arXiv:2603.02608v1 [math.AG] 3 Mar 2026

稳定抛物 $\mathbf{SL}(r,\mathbb{C})$ 与 $\mathbf{PGL}(r,\mathbb{C})$联络及曲线上的希格斯丛模空间的布劳尔群

Pavan Adroja 和 Sujoy Chakraborty

摘要。设X 为亏格至少为 3 的紧黎曼曲面。我们计算X上稳定抛物 $\mathrm{SL}(r,\mathbb{C})$-联络模空间以及稳定强抛物 $\mathrm{SL}(r,\mathbb{C})$-希格斯丛模空间的布劳尔群。我们还证明，稳定抛物 $\mathrm{PGL}(r,\mathbb{C})$-联络模叠的布劳尔群等于其粗模空间的光滑轨迹。

1. 引言

布劳尔群是概形和代数叠的重要不变量。代数簇Y 的上同调布劳尔群定义为$H^2_{\text{ét}}(Y,\mathbb{G}_m)$的挠子群；此外，若$Y$ 光滑，则$H^2_{\text{ét}}(Y,\mathbb{G}_m)$ 为挠群。模空间的布劳尔群刻画了万有丛存在的障碍。在有理性问题中，它也发挥着核心作用。本文旨在计算某些模空间的布劳尔群。

抛物向量丛由 V. B. Mehta 和 C. S. Seshadri 引入 [MS]，，通过在除子上加入带权旗，对经典向量丛进行了重新定义。抛物联络描述了与这些滤过相容、具有正则奇点的线性微分方程。借助 Carlos Simpson 引入的 λ-联络的霍奇模空间，抛物希格斯丛的模空间成为 $\lambda=0$纤维，而抛物联络的模空间则成为 $\lambda=1$ 纤维，从而通过自然变形将这两个空间联系起来。关于稳定抛物丛的模空间以及带对数联络的向量丛模空间的布劳尔群，已有 [BBS、BD]对此进行研究。本文将这些结果推广到稳定抛物联络的模空间。类似地，我们计算了稳定强抛物希格斯丛模空间的布劳尔群。主要结果如下。

设 X 是亏格为 g 且 $g \geq 3$的紧黎曼曲面。取 X 中的有限点集 $S = \{x_1, x2, \cdots, x_n\}$ in。固定 $\xi \in \mathrm{Pic(X)}$。令 $\mathcal{M}^{m,\alpha}_{pc}(r,\xi)$ 表示行列式 ξ 固定、秩为 r、抛物数据为 $(m,\boldsymbol{\alpha})$ 的稳定抛物联络模空间，其中 m 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 分别表示重数系统和权（见定义 2.1）。此外，设 $\mathcal{M}^{m,\alpha}\,\mathrm{Higgs}(r,\xi)$ 表示模空间

2010 数学主题分类。14D20,14D22,14F22, 14H60.关键词和短语。布劳尔群；模空间；抛物丛；抛物联络；希格斯丛。

该模空间由行列式 ξ 固定、秩为 r 且抛物数据为 $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha})$ 的强抛物稳定 Higgs 束构成。

定理 1.1（定理 4.4与定理 5.2）。 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为定义 2.5 中的一般权重系统。设 $m^j\,i$ 表示旗在 x_j 处的重数。 $\mathcal{M}^{\boldsymbol{m}}{}_{,pc}{}^{\boldsymbol{\alpha}}(r,\xi)$ 与 $\mathcal{M}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}$ 希格斯(r,ξ) 的布劳尔群同构于循环群 $\mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}$, 其中

$$\nu = \gcd(r,d,m_1^1,m_2^1,\cdots,m_1^{\ell_1},\cdots,m_n^{\ell_n})\,.$$

在 [BCD], 中证明了，在完全旗的假设下，稳定抛物 $\mathrm{PGL}(r,\mathbb{C})$-丛的模叠的布劳尔群与相应粗模空间的光滑轨迹的布劳尔群重合。该结果在 [BC] 中被进一步推广到任意旗。在本文中，我们对稳定抛物 $\mathrm{PGL}(r,\mathbb{C})$-联络的模叠建立了类似的结果。

定理 1.2 （定理 7.3）。 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为定义 2.6 中关于联络的一般权重系统。设 $\mathfrak{N}^{\boldsymbol{m}}{}_{,pc}{}^{\boldsymbol{\alpha}}(r,i)$ 表示 X 上拓扑类型为 i、抛物数据为 $(\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{\alpha})$ 的抛物稳定 $PGL(r,\mathbb{C})$-联络的模叠。设 $N_{pc}^{\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{\alpha}},(r,i)$ 表示相应的粗模空间。设 $N_{pc}^{\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{\alpha}},(r,i)^{sm}$ 表示其光滑轨迹。我们有

$$\mathrm{Br}\left(\mathfrak{N}_{pc}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r,i)\right)\ \simeq\ \mathrm{Br}\left(N_{pc}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r,i)^{sm}\right)\,.$$

2. 预备知识

设X 是亏格为$g\ \geq 3$的紧黎曼曲面。令 Ω_X^1 表示X上的全纯 1-形式层。取X中的一个点的有限子集S ， 有时称为抛物点集。

2.1. 对数联络与留数。

设E 是X上的全纯向量丛。一个在 S 上有奇点的 E 上的对数联络是一个 $\mathbb{C}$-线性映射

$$\nabla : E \longrightarrow E\otimes\Omega_X^1(S) = E\otimes\Omega_X^1\otimes\mathcal{O}_X(S)$$

满足莱布尼茨恒等式 $\nabla(fs)\ = f\,\nabla(s)\ + df\,\otimes s$， 其中$f$ 是X 上的局部定义全纯函数， s 是E的局部截面。我们有时将对数联络记作一对(E,∇)。

若两个对数联络$(E,\ \nabla)$ 和(E',∇') 在S 上有奇点，则称它们同构，如果存在一个 $\mathcal{O}_X$-线性同构 $\phi : E\ \xrightarrow{\simeq} E'$ 使下图交换:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\ \nabla\ } & E\otimes\Omega_X^1(S) \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\phi\otimes\mathrm{Id}} \\ E' & \xrightarrow{\ \nabla'\ } & E'\otimes\Omega_X^1(S) \end{array} \tag{2.1}$$

现在我们来介绍对数联络的留数这一概念。对于每个点$x \in S$，纤维 $\Omega^1_X(S)_x$ 可利用庞加莱对偶公式典范地识别为 $\mathbb{C}$。更明确地说，若z 是x 附近的一个局部坐标，且 $z(x) = 0$，则任意元素 $\omega \in \Omega^1_X(S)_x$ 都可唯一写成

$$\omega = a\,\frac{dz}{z} + \eta$$

其中，$a \in \mathbb{C}$ 和 η 是x处的全纯1-形式。伴随映射将 ω 映为a。这一描述与所选局部坐标z无关。对于对数连接(E,∇)，其复合

$$E \xrightarrow{\nabla} E\otimes\Omega^1_X(S) \longrightarrow \left(E\otimes\Omega^1_X(S)\right)_x \simeq E_x$$

是 $\mathcal{O}_X$-线性的。这便给出了E_x的一个 $\mathbb{C}$-线性自同态，称为x处∇ 的留数。记作 $\mathrm{Res}_x(\nabla)$。

2.2. **抛物向量丛与抛物联络**。

定义 2.1。 一个定义在X 上的秩为r 的抛物向量丛，是一个秩为r 的全纯向量丛E，并且在每个$x \in S$处的E 的纤维上附有一组带权旗：

$$E_x =: E^x_1 \supsetneq E^x_2 \supsetneq \cdots \supsetneq E^x_{\ell(x)} \supsetneq E^x_{\ell(x)+1} = 0 \tag{2.2}$$
$$0 \le \alpha^x_1 < \alpha^x_2 < \cdots < \alpha^x_{\ell(x)} < 1.$$

• 这样的旗被称为长度为 ℓ(x) 的旗，而数目 mxj := dim Exj $^-$dim Exj$_{+1}$ 被称为权 α xj 的重数。集合 m := {(mx1, mx2, · · · , mxℓ(x))}x$\in$S 被称为重数系统。显然，我们有 $\sum^{\ell}$ (x) j$_{=1}$ mxj $=$ r。

