arXiv:2603.02636v1 [cs.DC] 3 Mar 2026

# 多意见下的未决定状态动力学

ColinCooper Frederik Mallmann-Trenn Tomasz Radzik伦敦国王学院 伦敦国王学院 伦敦国王学院colin.cooper@kcl.ac.ukfrederik.mallmann-trenn@kcl.ac.uk tomasz.radzik@kcl.ac.uk

Nobutaka Shimizu东京科学大学 shimizu.n.ah@m.titech.ac.jp

Takeharu Shiraga中央大学 shiraga.076@g.chuo-u.ac.jp

**摘要**

我们研究未决状态动态（USD），这是一种基本的共识过程，其中每个顶点持有一种已确定意见或未决状态。我们同时考虑闲聊模型和群体协议模型。先前的工作仅针对 $k = O(\sqrt{n}/(\log n)^2)$（群体协议模型）和 $k = O((n/\log n)^{1/3})$（闲聊模型）这两种情形，确立了该过程共识时间的紧确界，而且往往还对初始配置作出了严格的假设。

本文首次为 USD 给出了共识时间保证，该保证适用于任意$2 \le k \le n$ 以及任意 初始配置，且同时适用于闲聊模型和群体~协议模型。在闲聊模型中，USD 以概率 $1 - p_{\perp} - n^{-c}$ 在 $O(\min\{k, \sqrt{n}\})$ 个同步轮次内达成共识，其中 $p_{\perp}$ 是第一轮中坍缩至全体未决状态的闲聊模型特有概率。在群体协议模型中，USD 以高概率在 $\widetilde{O}(\min\{kn, n^{3/2}\})$ 次异步交互内达成共识。我们还针对一种特定初始配置给出了下界，这些下界在多对数因子范围内与上界相匹配，并证明我们的上界在本质上是最优的。

# 目录

**1 引言** **4**1.1 我们的贡献 .51.2 其他相关工作 .6

**2 证明概述** **7**
2.1 过程概要 .72.2 扩展先前技术的困难 .92.3 引理 2.1 的证明（I）： $\beta_t$ 和 $\psi_t$ （第5.2节）. 102.4 引理 2.1 的证明（II）： $\alpha_t^{\max}$（第5.3节和第5.4节）.112.5 引理 2.1 的证明（III）： 两种意见之间的差距（第5.5节和第5.6节）. . . . 12通过 Freedman 不等式得到的集中界.13

**3 定义与主要分析工具** **14**
3.1 模型与基本记号 .143.2 伯恩斯坦条件 .153.3 Freedman 不等式与漂移分析 .16

**4 关键量** **18**
4.1 闲聊模型中的基本性质.194.2 群体协议模型中的基本性质 .204.3 停时 .22

**5 分析 闲聊模型** **23**
5.1 第一轮失败的概率 .245.2 已决顶点比例的行为 .245.3 归一化总体平方 $\ell^2$ 范数的行为 . 275.4 最大总体的行为.295.5 两种意见之间差距的行为 .325.6 唯一强势意见的出现.395.7 迈向共识 .435.8 汇总全部内容 .485.9 下界 .49

**6 群体协议模型分析** **50**
6.1 已决顶点比例的行为 .516.2 归一化总体的平方 $\ell^2$ 范数的行为 .546.3 最大总体的行为. 556.4 两个意见之间差距的行为 .576.5 唯一强势意见的出现.606.6 迈向共识 .636.7 综合探讨 . 67

**一项技术不等 式与辅助引理 7** **0**
A.1 漂移分 析结果 .7 2

**B 基本性质的证明** **74**B.1 Gossip 模型 .75B.2 群体协议模型 .83

**C 第一轮** $\beta_0 = 1$ **90**

# 1 引言

未决状态动态（USD） [AAE07；BCNPS15] 是完全图上最简单、研究最广泛的共识动力学之一。每个顶点持有有限集合 $\Sigma = [k] \cup \{\perp\}$ 中的一种意见，其中 $[k] := \{1, \ldots, k\}$ 是已决意见，而 $\perp$ 是一个特殊的未决意见。当顶点 $u$ 与顶点 $v$交互时，更新遵循简单的取消／采纳规则（只有 $u$ 更新其意见）：如果 $u$ 和 $v$ 在 $[k]$中持有不同的已决意见，那么 $u$ 变为 $\perp$；如果 $u$处于未决状态，而 $v$ 处于已决状态，那么 $u$ 采纳 $v$的意见；否则 $u$保持其意见不变。这条基本规则（在第 3.1 节中形式化）已经展现出丰富而非平凡的行为。

我们分析具有 $k$ 种可能的已确定意见的 USD，在具有自 $n$个顶点且带自环的完全图上[1] ，并考察两种经典通信模型。在闲聊模型 [KSSV00], 中，时间按同步轮次推进：每个顶点抽取一个随机邻居，并同时据此更新自己的意见。在群体协议模型 [AADFP06], 中，交互异步发生：均匀随机地有放回选取一个有序对（$u$， $v$）， $u$并根据 $v$的意见更新自己的意见。

一个重要的研究量是共识时间：在闲聊模型中，指所有顶点在 $[k]$中持有相同已确定意见之前所需的轮次数；在群体协议模型中，则指所需的成对交互次数。全$\perp$ 配置虽然是吸收态，但并不构成共识，而被视为失败。因此，共识时间衡量的是达成对某个实际意见的一致所需的时间。下文将回顾关于 USD 的既有共识时间界。其他相关共识动力学的结果见第1.2节。

USD 最初由 Angluin、Aspnes 和 Eisenstat [AAE07]在群体协议模型中引入，他们证明共识时间以高概率为 $O(n\log\ n)$。[2]他们（以及 Condon、Hajiaghayi、Kirkpatrick 和 Ma˘nuch [CHKM17]）进一步证明，如果更受欢迎的意见相较于其他意见具有足够大的初始优势，那么 USD 在 $k = 2$ 条件下以高概率达成与初始多数意见一致的共识。因此，与经典拉取投票相比，USD 在性能上实现了关键提升，无论是共识时间（拉取投票中的期望值为 $\Theta(n^2)$ [HP01; CR16]），还是多数意见获胜的概率。对于更大的 $k$，Amir、Aspnes、Berenbrink、Biermeier、Hahn、Kaaser 和 Lazarsfeld [AABBHKL23]分析了 $2 \le k = O(\sqrt{n}/(\log\ n)^2)$ 情况下的 USD，并证明对于任意初始配置，共识时间以高概率为 $O(kn\log\ n)$。最近，El-Hayek、Els¨asser 和 Schmid [EES25]为所有 $k \le n^{1/2-\varepsilon}$ 给出了匹配下界 $\Omega(kn\log\ n)$，其中 $\varepsilon$ 是任意正常数。

在闲聊模型中，USD 最初由 Becchetti、Clementi、Natale、Pasquale 和 Silvestri 进行分析 [BCNPS15],，他们证明了一个 $O(k \log\ n$上界 $2 \le k = O((n/\log\ n)^{1/3})$，但要求最受欢迎意见的初始优势满足一个强假设。后来，Clementi、Ghaffari、Guala、Natale、Pasquale 和 Scornavacca $k = 2$ 为 USD 去除了这一假设` [CGGNPS18],，他们证明对于任意初始配置，均有一个 $O(\log n)$ 界。然而，对于任何 $k > 2$ ，在不对初始配置作任何假设的情况下，尚无已知的通用界。

很自然会猜想，闲聊模型中的共识时间应为 $\widetilde{O}(k)$[3] 对于 $2 \le k \ll \sqrt{n}$，[4] 相较于 $O(kn)$ 的上界，即 [AABBHKL23] 针对群体协议模型所给出者：闲聊模型的单个同步轮次大致相当于 $n$ 次群体协议模型中的异步交互。然而，对 [AABBHKL23]的分析关键地利用了群体协议的异步性质，因而无法迁移到闲聊模型。

[1]因此，选择一个随机邻居等价于均匀随机地选择一个顶点。[2]如果某个事件以概率 $1 - O(n^{-c})$ 发生，其中 $c > 0$ 是某个常数，则称该事件 “ 以高概率 ” 发生。[3] 在全文中， $\widetilde{O}(\cdot)$ 表示省略了关于 $n$ 的多对数因子。[4]“$k \ll f(n)$” 是指存在某个常数 $c > 0$，使得 $k = O(f(n)/\log^c n)$。

事实上，他们明确将流言模型界指认为一个开放问题 [AABBHKL23，第 9]节。

此外，已有研究仅在 $k \ll \sqrt{n}$这一范围内给出了相当清晰的图景：在群体协议模型中，该范围内已知的最佳上界和下界为 $\Theta(kn)$ [AABBHKL23；EES25]，，这强烈表明共识时间随 $k$线性增长。在闲聊模型中，针对具有 $k > 2$ 的 USD，目前唯一已知的上界也为 $O(k)$ 阶，但这些上界仅在关于初始配置的强假设下成立，且仅适用于 $k \ll n^{1/3}$ [BCNPS15]。然而，超过这一阈值后，USD 的效率仍是个谜：此前使用的分析技术无法处理更大的 $k$，对于群体协议模型中的任何 $k \geq \sqrt{n}$或闲聊模型中的任何 $k \geq n^{1/3}$，都没有一般性的共识时间界。这引出了一个自然而核心的问题：共识时间关于 $k$ 的线性行为是否会对所有 $k$持续成立，还是说一旦 $k$ 超过 $\sqrt{n}$，USD 就会转入一种性质截然不同、甚至可能是次线性的状态？回答这一问题需要远超 $k < \sqrt{n}$ 范围内所使用技术的新方法，而这正是我们工作的核心。

## 1.1 我们的贡献

我们首次给出了未决状态动态（USD）的共识时间的一般界限，适用于任意数量 $k$ 的已决意见，以及任意初始配置；这些界限适用于闲聊模型和群体协议模型。我们的主要结果总结如下，并以非正式定理的形式给出。另请参见表 1。

**定理 1.1**（主定理）。考虑在 $n$ 个顶点上运行的 *USD*，从任意初始配置[5]开始，其中 $\{1, \ldots, k, \perp\}^n$ 不为全-$\perp$ 配置，且可能的已决意见 $k$ 数量为介于2 和 $n$ 之间（含端点）的任意整数。

- 闲聊模型。在闲聊模型中，*USD* 以概率 $1 - p_\perp - n^{-c}$ 在 $O\left(\min\{k, \sqrt{n}\}\right)$ 个同步轮次内达成共识，其中某个常数为 $c > 0$，$p_\perp$ 表示在第一个同步轮次后所有顶点都持有 $\perp$ 的概率。

- 群体协议模型。在群体协议模型中，*USD* 以高概率在 $\widetilde{O}\left(\min\{kn, n^{1.5}\}\right)$ 次异步交互内达成共识。

我们的闲聊模型结果表明，除非过程在第一轮中收敛到全为$\perp$ 的配置，否则它会以高概率在 $O(\min\{k, \sqrt{n}\})$ 轮内达成共识。

关于共识时间中隐藏的 polylog($n$) 因子，我们得到以下界：在闲聊模型中，对于任意 $2 \leq k \leq n$，共识时间以高概率为 $O(\sqrt{n}(\log n)^3)$；若 $k = O\left(\frac{\sqrt{n}}{(\log n)^2}\right)$，则为 $O(k \log n)$（群体协议模型也有类似的界）。我们的结果对每个 $2 \leq k \leq n$ 以及任意初始配置均成立，包括包含未决顶点的配置。

**备注 1.2.** 在第一同步轮次中收敛到全为$\perp$ 的配置的概率 $p_\perp$ 是闲聊模型特有的现象。由于所有顶点同时更新，一轮就可能消除所有已决意见。相比之下，在群体协议模型中，每次交互只有一个顶点会更新其意见，并且只有在存在两个不同的已决意见时，才可能产生未决顶点。

$p_\perp$ 的值强烈取决于初始意见分布。例如，如果 $k = O(n/\log n)$，或者初始配置中至少有一个但并非全部顶点处于未决状态，那么

[5] A c配置是将意见分配给 ve rtices.

| 模型 | Work | 共识时间 | $k$的范围 | 初始间隔假设 |
|---|---|---|---|---|
| PP | [AAE07] [CHKM17] | $O(n$日志 $n)$ | $k=2$ | $A_1 - A_2 = \Omega(\sqrt{n}$对数 $n)$ |
| | [AABBHKL23] | $O(kn$日志 $n)$ | $k = O(\sqrt{n}/(\log n)^2)$ | — |
| | 定理 1.1 | $O(n^{1.5}$(对数 $n)^3)$ | $2 \le k \le n$ | — |
| Gossip | [BCNPS15] | $O(k \log n)$ | $k = O((n/$日志 $n)^{1/3})$ | $A_1 \ge (1+\Omega(1)) \cdot A_2$ |
| | [CGGNPS18] | $O$（对数 $n$） | $k=2$ | — |
| | 定理 1.1 | $O$（$k$对数$n$） | $k = O$（$\sqrt{n}$/（对数$n$）$^2$） | — |
| | 定理 1.1 | $O(\sqrt{n}$(对数 $n)^3)$ | $2 \le k \le n$ | — |

表 1：群体协议（PP）和 Gossip 模型中 USD 的共识时间界比较。此处，$A_i$ 表示初始配置中持有意见 $i$ 的顶点数量，且 $A_1 \ge A_2 \ge \cdots \ge A_k$。仅在有要求时才说明对初始差距的假设；标记为“—”的条目表示未施加明确的差距假设。

$p_\perp = n^{-\Omega(1)}$（参见引理 5.1）。在另一个极端情形下，如果 $k = n$ 且每个顶点最初都持有一个不同的已决意见，那么它在第一轮中变为未决的概率为 $1 - 1/n$，且与其他顶点相互独立，因此 $p_\perp =$（$1 - 1/n$）$^n \approx 1/e$。

**匹配下界。** 我们通过证明在 $n$上，闲聊模型的上界存在一个相差至多多对数因子的匹配下界，来补充这些上界。群体协议模型中的此类下界已由 [EES25]在 $k \le n^{1/2-\varepsilon}$ 任意常数$\varepsilon > 0$的范围内给出。

**定理 1.3**（闲聊模型的匹配下界）。对于任意充分大的 $n$、任意常数 $0 < c < 1/2$ 以及任意 $2 \le k \le$（$1/2 - c$）$n$，存在一个恰好包含$k$ 个已决意见的初始配置（即，这 $k$ 个意见中的每一个至少由一个顶点支持），使得在闲聊模型中，*USD* ~以高概率达到共识需要 $\Omega(\min\{k, \sqrt{n}\})$ 轮次。

