam。《L´evy噪声驱动的无黏不可压缩流体Euler方程》。《非线性分析：现实世界应用》，44:173–222，2018。21，25，26，29，36，37[12] Giuseppe Da Prato 和 Jerzy Zabczyk。《无限维随机方程》，第152卷。剑桥大学出版社，2014。37[13] Daryl J Daley 和 David Vere-Jones。《点过程理论导论：第二卷：一般理论与结构》。施普林格，2008。24[14]Anne de Bouard 和 Arnaud Debussche。《关于随机Korteweg–de Vries方程》。《泛函分析杂志》，154(1):215–251，1998。2，6[15] Anne de Bouard、Arnaud Debussche 和 Yoshio Tsutsumi。《白噪声驱动的Korteweg–de Vries方程》。《泛函分析杂志》，169(2):532–558，1999。2[16] Anne de Bouard、Arnaud Debussche 和 Yoshio Tsutsumi。《白噪声驱动的Korteweg–de Vries方程周期解》。《SIAM数学分析杂志》，36(3):815–855，2005。2[17] Arnaud Debussche、Nathan Glatt-Holtz 和 Roger Temam。《抽象流体模型的局部鞅与路径解》。《物理学D：非线性现象》，240(14-15):1123–1144，2011。26[18] Ibrahim Ekren、Igor Kukavica 和 Mohammed Ziane。《随机阻尼KdV方程不变测度的存在性》。《印第安纳大学数学杂志》，第1221–1254页，2018。2[19]Franco Flandoli 和 Dariusz Gatarek。《随机Navier–Stokes方程的鞅解与平稳解》。《概率论及相关领域》，102:367–391，1995。21

[20] Jean-Michel Ghidaglia。弱阻尼强迫Korteweg–de Vries方程在长时间尺度上表现为有限维动力系统。《微分方程杂志》，74(2):369– 390，1988。1[21] Nathan Glatt-Holtz、Vincent R Martinez 和 Geordie H Richards。关于弱阻尼随机驱动KdV方程光滑解的长时间统计行为。arXiv 预印本 arXiv:2103.12942，2021。2, 6[22] Nathan Glatt-Holtz、Jonathan C Mattingly 和 Geordie Richards。关于非线性随机偏微分方程的唯一遍历性。《统计物理学杂志》，166:618–649，2017。2[23] Nathan Glatt-Holtz 和 Mohammed Ziane。随机 Navier–Stokes 系统的强路径解。《微分方程进展》，14(5/6):567 – 600，2009。31[24] Istv´an Gy¨ongy 和 Nicolai Krylov。通过逼近求解 Itô 随机方程的强解的存在性。《概率论及相关领域》，105(2):143–158，1996。2, 29[25] R L Herman。随机阻尼 KdV 方程。《物理学 A：数学与一般》，23(7):1063，1990年4月。1[26] Nobuyuki Ikeda 和 Shinzo Watanabe。随机微分方程与扩散过程。爱思唯尔，2014。36, 38[27] Adam Jakubowski。非度量空间中子序列的几乎必然 Skorokhod表示。《概率论及其应用》，42(1):167–174，1998。24, 25[28] Tosio Kato。关于 Korteweg–de Vries方程。《数学手稿》，28(1):89–99，1979。1[29] Carlos Kenig、Gustavo Ponce 和 Luis Vega。一种应用于KdV方程的双线性估计。《美国数学会杂志》，9(2):573–603，1996。1[30] Bohdan Maslowski 和 Jan Seidler。关于随机偏微分方程的序列弱Feller解。《意大利林琴国家科学院学报：物理、数学与自然科学部。林琴数学及应用学报》，10(2):69–78，1999年6月。2, 3, 31, 32[31] I. Moise 和 R. Rosa。弱阻尼强迫Korteweg–de Vries方程全局吸引子的正则性。《微分方程进展》，2(2):257 – 296，1997。1[32] El˙zbieta Motyl。无界三维区域中由 Lévy 噪声驱动的随机 Navier–Stokes 方程。《势分析》，38(3):863–912，2013。23, 24[33] Phuong Nguyen、Krutika Tawri 和 Roger Temam。由 Lévy 噪声驱动、具有 Ladyzenskaya–Smagorinsky型单调算子的非线性随机抛物型偏微分方程。《泛函分析杂志》，281(8):109157，2021。20, 26, 37[34] Martin Ondrej´at。Banach 空间中随机发展方程的唯一性。《数学论文集》，426:1–63，2004。31[35] Kalyanapuram Rangachari Parthasarathy。度量空间上的概率测度，第352卷。美国数学学会，2005。39[36] Szymon Peszat 和 Jerzy Zabczyk。含 Lévy 噪声的随机偏微分方程：一种发展方程方法，第113卷。剑桥大学出版社，2007。3, 4[37] Kavin R 和 Ananta K. Majee。由 Lévy 噪声驱动的非线性随机偏微分方程：适定性、最优控制与不变测度。arXiv 预印本 arXiv:2306.04303，2023。2[38] Jean-Claude Saut 和 Roger Temam。关于Korteweg–de Vries方程的评述。《以色列数学杂志》，24:78–87，1976。1[39] Marco Scalerandi、A Romano 和 CA Condat。加性随机扰动下的Korteweg–de Vries孤子。《物理评论E》，58(4):4166，1998。1[40] Roger Temam。论一个非线性问题。《纯粹与应用数学杂志》，48:159–172，1969。1, 2, 6[41] Roger Temam。力学与物理学中的无穷维动力系统，应用数学科学丛书第68卷。施普林格纽约，纽约州，第2版，1997。2, 6, 7, 11[42] Toshio Yamada 和 Shinzo Watanabe。关于随机微分方程解的唯一性。《京都大学数学杂志》，11(1):155–167，1971。29

[1] Department of Applied Mathematics University of Washington Seattle WA USA. , , , , , ,
[2] Department of Mathematics Indiana University Bloomington IN USA.
Email address: ktawri@uw.edu(KrutikaTawri),temam@iu.edu(RogerTemam),xinwyang@iu.edu(Xinwu Yang)