• 实数的集合 $\boldsymbol{\alpha} := \{(\alpha_{x1} < \alpha_{x2} < \cdots < \alpha_{x\ell(x))}\}_{x\in S}$ 被称为权重系统。元组 $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha})$ 被称为沿 S 的抛物数据。

在不会引起混淆的情况下，我们通常将抛物向量丛简单地记作 E_*，并省略抛物数据。当E 的秩为 r 且次数为 d时，E的抛物度$_*$ 定义为实数

$$p\deg(E_*) = d + \sum_{x\in S}\sum_{j=1}^{\ell(x)} m^x_j\alpha^x_j\,.$$

抛物斜率E_* 定义为实数$p\mu(E_*) := {}_p\deg_{(E_*)}\, r$。

设E_* 是一个抛物丛，F 是E的一个向量子丛。那么E 上的抛物结构以自然的方式诱导出F 上的抛物结构 [BY2，MS]。向量丛F 与这一诱导的抛物结构一起记作F_*，称为E的一个抛物子丛。

定义 2.2. 抛物向量丛 E_* 称为抛物半稳定（相应地抛物稳定），如果对每个非零真抛物子丛 F_*，我们有

$$p\mu(F_*) \le p\mu(E_*) \quad (\text{respectively, } p\mu(F_*) < p\mu(E_*))\,.$$

定义 2.3. 设 E_* 是 X 上的抛物向量丛，其沿 S 的抛物数据为 $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha})$。一个$E$上的抛物连接$_*$ 是 E 上在S处奇异的对数连接 ∇，使得对所有 $x \in S$,

(i) 留数 $\mathrm{Res}_x(\nabla)$ 是半单的，并且保持 E_x 上由抛物结构给出的旗，即 $\mathrm{Res}_x(\nabla)\left(E^x_j\right) \subset E^x_{j+1}$ 对所有 j (定义 2.1)，以及 (ii) $\mathrm{Res}_x(\nabla)\left(E^x_j/E^x_{j+1}\right) = \alpha^x_j \cdot \mathrm{Id}_{E^x_j/Exj+1}$ 对所有 j。

定义 2.4。 若对任意在 ∇作用下保持不变的真子丛F，都有下式，则称抛物连接(E_*,∇)为抛物半稳定（分别称为抛物稳定）：

$$p\mu(F_*) \le p\mu(E_*) \quad (\text{respectively, } p\mu(F_*) < p\mu(E_*))\,.$$

2.3. **一般权重系统**。
固定沿S的秩为r 的重数系统$\boldsymbol{m}$ 。换言之，对于定义在X上、秩为r 的任意向量丛E，数据$\boldsymbol{m}$ 指定了对每个点$x \in S$而言，其上方纤维E_x 的旗类型。显然，权重系统 $\boldsymbol{\alpha}$ 与给定重数系统相容的概念是明确的；也就是说，在S中的每个点，权的数量应与该点处重数的数量相同。

定义 2.5 ([BY2,§ 2]). 固定沿S、秩为r 的重数$\boldsymbol{m}$ 系统。若权重系统 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足：对于任意秩为r 且抛物数据为$(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha})$的抛物向量丛，抛物半稳定性与抛物稳定性一致，则称其为一般权重系统。

对于抛物联络，也可以类似地讨论一般权重系统。

定义 2.6 ([BY1,p. 575]). 固定沿S、秩为r 的重数$\boldsymbol{m}$ 系统。若与$\boldsymbol{m}$ 相容的权重系统 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足：对于任意秩为r 且奇异于S、具有抛物数据$(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha})$的抛物连接$(E_*,\nabla)$，抛物半稳定性与抛物稳定性一致，则称其为抛物联络的一般权重系统。

3. 稳定抛物 $\mathrm{SL}(r,\mathbb{C})-$CONNECTIONS（扭曲）模空间

固定一个整数d，并考虑沿$S = \{x_1, x2, \cdots, x_n\}$、抛物数据$(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha})$，满足

$$d + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell_i} m^i_j \alpha^i_j = 0\,. \tag{3.1}$$

在额外假设 $\alpha^1_i > 0$ 对所有 $1 \le i \le n$ 成立时，Inaba 和 Saito 在 [IS] 构造了沿着 S 中各点、定义在 X 上的秩为 r、次数为d 的稳定抛物联络模空间(E_*,∇)，记作

$$\mathcal{M}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}_{pc}(r,d)\,.$$

It 是一个维数为（见 [IS，定理 1。3] 的光滑拟射影簇　　）

$$\dim \mathcal{M}_{pc}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r,d) = 2r^2(g-1)+2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell_i}\sum_{j'>j} m_j^i m_{j'}^i \tag{3.2}$$

其中 $\ell_i := \ell(x_i)$ (参见定义2.1)。抛物向量丛 E_* 配备抛物数据 $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha})$ 上的抛物连接 ∇ 诱导出 $\det(\nabla)$ 上的对数连接，其定义在 $\det(E)$ 上，留数为

$$\mathrm{Res}_{x_i}(\det(\nabla)) = \mathrm{tr}(\mathrm{Res}_{x_i}\nabla) = \sum_{j=1}^{\ell_i} m_j^i\alpha_j^i$$

对每个 $x_i \in S$。记 $\lambda_i := \sum^{\ell_i} j=1 m_j^i\alpha_j^i$ 和 $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，并令 $\mathcal{M}_{lc}(1, d, \boldsymbol{\lambda})$ 表示 X 上次数为 d、沿 S 具有留数 λ_i at $x_i \in S$ 的线丛及其对数联络的模空间。由于条件 (3.1) [BH, 命题 4.1]，该模空间非空。考虑态射

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_{pc}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r,d) &\longrightarrow \mathcal{M}_{lc}(1,d,\boldsymbol{\lambda}) \\ (E_*,\nabla) &\mapsto (\det(E),\det(\nabla)) \end{aligned} \tag{3.3}$$

可以证明 f 是一个光滑态射（全旗情形参见 [I, § 5]；另见[IS, 定理 1。2]）。

定义 3.1 ([IS])。假设条件（3.1）成立。取一个定义在X 上、次数为d的线丛 ξ，以及定义在 ξ 上、留数为 $\lambda_i := \sum^{\ell_i}{}_{j=1} m_j^i\alpha_j^i$ 的对数联络 ∇_ξ，其奇点位于各点 $x_i \in S$ $(1 \le i \le n)$。我们将记作

$$\mathcal{M}_{pc}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r,\xi)$$

秩为 r、抛物数据为 $(\mathrm{m},\boldsymbol{\alpha})$、行列式为 ξ 的稳定抛物联络 (E_*,∇) 的模空间，其中 $(\det(\mathrm{E}),\det(\nabla)) \simeq (\xi,\nabla_\xi)$ 作为对数联络同构。换言之，$\mathcal{M}^{\boldsymbol{m}}{}_{,pc}{}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathrm{r},\ \xi)$ 是光滑映射 f (3.3) 在点 $(\xi,\nabla_\xi) \in \mathcal{M}_{lc}(1,\mathrm{d},\ \boldsymbol{\lambda})$ 上的纤维。

为计算 $\mathcal{M}^{\boldsymbol{m}}{}_{,pc}{}^{\boldsymbol{\alpha}}(r,\xi)$的维数，取任意一个定义在$X$上、次数为$d$的全纯线丛 ξ'。条件（3.1）意味着 ξ' 存在一个对数联络，其在每个 $x_i \in S$ [BL处的留数为 λ_i，定理 1.1]。因此，$\mathcal{M}_{lc}(1,d,\boldsymbol{\lambda})$ 是 $\mathrm{Pic}^d(X)$ 上的仿射丛，其在 ξ' 上的纤维维数为

$$\dim H^0\left(X,\ End(\xi')\otimes\Omega_X^1\right) = \dim H^0(X,\Omega_X^1) = g.$$

由此可得 $\dim\ \mathcal{M}_{lc}(1,d,\boldsymbol{\lambda}) = 2g$。因此，$\mathcal{M}^{\boldsymbol{m}}{}_{,pc}{}^{\boldsymbol{\alpha}}(r,\xi)$ 是一个光滑不可约拟射影簇，其维数为

$$\dim \mathcal{M}_{pc}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r,\xi) = \dim \mathcal{M}_{pc}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r,d) - 2g = 2(r^2-1)(g-1)+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell_i}\sum_{j'>j} m_j^i m_{j'}^i \tag{3.4}$$