## 1.2 其他相关工作

先前关于 USD 的研究考察了多数意见共识问题，并表明：如果初始时最受欢迎的意见相较于其他意见具有显著优势，那么 USD 以高概率正确解决该问题。Berenbrink、Friedetzky、Giakkoupis 和 Kling [BFGK16]，以及 Ghaffari 和 Parter[GP16] 提出了基于 USD 的闲聊模型协议，并证明，在初始配置中最受欢迎的意见比任何其他意见至少多出 $\Omega(\sqrt{n}\log n)$ 个顶点的优势这一假设下，这些协议能在 $O(1)$ 个同步轮次内，以 $|\Sigma| = O(k)$ 个状态高概率正确解决~多数意见共识问题。~最近，Bankhamer、Berenbrink、Biermeier、Els¨asser、Hosseinpour、Kaaser 和 Kling [BBBEHKK22] 提出了基于 USD、分别适用于群体协议模型和闲聊模型的类似风格协议。这些协议的一个显著特点是，对于任意 $k \ge 2$ 和任意初始配置，共识时间都很短；而 Ghaffari 和 Parter [GP16] 以及 Berenbrink、Friedetzky、Giakkoupis 和 Kling [BFGK16]的协议则需要初始优势假设才能界定共识时间。另有一项研究考察了 USD 的另一种变体，该变体处理偏好意见[BBH24]，并考虑 $k = 2$ 下的噪声信道 [dCN20]。

大量研究考察了 $k > 2$ 个意见在 $n$ 个顶点的完全图 [BCNPST17; BCNPT16; GL18; BCEKMN17; CMRSS25; SS25; EFKMT17] 上的三多数及相关动力学（例如二选一）的共识时间。最近，Cooper、Mallmann-Trenn、Radzik、Shimizu 和 Shiraga [CMRSS25] 证明，在异步更新模型中（三即每一轮允许一个均匀随机选取的顶点更新其意见），三多数能在 $\sim O(\min\{k, \sqrt{n}\})$ 轮内达成共识。在同步更新模型中，所有顶点每轮同时更新意见，Shimizu 和 Shiraga [SS25] 证明，二选一的共识时间为 $\widetilde{O}(k)$，而三多数的共识时间为 $\widetilde{O}(\min\{k, \sqrt{n}\})$。有趣的是，三多数的这一共识时间界与闲聊模型中 USD 的共识时间界相同。

文献中还研究了其他几种相关的共识动力学。一种与之有些相似的模型是 [GACMMVM25]，提出的模型：初始时，部分节点没有意见，并会立即采纳任意一种意见。此后，过程的行为与投票者模型完全相同。确定性多数模型规定，每个个体都将自己的意见设为其所有邻居中的多数意见；该模型已在 [KMN15]中得到研究。有关共识动力学的更多详情，请参阅 [BCN20] 。

## 2 证明概述

我们概述闲聊模型的定理 1.1 的证明，并将其与先前工作的论证进行比较。为简单起见，我们假设在本节中始终有 $k \le n/\log n$。这只是为了确保 USD 以高概率不会在一轮内进入全$\perp$ 配置；不费太大力气即可放宽这一假设，改为 $k \le n$ 。

### 2.1 过程概述

遵循关于 USD 的先前研究，我们追踪持有每种已确定意见的顶点数量的演变。对于 $t \ge 0$ 和 $i \in [k]$, 定义

$$\alpha_t(i) := \text{在轮次 } t \text{ 开始时持有意见 } i \text{ 的顶点比例}$$

于是，可将 USD 视为状态空间$\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}^k$上关于 $\alpha_t = (\alpha_t(1) \ldots, \alpha_t(k))$ 的马尔可夫链 $(\alpha_t)_{t\ge 0}$。关键的进展参数是

$$\alpha_t^{\max} := \max_{i\in[k]} \alpha_t(i),$$

并且共识于 $\alpha_t^{\max} = 1$ 首次成立的时间 $t$ 达成。除非所有顶点均持有 $\perp$，否则成立 $\alpha_t^{\max} \ge 1/n$。

我们还引入以下量：

$$\beta_t := \sum_{i\in[k]} \alpha_t(i), \quad \psi_t := \beta_t(2\beta_t - 1) - \sum_{i\in[k]} \alpha_t(i)^2. \tag{1}$$

注意， $\beta_t$ 是持有已确定意见的顶点的总比例。粗略地说， $\psi_t$ 是控制 USD 稳定性的关键参数。详见第 2.3 节。

称意见 $i$ 在轮次 $t$ 为弱，如果 $\alpha_t(i) \le 0.9 \cdot \alpha_t^{\max}$，并且在轮次 $t$ 为强，如果 $\alpha_t(i) \ge 0.95 \cdot \alpha_t^{\max}$。注意，弱意见与强意见之间存在优势，这对我们的分析至关重要。我们将分析分解为四个部分。

**引理 2.1** (非正式表述；正式表述见引理 5.2 至 5.4、5.6、5.16 和5.20 )。*考虑闲聊模型中的 USD，使得 $k \le n/\log n$ 且 $\beta_0 \ge 1/n$。*

(I) 对于某个 $T_\beta = O(\log n)$，以高概率，对所有 $t \geq T_\beta$，$\beta_t \geq 1/2 - o(\log n/\sqrt{n})$均成立。此外，以高概率，对所有 $t \geq 1$，$\psi_t = o(\log n/\sqrt{n})$均成立。

(II) 假设 $\psi_0 = o(\log n/\sqrt{n})$ 且 $\beta_0 \geq 1/2 - o(\log n/\sqrt{n})$。对于某个 $T_\alpha = O(\sqrt{n}(\log n)^3)$，以高概率，$\alpha_t^{\max} \geq \Omega\left(\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 对所有 ~~$t \geq T_\alpha$~~ 均成立。

(III) 假设 $\psi_0 = o(\log n/\sqrt{n})$、$\beta_0 \geq 1/2 - o(\log n/\sqrt{n})$ 和 $\alpha_0^{\max} \geq \Omega\left(\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$。那么，对于某个 $T' = O(\log n/\alpha_0^{\max})$，在第 $T'$ 轮次恰好存在一个强意见。

(IV) 假设对于某个常数 $c > 0$ 和所有 $i \geq 2$，有 $\psi_0 = o(\log n/\sqrt{n})$、$\beta_0 \geq 1/2 - o(\log n/\sqrt{n})$、$\alpha_0^{\max} = \alpha_0(1) \geq \Omega\left(\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$，以及$\alpha_0(1) \geq (1+c) \cdot \alpha_0(i)$。那么，*USD* 以高概率在 $O(\log n/\alpha_0^{\max})$ 轮次内达成共识。

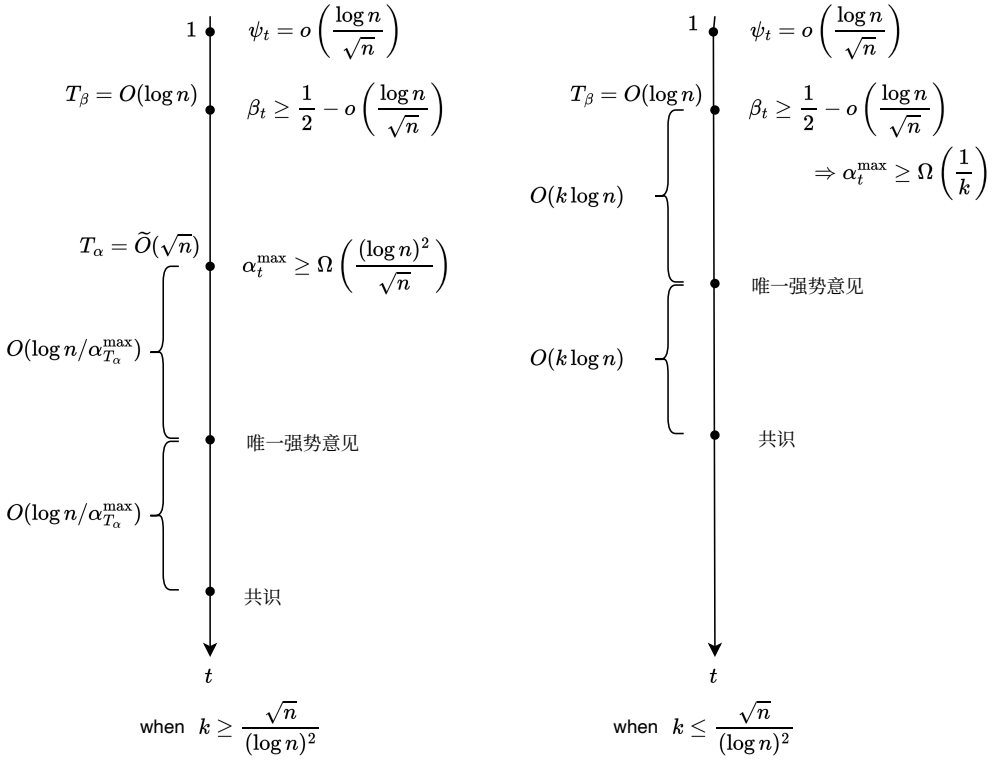


图 1：结合引理 2.1 的四个部分来证明共识时间界 d.

以上四项立即推出，共识时间为 $O(\sqrt{n}(\log n)^3)$。此外，(I) 保证以高概率，对于某个 $t = O(\log n)$，$\beta_t = \Omega(1)$，这意味着$\alpha_t^{\max} = \Omega(1/k)$。因此，若 $k \leq \sqrt{n}/(\log n)^2$, ，则 (III) 和 (IV) 推出共识时间界为 $\sim O(\log n/\alpha_0^{\max}) = O(k \log n)$。所以，共识时间为 $O(\min\{k, \sqrt{n}\})$（见图 1）。

我们的主要技术贡献是证明部分（II）。一个重要特点是，无论 $k$ 有多大，（II）都成立，因此我们的分析将先前研究中的 $k$ 范围从 $k \ll n^{1/3}$ （或群体协议模型中的 $k \ll n^{1/2}$）拓宽到了 $k \leq n/\log n$。

证明 (III) 同样颇具挑战性。[AABBHKL23 在阶段 1 到 3] 证明了$k = O(\sqrt{n}/(\log n)^2)$，适用于群体协议模型，但他们的论证关键依赖于群体协议模型的

局部更新性质，而该性质不适用于闲聊模型。

（IV）部分已在早期的一项工作中得到证明 [BCNPS15，定理 3。2] 对于 $k = O((n/\log n)^{1/3})$，该结果（结合 $\beta_0 = \Omega(1)$）意味着 $\alpha_0^{\max} \geq \frac{C}{\log n^{1/3}}^{1/3} n$，但我们在更弱的条件 $\alpha_0^{\max} \geq \Omega\left(\frac{(\log n)}{\sqrt{n}}^2\right)$ 下证明了它，方法是将 [BCNPS15] 的论证与 [CMRSS25 的精确集中不等式结合起来；SS25]。本节概述（I）至（III）的证明，并为简洁起见省略（IV）的证明。

## 2.2 扩展以往技术的困难

在介绍引理 2.1 的证明思路之前，我们先简要讨论以往工作中使用的技术，并解释为何它们不能直接应用于 USD。

**(1) 大规模 $k$ 的基于集中不等式的分析失效。** Becchetti、Clementi、Natale、Pasquale 和 Silvestri [BCNPS15] 提出的关键观察是，$\beta_t$ 会集中在 $1/2$ 附近，并在相当长的一段时间内保持接近这一数值。利用这一稳定性，他们根据 $\alpha_t^{\max}$将 USD 过程划分为若干阶段，并证明了每个阶段中最受欢迎的意见与第二受欢迎意见之间的差距如何增长。后续工作 [AABBHKL23] 采用了这一策略来分析群体协议模型中的 USD。我们的证明基于这一思路。

Becchetti、Clementi、Natale、Pasquale 和 Silvestri [BCNPS15] 在其分析中需要一个强假设，$k \ll n^{1/3}$ 这是由于标准切尔诺夫界的局限性。本文通过利用 $k$ 中使用的更广泛的基于鞅的框架，将$k \ll \sqrt{n}$ 拓展到[CMRSS25；SS25]——特别是，我们结合使用 Freedman 不等式和其他技术方法（详见第2.6节）。

然而，对于$k \gg \sqrt{n}$，Freedman 不等式给出的尾界不足以导出高概率界，而基于 $\alpha_t(i)$ 和 $\beta_t$ 的集中性、如 [BCNPS15]中的分析则完全失效。

注 *2.2*。在闲聊模型中，标准的集中性论证表明，经过第一轮后，剩余的已确定意见数量以高概率至多为 $\min(k, n \log n/k)$，前提是 $\beta_0 = 1$（见 *C* 节），也就是说，所有顶点最初都已确定。另一方面，如果我们能将 *[AABBHKL23]* 中针对群体协议模型的论证推广到闲聊模型，就能为 $k \leq O(\sqrt{n}/(\log n)^2)$ 推导出共识时间的 $\widetilde{O}(k)$ 界。结合这两点观察，如果 $k \leq O(\sqrt{n}/(\log n)^2)$ 或 $k \geq \Omega(\sqrt{n}(\log n)^3)$ 成立，我们就能得到共识时间的 $O(\min\{k, \sqrt{n}\})$ 界。因此，即使能够设法将 *[AABBHKL23]* 中的分析转移到闲聊模型，对于 $O(\sqrt{n}/(\log n)^2) \leq k \leq \Omega(\sqrt{n}(\log n)^3)$ 的情形，仍然难以说清。围绕 $k$，在 $\sqrt{n}$ 附近的问题一直是 *USD* 文献中的难点（例如，*[BBBEHKK22*，第 *3.3]* 节）。

**（2）3-Majority $k > \sqrt{n}$ 技术的局限性。** USD 的行为与广为人知的共识动力学 3-Majority 类似，后者已针对 整个 范围进行了广泛分析；BCNPT16；GL18；BCEKMN17；CMRSS25；SS25]。在 3-Majority 中，一个被选中的顶点均匀随机地选择三个邻居，并采取这三个邻居所持意见中的多数意见；若出现平票，则以第三个被选邻居的意见为准。然而，USD 的若干结构性和概率性特征使其分析，尤其是在 $k \gg \sqrt{n}$这一情形下，变得困难得多。