4. $\mathcal{M}^{\boldsymbol{m}}{}_{,pc}{}^{\boldsymbol{\alpha}}(r,\xi)$的布劳尔群

引理 *4.1.* 考虑沿 $S = \{x1, \cdots, x_n\}$ 的抛物数据 (m, α)，其中 α 是定义 *2.5* 意义下的一般权重系统。设 E 是秩为 r、行列式为 ξ 的向量丛，并假设 E_* 具有一个联络 ∇，使得 (E_*, ∇) 稳定；换言之，$(E_*, \nabla) \in \mathcal{M}^{\boldsymbol{m}}{}_{,pc}{}^{\boldsymbol{\alpha}}(r,\xi)$。那么，$E_*$ 上满足 $(E_*, D) \in \mathcal{M}^{\boldsymbol{m}}{}_{,pc}{}^{\boldsymbol{\alpha}}(r,\xi)$ 的抛物联络 D 的同构类空间维数至多为

$$(r^2-1)(g-1) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell_i}\sum_{j'>j} m^i_j m^i_{j'}$$

证明。设 $\mathrm{PC}^{\xi}(\mathrm{E}_*)$ 表示 E_* 上所有抛物联络的空间，这些抛物联络作为对数联络还满足 $(\det(\mathrm{E}), \det(\mathrm{D})) \simeq (\xi, \nabla_{\xi})$。它包含一个开子空间 $\mathrm{PC}^{s}_{\xi}(\mathrm{E}_*)$，由 E_* 上所有使得 $(\mathrm{E}_*, \mathrm{D})$ 稳定、并且 $(\det(\mathrm{E}), \det(\mathrm{D})) \simeq (\xi, \mathrm{D}^{\xi})$ 的抛物联络 D 组成。注意，$\mathrm{PC}^{\xi}(\mathrm{E}_*)$ 是以向量空间 $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \Omega^1_X(\mathrm{S}) \otimes \mathrm{SParEnd}'(\mathrm{E}_*))$ 为模型的仿射空间的一个子空间，其中 $\mathrm{SParEnd}'(\mathrm{E}_*)$ 表示迹为零的强抛物态射。

给定 $\Phi \in \mathrm{Aut}(E_*)$ 以及 E_* 上的抛物连接 $D \in \mathrm{PC}^{s}_{\xi}(E_*)$，$\mathbb{C}$-线性态射 $(\Phi \otimes \mathrm{id}_{\Omega^1_X(S)}) \circ D \circ \Phi^{-1}$ 再次在 E_* 上定义一个抛物连接。事实上，

$$(D, \Phi) \mapsto (\Phi \otimes \mathrm{id}_{\Omega^1_X(S)}) \circ D \circ \Phi^{-1}$$

定义了 $\mathrm{Aut}(\mathrm{E}_*)$ 在 $\mathrm{PC}^{s}_{\xi}(\mathrm{E}_*)$ 上的作用。商 $\mathrm{PC}^{s}_{\xi}(\mathrm{E}_*)/\mathrm{Aut}(\mathrm{E}_*)$ 参数化了 E_* 上所有同构的抛物联络，这正是我们所需的空间。类似地，$\mathrm{Aut}(\mathrm{E}_*)$ 在 $\mathrm{PC}^{\xi}(\mathrm{E}_*)$ 上也有作用。显然，空间 $\mathrm{PC}^{s}_{\xi}(\mathrm{E}_*)/\mathrm{Aut}(\mathrm{E}_*)$ 是 $\mathrm{PC}^{\xi}(\mathrm{E}_*)/\mathrm{Aut}(\mathrm{E}_*)$ 的一个开子集，因此

$$\dim\left(\mathrm{PC}^{s}_{\xi}(E_*)/\mathrm{Aut}(E_*)\right) = \dim\left(\mathrm{PC}_{\xi}(E_*)/\mathrm{Aut}(E_*)\right).$$

任取 $D \in \mathrm{PC}^{s}_{\xi}(E_*)$，并令

$$\mathrm{Aut}(E_*)_D = \{\Phi \in \mathrm{Aut}(E_*) \mid (\Phi \otimes \mathrm{id}_{\Omega^1_X(S)}) \circ D \circ \Phi^{-1} = D\}$$

表示各向同性子群。由于对(E_*,D) 是稳定的，这是一个标准事实：$\mathrm{Aut}(E_*)_D$ 仅由E_*的标量自同构组成。因此，$\dim(\mathrm{Aut}(E_*)_D) = 1$。由于 $\mathrm{Aut}(E_*)$ 的李代数是 $\mathrm{H}^0(X, \mathrm{ParEnd}(E_*))$，我们有

$$\dim\,\mathrm{Aut}(E_*) = \dim\,\mathrm{H}^0(X, \mathrm{ParEnd}(E_*)) = \dim\,\mathrm{H}^0(X, \mathrm{ParEnd}'(E_*)) + 1,$$

其中，$\mathrm{ParEnd}'(E_*)$ 表示迹为零的抛物线型自同态空间。利用抛物 Serre 对偶

$$\mathrm{H}^1(X, \mathrm{ParEnd}'(E_*)) \simeq \mathrm{H}^0(X, \Omega^1_X(S) \otimes \mathrm{SParEnd}'(E_*))^{\vee}$$

可知，$\mathrm{PC}^s_\xi(E_*)/\mathrm{Aut}(E_*)$ 的维数至多为

$$\begin{aligned}&\dim \mathrm{H}^0(X,\Omega^1_X(S)\otimes \mathrm{SParEnd}'(E_*)) - \dim \mathrm{Aut}(E_*) + \dim \mathrm{Aut}(E_*)_D\\ =\ &\dim \mathrm{H}^1(X,\mathrm{ParEnd}'(E_*)) - \mathrm{H}^0(X,\mathrm{ParEnd}'(E_*)) - 1 + 1\\ =\ &-\chi(\mathrm{ParEnd}'(E_*)),\end{aligned} \tag{4.1}$$

其中 $\chi(\mathrm{ParEnd}'(E_*))$ 表示欧拉-庞加莱特征，即 $\mathrm{ParEnd}'(E_*)$ 在X上的。接下来，考虑如下层的短正合列，其定义在 X [BH，引理 2.4]:

$$0 \longrightarrow \mathrm{ParEnd}'(E_*) \longrightarrow \mathrm{End}'(E) \longrightarrow \mathcal{K}_S \longrightarrow 0$$

其中 $\mathrm{End}'(E)$ 表示底丛的迹为零的自同态所成空间，该底丛为 E，并且 $\mathcal{K}_S$ 表示支撑在抛物点上的自然摩天大楼层S。由 [BH，引理 2.4], 我们还得到

$$\chi(\mathcal{K}_S) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell_i}\sum_{j'>j} m^i_j m^i_{j'}. \tag{4.2}$$

于是，我们有

$$\chi(\mathrm{End}'(E)) = \chi(\mathrm{ParEnd}'(E_*)) + \chi(\mathcal{K}_S). \tag{4.3}$$

再考虑由迹映射给出的、X 上的层的正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{End}'(E) \longrightarrow \mathrm{End}(E) \xrightarrow{tr} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0\,.$$

利用黎曼-罗赫定理，我们有 $\chi(\mathrm{End}(E)) = r^2(1-g)$。由此可得

$$\chi(\mathrm{End}'(E)) = \chi(\mathrm{End}(E)) - \chi(\mathcal{O}_X) = (r^2-1)(1-g). \tag{4.4}$$

因此，由方程（4.1）、（4.3）、（4.2）和（4.4），可知 $\mathrm{PC}^s_\xi(E_*)/\mathrm{Aut}(E_*)$ 的维数至多为

$$(r^2-1)(g-1) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell_i}\sum_{j'>j} m^i_j m^i_{j'}.$$

这就证明了我们的断言。 □

令 $\mathcal{U}$ 表示 $\mathcal{M}^{\boldsymbol{m}}$的开子集，${}_{pc}{}^{\boldsymbol{\alpha}}(r,\xi)$ 由那些抛物连接 (E_*,∇) 组成，其底层抛物向量丛 E_* 是稳定的（见 [M，定理 2.8(A)]）。考虑其补集

$$Z := \mathcal{M}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}_{pc}(r,\xi)\setminus\mathcal{U}. \tag{4.5}$$

我们想计算闭子集 Z 在 $\mathcal{M}^{\boldsymbol{m}}$中，${}_{pc}{}^{\boldsymbol{\alpha}}(r,\xi)$的余维 .