接下来，我们解释为什么所有能够成功处理 3-Majority 中大-$k$ 情形的已知技术，在 USD 中都会失效。这些方法大致分为两类：

- **耦合 + 主序（[BCEKMN17; CMRSS25]）**。BCEKMN17; CMRSS25] 对三多数的成功分析，依赖于与拉取投票的耦合，并结合主序论证，表明存活意见的数量会迅速降至$O(\sqrt{n})$，之后基于集中不等式的分析便会奏效。

- **基于势函数的分析（[SS25]）**。SS25] 提出的另一种近期方法是设计一个具有加性漂移、并在过程中持续增长的势函数。当势函数达到某个阈值时，基于集中不等式的分析便会奏效。

上述两种方法都无法推广到 USD。与三多数不同，由于存在未决顶点，USD 无法通过耦合与拉取投票建立联系。同时，[SS25]中使用的势函数本身在 USD 中不具有加性漂移性质，这同样是由于未决顶点的存在。具体而言，[SS25] 中使用的势函数定义为

$$\gamma_t = \sum_{i\in[k]} \alpha_t(i)^2. \tag{2}$$

由于在闲聊模型中，给定第 $t-1$ 轮的配置后，$\alpha_t(i)$ 可以写成 $n$ 个独立随机变量之和，因此通过标准的矩计算可得，对于三多数，

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\gamma_t] = \gamma_{t-1} + \Omega(1/n),$$

其中，$\mathbb{E}_{t-1}[\cdot]$ 是以第 $t-1$ 轮的配置为条件的期望。然而，在 USD 中，同样由于未决顶点的出现，这个不等式一般并不成立。

总而言之，尽管以往工作中的一些结构性见解在概念上仍有用处（例如，基于势函数的论证和基于集中不等式的分析的一般思路），但现有的分析框架都无法以黑箱方式迁移到 USD。不过，正如第 2.4 节所示，我们可以设计另一个势函数 $\widetilde{\gamma}_t$，它确实具有加性漂移，并且在整个过程中持续增长。

### 2.3 引理 2.1 （I）的证明：$\beta_t$ 和 $\psi_t$ 的行为（第 5.2 节）

现在我们概述引理 2.1 第一部分的证明。该部分指出：(i) $\beta_t$ 以高概率在 $O(\log n)$ 轮次内变为 $1/2-o(1)$，此后始终至少为 $1/2-o(1)$；(ii) 对所有 $t \geq 1$，$\psi_t$以高概率都很小；其中 $\psi_t$ 定义于式（1）中，用于衡量 $\beta_t$ 从第 $t-1$ 轮到第 $t$ 轮的变化，因为

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t] = 2\beta_{t-1}(1-\beta_{t-1}) + \sum_{i\in[k]} \alpha_{t-1}(i)^2 \tag{3}$$

$$= \beta_{t-1} - \psi_{t-1}. \tag{4}$$

例如，若对所有 $i \in [k]$ 均有 $\alpha_0(i) = 1/k$（即初始配置是平衡的），则 $\psi_0 = 1 - 1/k$，这意味着 $\beta_1$ 在期望意义下变为 $\beta_0 - \psi_0 = 1/k$，即 $\beta_1$ 显著下降。

有趣的是，正如引理 4.6 所示，第一轮之后，$\psi_t$ 的期望始终很小：

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\psi_t] \leq \frac{1}{n}.$$

将这一点与集中不等式结合起来，我们便得到引理 2.1(I) 中的“此外”部分。因此，一旦 $\beta_t$ 变为 $1/2 - o(1)$，此后它便会以高概率始终至少为 $1/2 - o(1)$。

还需证明 $\beta_t$ 会在 $1/2 - o$轮内以高概率达到(1)。假设 $O(\log n$。(1)成立。根据(3)，可得 $\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t] \geq (2 - o(1))\beta_{t-1}$。因此， $\beta_t$ 每轮都会增长 $1 + \Omega(1)$倍，这保证了 $\beta_t$ 会在 $O(\log n$轮内以高概率达到Ω(1)。通过类似的论证，我们可以证明 $\beta_t = 1/2 - o$会在(1)内$O(\log n$轮内以高概率达到。

## 2.4 引理2.1 (II)的证明：增长 $\alpha_t^{\max}$(第5.3节和第5.4节)

现在我们概述引理2.1第二项的证明。关键思路是将用于三多数的(2)势函数 $\gamma_t$ 进行归一化， $\beta_t^2$ 从而得到势函数 $\widetilde{\gamma}_t$ ，其定义为

$$\widetilde{\gamma}_t := \begin{cases} \sum_{i \in [k]} \left( \frac{\alpha_t(i)}{\beta_t} \right)^2, & \beta_t > 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

熟悉相关文献的读者可能会注意到，这个量与单色距离中引入的 [BCNPS15]有些相似。按照我们的记号，单色距离在 [BCNPS15]中定义为

$$\mathrm{md}_t := \sum_{i \in [k]} \left( \frac{\alpha_t(i)}{\alpha_t^{\max}} \right)^2.$$

与 $\mathrm{md}_t$ 的区别在于， $\widetilde{\gamma}_t$ 以 $\beta_t^2$ 为归一化因子，而 $\mathrm{md}_t$ 以（$\alpha_t^{\max}$）$^2$为归一化因子。这一微小的修改使我们能够评估 $\widetilde{\gamma}_t$的期望增长，尽管与 $\gamma_t$相比， $\widetilde{\gamma}_t$ 的形式更加复杂。利用引理2.1(I) 所保证的 $\beta_{t-1}$ =Ω(1) 以及泰勒近似，我们可以证明势函数 $\widetilde{\gamma}_t$ 具有加性漂移（引理4.8）：

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\widetilde{\gamma}_t] \approx \frac{\mathbb{E}_{t-1}[\gamma_t]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2} \geq \widetilde{\gamma}_{t-1} + \Omega(1/n).$$

利用可选停止定理的一个变体，我们可以证明，势函数 $\widetilde{\gamma}_t$ 在 $\widetilde{O}(\sqrt{n})$ 轮次内以高概率达到 Ω((log $n$) $^2/\sqrt{n}$)。

一旦 $\widetilde{\gamma}_t$ 达到 Ω((log $n$)$^2/\sqrt{n}$)，我们就有

$$\alpha_t^{\max} \geq \sum_{i \in [k]} \alpha_t(i)^2 = \widetilde{\gamma}_t \cdot \underbrace{\beta_t^2}_{\Omega(1) \text{ from Lemma 2.1(I)}} \geq \Omega\big((\log n)^2/\sqrt{n}\big).$$

接下来，我们证明此后 $\alpha_t^{\max}$不会下降太多。为此，我们引入归一化量

$$\widetilde{\alpha}_t^{\max} := \begin{cases} \alpha_t^{\max}/\beta_t, & \beta_t > 0, \\ 0, & \beta_t = 0, \end{cases}$$

它表现良好，因为 $\beta_t$ =在过程的这一部分始终为 Ω(1)。在引理 4.7中，我们将证明

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\widetilde{\alpha}_t^{\max}] \geq \left(1 - O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}, \tag{5}$$

这保证了，一旦 $\widetilde{\alpha}_t^{\max}$达到 Ω((log $n$)$^2/\sqrt{n}$)，它在接下来的 $\Theta(n)$ 轮次中就会以高概率保持在该阈值以上（相差一个常数因子以内）。

## 2.5 引理 2.1(III)：两种意见之间的差距（第 5.5 和 5.6节）

回顾一下，如果在第 $t$ 轮次中，某个意见 $i$ 满足 $\alpha_t(i) \le 0.9 \cdot \alpha_t^{\max}$，则称其为弱意见；如果在第 $t$ 轮次中满足 $\alpha_t(i) \ge 0.95 \cdot \alpha_t^{\max}$，则称其为强意见。固定两个不同的非弱意见 $i,\ j \in [k]$。目标是证明：(i) $i$或 $j$ 会以高概率在 $O(\log n/\alpha_0^{\max})$ 轮次内变为弱意见；(ii) 一旦某个意见变为弱意见，在过程余下的时间里就无法变为强意见。

为此，我们关注 $i$与 $j$之间的差距，其定义如下：

$$\delta_t := \alpha_t(i) - \alpha_t(j).$$

固定一轮 $t-1 \ge 1$。在引理 4.4中，我们将证明，给定 $\alpha_{t-1}$ 时， $\delta_t$ 的期望为

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\delta_t] = \delta_{t-1}(\alpha_{t-1}(i) + \alpha_{t-1}(j) + 2(1-\beta_{t-1})). \tag{6}$$

我们的目标是证明，每一轮中 $\delta_t$ 都会增长 $\Omega(\alpha_{t-1}^{\max})$ 倍的因子 $1+$。然而，这通常并不成立。例如，如果对所有 $i \in [k]$，都有 $\beta_{t-1} = 1$ 和 $\alpha_{t-1}(i) = \Theta(1/k)$，那么标准的切尔诺夫界论证可得 $\alpha_t(i) \approx \alpha_{t-1}(i)^2 = \Theta(1/k^2)$，从而得到 $\delta_t \ll \delta_{t-1}$。因此，我们需要对第 $t-1$ 轮的配置作出一些假设，具体如下：

- 假设在第 $t-1$ 轮次， $i$ 和 $j$ 都是非弱的。那么，我们有 $\alpha_{t-1}(i) + \alpha_{t-1}(j) \ge 1.8 \cdot \alpha_{\text{最大值}t-1}$。

- 假设 $\beta_{t-1} \ge 1/2 - o(1)$ 和 $\psi_{t-1} \le o(\log n/\sqrt{n})$，这由引理 2.1(I) 得出。然后，由于 $\psi_{t-1} = \beta_{t-1}(2\beta_{t-1}-1) - \gamma_{t-1}$ 且 $\gamma_{t-1} = \sum_i \alpha_{t-1}(i)^2 \le \alpha_{\text{最大值}_{t-1}} \cdot \sum_i \alpha_{t-1}(i) = \alpha_{\text{最大值}_{t-1}} \cdot \beta_{t-1}$，我们有

$$\begin{aligned} 2\beta_{t-1} - 1 &\le \frac{\gamma_{t-1} + o(\log n/\sqrt{n})}{\beta_{t-1}} \\ &= \alpha_{t-1}^{\max} + o(\log n/\sqrt{n}). \end{aligned}$$

将这两项代入 (6)，我们有

$$\begin{aligned} \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\delta_t] &= \delta_{t-1}\left(1 + \underbrace{\alpha_{t-1}(i) + \alpha_{t-1}(j)}_{\ge 1.8 \cdot \alpha_{t-1}^{\max}} - \underbrace{(2\beta_{t-1}-1)}_{\le \alpha_{t-1}^{\max} + o(\log n/\sqrt{n})}\right) \\ &\ge \delta_{t-1}\big(1 + 0.8 \cdot \alpha_{t-1}^{\max} - o(\log n/\sqrt{n})\big) \\ &\ge \delta_{t-1}\big(1 + \Omega(\alpha_{t-1}^{\max})\big). \end{aligned} \tag{7}$$

在最后一个不等式中，注意根据假设， $\alpha_{t-1}^{\max} \ge \Omega((\log n)^2/\sqrt{n})$。

最后，由（5）和 $\beta_t = \Omega(1)$，我们有 $\alpha_t^{\max} \ge \Omega(\alpha_0^{\max})$ 对所有 $t = O(n)$（在期望意义下）。因此，我们得到

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\delta_t] \ge \delta_{t-1}(1 + \Omega(\alpha_0^{\max})).$$

即使我们从 $\delta_0 = 0$ (即 $\alpha_0(i) = \alpha_0(j)$) 开始，通过计算（见引理 4.4），我们得到其二阶矩满足

$$\mathop{\mathbf{Var}}_{t-1}[\delta_t] = \Omega\left(\frac{(1-\beta_{t-1})^2(\alpha_{t-1}(i) + \alpha_{t-1}(j))}{n}\right) = \Omega\left(\frac{\alpha_0^{\max}}{n}\right),$$

尤其是

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\delta_t^2] \geq \delta_{t-1}^2 + \Omega\left(\frac{\alpha_0^{\max}}{n}\right).$$

因此，结合可选停止定理与 [DGMSS11],中广为人知的论证，我们可以证明，在 $|\delta_t|$ 轮内以高概率变为至少 Ω(√log $n/n$。 $O$轮后。因此，在 $O$轮内，要么 $i$ ，要么 $j$ 以高概率变弱。

## 2.6 基于Freedman 不等式的集中界

为了使第 2.4 节和2.5 节的分析严谨，我们需要对若干随机量（例如， $\delta_t$）建立集中界。我们采用[CMRSS25中提出的基于Freedman不等式的框架；SS25], 应用Freedman 不等式（一种针对鞅的Bernstein型集中不等式），为各种量获得紧致的集中界。

在群体协议模型中，这些不等式可以直接应用，因为每次更新只影响一个顶点。然而，在闲聊模型中，一个同步轮次会汇总 $n$ 个独立的局部变化。基于如下观察：单步差值（例如， $\alpha_t(i)$ $-\alpha_{t-1}(i)$可以写成 $n$ 个独立随机变量之和， [SS25] 提出了伯恩斯坦条件这一概念。即使单步跳跃无界，该条件仍足以保证可以应用Freedman 不等式；见第3.2节。

然而，用于三多数的 [SS25] 框架并不足以用于 USD。对于三多数，感兴趣的量（例如 $\alpha_t(i)$ 或 $\delta_t = \alpha_t(i) - \alpha_t(j)$）是独立随机变量的线性组合，因此可以将单步差写成独立随机变量之和。然而，在 USD 中，未决顶点的存在破坏了 $\alpha_t(i)$ 的简洁漂移结构，迫使我们分析如下归一化量

$$\widetilde{\gamma}_t = \frac{\|\alpha_t\|_2^2}{\beta_t^2}, \qquad \widetilde{\alpha}_t^{\max} = \frac{\alpha_t^{\max}}{\beta_t}.$$

虽然 $\beta_t$ 具有较好的集中性，但其方差通常大于 $\alpha_t(i)$ 的方差，因此，分别对分子和分母进行集中分析，无法为它们的比值给出紧确界。由此，直接应用基于 Freedman 的框架，以其当前形式而言并不足够。

为克服这一困难，我们在 $\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]$附近对 $1/\beta_t$ 作一阶泰勒展开：

$$\frac{1}{\beta_t} \geq \frac{1}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]} - \frac{\beta_t - \mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2}.$$

两边乘以 $\alpha_t(i)$，得到

$$\frac{\alpha_t(i)}{\beta_t} \geq \frac{\alpha_t(i)}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]} - \frac{\alpha_t(i)}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2}\,(\beta_t - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t]).$$

$(i)$ 和 $\beta_t$ 均为 $n$ 独立随机变量之和，因此右侧变为这些和的二次型。利用 read-$k$ 集中界 [GLSS15; DLLSV25], 我们可以得到这些二次型的紧确集中界，进而得到归一化量本身的紧确集中界。

这解决了阻碍将 Freedman 风格论证直接用于 USD 的主要障碍，并提供了整个分析过程中所需的集中保证。

# 3 定义与主要分析工具

## 3.1 模型与基本记号

对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$。对于 $p > 0$ 和向量 $x \in \mathbb{R}^n$，令 $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ 表示 $x$ 的 $\ell^p$-范数。对于有限集合 $S$，我们用 $x \sim S$ 表示从 $S$ 中均匀随机选取 $x$。对于 $a,\ b \in \mathbb{R}$，我们使用简写 $a \wedge b = \min\{a, b\}$。我们用 $\mathbf{1}_{\mathcal{E}}$ 表示事件 $\mathcal{E}$ 的示性随机变量，即若 $\mathcal{E}$ 发生则取值为 $\mathbf{1}_{\mathcal{E}} = 1$，否则取值为 0。

在全文中，我们固定一个由 $n$ 个顶点组成的集合，记为 $V$，其中 $|V| = n$。每个顶点持有来自有限字母表 $\Sigma = [k] \cup \{\perp\}$ 的一个意见，其中 $k \in \mathbb{N}$ 是一个参数，$\perp$ 表示未决状态。系统的所有配置都是 $\Sigma^V$ 的元素。交互规则（Gossip 或群体协议）将在后文说明，但在所有情况下，意见更新均由下文介绍的同一 USD 更新规则控制。

**定义 3.1**（USD 更新规则）。该USD 更新规则是一个函数 update: $\Sigma \times \Sigma \to \Sigma$定义如下

$$\mathsf{update}(\sigma_1, \sigma_2) = \begin{cases} \perp & \text{if } |\{\sigma_1, \sigma_2, \perp\}| = 3, \\ \sigma_2 & \text{if } \sigma_1 = \perp, \\ \sigma_1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意，条件 $|\{\sigma_1, \sigma_2, \perp\}| = 3$ 表示 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ 都已确定，且二者不同。

利用上述更新规则，我们定义闲聊模型中的 USD。在该模型中，每一轮所有顶点都会同时更新，每个顶点都与一个独立选取的随机邻居进行交互。

**定义 3.2** (GossipUSD)。gossip USD 是状态空间 $\Sigma^V$ 上的离散时间马尔可夫链 $(\mathrm{opn}_t)_{t\geq 0}$。给定 $\mathrm{opn}_t \in \Sigma^V$，下一个配置 $\mathrm{opn}_{t+1} \in \Sigma^V$按以下过程生成：对于每个顶点 $u \in V$，独立地随机选择一个顶点 $v \sim V$，并设置$\mathrm{opn}_{t+1}(u) =$ 更新$(\mathrm{opn}_t(u),\mathrm{opn}_t(v))$。

接下来，我们在群体协议模型下定义未决状态动态（USD）。这里，时间沿着一系列成对交互推进：每一步中，均匀随机地抽取一对顶点组成的有序对，并由发起者（该对中的第一个顶点）使用 USD 更新规则更新其状态。

定义 *3.3*（人口协议 *USD*）。人口协议 *USD* 是状态空间 $\Sigma^V$ 上的离散时间马尔可夫链 $(\mathit{opn}_t)_{t\geq 0}$。给定 $\mathit{opn}_t \in \Sigma^V$，下一个配置 $\mathit{opn}_{t+1} \in \Sigma^V$ 按以下过程生成：有放回地均匀随机选择两个顶点 $u$, $v \sim V$，并设置 $\mathit{opn}_{t+1}(u) =$ 更新$(\mathit{opn}_t(u), \mathit{opn}_t(v))$。除 $u$ 之外的所有顶点都保持其意见不变，即对于所有 $w \neq u$，$\mathit{opn}_{t+1}(w) = \mathit{opn}_t(w)$。

**注释 3.4**。在两个模型中，我们对配置使用相同的记号$\mathrm{opn}_t$。根据上下文总能明确所指的环境模型，而引入模型专属的符号（如$\mathrm{opn}_t^{\mathrm{gossip}}$ 或$\mathrm{opn}_t^{\mathrm{pp}}$）只会造成不必要的记号分支，并不会提升清晰度。

USD 的主要性能指标是共识时间，其定义为

$$\tau_{\mathrm{cons}} = \inf\{t \geq 0 \colon \exists a \in [k],\, \forall u \in V, \mathrm{opn}_t(u) = a\}.$$

注意，$\tau_{\mathrm{cons}} = \infty$ 如果对某个 $t \geq 0$，$\mathrm{opn}_t(u) = \perp$ 对所有 $u \in V$。

我们有时用 $\mathcal{F}_t$ 表示由过程$(\mathrm{opn}_s)_{s\le t}$生成的自然滤过。采用这一记号时，我们常常分别用缩写 $\mathbf{Pr}_{t-1}[\cdot]$、 $\mathbb{E}_{t-1}[\cdot]$和$\mathbf{Var}_{t-1}[\cdot]$ 来表示$\mathbf{Pr}[\cdot \mid \mathcal{F}_{t-1}]$、 $\mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_{t-1}]$和$\mathbf{Var}[\cdot \mid \mathcal{F}_{t-1}]$。对于USD中在步骤 $t$ 定义的随机变量 $X_t$ ，我们常用术语“$X_t$ 在轮次 $t-1$条件下”来表示以 $\mathcal{F}_{t-1}$为条件的该随机变量。

在第4节中，我们将定义第2 节提到的相关量，并回顾其基本性质。

### 3.2 伯恩斯坦条件

伯恩斯坦条件 [SS25]对随机变量的矩母函数提供一致控制，并将在全文中用于推导 USD 中相关量的集中界，例如 $\alpha_t(i)$及其归一化形式。

**定义 3.5 (**伯恩斯坦条件； [SS25])。 设 $D, s \ge 0$。随机变量 $X$ 满足$(D, s)$-伯恩斯坦条件，如果对所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 满足 $|\lambda| D < 3$,

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X}] \le \exp\left(\frac{\lambda^2 s/2}{1 - |\lambda| D/3}\right).$$

如果对所有 $\lambda \ge 0$ 满足$\lambda D < 3$时同一界都成立，则它满足单侧 $(D, s)$-伯恩斯坦条件。

单侧条件给出以下标准尾界（例如，参见 [Wai19，命题 2。14]）：

**注 3.6**。 如果 $X$ 满足单侧$(D, s)$-伯恩斯坦条件，那么对于所有 $h \ge 0$，利用$\Pr\left[e^{\lambda X} \ge e^{\lambda h}\right] \le e^{-\lambda h}\,\mathbb{E}[e^{\lambda X}]$和关于 $\mathbb{E}[e^{\lambda X}]$的界，并取 $\lambda = h/(s + hD/3)$，可得

$$\Pr[X \ge h] \le \exp\left(-\frac{h^2/2}{s + (hD)/3}\right).$$

W我们记录下后文将反复用到的基本封闭性（[SS25，引理 3。4]) .

**引理 3.7 (**伯恩斯坦条件的基本性质； [SS25])。 设 $X$， $Y$ 为随机变量。我们有以下结论：

*(i)* 若 $\mathbb{E}[X] = 0$ 且 $|X| \le D$，则 $X$ 满足$(D,$ **方差** $[X])$-伯恩斯坦条件。

*(ii)* 若 $X$ 满足$(D, s)$-伯恩斯坦条件，则对于任意$D' \ge D$ 以及 $s' \ge s$， $X$ 满足$(D', s')$-伯恩斯坦条件（单侧版本也同样成立）。

*(iii)* 若 $X$ 满足$(D, s)$-伯恩斯坦条件，则对于任意 $a \in \mathbb{R}$， $aX$ 都满足$(|a|D, a^2 s)$-伯恩斯坦条件（若 $a \ge 0$，单侧版本也同样成立）。

*(iv)* 若 $X$ 满足单侧 $(D, s)$-伯恩斯坦条件，且 $Y \preceq X$，则 $Y$ 满足单侧$(D, s)$-伯恩斯坦条件，其中 $\preceq$ 表示随机支配（见定义 *A.5*）。

*(v)* 若 $X_1$、 . . . 、 $X_n$ 相互独立，且每个 $X_i$ 都满足$(D, s_i)$-伯恩斯坦条件，则 $\sum_{i\in[n]} X_i$ 满足 $\left(D, \sum_{i\in[n]} s_i\right)$-伯恩斯坦条件。

*(vi)* 若 $X_1, \ldots, X_n$ 负相关，且每个 $X_i$ 都满足单侧$(D, s_i)$-伯恩斯坦条件，则 $\sum_{i\in[n]} X_i$ 满足单侧 $\left(D, \sum_{i\in[n]} s_i\right)$-伯恩斯坦条件。

我们需要对可能并非独立的随机变量之和给出伯恩斯坦界，即一个读入$\ell$ 族（定义A.2）。

**引理 3.8.** 我们有以下结论：

*(i)* 如果 $X_1, \dots, X_n$ 是随机变量，且每个 $X_i$ 都满足 $(D, s_i)$-伯恩斯坦条件，那么 $\sum_{i\in[n]} X_i$ 满足 $\left(nD, n\sum_{i\in[n]} s_i\right)$-伯恩斯坦条件。

*(ii)* 如果 $Y_1, \dots, Y_n$ 是一个 *read-*$\ell$ 族，且每个 $Y_i$ 都满足 $(D, s_i)$-伯恩斯坦条件，那么和 $\sum_{i\in[n]} Y_i$ 满足 $\left(\ell D, \ell\sum_{i\in[n]} s_i\right)$-伯恩斯坦条件。

条目 *1* 的证明。 由于 $X_i$ 满足 $(D, s_i)$-伯恩斯坦条件，根据引理 3.7 的条目 3， $nX_i$ 满足 $(nD, n^2 s_i)$-伯恩斯坦条件；也就是说，对于满足 $|\lambda| nD < 3$ 的 $\lambda \in \mathbb{R}$，我们有 $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda n X_i}\right] \leq \exp\left(\frac{\lambda^2 n^2 s_i/2}{1-|\lambda| nD()/3}\right)$。考虑满足 $|\lambda| nD < 3$ 的 $\lambda \in \mathbb{R}$。对于这样的 $\lambda$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\prod_{i\in[n]} \mathrm{e}^{\lambda X_i}\right] &\leq \left(\prod_{i\in[n]} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda X_i n}\right]\right)^{1/n} && \text{(From Hölder's inequality)} \\
&\leq \left(\prod_{i\in[n]} \exp\left(\frac{\lambda^2 n^2 s_i/2}{1-(|\lambda| nD)/3}\right)\right)^{1/n} \\
&= \exp\left(\frac{\lambda^2 n \sum_{i\in[n]} s_i/2}{1-(|\lambda| nD)/3}\right).
\end{aligned}$$

□

第*2*项的证明。由于 $Y_i$ 满足$(D,\ s_i)$-伯恩斯坦条件， $\ell Y_i$ 满足 $(\ell D,\ \ell^2 s_i)$-伯恩斯坦条件（由第3 项，引理3.7），即对于满足 $|\lambda|\ell D < 3$的 $\lambda \in \mathbb{R}$，我们有 $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda \ell Y_i}\right] \leq \exp\left(\frac{\lambda^2 \ell^2 s_i/2}{1-|\lambda|\ell D()/3}\right)$。考虑满足 $|\lambda|\ell D < 3$的 $\lambda \in \mathbb{R}$。对于这样的 $\lambda$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\prod_{i\in[n]} \mathrm{e}^{\lambda Y_i}\right] &\leq \left(\prod_{i\in[n]} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda Y_i \ell}\right]\right)^{1/\ell} && \text{(From Lemma A.3)} \\
&\leq \left(\prod_{i\in[n]} \exp\left(\frac{\lambda^2 \ell^2 s_i/2}{1-(|\lambda|\ell D)/3}\right)\right)^{1/\ell} \\
&= \exp\left(\frac{\lambda^2 \ell \sum_{i\in[n]} s_i/2}{1-(|\lambda|\ell D)/3}\right).
\end{aligned}$$

□

## 3.3 Freedman 不等式与漂移分析

漂移分析使我们能够在同时控制随机过程的期望演化与其增量的集中性之后，界定该随机过程的首次到达时间。我们简要回顾其基本机制。

设 $(X_t)_{t\geq 0}$ 为一个过程，且

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[X_t] \geq X_{t-1} + R \qquad \text{whenever } X_{t-1} < a,$$

对某个 $R > 0$ 和阈值 $a > X_0$，并定义停时

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : X_t \geq a\}.$$

考虑停止过程

$$Y_t := X_{t\wedge\tau} - R\,(t \wedge \tau),$$

它是一个次鞅。若增量 $Y_t - Y_{t-1}$ 满足伯恩斯坦条件，则 Freedman 不等式以高概率给出

$$Y_T \geq Y_0 - \varepsilon = X_0 - \varepsilon \qquad \text{for all sufficiently large } T.$$

在事件 $\{T < \tau\}$上，我们有 $X_T < a$ ，因此

$$X_T - RT = Y_T \geq X_0 - \varepsilon,$$

由此可得

$$T \leq \frac{a - X_0 + \varepsilon}{R}. \tag{8}$$

因此 $\tau$ 以高概率至多取该值。这是正漂移与集中性相结合以给出命中时刻上界的标准方式；参见例如 [Len20]。下面的引理在 [SS25], 中引入，它总结了上述基于 Freedman 不等式的讨论。

引理 *3.9*（ [*SS*25]的引理 *3.5*）。设 $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ 为一列随机变量，并设 $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$为一个滤过，使得对所有 $t \geq 0$， $X_t$ 关于 $\mathcal{F}_t$可测。设 $\tau$ 为关于 $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$的停时。设 $D$、 $s \geq 0$ 和 $R \in \mathbb{R}$ 为参数。假设对任意$t \geq 1$，下列条件成立：在给定 $\mathcal{F}_{t-1}$的条件下，

(*C*1) $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[X_t] - X_{t-1} - R) \leq 0$,

(*C*2) $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_t - X_{t-1} - R)$ 满足单侧$(D, s)$-伯恩斯坦条件。

对于参数 $h > 0$，定义停时

$$\tau_X^+ := \inf\{t \geq 0 \colon X_t \geq X_0 + h\} \text{ and } \tau_X^- := \inf\{t \geq 0 \colon X_t \leq X_0 - h\}.$$