Le引理 4.2. 设 Z 如 (4.5) 中所述。那么，对于 $r \geq 2$，以及 $g \geq 3$，我们有 e

$$\mathrm{codim}\left(Z, \mathcal{M}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}_{pc}(r,\xi)\right) \geq 2.$$

证明。 设 $(E_*,D) \in Z$。那么，E_* 不是抛物稳定的。由于 $\boldsymbol{\alpha}$ 是一般权重系统，E_* 不是抛物半稳定的。设

$$0 = E_*^1 \subset E_*^2 \subset \cdots \subset E_*^{l-1} \subset E_*^l = E_*$$

为抛物向量丛 E_* 的 Harder-Narasimhan滤过。整数对的集合 $\{(\text{秩}(E_*^i),p\text{度}(E_*^i))\}_{i=1}^l$ 称为 E_* 的 Harder-Narasimhan多边形。

在 X 上，Harder-Narasimhan多边形与给定抛物向量丛 E_* 相同的所有抛物向量丛同构类所构成的空间，其维数至多为

$$r^2(g-1) - (r-1)(g-2) - g + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell_i}\sum_{j'>j} m_j^i m_{j'}^i. \tag{4.6}$$

这可由 [BM 的类似方法推出，见第 3.1 引理，第 303] 页。

根据引理 4.1，给定任意抛物向量丛E_* 上所有抛物联络同构类所构成空间的维数至多为

$$(r^2-1)(g-1) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell_i}\sum_{j'>j} m_j^i m_{j'}^i. \tag{4.7}$$

It 由此可知，维数 Z 至多为（4.6）与（4.7）之和，即 y

$$\dim(Z) \leq r^2(g-1) - (r-1)(g-2) - g + (r^2-1)(g-1) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell_i}\sum_{j'>j} m_j^i m_{j'}^i\,.$$

由于我们有（参见（3.4））

$$\dim\left(\mathcal{M}_{pc}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r,\xi)\right) = 2(r^2-1)(g-1) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell_i}\sum_{j'>j} m_j^i m_{j'}^i\,,$$

我们得到

$$\begin{aligned}\dim\left(\mathcal{M}_{pc}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r,\xi)\right) - \dim Z &\geq (r^2-1)(g-1) - r^2(g-1) + (r-1)(g-2) + g \\ &= (r-1)(g-2) + 1\,. \end{aligned}\tag{4.8}$$

因此，我们的断言得证。 □

引理 4.3. 令 $\mathcal{N}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r,\xi)$ 表示 X 上秩为 r、行列式为 ξ 且具有抛物数据 $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha})$ 的稳定抛物向量丛的模空间。考虑遗忘态射

$$\begin{aligned}\pi : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathcal{N}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r,\xi) \\ (E_*,\nabla) &\mapsto E_*\end{aligned}\tag{4.9}$$

因此，$\mathcal{U}$ 是一个通过 π 定义在 $\mathcal{N}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r,\xi)$ 上的 $T^*\mathcal{N}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r,\xi)$-主齐性空间。

证明。 态射 π 由 [B 定理 3.1] 可知是满射。此外， $\pi^{-1}(E_*)$ 是一个以 $\mathrm{H}^0(X,\Omega^1_X(S)\otimes \mathrm{SParEnd}'(E_*))$为模型的仿射空间，其中 $\mathrm{SParEnd}'(E_*)$ 表示 E_* 的迹为零的强抛物态射。这就证明了我们的断言。□

现在我们可以计算模空间 $\mathcal{M}^{\boldsymbol{m}}_{pc}{}^{\boldsymbol{\alpha}}(r,\xi)$的布劳尔群了。

定理 4.4. 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是定义 2.5 中的一般权重系统，则 布劳尔群 $\left(\mathcal{M}^{\boldsymbol{m}}_{pc}{}^{\boldsymbol{\alpha}}(r,\xi)\right)$同构于循环群 $\mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}$，其中

$$\nu = \gcd(r,d,m_1^1,m_2^1,\cdots,m_1^{\ell_1},\cdots,m_n^{\ell_n})\,. \tag{4.10}$$

证明. 为方便起见，记 $Y := \mathcal{N}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r,\xi)$。根据引理 4.3，映射$\pi:\mathcal{U}\longrightarrow Y$ 是T^*Y的主齐性空间，因此 $\mathcal{U}$ 是Y上的仿射丛。由此可知，乘法群层满足

- $\pi_*\mathbb{G}_{m,\mathcal{U}} = \mathbb{G}_{m,Y}$，以及
- $R^i\pi_*\mathbb{G}_m,\ _{\mathcal{U}} = 0$ 当i $= 1$时，2。

由此得与该谱序列相关联的五项正合列

$$E_2^{p,q} = H^p_{\text{ét}}\left(Y, R^q\pi_*\mathbb{G}_{m,\mathcal{U}}\right) \implies H^{p+q}_{\text{ét}}\left(\mathcal{U},\mathbb{G}_{m,\mathcal{U}}\right)$$

具有如下形式

$$0\to \mathrm{Pic}\left(Y\right)\to \mathrm{Pic}(\mathcal{U})\to H^0_{\text{ét}}(Y,R^1\pi_*\mathbb{G}_m)=0\to H^2_{\text{ét}}\left(Y,\pi_*\mathbb{G}_m\right)=\mathrm{Br}\left(Y\right)\to \mathrm{Br}(\mathcal{U})\to 0.$$

这立即意味着 $\mathrm{Pic}(\mathcal{U})\ \simeq \mathrm{Pic}(Y)$ 和布劳尔群 $\mathcal{U})\ \simeq \mathrm{Br}(Y)$。另一方面，引理4.2以及布劳尔群的上同调纯性 [C] 意味着

$$\mathrm{Br}(\mathcal{U})\simeq \mathrm{Br}(\mathcal{M}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}_{pc}(r,\xi))\,.$$

因此，布劳尔群 $\left(\mathcal{M}^{\boldsymbol{m}},\ _{pc}{}^{\boldsymbol{\alpha}}(r,\ \xi)\right)\simeq \mathrm{Br}(Y)$。根据 [BD，定理 1.1], 我们知道 $\mathrm{Br}(Y)$ $\simeq \mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}$。证明完毕。

□

5. 布劳尔群　稳定抛物 SL$(r,\mathbb{C})$-希格斯丛模空间

现在考虑 X 上抛物希格斯丛的情形。与前面一样，固定一组沿 X 中点集 S 的秩为 r 的抛物数据 $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha})$。

定义 5.1。 一个强抛物 *Higgs* 丛 是一个二元组 (E_*,Φ)，其中 E_* 是一个抛物向量丛，并配有一个 $\mathcal{O}_X$-线性同态

$$\Phi: E\longrightarrow E\otimes\Omega^1_X(S)$$

使得对每个 $x\ \in S$ 上的点，映射 Φ_x 在纤维 E_x 上满足（见定义 2.1）

$$\Phi(E^x_j)\subset E^x_{j+1}\otimes\Omega^1_X(S)|_x$$

对所有 j 均成立。映射 Φ 称为 抛物 *Higgs* 场 ， 定义在 E_* 上。

若对每个非零真抛物子丛 F_*（其中 F_* 属于 E_*，且在 Φ 作用下不变，即 $\Phi(F) \subset F \otimes \Omega^1_X(S)$）都满足以下条件，则称抛物希格斯丛 (E_*, Φ) 为抛物半稳定（分别称为抛物稳定</style>）：

$$p\mu(F_*) \leq p\mu(E_*) \quad (\text{respectively, } p\mu(F_*) < p\mu(E_*)) .$$

固定 X 上一个次数为 d 的全纯线丛 ξ。令 $\mathcal{M}^{m\alpha}$ Higgs(r, ξ) 表示稳定强抛物希格斯丛 (E_*, Φ) 的模空间，这些丛沿 S 具有抛物数据 (m, $\boldsymbol{\alpha}$)，且固定行列式 det E $\simeq \xi$ 并满足迹条件 trace(Φ) $= 0$。（参见 [GL, Y]）。它是一个不可约正规准射影簇。