于是，我们有如下结论：

*(i)* 假设 $R \geq 0$。则对任意满足 $z := h - R \cdot T > 0$的 $h$、 $T > 0$ ，我们有

$$\Pr\left[\tau_X^+ \leq \min\{T, \tau\}\right] \leq \exp\left(-\frac{z^2/2}{sT + (zD)/3}\right).$$

*(ii)* 假设 $R < 0$。则对任意满足 $z := (-R) \cdot T - h > 0$的 $h$、 $T > 0$ ，我们有

$$\Pr\left[\min\{\tau_X^-, \tau\} > T\right] \leq \exp\left(-\frac{z^2/2}{sT + (zD)/3}\right).$$

**注 3.10.** 由于条件 (*C*1) 推出 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_t - X_{t-1} - R) \leq \mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_t - \mathbb{E}_{t-1}[X_t])$，我们可以使用以下条件 (*C*2′) 来替代条件 (*C*2)：

$(C2')$ $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_t - \mathbb{E}_{t-1}[X_t])$ 满足单侧$(D, s)$-伯恩斯坦条件。

本文中，我们经常使用以下引理。它可直接由引理3.9推出，并为便于应用而作了表述。证明见第A.1节。粗略而言，该结果涉及一个 $X_t$ 我们感兴趣的量，该量满足伯恩斯坦条件，并保证以下结论以足够大的概率成立：

- 若对所有 $t \geq 1$， $\mathbb{E}_{t-1}[X_t] \geq X_{t-1} + R$ 对于某个 $R < 0$ （即， $\mathbb{E}_{t-1}[X_t] \geq X_{t-1} - r$ 对于某个$r > 0$），则 $X_t > I^-$对所有 $t \leq (1-\varepsilon)\frac{X_0 - I^-}{-R}$ $(= (1-\varepsilon)\frac{X_0 - I^-}{r})$ 均成立。换言之，若 $X_t$相较于 $\mathbb{E}_{t-1}[X_t]$ 并非太小，则 $X_{t-1}$不会下降太多。例如，我们将此结论应用于 $X_t = \tilde{\alpha}_{\max t}$ ，其漂移可能略微为负（5）。

- 若对所有 $t \geq 1$， $\mathbb{E}_{t-1}[X_t] \geq X_{t-1} + R$ 对某个 $R > 0$ 成立，则 $X_T \geq I^+$ 对某个 $T \geq (1+\varepsilon)\frac{I^+ - X_0}{R}$成立。换言之，若 $X_t$ 表现出正漂移，则它会迅速增大。例如，我们将此结论应用于 $X_t = \delta_t$，把 (7) 中给出的正乘性漂移转化为加性漂移 $\mathbb{E}_{t-1}[\delta_t] \geq \delta_{t-1} + \Omega(\alpha_{\max_0} \quad \delta_0)$。

**引理 3.11.** 设 $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ 为一列随机变量，并设 $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ 为一个滤过，使得对所有 $t \geq 0$， $X_t$ 是 $\mathcal{F}_t$-可测的。设 $\tau^*$ 是关于 $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$的停时。对参数 $I^-$ 和 $I^+$，定义停时

$$\tau^+ := \inf\left\{t \geq 0 \colon X_t \geq I^+\right\} \text{ and } \tau^- := \inf\left\{t \geq 0 \colon X_t \leq I^-\right\}.$$

则我们有如下结论：

*1.* 假设条件项 $(C1)$ 和 $(C2)$ 对参数 $D$、 $s \geq 0$、 $R < 0$ 和$\tau = \tau^*$成立。则对任意正常数 $\varepsilon > 0$, 以及任意 $T \leq \frac{(1-\varepsilon)(X_0 - I^-)}{-R}$，

$$\Pr\left[\tau^- \leq \min\{T, \tau^*\}\right] \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 (X_0 - I^-)^2/2}{sT + (\varepsilon(X_0 - I^-)D)/3}\right).$$

*2.* 假设条件项 $(C1)$ 与 $(C2)$ 对参数 $D$、 $s \geq 0$、 $R > 0$ 和$\tau = \min\{\tau^+, \tau^-, \tau^*\}$ 成立。那么，对任意正常数 $\varepsilon > 0$以及任意 $T \geq \frac{(1+\varepsilon)(I^+ - X_0)}{R}$，

$$\Pr\left[\tau^+ > T \text{ and } \tau^* > T\right] \leq \exp\left(-\frac{(X_0 - I^-)^2/2}{sT + ((X_0 - I^-)D)/3}\right) + \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 (I^+ - X_0)^2/2}{sT + (\varepsilon(I^+ - X_0)D)/3}\right),$$
$$\Pr\left[\tau^+ > \tau^- \text{ and } \tau^* > T\right] \leq \exp\left(-\frac{(X_0 - I^-)^2/2}{sT + ((X_0 - I^-)D)/3}\right) + \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 (I^+ - X_0)^2/2}{sT + (\varepsilon(I^+ - X_0)D)/3}\right).$$

# 4 关键量

本节介绍将在我们对 USD 的整个分析中使用的各个量。对每个量，我们建立其条件期望、条件方差以及单侧伯恩斯坦条件。这些性质构成后文所用漂移论证的主干。

由于这些定义有意集中在此处，表述较为密集；建议读者在跟随第5 节和6节中的证明时，按需回看本节。

**定义 4.1** (关键量)。 令$(\mathrm{opn}_t)_{t\geq 0}$ 为 *gossip USD* 或人口协议 *USD*。对于每一轮次 $t \geq 0$，定义：

• 对于每个 $i \in [k]$，令 $\alpha_t(i) := \frac{1}{n}|\{u \in V: \text{意见}_t(u) = i\}|$，并令 $\beta_t := \sum_{i\in[k]} \alpha_t(i)$ 表示持有已确定意见的顶点总比例。

• $\gamma_t := \|\alpha_t\|_2^2 = \sum_{i\in[k]} \alpha_t(i)^2$.

• $\psi_t := \beta_t(2\beta_t - 1) - \gamma_t$。

• $\widetilde{\gamma}_t := \gamma_t/\beta_t^2$。如果 $\beta_t = 0$，我们定义 $\widetilde{\gamma}_t = 0$。

• $\alpha_{\text{最大值}t} := \|\alpha_t\|_\infty = \max_{i\in[k]} \alpha_t(i)$。

• $\widetilde{\alpha}_{\max t} := \alpha_{\max_t} / \beta_t$。如果 $\beta_t = 0$，我们定义 $\widetilde{\alpha}_{\max_t} = 0$。

• 对于 $i$、$j \in [k]$ 和 $\varepsilon \in [0, 1]$，定义 $\delta(\varepsilon)_t(i, j) := \alpha_t(i) - (1+\varepsilon)\alpha_t(j)$ 以及 $\delta_t(i, j) := \delta(0)_t(i, j)$。如果 $i$ 和 $j$ 从上下文中可以明确，我们分别用 $\delta_t$ 或 $\delta(\varepsilon)_t$ 代替 $\delta_t(i, j)$ 或 $\delta(\varepsilon)_t(i, j)$。

• 设 $I_t := \min\{i \in [k] : \alpha_t(i) = \alpha_{\max_t}\}$ 表示第 $t$ 轮中最受欢迎的意见。对于 $i \in [k]$，令 $\eta_t(i) := \delta(c_\eta)_t(I_t, i) = \alpha_{\max t} - (1+c_\eta)\alpha_t(i)$，其中常数 $c_\eta > 0$ 在定义 5.15 中固定。

本文中，我们将用 $\mathbb{E}_{t-1}[\cdot]$ 表示以第$t-1$轮为条件的期望。例如，$\mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t]$ 表示以第 $t-1$ 轮为条件的 $\alpha_t$ 的期望。

## 4.1 闲聊模型的基本性质

现在，我们介绍定义 4.1 中引入的闲聊模型关键量的基本性质（期望、方差和伯恩斯坦条件）。这些结果在阶段分析中反复使用。本节所有引理的证明均放在第 B 节，因为它们只是常规计算，或是应用第3.2节中的引理。

**引理 4.2** （$\alpha_t(i)$ 在闲聊模型中的基本性质）。对于 *gossip USD*，量$\alpha_t(i)$ 满足以下条件：

*1.*（期望）$\mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(i)] = \alpha_{t-1}(i)(\alpha_{t-1}(i) + 2(1 - \beta_{t-1}))$。*2.*（方差）$\mathrm{Var}_{t-1}[\alpha_t(i)] = \frac{\alpha_{t-1}(i)}{n}[(1 - \beta_{t-1})(1 + \beta_{t-1} - 2\alpha_{t-1}(i)) + \alpha_{t-1}(i)(\beta_{t-1} - \alpha_{t-1}(i))]$。具体而言，$\mathrm{Var}_{t-1}[\alpha_t(i)] \le \frac{\alpha_{t-1}(i)}{n}$ 以及 $\mathrm{Var}_{t-1}[\alpha_t(i)] \ge \frac{(1-\beta_{t-1})^2\alpha_{t-1}(i)}{n}$ 成立。*3.*（伯恩斯坦条件）$\alpha_t(i) - \mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(i)]$ 在给定轮次 $t-1$ 的条件下满足 $\left(\frac{1}{n}, \frac{\alpha_{t-1}(i)}{n}\right)$-伯恩斯坦条件。

**引理 4.3**（闲聊模型中 $\beta_t$ 的基本性质）。对于 *gossip USD*，量 $\beta_t$ 满足以下条件：

*1.* (期望) $\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t] = 2\beta_{t-1}(1 - \beta_{t-1}) + \gamma_{t-1} = \beta_{t-1} - \psi_{t-1}$. *2.* (方差) **方差**$_{t-1}[\beta_t] = \frac{(\beta_{t-1}-\gamma_{t-1})(1-\beta_{t-1}+\gamma_{t-1})}{n} + \frac{\gamma_{t-1}^2 - \|\alpha_{t-1}\|_3^3}{n}$. 特别地，**方差**$_{t-1}[\beta_t] \le \frac{\beta_{t-1}}{n}$. *3.* (伯恩斯坦条件) $\beta_t - \mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]$ 在第 $t-1$ 轮次条件下满足 $\left(\frac{1}{n}, \frac{\beta_{t-1}}{n}\right)$-伯恩斯坦条件。

**引理 4.4 (** $\delta_t^{(\varepsilon)}$ 在闲聊模型中的基本性质)。 对于 *gossip USD*，数量$\delta_t^{(\varepsilon)}$ ：$= \delta_t^{(\varepsilon)}$ $(i, j)$ 满足以下条件：

*1.*（期望） $\mathbb{E}_{t-1}\left[\delta_t^{(\varepsilon)}\right] = \delta_{t-1}^{(\varepsilon)}(\alpha_{t-1}(i) + \alpha_{t-1}(j) + 2(1-\beta_{t-1})) + \varepsilon\alpha_{t-1}(i)\alpha_{t-1}(j)$。特别地，$\mathbb{E}_{t-1}[\delta_t] = \delta_{t-1} + \delta_{t-1}\alpha_{t-1}^{\max}\left(\frac{\alpha_{t-1}(i + \alpha_{t-1} j - \gamma_{t-1}+\psi_{t-1}}{\alpha_{t-1}^{\max} \beta_{t-1}\alpha_{t-1}^{\max}}\right)()$。

*2.*（方差）$\mathbf{Var}_{t-1}[\delta_t] \geq \frac{(1-\beta_{t-1})^2}{n}(\alpha_{t-1}(i) + \alpha_{t-1}(j))$。

*3.*（伯恩斯坦条件）差值 $\delta_t^{(\varepsilon)} - \mathbb{E}_{t-1}\left[\delta_t^{(\varepsilon)}\right]$ 在给定第 $t-1$ 轮次时满足$\left(\frac{2(1+\varepsilon)n}{}, s\right)$-伯恩斯坦条件，适用于 $s = \frac{2}{n}\left(\alpha_{t-1}(i) + (1+\varepsilon)^2\alpha_{t-1}(j)\right)$

**引理 4.5** （ $\gamma_t$ 在闲聊模型中的基本性质）。对于 *gossip USD*，量 $\gamma_t$ 满足以下条件：

*1.*（期望上界） $\mathbb{E}_{t-1}[\gamma_t] \leq 10\gamma_{t-1}$。*2.*（期望下界）$\beta_{t-1}^2\,\mathbb{E}_{t-1}[\gamma_t] \geq \mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2\gamma_{t-1} + \frac{\beta_{t-1}^3}{n}(1-\beta_{t-1}{}^2)$。

*3.*（伯恩斯坦条件）在给定轮次 $t-1$ 的条件下， $\gamma_t - \mathbb{E}_{t-1}[\gamma_t]$ 满足 $\left(\frac{2}{n}, \frac{20\gamma_{t-1}}{n}\right)$-伯恩斯坦条件。

**引理 4.6** （ $\psi_t$ 在闲聊模型中的基本性质）。对于 *gossip USD*，量 $\psi_t$ 满足以下条件：

*1.*（期望） $\mathbb{E}_{t-1}[\psi_t] \leq \frac{\beta_{t-1}}{n}$。

*2.*（伯恩斯坦条件）在给定轮次 $t-1$ 的条件下， $\psi_t - \mathbb{E}_{t-1}[\psi_t]$ 满足 $\left(\frac{24}{n}, \frac{400\beta_{t-1}}{n}\right)$-伯恩斯坦条件。

**引理 4.7** （闲聊模型中 $\widetilde{\alpha}_t^{\max}$的基本性质）。 对于 *gossip USD*，量 $\widetilde{\alpha}_t^{\max}$ 满足以下条件：令 $C > 0$ 为一个足够大的常数。假设 $\beta_{t-1} \geq 1/2 - o(1)$ 且 $\psi_{t-1} \leq o(1)$。那么，

*1.*（期望） $\mathbb{E}_{t-1}[\widetilde{\alpha}_t^{\max}] \geq \widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}\left(1 + \frac{\alpha_{t-1}^{\max} - \gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}{2\,1-\beta_{t-1}}()+\gamma_{t-1}/\beta_{t-1}\right) - \frac{9\alpha_{t-1}^{\max}}{n}$。*2.*（伯恩斯坦条件）在给定轮次 $t-1$ 的条件下， $\widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}\left(1 + \frac{\alpha_{t-1}^{\max} - \gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}{2\,1-\beta_{t-1}}()+\gamma_{t-1}/\beta_{t-1}\right) - \widetilde{\alpha}_t^{\max} - \frac{9\alpha_{t-1}^{\max}}{n}$ 满足单侧 $\left(\frac{C}{n}, \frac{C\alpha_{t-1}^{\max}}{n}\right)$- 伯恩斯坦条件。

**引理 4.8 (**闲聊模型中 $\widetilde{\gamma}_t$ 的基本性质)。 对于 *gossip USD*，量 $\widetilde{\gamma}_t$满足以下条件：假设 $\beta_{t-1} \geq 1/2 - o(1)$、 $\psi_{t-1} \leq o(1)$ 和 $\gamma_{t-1} \leq o(1)$。那么， $\mathbb{E}_{t-1}[\widetilde{\gamma}_t] \geq \widetilde{\gamma}_{t-1} + \frac{1}{12n}$。

## 4.2 群体协议模型的基本性质

现在，我们介绍定义4.1中引入的群体协议模型关键量的基本性质（期望、方差和伯恩斯坦条件），这些性质与第4.1节中的性质类似。证明见第B.2节。

**引理 4.9**（群体协议模型中 $\alpha_t(i)$ 的基本性质）。对于群体协议 *USD*，量 $\alpha_t(i)$ 满足以下性质：

*1.*（期望） $\mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(i)] = \alpha_{t-1}(i)\left(1 + \frac{\alpha_{t-1}(i)+1-2\beta_{t-1}}{n}\right)$。*2.*（方差）$Var_{t-1}[\alpha_t(i)] = \frac{\alpha_{t-1}(i)}{n^2}\left(1 - \alpha_{t-1}(i) + \alpha_{t-1}(i) - \alpha_{t-1}(i)(1 - 2\beta_{t-1} + \alpha_{t-1}(i))^2\right)$。特别地，$Var_{t-1}[\alpha_t(i)] \le \frac{\alpha_{t-1}(i)}{n}$。*3.*（伯恩斯坦条件） $\alpha_t(i) - \mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(i)]$ 在第 $t-1$ 轮的条件下满足 $\left(\frac{1}{n}, \frac{\alpha_{t-1}(i)}{n^2}\right)$-伯恩斯坦条件。

**引理 4.10**（群体协议模型中 $\beta_t$ 的基本性质）。对于人口协议 *USD*，量 $\beta_t$ 满足以下条件：

*1.*（期望） $\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t] = \beta_{t-1} + \frac{\beta_{t-1}(1-2\beta_{t-1}) + \gamma_{t-1}}{n}$。*2.*（方差）$\mathbf{Var}_{t-1}[\beta_t] \le \frac{\beta_{t-1}-\gamma_{t-1}}{n^2}$。*3.*（伯恩斯坦条件） $\beta_t - \mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]$ 在给定轮次 $t-1$ 的条件下满足 $\left(\frac{1}{n}, \frac{\beta_{t-1}}{n^2}\right)$-伯恩斯坦条件。

**引理 4.11**（群体协议模型中 $\delta_t^{(\varepsilon)}$ 的基本性质）。对于人口协议 *USD*，量 $\delta_t^{(\varepsilon)} := \delta_t^{(\varepsilon)}(i,j)$ 满足以下条件：

*1.*（期望） $\mathbb{E}_{t-1}\left[\delta_t^{(\varepsilon)}\right] = \delta_{t-1}^{(\varepsilon)}\left(1 + \frac{\alpha_{t-1}(i)+\alpha_{t-1}(j)+1-2\beta_{t-1}}{n}\right) + \frac{\varepsilon\alpha_{t-1}(i)\alpha_{t-1}(j)}{n}$。*2.*（方差）$Var_{t-1}[\delta_t] \ge \frac{\alpha_{t-1}(i)(1-\alpha_{t-1}(i))}{n^2} + \frac{\alpha_{t-1}(j)(1-\alpha_{t-1}(j))}{n^2} - \frac{4\delta_{t-1}^2}{n^2}$。*3.*（伯恩斯坦条件）$\delta_t^{(\varepsilon)} - \mathbb{E}_{t-1}\left[\delta_t^{(\varepsilon)}\right]$ 在给定轮次 $t-1$ 的条件下，对于 $s = \frac{2}{n^2}(\alpha_{t-1}(i) + (1+\varepsilon)^2\alpha_{t-1}(j))$，满足 $\left(\frac{2(1+\varepsilon)}{n}, s\right)$-伯恩斯坦条件。

**引理 4.12**（群体协议模型中 $\gamma_t$ 的基本性质）。对于人口协议 *USD*，量 $\gamma_t$ 满足以下性质：

*1.*（期望） $\mathbb{E}_{t-1}[\gamma_t] = \gamma_{t-1} + \frac{2}{n}\left((1-2\beta_{t-1})\gamma_{t-1} + \|\alpha_{t-1}\|_3^3\right) + \frac{\beta_{t-1}-\gamma_{t-1}}{n^2}$。

*2.*（方差）**方差**$_{t-1}[\gamma_t] \le \frac{9\|\alpha_{t-1}\|_3^3}{n^2}$，其中$\|\alpha_{t-1}\|_3^3 = \sum_{i\in[k]} \alpha_{t-1}(i)^3$。

*3.*（伯恩斯坦条件） $\gamma_t - \mathbb{E}_{t-1}[\gamma_t]$ 在给定轮次 $t-1$ 的条件下满足 $\left(\frac{8\alpha_{t-1}^{\max}}{n}, \frac{9\|\alpha_{t-1}\|_3^3}{n^2}\right)$-伯恩斯坦条件。

**引理 4.13 (**群体协议模型中的基本性质 $\psi_t$ **)**。对于群体协议 *USD*，量 $\psi_t$ 满足以下条件：

*1.*（期望） $\mathbb{E}_{t-1}[\psi_t] \le \psi_{t-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{\beta_{t-1}-\gamma_{t-1}}{n^2}$。

*2.*（伯恩斯坦条件） $\psi_t - \mathbb{E}_{t-1}[\psi_t]$ 在以轮次 $t-1$ 为条件时满足 $\left(\frac{150}{n}, \frac{150\beta_{t-1}}{n^2}\right)$-伯恩斯坦条件。

**引理 4.14** （ $\widetilde{\alpha}_t^{\max}$在群体协议模型中的基本性质）。 对于人口协议 *USD*，量 $\widetilde{\alpha}_t^{\max}$满足以下条件：设 $C > 0$ 为一个足够大的常数。假设 $\beta_{t-1} \geq 1/2 - o(1)$。则，

*1.*（期望） $\mathbb{E}_{t-1}\left[\widetilde{\alpha}_t^{\max}\right] \geq \widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}\left(1 + \frac{\alpha_{t-1}^{\max} - \gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}{2n}\right) - \frac{18\alpha_{t-1}^{\max}}{n^2}$。*2.*（伯恩斯坦条件） $\widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}\left(1 + \frac{\alpha_{t-1}^{\max} - \gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}{2n}\right) - \widetilde{\alpha}_t^{\max} - \frac{18\alpha_{t-1}^{\max}}{n^2}$在给定轮次 $t-1$的条件下满足单侧 $\left(\frac{C}{n}, \frac{C\alpha_{t-1}^{\max}}{n^2}\right)$-伯恩斯坦条件。

**引理 4.15** （群体协议模型中 $\widetilde{\gamma}_t$ 的基本性质）。 假设 $\beta_{t-1} \geq 1/2 - o(1)$ 且 $\gamma_{t-1} \leq o(1)$。那么对于人口协议 *USD*，$\mathbb{E}_{t-1}\left[\widetilde{\gamma}_t\right] \geq \widetilde{\gamma}_{t-1} + \frac{1}{12n^2}$。

## 4.3 停时

在本文余下部分中，我们会频繁提及上述关键量之一首次越过给定阈值的时刻。由于这些停时在闲聊模型和群体协议模型中都以统一的方式使用，我们在此统一定义。

对于随机过程 $(Z_t)_{t\geq 0}$ 和阈值 $\theta \in \mathbb{R}$，我们考虑如下形式的向上和向下首达时 $\tau_Z^+ := \inf\{t \geq 0 : Z_t \geq \theta\}$ 和 $\tau_Z^- := \inf\{t \geq 0 : Z_t \leq \theta\}$。我们将针对 $\beta_t$、 $\alpha_t^{\max}$、 $\delta_t$、 $\widetilde{\gamma}_t$ 等考察此类停时。这些停时将作为后续漂移和集中性论证中的标准里程碑。

每当某个停时涉及依赖于一对意见的量（例如 $\delta_t$）时，除非另有说明，该停时均指针对这一固定意见对定义的停时。

**定义 4.16** （停时）。 考虑定义 *4.1*中定义的量。

- （ $\beta_t$的停时）对于参数 $x > 0$，定义停时

$$\tau_\beta^+(x) = \inf\left\{t \geq 0 : \beta_t \geq \frac{1}{2} - x\right\} \text{ and } \tau_\beta^-(x) = \inf\left\{t \geq 0 : \beta_t < \frac{1}{2} - x\right\}.$$

  默认情况下，我们将参数 $x$ 设为任意满足 $x_\beta(n) = \omega\left(\sqrt{\log n/n}\right)$ 且 $x_\beta(n) = o(\log n/\sqrt{n})$ 的正函数 $x_\beta = x_\beta(n)$ （例如，$x_\beta = (\log n)^{3/5}/\sqrt{n}$） 。有时我们分别将 $\tau_\beta^+(x_\beta)$和 $\tau_\beta^-(x_\beta)$简写为 $\tau_\beta^+$和 $\tau_\beta^-$。

- （ $\psi_t$的停时）对于参数 $x > 0$，定义停时

$$\tau_\psi^+(x) = \inf\{t \geq 0 : \psi_t > x\} \text{ and } \tau_\psi^-(x) = \inf\{t \geq 0 : \psi_t \leq x\}.$$

  默认情况下，我们将参数 $x$ 设为满足 $x_\psi = x_\beta/4$的函数 $x = x_\psi(n)$ 。有时我们分别将 $\tau_\psi^+(x_\psi)$和 $\tau_\psi^-(x_\psi)$简写为 $\tau_\psi^+$和 $\tau_\psi^-$。

- （ $\gamma_t$的停时）对于参数 $x_\gamma \in (0,1)$，定义停时

$$\tau_\gamma^+ := \inf\{t \geq 0 : \gamma_t \geq x_\gamma\}.$$

  在本文中，我们固定 $x_\gamma = (\text{对数 } n)^2/\sqrt{n}$。

- （ $\alpha$最大值$t$ 和 $\widetilde{\alpha}$最大值$t$ 的停时）对于常数 $c^{\uparrow}$最大值 $c^{\downarrow}$最大值 $\in(0,\ 1)$，定义停时

$$\tau^{\uparrow}_{\max} := \inf\left\{t \geq 0 : \alpha^{\max}_t \geq (1 + c^{\uparrow}_{\max})\alpha^{\max}_0\right\},$$
$$\tau^{\downarrow}_{\max} := \inf\left\{t \geq 0 : \alpha^{\max}_t \leq (1 - c^{\downarrow}_{\max})\alpha^{\max}_0\right\}.$$

对于正常数 $c^{\uparrow}_{\widetilde{\max}}\, c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}} \in (0,1)$，定义停时

$$\tau^{\uparrow}_{\widetilde{\max}} := \inf\left\{t \geq 0 : \widetilde{\alpha}^{\max}_t \geq (1 + c^{\uparrow}_{\widetilde{\max}})\widetilde{\alpha}^{\max}_0\right\},$$
$$\tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}} := \inf\left\{t \geq 0 : \widetilde{\alpha}^{\max}_t \leq (1 - c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})\widetilde{\alpha}^{\max}_0\right\}.$$

默认情况下，我们设定 $c^{\uparrow}_{\max} = c^{\downarrow}_{\max} = c^{\uparrow}_{\widetilde{\max}} = c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}} = 0.1$。

- （ $\delta_t$ 的停时）对于常数 $c^{\uparrow}_{\delta}, c^{\downarrow}_{\delta} \in (0,1)$，定义停时

$$\tau^{\uparrow}_{\delta} := \inf\left\{t \geq 0 : \delta_t \geq (1 + c^{\uparrow}_{\delta})\delta_0\right\} \quad and \quad \tau^{\downarrow}_{\delta} := \inf\left\{t \geq 0 : \delta_t \leq (1 - c^{\downarrow}_{\delta})\delta_0\right\}.$$

分别表示 $\delta_t$ 按乘法方式向上和向下增长的停时。常数 $c^{\uparrow}_{\delta}$ 和 $c^{\downarrow}_{\delta}$ 在证明中根据需要定义。

对于阈值参数 $x > 0$，定义停时

$$\tau^{+}_{\delta}(x) := \inf\{t \geq 0 \colon |\delta_t| \geq x\}.$$

默认情况下，我们将参数 $x$ 设为 $x = c^{+}_{\delta}/\sqrt{n}$，其中 $c^{+}_{\delta}$ 是在证明中根据需要定义的正常数。有时我们分别将 $\tau^{+}_{\delta}(x_\delta)$ 简写为 $\tau^{+}_{\delta}$。

- （ $\eta_t$的停时）对于参数 $x > 0$ 和意见 $j \in [k]$，定义停时

$$\tau^{+}_{\eta}(x) := \inf\{t \geq 0 : \eta_t(j) \geq x\} \quad and \quad \tau^{-}_{\eta}(x) := \inf\{t \geq 0 : \eta_t(j) < x\}.$$

$x$ $x = x_\eta\ n$ $x_\eta\ n\ =$ 默认情况下，我们将参数 $\omega$ $n$ $n\ = o$ $n$ 设为满足 （ ） 的任意正函数 （ ） （$x_\beta$ （ ） ）, 并且 $x_\eta$ （ ） （$\log n/\sqrt{n}$） （例如，$x_\eta =$ （$\log$） $^{4/5}/\sqrt{n}$） 。我们有时将 $\tau^{+}_{\eta}$ （$x_\eta$） 和 $\tau^{-}_{\eta}$ （$x_\eta$） 分别缩写为 $\tau^{+}_{\eta}$和 $\tau^{-}_{\eta}$。

# 5 闲聊模型的分析

本节给出闲聊模型中定理 1.1 的完整证明。论证结构遵循第 2 节给出的提纲：每个小节都按相同顺序实现其中所述的一项步骤，并使用相应的技术工具。由于概述中的每个组成部分都需要单独进行漂移和集中性分析，本节篇幅必然较长；不过，其组织结构与第 2 节的概念路线图相呼应，读者可参阅该部分的讨论，了解各项内容如何融入整体证明。

## 5.1 第一轮失败的概率

本小节将考察第一次同步更新后的配置。具体而言，我们将求出动力学在第一轮失败的概率。

**引理 5.1.** 考虑闲聊模型中的 *USD*。设 $p_\perp = \Pr[\beta_1 = 0]$ 为第一轮后所有顶点都持有 $\perp$ 的概率。那么，我们有如下结论：

1. *If* $\beta_0 = 1$, *then* $p_\perp = \prod_{i\in[k]} (1-\alpha_0(i))^{n\alpha_0(i)} \le \exp(-n\gamma_0) \le \exp(-n/k)$.
2. 若 $0 < \beta_0 < 1$，则 $\Pr[\beta_1 = 0] \le \frac{1}{n}$.