令 $S = \{x_1, \cdots, x_n\}$。利用 [BY1 第 575] 页中的维数表达式以及恒等式

$$\sum_{i=1}^{n} \left(r^2 - \sum_{j=1}^{\ell_i} (m_j^i)^2 \right) = 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\ell_i} \sum_{j'>j} m_j^i \, m_{j'}^i ,$$

由此可得

$$\dim \mathcal{M}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}_{Higgs}(r, \xi) = 2(r^2 - 1)(g - 1) + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\ell_i} \sum_{j'>j} m_j^i \, m_{j'}^i . \tag{5.1}$$

可以用与定理 $\mathcal{M}^{\boldsymbol{m}}$**相似的方式计算** $^{\boldsymbol{\alpha}}$ $_{Higgs}(r, \xi)$ 的布劳尔群：

定理 5.2。 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是定义 2.5 中的一个一般权重系统，则 $\mathrm{Br}(\mathcal{M}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}$ $Higgs(r, \xi))$同构于循环群 $\mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}$，其中

$$\nu = \gcd(r, d, m_1^1, m_2^1, \cdots, m_1^{\ell_1}, \cdots, m_n^{\ell_n}) .$$

证明。 考虑模空间 $\mathcal{N}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r, \xi)$，它由 X 上秩为 r、行列式为 ξ 且抛物数据为 $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\alpha})$ 的稳定抛物向量丛构成。记 $\mathrm{ParEnd}'(E_*)$ 为迹为零的抛物线型自同态空间。由此，$\mathcal{N}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r, \xi)$ 在 E_* 处的余切空间为

$$(T_{E_*}\mathcal{N}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r, \xi))^\vee \simeq \mathrm{H}^1(X, \mathrm{ParEnd}'(E_*))^\vee \simeq \mathrm{H}^0(X, \mathrm{SParEnd}'(E_*) \otimes \Omega^1_X(S))$$

事实上，余切丛 $T^*\mathcal{N}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r, \xi)$ 嵌入于 $\mathcal{M}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}$ 希格斯(r, ξ) 中，且为扎里斯基开子集，其补集的余维至少为二。现在，仿照定理 4.4证明中的论证可得

$$\mathrm{Br}(\mathcal{M}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}_{Higgs}(r, \xi)) \simeq \mathrm{Br}\left(T^*\mathcal{N}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r, \xi)\right) \simeq \mathrm{Br}(\mathcal{N}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r, \xi)) .$$

由于布劳尔群 $(\mathcal{N}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r, \xi)) \simeq \frac{\mathbb{Z}}{\nu\mathbb{Z}}$ [BD，定理 1.1], 我们的结论得证。 □

6. Moduli of stable parabolic $\mathrm{PGL}(r, \mathbb{C})$-connections

6.1. 挠线丛对抛物联络模空间的作用。 令

$$\Gamma := \{M \in \mathrm{Pic}(X) \mid M^{\otimes r} \simeq \mathcal{O}_X\} \tag{6.1}$$

表示X上的 r 阶挠线丛群。它是一个阶为r^{2g}的有限阿贝尔群。我们旨在构造 Γ 在抛物稳定联络模空间$\mathcal{M}^{m}_{,pc}{}^{\alpha}(r,\xi)$ 上的作用（见定义 3.1），并研究其不动点轨迹。

平凡线丛总是容许一个全纯联络，即微分 $d:\ \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega^1_X$。这将被称为 $\mathcal{O}_X$ 上的平凡联络 。下述结果对专家而言应当是熟知的；为完整起见，我们在此给出一个证明。

引理 6.1. 设 L 为 X 上满足 $L^{\otimes r} \simeq \mathcal{O}_X$ 的全纯线丛。存在 L 上唯一的全纯联络 D_L，使得 $L^{\otimes r}$ 上的诱导联络 $D_L^{\otimes r}$ 在该等同下与 $\mathcal{O}_X$ 上的平凡联络 d 一致。

证明。 对任意线丛 M，令 $at(M) \in H^1(X,\ \Omega^1_X)$ 表示其阿蒂亚类。众所周知，M 具有全纯联络当且仅当 $at(M) = 0$ [A，定理 2]。

选取一个同构 $\varphi : L^{\otimes r} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_X$。平凡联络 d 可以通过 φ 转移到 $\mathcal{O}_X$ 上，从而在 $L^{\otimes r}$ 上得到一个全纯联络。由于线丛的阿蒂亚类与其第一陈类相同，我们得到

$$at(L^{\otimes r}) = c_1(L^{\otimes r}) = 0 \tag{6.2}$$

$$\Longrightarrow\ r \cdot c_1(L) = 0. \tag{6.3}$$

由此可得 $c_1(L) = at(L) = 0$，因为 $c_1(L) \in H^2(X,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$。因此，$L$ 存在一个全纯联络，记为 D。通过 φ 将 $D^{\otimes r}$ 转移后，将其视为 $\mathcal{O}_X$ 上的联络。换言之，考虑以下联络 $\mathcal{O}_X$:

$$D' := (\varphi \otimes \mathrm{Id}_{\Omega^1_X}) \circ D^{\otimes r} \circ \varphi^{-1}.$$

现在，由于 $\mathcal{O}_X$ 上的全纯联络空间是一个以 $H^0(X,\Omega^1_X)$ 为模型的仿射空间，因此存在一个 X 上的全纯1-形式 ω，满足

$$D' - \omega \ = \ d. \tag{6.4}$$

令 $\omega' := \mathrm{Id}_{L^{\otimes r}} \otimes \omega \in H^0(X, \mathrm{End}(L^{\otimes r}) \otimes \Omega^1_X)$，并令 $D_L := D - \frac{1}{r}\omega'$ 为 L 上由此得到的联络。由此可得

$$D_L^{\otimes r} = D^{\otimes r} - r \cdot \frac{1}{r}\omega' = D^{\otimes r} - \omega',$$

从而，

$$(\varphi \otimes \mathrm{Id}_{\Omega^1_X}) \circ D_L^{\otimes r} \circ \varphi^{-1} = (\varphi \otimes \mathrm{Id}_{\Omega^1_X}) \circ (D^{\otimes r} - \omega') \circ \varphi^{-1} \ = \ D' - \omega = d. \tag{6.5}$$

换言之，$D_L^{\otimes r}$经由 φ与 $\mathcal{O}_X$ 上的平凡联络d 重合。

为证明唯一性，假设L 容许另一个满足

$$(\varphi \otimes \mathrm{Id}_{\Omega^1_X}) \circ D_0^{\otimes r} \circ \varphi^{-1} = d.$$

现在，$D_L = D_0 + (\mathrm{Id}_L) \otimes \eta$ 其中 η 是定义在 X 上的某个全纯1-形式。因此

$$D_L^{\otimes r} = D_0^{\otimes r} + r \cdot (\mathrm{Id}_{L^{\otimes r}}) \otimes \eta,$$

这意味着 $(\varphi \otimes \mathrm{Id}^{\Omega^1_X}) \circ D_L^{\otimes r} \circ \varphi^{-1} = (\varphi \otimes \mathrm{Id}^{\Omega^1_X}) \circ D_0^{\otimes r} \circ \varphi^{-1} + r \cdot \eta$ 在 $\mathcal{O}_X$ 上。由于

$$(\varphi \otimes \mathrm{Id}_{\Omega^1_X}) \circ D_L^{\otimes r} \circ \varphi^{-1} = (\varphi \otimes \mathrm{Id}_{\Omega^1_X}) \circ D_0^{\otimes r} \circ \varphi^{-1} = d\,,$$

我们得到 $\eta = 0$，从而证明了 D_L 的唯一性。最后，如果我们在 $L^{\otimes r}$ 和 $\mathcal{O}_X$ 之间选择另一个同构 φ'，那么 φ 和 φ' 相差一个非零标量。由上述计算可知，D_L 与同构 φ 的选择无关。□