证明。 根据定义，我们有

$$p_\perp = (1-\beta_0)^{(1-\beta_0)n} \cdot \prod_{i\in[k]} (\beta_0 - \alpha_0(i))^{\alpha_0(i)n} \tag{9}$$

这里请注意，$(1-\beta_0)^{(1-\beta_0)n}$ 表示所有初始未决顶点在第一轮后仍保持$\perp$ 的概率，而 $\prod_{i\in[k]}(\beta_0 - \alpha_0(i))^{\alpha_0(i)n}$ 表示所有初始已决顶点在第一轮后变为未决的概率。

第一项可通过将 $\beta_0 = 1$ 代入 (9) 得到。注意，由于 $\beta_0 = 1$，根据 $1 = \sum_{i\in[k]} \alpha_0(i) \le \sqrt{\sum_{i\in[k]} 1^2} \cdot \sqrt{\sum_{i\in[k]} \alpha_0(i)^2} = \sqrt{k\gamma_0}$ 柯西-施瓦茨不等式， $\gamma_0 \ge 1/k$。现在证明第二项。由 (9)，我们有

$$\begin{aligned} p_\perp &\le (1-\beta_0)^{(1-\beta_0)n} \cdot \prod_{i\in[k]} \beta_0^{\alpha_0(i)n} \\ &= (1-\beta_0)^{(1-\beta_0)n} \cdot \beta_0^{\beta_0 n} \\ &= 2^{-n\mathrm{H}(\beta_0)}, \end{aligned}$$

其中 $\mathrm{H}(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$ 表示二元熵函数。由于 $\frac{1}{n} \le \beta_0 \le 1 - \frac{1}{n}$，我们有 $\mathrm{H}(\beta_0) \ge \mathrm{H}(1/n) \ge \log_{n^2} n$。这证明了第二项。 □

## 5.2 已决顶点比例的行为

根据引理 C.1 和5.1，我们知道未决顶点的比例以概率$p_\perp$ 为 0，否则以高概率介于 $1/n$ 和 $\gamma_0 \log n$ 之间。在本小节中，我们将证明，当出现后一种情况时，以高概率有 $\beta_t \ge 1/2 - o(1)$ 对所有 $\Omega(\log n) \le t \le n^{O(1)}$成立；引理 5.2。特别地，这使我们能够将 $\beta_t$ 视为 $\Omega(1)$，对所有此类 $t$均成立。图 2对此进行了示意。

此外，我们证明了关于势函数 $\psi_t = \beta_t(2\beta_t - 1) - \gamma_t$ 的引理 5.3，该势函数与 $\beta_t$ 的一个下界有关。注意，根据定义， $\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t] = \beta_{t-1} - \psi_{t-1}$。

**引理 5.2 (** $\beta_t$ 的增长）。我们有如下结论：

1. 设 $C > 0$ 为任意常数。假设 $\beta_0 > 0$。那么，对于某个 $T = O(\log n)$， $\beta_T \ge \left(C\log n / n\right)^n$ 以至少 $1 - O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ 的概率成立。
2. 对于某些 $T = O(\log n)$， $\Pr\left[\tau_\beta^+ > T\right] \le T\left(\exp(-\Omega(n\beta_0)) + \exp\left(-\Omega(nx_\beta^2)\right)\right)$.

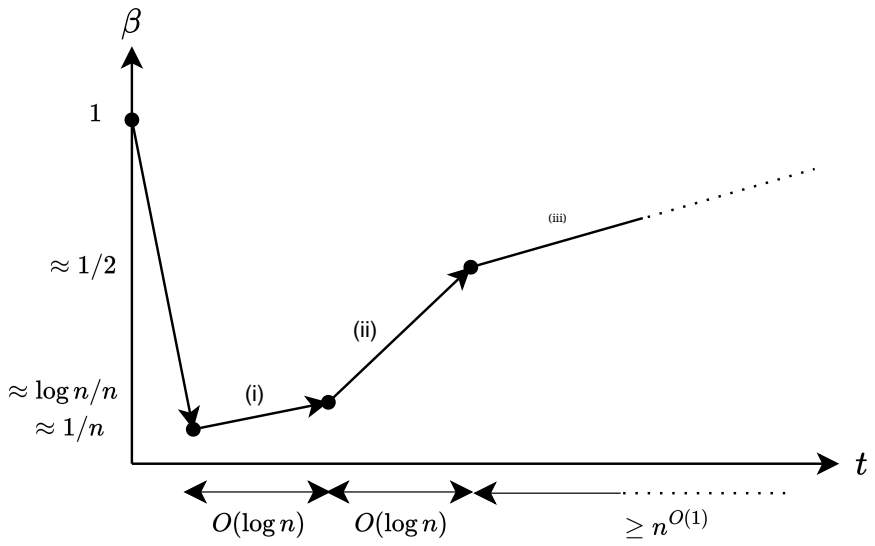


图 2：闲聊模型中 $\beta_t$ 随时间的变化。

*3.* 假设 $\psi_0 \leq x_\psi$ 和 $\beta_0 \geq 1/2 - x_\beta$ 成立。那么，对于任意 $T \geq 1$,

$$\Pr\left[\tau_\beta^- \leq T \text{ and } \tau_\psi^+ > T\right] \leq T\exp\left(-\Omega(nx_\beta^2)\right).$$

**引理 5.3** (衰减 $\psi_t$)。我们有如下结论：

*1.* 概率$\left[\tau_\psi^- > 1\right] \leq$ 指数$\left(-\Omega(nx_\psi^2)\right)$ 对任意初始配置均成立。

*2.* 假设 $\psi_0 \leq x_\psi$。那么，对任意 $T \geq 1$，概率$\left[\tau_\psi^+ \leq T\right] \leq T$指数$\left(-\Omega(nx_\psi^2)\right)$

.

引理 *1* 的证明（引理 *5.2*）。首先，对于 $\beta_0 < C$ 对数 $n/n \leq 1/4$，我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t] = 2\beta_{t-1}(1-\beta_{t-1}) + \gamma_{t-1} \geq \frac{3}{2}\beta_{t-1}. \tag{10}$$

注意，我们使用引理4.3（第1项）。由引理 4.3（第3项）和备注3.6,

$$\Pr_{t-1}\left[\beta_t \leq \frac{5}{4}\beta_{t-1}\right] \leq \Pr_{t-1}\left[\beta_t \leq \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t] - \frac{\beta_{t-1}}{4}\right] \leq \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}\frac{\beta_{t-1}^2}{16}}{\frac{\beta_{t-1}}{n} + \frac{\beta_{t-1}}{12n}}\right) \leq \exp\left(-\Omega(n\beta_{t-1})\right). \tag{11}$$

令 $\tau_{\text{zero}} = \inf\{t \geq 0\colon \beta_t = 0\}$ 为 $\beta_t$ 变为 0 的首次时间。由引理 5.1 可得 $\Pr[\tau_{\text{zero}} \leq T] \leq T/n$。此外，根据 $\beta_0 > 0$ 的假设，有 $\tau_{\text{zero}} > 0$。我们对 $Z_t = \text{opn}_t$, $T = 1$, $\varphi(Z_t) = \sqrt{n}\beta_t$, $\tau = \tau_{\text{zero}}$, $c_\varphi^\uparrow = \sqrt{5/4} - 1$, $x_0 = 1$ 和 $x^* = \sqrt{C}\log n$ 应用引理 A.6。根据这些设定，我们有 $\tau_\varphi^+(x_0) = \inf\{t \geq 0\colon \sqrt{n}\beta_t \geq 1\} = 0$, $\tau_\varphi^+(x_*) = \inf\{t \geq 0\colon \sqrt{n}\beta_t \geq \sqrt{C}\log n/n\} = \inf\{t \geq 0\colon \beta_t \geq C\log n/n\}$, 以及 $\tau_\varphi^\uparrow = \inf\{t \geq 0\colon \sqrt{n}\beta_t \geq (1+c_\varphi^\uparrow)\sqrt{n}\beta_0\} = \inf\{t \geq 0\colon \beta_t \geq (5/4)\beta_0\}$。因此,

$$\Pr\left[\min\left\{\tau_\varphi^+(x_0), \tau\right\} \leq 1\right] = 1$$

成立，即满足引理 A.6 的第一个条件 $C_1 = 1$。接下来，对于$\beta_0 \le C \log n/n$的任意配置，我们有

$$\Pr\left[\min\left\{\tau_\varphi^{\uparrow}, \tau\right\} > 1\right] \ge \Pr\left[\beta_1 \le \frac{5}{4}\beta_0\right] \ge 1 - \exp\left(-\Omega(n\beta_0)\right) = 1 - \exp\left(-\Omega(\varphi(Z_0)^2)\right),$$

即，引理 A.6 的第二个条件对于某个正常数 $C_2 > 0$成立。注意，我们在第二个不等式中使用了（11）。

因此，由引理 A.6 及 $\varepsilon = n^{-10}$，对于某个 $T' = O(\log n)$，

$$\begin{aligned}\Pr\left[\tau_\varphi^+(x_*) > T'\right] &\le \Pr\left[\min\left\{\tau_\varphi^+(x_*), \tau_{\text{zero}}\right\} > T'\right] + \Pr\left[\tau_{\text{zero}} \le T'\right] \\ &\le n^{-10} + T'/n.\end{aligned}$$

□

引理 *5.2* 中第 *2* 项的证明。 首先，考虑 $\beta_{t-1} \le \frac{1}{4}$ 的情形。回顾（11）：对于任意$\beta_{t-1} \le 1/4$，$\Pr_{t-1}[\beta_t \le (5/4)\beta_{t-1}] \le \exp(-\Omega(n\beta_{t-1}))$。因此，对于某个 $T = O(\log n)$ 轮次，$\beta_T \ge \frac{1}{4}$ 以至少 $1 - T\exp(-\Omega(n\beta_0)$ 的概率。

其次，考虑 $\frac{1}{4} \le \beta_{t-1} \le \frac{1}{2} - x_\beta$ 的情形。为方便起见，记 $B_t = 1 - 2\beta_t$。回顾 $\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t] = 2\beta_{t-1}(1 - \beta_{t-1}) + \gamma_{t-1}$。由于 $2x_\beta \le B_{t-1} \le 1/2$，我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[B_t] = 1 - 4\beta_{t-1}(1 - \beta_{t-1}) - 2\gamma_{t-1} \le B_{t-1}^2 \le \frac{B_{t-1}}{2}.$$

此外，由 $B_t - \mathbb{E}_{t-1}[B_t] = 2(\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t] - \beta_t)$，引理 3.7 (第 3 项)，以及引理 4.3 (第 3 项)，$B_t - \mathbb{E}_{t-1}[B_t]$ 满足 $\left(\frac{2}{n}, \frac{4\beta_{t-1}}{n}\right)$-伯恩斯坦条件。因此，

$$\Pr_{t-1}\left[B_t \ge \frac{3}{4}B_{t-1}\right] \le \Pr_{t-1}\left[B_t \ge \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[B_t] + \frac{B_{t-1}}{2}\right] \le \exp\left(-\Omega(nB_{t-1}^2)\right).$$

因此，对于某个 $T' = O(\log n)$ 轮次，$B_{T'} \le 2x_\beta$成立的概率至少为 $1 - T_1\exp\left(-\Omega(nx_\beta^2)\right)$。注意，$B_t \le 2x_\beta$ 意味着 $\beta_t \ge 1/2 - x_\beta$。 □

引理 *5.2* 第 *3* 项的证明。 首先，考虑 $\frac{1}{2} - x_\beta \le \beta_{t-1} \le \frac{1}{2} - \frac{x_\beta}{2}$ 的情况。注意 $\frac{1}{4} \le \frac{1}{2} - x_\beta$。由引理 4.3 (第 1 项)，

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t] - \beta_{t-1} \ge \beta_{t-1}(1 - 2\beta_{t-1}) \ge \left(\frac{1}{2} - \frac{x_\beta}{2}\right)x_\beta \ge \frac{x_\beta}{4}.$$

因此，根据引理4.3 （第3项），

$$\Pr_{t-1}\left[\beta_t \le \frac{1}{2} - x_\beta\right] \le \Pr_{t-1}\left[\beta_t \le \beta_{t-1}\right] \le \Pr_{t-1}\left[\beta_t \le \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t] - \frac{x_\beta}{4}\right] \le \exp\left(-\Omega(nx_\beta^2)\right).$$

其次，考虑 $\frac{1}{2} - \frac{x_\beta}{2} \le \beta_{t-1}$ 的情形。回顾 $x_\beta \ge 4x_\psi$。于是，根据引理 4.3 (项 1 和 3)，对于 $\tau_\psi^+ > t - 1$，我们有

$$\Pr_{t-1}\left[\beta_t \le \frac{1}{2} - x_\beta\right] \le \Pr_{t-1}\left[\beta_t \le \beta_{t-1} - \psi_{t-1} - \frac{x_\beta}{4}\right] = \Pr_{t-1}\left[\beta_t \le \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t] - \frac{x_\beta}{4}\right] \le \exp\left(-\Omega(nx_\beta^2)\right).$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\Pr\left[\tau_\beta^- \le T \text{ and } \tau_\psi^+ > T\right] &= \Pr\left[\exists t \le T : \beta_t \le \frac{1}{2} - x_\beta \text{ and } \tau_\psi^+ > T\right] \\ &\le \sum_{t=1}^{T} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\tau_\psi^+ > t-1} \Pr_{t-1}\left[\beta_t \le \frac{1}{2} - x_\beta\right]\right] \\ &\le T\exp\left(-\Omega(nx_\beta^2)\right).\end{aligned}$$

注意，$\Pr\left[\beta_t \le \frac{1}{2} - x_\beta \text{and } \tau_\psi^+ > t-1\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\tau_\psi^+ > t-1} \Pr_{t-1}\left[\beta_t \le \frac{1}{2} - x_\beta\right]\right]$。 □