利用引理 6.1，可以定义 Γ 在 $\mathcal{M}^{m}_{pc}{}^{\alpha}(r, \xi)$ 上的作用如下：给定$L \in \Gamma$ 以及一个稳定抛物联络(E_*, ∇)，定义

$$L \cdot (E_*, \nabla) := (E_* \otimes L, \nabla \otimes D_L)\,,$$

其中，$E_* \otimes L$ 赋予由E_*自然诱导的抛物结构，而$(\nabla \otimes D_L)$定义为

$$(\nabla \otimes D)(s \otimes t) := \nabla(s) \otimes t + s \otimes D(t)$$

对于E 的局部定义截面s 和L的局部定义截面t 。

下面详细说明为何这确实定义了一个作用。首先注意到

$$\det(E \otimes L) \simeq \det(E) \otimes L^{\otimes r} \simeq \xi.$$

此外，很容易看出下图中的每个方块都交换：

$$\begin{array}{ccc}
\det(E \otimes L) & \xrightarrow{\det(\nabla \otimes D_L)} & \det(E \otimes L) \otimes \Omega^1_X(D) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
\det(E) \otimes L^{\otimes r} & \xrightarrow{\det(\nabla) \otimes D_L^{\otimes r}} & \det(E) \otimes L^{\otimes r} \otimes \Omega^1_X(D) \\
\downarrow \mathrm{Id}_{\det(E)} \otimes \varphi & & \downarrow \mathrm{Id}_{\det(E)} \otimes \varphi \otimes \mathrm{Id}_{\Omega^1_X(D)} \\
\det(E) & \xrightarrow{\det(\nabla)} & \det(E) \otimes \Omega^1_X(D)
\end{array}$$

最外侧的箭头表明，$(\det(E \otimes L), \det(\nabla \otimes D_L)) \simeq (\det(E), \det(\nabla))$ 是对数联络。此外，对每个$x \in S$，都有 $\mathrm{Res}_x(D_L) = 0$，这是因为D_L是全纯的。因此

$$\mathrm{Res}_x(\nabla \otimes D_L) = \mathrm{Res}_x(\nabla) \otimes \mathrm{Id}_{L_x} + \mathrm{Id}_{E_x} \otimes \mathrm{Res}_x(D_L) = \mathrm{Res}_x(\nabla) \otimes \mathrm{Id}_{L_x}\,. \tag{6.6}$$

因此，$\mathrm{Res}_x(\nabla \otimes D_L)$ 保留旗$E^x_j \otimes L_x$ 中的每个子空间。此外，

$$\mathrm{Res}_x(\nabla \otimes D_L)\left((E^x_j \otimes L_x)/(E^x_{j+1} \otimes L_x)\right) = \alpha^x_j \cdot \mathrm{Id}\,.$$

因此，$(E_* \otimes L, \nabla \otimes D_L)$是一个抛物连接（见定义2.3）。由此，我们得到 Γ 对 $\mathcal{M}^{m}_{pc}{}^{\alpha}(r, \xi)$ 的作用。

6.2. **不动点轨迹的维数估计**。
回忆一下群 Γ，它来自（6.1）。设$L \in \Gamma$ 非平凡。若$m = ord（L）$，取L的一个处处非零截面 σ。考虑态射$g: L \longrightarrow L^{\otimes m}$，$v \mapsto v^{\otimes m}$。与 σ 相关联的谱曲线定义为L 中的闭子概形

$$Y_L := g^{-1}(\sigma(X)). \tag{6.7}$$

设 $\gamma: Y_L \longrightarrow X$ 表示投影 $L \longrightarrow X$ 到Y_L的限制。它是次数为 m 的有限 ´平展伽罗瓦态射。映射 γ 的同构类不依赖于截面 σ的选取。

给定沿 S 的秩为 r 的抛物数据 $(\mathrm{m}, \boldsymbol{\alpha})$，[BC，§ 3], 中曾描述一种沿 γ^{-1}(S) 指定秩为 rm 的抛物数据的方法，为方便起见，下面简要回顾。为简单起见，考虑 $\mathrm{S} = \{\mathrm{p}\}$ 为单点集的情形。于是在 $\mathrm{p} \in \mathrm{X}$ 处有权重系统 $(\alpha_1^p < \alpha_2^p < \cdots < \alpha_{\ell}^p(\mathrm{p}))$。群 $\mathrm{Gal}(\gamma) = \{1, \mu, \mu^2, \cdots, \mu^{m-1}\}$ 通过来自 $\mathbb{C}^*$ 的乘法作用在 $\gamma^{-1}(\mathrm{p})$ 上。固定 $\gamma^{-1}(\mathrm{p})$ 中各点的一个排序，例如

$$\gamma^{-1}(p) = \{q_1, q_2, \cdots, q_m\}, \tag{6.8}$$

使得 μ^i 在 $\gamma^{-1}(p)$ 上作用为循环置换，将 q^j 映至 q^{j+i}，其中下标 $(j+i)$ 按模 m 理解。令 $\boldsymbol{P}$ 表示 $\left\{\alpha_1^p, \alpha_2^p, \cdots, \alpha_{\ell(p)}^p\right\}$ 的所有非空子集组成的集合，其基数至多为 rm。定义

$$\boldsymbol{T} := \underbrace{\boldsymbol{P} \times \cdots \times \boldsymbol{P}}_{m \text{ times}}. \tag{6.9}$$

对于每个 $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$，我们希望描述一种关联权重系统以及沿着 $\gamma^{-1}(p) = \{q_1, q2, \cdots, q_m\}$ 的重数系统集合的过程。对于每个 $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$，采用记号

$$\mathbf{t} = (\lambda_1(\mathbf{t}), \lambda_2(\mathbf{t}), \cdots, \lambda_d(\mathbf{t})), \tag{6.10}$$

其中根据假设，每个 $\lambda_j(\mathbf{t}) \neq \emptyset$。显然，每个 $\lambda_j(\mathbf{t})$ 都可以排列成递增序列。对于每个 q^j，将 $\lambda_j(\mathbf{t})$ 取作权的集合，其中每个 $1 \leq j \leq d$。因此，每个 $\mathbf{t} \in \boldsymbol{T}$ 都在 $\gamma^{-1}(p)$ 上规定了一个权重系统，我们将其记为 $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{t}}$。

接下来，对每个固定的$\mathbf{t} \in \mathbf{T}$，记

$$A_{\mathbf{t}} \tag{6.11}$$

为所有$(m \times \ell(p))$ 大小且元素均为非负整数的矩阵所构成的集合，写作

$$\begin{pmatrix} n_1^{q_1} & n_2^{q_1} & \cdots & \cdots & n_{\ell(p)}^{q_1} \\ n_1^{q_2} & n_2^{q_2} & \cdots & \cdots & n_{\ell(p)}^{q_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_1^{q_m} & n_2^{q_m} & \cdots & \cdots & n_{\ell(p)}^{q_m} \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

它们进一步满足以下两个条件：

(a) 第j行中的数，即序列

$$\left(n_1^{q_j}, n_2^{q_j}, \cdots, n_{\ell(p)}^{q_j}\right)$$

必须满足如下条件：对每个 $1 \leq k \leq \ell(p)$,

$$(n_k^{q_j} = 0) \iff (\alpha_k^p \notin \lambda_j(\mathbf{t})) \text{ (see (6.10))};$$

注意，这样定义是合理的，因为 $\lambda_j(\mathbf{t}) \subset \{\alpha_1^p, \alpha_2^p, \cdots, \alpha_{\ell(p)}^p\}$ 是按构造得到的。

(b) 矩阵每一行的元素之和必须等于 rm，而其第 k 列的元素之和必须等于 $m^p{}_k$，对每个 $k \in [1, \ell(p)]$均成立。换言之，

$$\left(\sum_{k=1}^{\ell(p)} n_k^{q_j} = \frac{r}{m} \ \forall\ j \in [1, m]\right) \text{ and } \left(\sum_{j=1}^{m} n_k^{q_j} = m_k^p \ \forall\ k \in [1, \ell(p)]\right).$$

对每个 $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$，考虑沿 $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{t}$ 的权重系统 $\gamma^{-1}(p)$，如（6.9）之前所述。在 [BC，引理 3.2] 中证明了，集合 $A_\mathbf{t}$ 沿 $\gamma^{-1}(p)$诱导出一个重数系统，记作 $\boldsymbol{n}$。令 $d = \deg(\xi)$，并假设

$$\mathcal{M}_{Y,pc}^{\mathbf{n},\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{t}}\left(\frac{r}{m}, d\right)$$

记沿 $\gamma^{-1}(S)$ 定义在Y 上的秩为 rm、次数为 $d = \deg(\xi)$且具有抛物数据 $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{t})$ 的抛－物稳定联络模空间。对每个 $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$，考虑以下空间：

$$\mathcal{N}_L^\mathbf{t} := \left\{(F_*, \nabla) \in \coprod_{\boldsymbol{n} \in A_\mathbf{t}} \mathcal{M}_{Y,pc}^{\boldsymbol{n},\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{t}}\left(\frac{r}{m}, d\right) \mid (\det(\gamma_* F), \det(\nabla)) \simeq (\xi, \nabla_\xi)\right\}. \quad (6.13)$$

命题 6.2. 设 $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\alpha})$ 为沿 S 的抛物数据，使得 $\boldsymbol{\alpha}$ 是一般权重系统，如定义 2.5 所述。设 L 为 X 上非平凡的 r-扭线丛。沿谱曲线 $\gamma : Y_L \longrightarrow X$ 作抛物前推，得到一个满态射

$$f : \left(\coprod_{\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T}} \mathcal{N}_L^{\boldsymbol{t}}\right) \longrightarrow \mathcal{M}_{pc}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}(r, \xi)^L.$$

证明。映射 f 将稳定抛物联络 (E_*, ∇) 映到 $(\gamma_*\mathrm{E}_*, \gamma_*\nabla)$。像 $(\gamma_*\mathrm{E}_*, \gamma_*\nabla)$ 是抛物半稳定的 [BA，命题 6.4]。由于权重系统 $\boldsymbol{\alpha}$ 被选为一般的，$(\gamma_*\mathrm{E}_*, \gamma_*\nabla)$ 也是抛物稳定的。此外，由[BH，命题 3.2]，，$(\gamma_*\mathrm{E}_*, \gamma_*\nabla)$ 是 $\mathrm{L} \in \Gamma$ 作用的不动点。这表明映射 f 是良定义的。

为检验f的满射性，考虑L作用下的一个不动点(E_*, ∇)。考虑底向量丛E 及其沿S的对数连接 ∇。由[BH定理3.1]，，存在Y 上一个秩为rm 的向量丛F，以及沿 $\gamma^{-1}(S)$ 的对数连接 ∇_F，满足$(\gamma_* F, \gamma_* \nabla_F) \xrightarrow{\simeq} (E, \nabla)$。

我们简要回顾一下F的构造。由于(E_*, ∇) 是L作用下的不动点，因此存在一个同构 $\varphi : E \xrightarrow{\simeq} E \otimes L$。线丛 $\gamma^* L$ 具有典范平凡化 θ: $\gamma^* L \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_{Y_L}$。将拉回 $\gamma^*\varphi$与

θ 复合，得到一个自同构 ϕ： $\gamma^*E \xrightarrow{\simeq} \gamma^*E$。随后， γ^*E 分解为特征子丛的直和，而 F 则是 γ^*E 在 ϕ 作用下的一个特征子丛。此外，对任意 $x \in S$ 和 $y \in \gamma^{-1}(S)$，F_y 存在一个由特征子空间构成的滤过，见 ϕ_y [BC, Proposition 3.3]。为这些滤过适当赋予权重系统，便在 F_* 沿 $\gamma^{-1}(S)$ 诱导出一个抛物结构，使得抛物推前 $\gamma_*(F_*)$ 与 E_* 一致（更多细节见 [BC, Proposition 3.3]）。此外，按构造，F 在 $\gamma^*\nabla$ 下保持不变，而对数连接 ∇_F不过是 $\gamma^*\nabla$ 在 F 上的限制 [BH, Theorem 3.1]。

我们断言， ∇_F 是关于上述 F 上诱导的抛物结构的抛物连接。首先，由于 γ 是 ´étale 且因此非分歧，我们有 $\mathrm{Res}_y(\gamma^*\nabla) = \mathrm{Res}_x(\nabla)$，在 $(\gamma^*E)_y = E_x$ [BA, § 5.2] 的识别下。由此，$\mathrm{Res}_y(\gamma^*\nabla)$ 是 $(\gamma^*E)_y$ 的半单自同态。由于 ∇_F 是$\gamma^*\nabla$ 在 F 上的限制，立即可得 $\mathrm{Res}_y(\nabla_F)$ 是 F_y 的半单自同态。此外，由于 $\mathrm{Res}_y(\gamma^*D_L) = 0$，这是因为 D_L 是全纯的，我们有

$$\mathrm{Res}_y\left(\gamma^*\nabla \otimes \gamma^*D_L\right) = \mathrm{Res}_y(\gamma^*\nabla) \otimes \mathrm{Id}_{(\gamma^*L)_y}.$$

由此以及上文给出的 γ^*E 的自同构 φ 的描述，可以容易地证明 $\mathrm{Res}_y(\gamma^*\nabla)$ 与 ϕ_y 可交换。因此，$\mathrm{Res}_y(\gamma^*\nabla)$ 保持 F_y 的抛物滤过，该滤过由上文构造的 ϕ_y 的特征空间给出。最后，根据在 [BC, 命题 3.3] 中对 F_y 的加权滤过的构造，不难看出 ∇_F 在滤过的连续商上按相应权重作用为一个标量；这是因为 $\mathrm{Res}_y(\nabla_F) = \mathrm{Res}_x(\nabla)$，且 ∇ 是一个抛物连接。因此， ∇_F 满足定义 2.3 的所有条件。于是，(F_*, ∇_F) 是 Y 上秩为 rm 的抛物连接，满足

$$(\gamma_*F_*, \gamma_*\nabla_F) \xrightarrow{\simeq} (E_*, \nabla).$$

此外，根据 [BA, 定理 1.1 (2)], (F_*, ∇_F) 是抛物半稳定的；由 (E_*, ∇) 的抛物稳定性可知, (F_*, ∇_F) 也必定是抛物稳定的。否则，若存在一个在 ∇_F 下保持不变的子丛 $F' \subset F$, 满足 $p\mu(F'_*) \geq p\mu(F_*)$，则意味着 $\gamma_*F'_* \subset \gamma_*F = E$ 是一个在 ∇ 下保持不变的子丛, 且满足 $p\mu(\gamma_*F'_*) \geq p\mu(\gamma_*F_*) = p\mu(E_*)$。这与 (E_*, ∇) 的抛物稳定性矛盾。因此 f 是满射。□

注 6.3. 如果 S 的基数大于 1，我们就对 S 中的每个抛物点重复这一构造。例如，设 $S = \{p_1, p2, \cdots, p_n\}$；则对每个 $1 \leq i \leq n$，定义集合 T_i，其定义方式与 (6.9) 中的 T 类似，并将 T 替换为 $T_1 \times T_2 \times \cdots T_n$。然后，运用比命题 6.2 中更复杂的记号，通过类似的论证即可证明相同的结论。

推论 6.4。　设 α 是一般权重系统。闭子概形的余维　*e*

$$Z_\alpha := \bigcup_{L \in \Gamma \setminus \{\mathcal{O}_X\}} \mathcal{M}_{pc}^{m,\alpha}(r,\xi)^L \subset \mathcal{M}_{pc}^{m,\alpha}(r,\xi) \tag{6.14}$$

至少为三。

证明。 余维数估计的计算与 [BC 的推论 3 中所考察的余维数估计非常相似。5]这里的启发式原则是：具有稳定性等某种性质的抛物联络空间的维数，是具有相同性质的普通抛物向量丛空间维数的两倍。（例如，我们有 $\dim \mathcal{M}^{\boldsymbol{m}}_{,pc}{}^{\boldsymbol{\alpha}}(r,\xi) = 2\dim \mathcal{N}_{\boldsymbol{m},}{}^{\boldsymbol{\alpha}}(r,\xi)$；见（3.4）。除这一区别外，所有计算都与 [BC 的推论 3 完全相似。5]细节从略。□

7. 稳定抛物 PGL（r，$\mathbb{C}$）-联络模叠的布劳尔群

定义 7.1。稳定抛物 PGL(r, $\mathbb{C}$)-联络是稳定抛物联络的一个等价类：若存在一个 r-扭线丛 L 以及抛物联络的同构 $(E'_*, \nabla') \xrightarrow{\simeq} (E_* \otimes L,\ \nabla \otimes D_L)$，则抛物稳定联络 (E_*, ∇) 和 (E'_*, ∇') 被视为等价，其中 D_L 是引理 6.1 中构造的 L 上的唯一联络。

定义 7.2。 固定 X 上的线丛 ξ。设 $i \in [0, r-1]$ 满足 $i \equiv d \pmod r$，其中 $d = \deg(\xi)$。具有抛物数据 $(\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{\alpha})$ 的X上稳定抛物 PGL（r，$\mathbb{C}$）-联络的粗模空间定义为商空间

$$N^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}_{pc}(r,i) := \mathcal{M}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}_{pc}(r,\xi)/\Gamma\,.$$

此外，记 $\mathfrak{N}^{\boldsymbol{m}}_{,pc}{}^{\boldsymbol{\alpha}}(r,i)$ 为拓扑类型为 i 且重数与权重系统为 $(\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{\alpha})$的曲线 X 上稳定抛物 PGL$(r,\mathbb{C})$-联络的模空间叠 。

定理 7.3. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是如定义 2.6中所述的联络的一般权重系统。记 $N^{\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{\alpha}}_{pc},(r,i)^{sm}$ 为 $N^{\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{\alpha}}_{pc},(r,i)$的光滑轨迹。则有

$$\mathrm{Br}\left(\mathfrak{N}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}_{pc}(r,i)\right) \simeq \mathrm{Br}\left(N^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}_{pc}(r,i)^{sm}\right).$$

证明。证明思路与 [BC, 定理 4.2], 类似，因此省略部分细节。设 $Z_{\boldsymbol{\alpha}}$ 如推论 6.4 中所述，并记 $U := N^{\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{\alpha}}_{pc}, (r, i) \setminus Z_{\boldsymbol{\alpha}}$。则 Γ 在 U 上自由作用。因此，商簇 U/Γ 是光滑的。由于对有限群 Γ取商是有限态射，因而保持余维，由推论 6.4 可知，U/Γ 在 $\left(N^{\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{\alpha}}_{pc}, (r, i)\right)^{sm}$ 中的补集的余维至少为 3。类似地，开子叠 [U/Γ] 在 $\mathfrak{N}^{\boldsymbol{m}}_{,pc}{}^{\boldsymbol{\alpha}}(r, i)$ 中的补集的余维也至少为 3。由于 $\mathfrak{N}^{\boldsymbol{m}}_{,pc}{}^{\boldsymbol{\alpha}}(r, i)$ 是 Deligne-Mumford叠，因此可得

$$\mathrm{Br}\left([U/\Gamma]\right) \simeq \mathrm{Br}\left(\mathfrak{N}^{\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}}_{pc}(r,i)\right) \text{ (see [BCD, Proposition 4.2]).}$$

由于 Γ 在 U 上自由作用，我们有 U/Γ ≃ [U/Γ]。因此，布劳尔群 ([U/Γ]) ≃布劳尔群 (U/Γ)。此外，由于 Γ 在 U 上自由作用且 U 光滑，商 U/Γ 也光滑。Γ 在 $\left(\mathcal{N}\mathrm{m},{}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathrm{pc}\ (r, i)\right)^{sm}$ 中的补集显然也至少具有 3 余维。因此，上述同构蕴含布劳尔群 $\left(\mathfrak{N}^{\boldsymbol{m}}_{,pc}{}^{\boldsymbol{\alpha}}(r, i)\right)$ ≃布劳尔群 (U/Γ) ≃布劳尔群 $\left(\mathcal{N}\mathrm{m},{}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathrm{pc}\ (r, i)^{sm}\right)$，其中

最后一个同构由上同调纯性得出 [C，定理 1。1]。证明至此完成。□

致谢

第一作者得到科学与工程研究委员会项目（编号SPON/SERB/62041）的资助。第二作者得到印度政府科技部DST-INSPIRE教师奖学金（研究资助编号：DST/INSPIRE/04/2024/001521）的资助。

参考文献

[A] M. F. Atiyah, 《纤维丛中的复解析联络》, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), 181– 207. [↑ 11.][BBS] D. Baraglia、I. Biswas 和 L. P. Schaposnik, 《希格斯丛与联络模空间的布劳尔群》, 《几何与物理：第二卷：献给奈杰尔·希钦的纪念文集》。 [↑ 1.][B] I. Biswas, 《抛物向量丛存在平坦联络的判据》, Adv. Geom. 2 (2002), no. 3, 231–241. [↑ 9.][BA] I. Biswas 和 D. Alfaya, 《抛物联络与抛物希格斯丛的拉回和直接像》, Int. Math. Res. Not. IMRN Vol. 2023 Issue 22, (2023), 19546–19591. [↑ 14 and 15.][BC] I. Biswas 和 S. Chakraborty, 《曲线上抛物主丛模栈的布劳尔群》（预印本）, arXiv:2602.14579v1. [↑ 2, 13, 14, 15,and 16.][BCD] I. Biswas、S. Chakraborty 和 A. Dey, 《曲线上稳定抛物 PGL(r)–丛模栈的布劳尔群》, Int. Jour. Math. 35 No. 1 (2023). [↑ 2 and 16.][BD] I. Biswas 和 A. Dey, 《曲线上抛物向量丛模空间的布劳尔群》, Jour. K-ttheory 8 (2011), 437–449. [↑ 1, 9,and 10.][BH] I. Biswas 和 V. Heu, 《曲线上的对数联络》, J. Ramanujan Math. Soc. 28A (2013), 21–40. [↑ 5, 7, 14,and 15.][BL] I. Biswas 和 M. Logares, 《曲线上抛物向量丛上的联络》, Internat. J. Math. 22 no. 4 (2011), 593–602. [↑ 5.][BM] I. Biswas 和 V. Mu˜noz Vel´azquez, 《黎曼曲面上联络模空间的托雷利定理》, Topology 46 (2007), no. 3, 295–317. [↑ 8.][BH] H. U. Boden 和 Y. Hu, 《抛物丛模空间的变化》, Math. Ann. 301 (1995), no. 3, 539–559. [↑ 5, 7, 14, and 15.][BY1] H. U. Boden 和 K. Yokogawa, 《光滑曲线上的抛物希格斯丛模空间与抛物 K(D) 对：I》, Internat. J. Math. 7 (1996), no. 5, 573–598. [↑ 4 and 10.][BY2] H. U. Boden 和 K. Yokogawa, 《抛物丛模空间的有理性》, J. London Math. Soc. (2) 59 (1999), no. 2, 461–478. [↑ 3 and 4.][C] K. ˇCesnaviˇcius, 《布劳尔群的纯性》, Duke Math. J. 168 (2019), 1461–1486. [↑ 9 and 17.][GL] T. L. G´omez 和 M. Logares Jim´enez, 《抛物希格斯丛模空间的托雷利定理》, Adv. Geom. 11 (2011), no. 3, 429–444. [↑ 10.][I] M. Inaba, 《曲线上的抛物联络模空间与黎曼-希尔伯特对应》, J. Algebraic Geom. 22 (2013), no. 3, 407–480. [↑ 5.][IS] M. Inaba 和 M. Saito, 《具有给定谱类型的光滑射影曲线上的正则奇异抛物联络模空间》, J. Math. Soc. Japan 70, No. 3 (2018), 879–894. [↑ 4 and 5.][M] M. Maruyama, 《无挠层族的开性》, J. Math. Kyoto Univ. 16 (1976), no. 3, 627–637. [↑ 7.][MS] V.B. Mehta 和 C.S. Seshadri, 《具有抛物结构的曲线上向量丛的模空间》, Math. Ann. 248 (1980), 205–239. [↑ 1and 3.][Y] K. Yokogawa, 《抛物层模空间与抛物希格斯层模空间的紧化》, J. Math. Kyoto Univ. 33 (1993), no. 2, 451–504. [↑ 10.]

数学系，印度理工学院甘地讷格尔分校，近帕拉杰村，甘地讷格尔-382055，古吉拉特邦，印度

电子邮箱地址：pavan.a@alumni.iitgn.ac.in, adrojapavan@gmail.com

数学系，印度科学教育与研究学院蒂鲁帕蒂分校，安得拉邦 517507，印度

电子邮箱地址：sujoy.cmi@gmail.com