引理 *5.3*的第 *1* 项证明。 根据引理 4.6 (第 1 项)，$\mathbb{E}_{t-1}[\psi_t] + \frac{x_\psi}{2} \le \frac{1}{n} + \frac{x_\psi}{2} \le x_\psi$ 成立。此外，根据引理 4.6 (第 2 项)，$\psi_t - \mathbb{E}_{t-1}[\psi_t]$ 满足（$O(1/n)$ $O(1/n)$）伯恩斯坦条件。因此，根据注释 3.6，

$$\Pr_{t-1}\left[\psi_t > x_\psi\right] \le \Pr_{t-1}\left[\psi_t > \mathbb{E}_{t-1}[\psi_t] + \frac{x_\psi}{2}\right] \le \exp\left(-\Omega\left(\frac{x_\psi^2}{\frac{1}{n} + \frac{x_\psi}{n}}\right)\right) \le \exp\left(-\Omega\left(nx_\psi^2\right)\right). \tag{12}$$

由 $\Pr\left[\tau_\psi^- > 1\right] \le \Pr\left[\psi_1 > x_\psi\right]$ 可得该结论。 □

证明条目 *2* （引理 *5.3*）。由并集界和（12），我们有

$$\Pr\left[\tau_\psi^+ \le T\right] = \Pr\left[\bigvee_{t=1}^{T}\left\{\psi_t > x_\psi\right\}\right] \le \sum_{t=1}^{T}\Pr[\psi_t > x_\psi] = \sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}\left[\Pr_{t-1}\left[\psi_t > x_\psi\right]\right] \le T\exp\left(-\Omega(nx_\psi^2)\right).$$

注意，$\tau_\psi^+ \ne 0$ 因为 $\psi_0 \le x_\psi$。 □

### 5.3 归一化总体的平方 $\ell^2$ 范数的行为

在本小节中，我们追踪量 $\widetilde{\gamma}_t = \|\alpha_t\|_2^2/\beta_t^2$ 的变化，该量定义于定义 4.1。我们证明 $\widetilde{\gamma}_t$ 会变为 $\Omega((\log n)^2/\sqrt{n})$，于 $\widetilde{O}(\sqrt{n})$ 轮次内以高概率成立。回顾 $x_\gamma = (\log n)^2/\sqrt{n}$ 在定义 4.16中的定义。

**引理 5.4** （增长：$\gamma_t$）。假设 $\beta_0 \ge 1/2 - x_\beta$ 且 $\psi_0 \le x_\psi$。则对某个 $T = O\left(nx_\gamma \log n\right)$，

$$\Pr\left[\tau_\gamma^+ > T \text{ or } \min\{\tau_\beta^-, \tau_\psi^+\} \le T\right] \le n^{-\Omega(1)}.$$

引理 5.4的直觉如下。首先，我们推导出 $\tau = \min\{\tau_\gamma^+, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\}$ 的期望值关于 $\mathbb{E}[\widetilde{\gamma}_\tau]$的上界。关键技术是将 $\widetilde{\gamma}$的加性漂移与可选停止定理（定理 A.4）相结合。其次，为了得到$\mathbb{E}[\tau]$的上界，我们给出 $\mathbb{E}[\widetilde{\gamma}_\tau]$的上界。

**引理 5.5.** $\mathbb{E}\left[\text{最小}\{\tau_\gamma^+, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\}\right] \le 1320nx_\gamma.$

证明。 对于 $\min\{\tau_\gamma^+, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\} > t-1$，我们有

$$\mathbb{E}_{t-1}\left[\widetilde{\gamma}_t\right] \ge \widetilde{\gamma}_{t-1} + \frac{1}{12n}.$$

注意，我们使用引理 4.8。令 $\tau =$最小值$\{\tau_\gamma^+, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\}$， $X_t = \widetilde{\gamma}_t - \frac{t}{12}$且 $Y_t = X_{t\wedge\tau}$。那么，我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[Y_t - Y_{t-1}] = \mathbf{1}_{\tau>t-1}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[X_t - X_{t-1}] = \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\widetilde{\gamma}_t] - \frac{t}{12} - \widetilde{\gamma}_{t-1} + \frac{t-1}{12}\right) \geq 0,$$

即，$(Y_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ 是一个鞅差序列 鞅。因此，根据定理A.4，我们有 $\mathbb{E}[Y_\tau] \geq \mathbb{E}[Y_0] = \widetilde{\gamma}_0 \geq 0$。因此 ，

$$0 \leq \mathbb{E}[Y_\tau] = \mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[\widetilde{\gamma}_\tau] - \frac{\mathbb{E}[\tau]}{12n}$$

于是我们得到 $\mathbb{E}[\tau] \leq 12n\,\mathbb{E}[\widetilde{\gamma}_\tau]$。

现在，我们给出 $\mathbb{E}[\widetilde{\gamma}_\tau]$的一个上界。设 $L = 55x_\gamma$。我们有

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{\gamma}_\tau\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\widetilde{\gamma}_\tau \leq L}\widetilde{\gamma}_\tau\right] + \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\widetilde{\gamma}_\tau > L}\widetilde{\gamma}_\tau\right] \leq L + \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\widetilde{\gamma}_\tau > L}\widetilde{\gamma}_\tau\right]$$

and

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\widetilde{\gamma}_\tau > L}\widetilde{\gamma}_\tau\right] = \sum_{t=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\tau=t}\widetilde{\gamma}_t\mathbf{1}_{\widetilde{\gamma}_t>L}\right] \leq \sum_{t=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\tau>t-1}\widetilde{\gamma}_t\mathbf{1}_{\widetilde{\gamma}_t>L}\right] = \sum_{t=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\tau>t-1}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\widetilde{\gamma}_t\mathbf{1}_{\widetilde{\gamma}_t>L}\right]\right].$$

对于 $t-1<\tau$，我们有 $\beta_{t-1} \geq 1/2 - x_\beta$ 和 $\gamma_{t-1} \leq x_\gamma$。因此，我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\widetilde{\gamma}_\tau\mathbf{1}_{\widetilde{\gamma}_\tau>L}\right] \leq \Pr_{t-1}\left[\widetilde{\gamma}_t > L\right] \leq \Pr_{t-1}\left[\gamma_t > \left(\frac{1}{2} - x_\beta\right)^2 L\right] \leq \Pr_{t-1}\left[\gamma_t > 11x_\gamma\right] \leq \Pr_{t-1}\left[\gamma_t > \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\gamma_t] + x_\gamma\right].$$

注意到 $\mathbb{E}_{t-1}[\gamma_t] \leq 10\gamma_{t-1}$。由于 $\gamma_t - \mathbb{E}_{t-1}[\gamma_t]$ 满足 $\left(\frac{2}{n}, \frac{20\gamma_{t-1}}{n}\right)$-伯恩斯坦条件，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{\tau>t-1}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\widetilde{\gamma}_\tau\mathbf{1}_{\widetilde{\gamma}_\tau>L}\right] &\leq \mathbf{1}_{\tau>t-1}\Pr_{t-1}\left[\gamma_t > \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\gamma_t] + x_\gamma\right] \\
&\leq \mathbf{1}_{\tau>t-1}\exp\left(-\frac{x_\gamma^2/2}{\frac{20\gamma_{t-1}}{n} + \frac{2x_\gamma}{3n}}\right) \\
&\leq \mathbf{1}_{\tau>t-1}\exp\left(-\Omega(nx_\gamma)\right) \\
&\leq \frac{\mathbf{1}_{\tau>t-1}}{24n}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{\gamma}_\tau\right] \leq L + \sum_{t=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\frac{\mathbf{1}_{\tau>t-1}}{100n}\right] = 55x_\gamma + \frac{\mathbb{E}[\tau]}{24n}.$$

因此，我们有

$$\mathbb{E}[\tau] \leq 12\,\mathbb{E}[\widetilde{\gamma}_\tau] \leq 12n\left(55x_\gamma + \frac{\mathbb{E}[\tau]}{24n}\right) \leq 660nx_\gamma + \frac{\mathbb{E}[\tau]}{2},$$

即 $\mathbb{E}[\tau] \leq 1320nx_\gamma$。 □

证明引理 5.4。 设 $\tau = \min\{\tau_\gamma^+, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\}$ 且 $T' = 1320\mathrm{e}n^2 x_\gamma$。由马尔可夫不等式与引理 5.5,

$$\Pr\left[\tau > T'\right] \le \frac{\mathbb{E}[\tau]}{T'} \le \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

因此，对于任意 $\ell \ge 1$，马尔可夫性意味着

$$\Pr\left[\tau > \ell T' \mid \tau > (\ell-1)T'\right] = \mathbb{E}\left[\Pr_{(\ell-1)T'}\left[\tau > \ell T'\right] \mid \tau > (\ell-1)T'\right] \le \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

因此，我们得到

$$\Pr\left[\tau > \ell T'\right] = \Pr\left[\tau > \ell T' \mid \tau > (\ell-1)T'\right]\Pr\left[\tau > (\ell-1)T'\right] \le \frac{1}{\mathrm{e}}\Pr\left[\tau > (\ell-1)T'\right] \le \cdots \le \frac{1}{\mathrm{e}^\ell}.$$

应用引理 5.2 (条目 3) 和引理 5.3 (条目2)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\tau_\gamma^+ > \ell T' \text{ or } \min\{\tau_\beta^-, \tau_\psi^+\} \le \ell T'\right] \\
&\le \Pr\left[\left\{\tau_\gamma^+ > \ell T' \text{ or } \min\{\tau_\beta^-, \tau_\psi^+\} \le \ell T'\right\} \text{ and } \min\{\tau_\beta^-, \tau_\psi^+\} > \ell T'\right] + \Pr\left[\min\{\tau_\beta^-, \tau_\psi^+\} \le \ell T'\right] \\
&\le \Pr\left[\tau > \ell T'\right] + \Pr\left[\tau_\beta^- \le \ell T' \text{ and } \tau_\psi^+ > \ell T'\right] + \Pr\left[\tau_\psi^+ \le \ell T'\right] \\
&\le \frac{1}{\mathrm{e}^\ell} + \ell T' \exp\left(-\Omega\left(n x_\beta^2\right)\right) + \ell T' \exp\left(-\Omega\left(n x_\psi^2\right)\right).
\end{aligned}$$

取 $\ell = C\log n$，其中常数 $C > 0$ 足够大，即可得到所述结论。 □

## 5.4 最大总体的行为

在本小节中，我们追踪最大分数种群 $\alpha_t^{\max} = \max^{i\in[k]} \alpha_t(i)$ 及其归一化版本 $\widetilde{\alpha}_t^{\max} = \alpha_t^{\max}/\beta_t$ 的变化。注意，根据引理 5.4，我们知道 $\alpha_t^{\max} = \Omega(\widetilde{\alpha}_t^{\max})$ 会在 $\widetilde{O}(\sqrt{n})$ 轮次内以高概率变为 $\Omega((\log n)^2/\sqrt{n})$。本小节旨在证明，以高概率，(i) 对所有 $t \le O(n\widetilde{\alpha}_0^{\max}/\log n)$，$\widetilde{\alpha}_t^{\max} \ge (1 - c^{\downarrow}_{\max})\widetilde{\alpha}_0^{\max}$ 成立（见引理 5.6，条目 1）；并且 (ii) 对所有 $t \le O(1/\alpha_0^{\max})$，$\alpha_t^{\max} \le (1+c^{\uparrow}_{\max})\alpha_0^{\max}$ 成立（见引理 5.6，条目 2）。

**引理 5.6** （$\widetilde{\alpha}_t^{\max}$和 $\alpha_t^{\max}$的关键性质）。 假设 $\psi_0 \le x_\psi$ 和 $\beta_0 \ge 1/2 - x_\beta$。我们有如下结论:

1. 令 $C_{5.6(1)} = c^{\downarrow}_{\max}/36$ 为正常数。则对任意 $T \le C_{5.6(1)} n$,

$$\Pr\left[\tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}} \le T \text{ and } \min\{\tau_\beta^-, \tau_\psi^+\} > T\right] \le T\exp\left(-\Omega\left(\frac{\widetilde{\alpha}_0^{\max} n}{T}\right)\right).$$

2. 假设 $\alpha_0^{\max} = \omega(\log n/\sqrt{n})$。令 $C_{5.6(2)} = \frac{c^{\uparrow}_{\max}}{6}\left(\frac{}{1+c^{\uparrow}_{\max}}\right)^2$ 为正常数。则对任意$T \le \frac{C_{5.6(2)}}{\alpha_0^{\max}}$，

$$\Pr\left[\tau^{\uparrow}_{\max} \le \min\{T, \tau_\beta^-\}\right] \le k\exp\left(-\Omega\left(\frac{\alpha_0^{\max} n}{T}\right)\right).$$

Fi首先，我们为引理5.6 （条目1）的证明引入以下关键引理 .

**引理 5.7**。 假设 $\psi_0 \le x_\psi$且 $\beta_0 \ge 1/2 - x_\beta$。令 $\tau^\uparrow$ =最大值$\{\tau^{\uparrow}$最大值 $\tau^{\uparrow}$⁀最大值$\}$。令 $C_{5.6(1)} = c^{\downarrow}$⁀最大值$/36$ 为引理 5.6 （条目 1）中定义的正常数。则对于任意 $T \le C_{5.6(1)} n$,

$$\Pr\left[\tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}} \le \min\{T, \tau^\uparrow, \tau^+_\psi, \tau^-_\beta\}\right] \le \exp\left(-\Omega\left(\frac{\widetilde{\alpha}_0^{\max} n}{T}\right)\right).$$

引理的证明 5.7. 设 $\tau^\uparrow$ =最大值$\{\tau^{\uparrow}$最大值 $\tau^{\uparrow}$⁀最大值$\}$和 $\tau$ =最小值$\{\tau^{\downarrow}$⁀最大值$\tau^\uparrow,\ \tau^-_\beta,\ \tau^+_\psi\}$。对于 $\tau > t-1$，引理 4.7 的第 1 项给出 如下结论

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\widetilde{\alpha}_t^{\max}] \ge \widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}\left(1 + \frac{\alpha_{t-1}^{\max} - \gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}{2(1-\beta_{t-1}) + \gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}\right) - \frac{\alpha_{t-1}^{\max}}{9n} \ge \widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max} - \frac{18\widetilde{\alpha}_0^{\max}}{n}.$$

注意，对于 $\tau^\uparrow > t-1$，我们有 $\alpha_{t-1}^{\max} \le (1 + c^{\uparrow}_{\max})\alpha_0^{\max} \le 2\widetilde{\alpha}_0^{\max}$或 $\alpha_{t-1}^{\max} \le (1 + c^{\uparrow}$⁀最大值$)$ $\widetilde{\alpha}_0^{\max}\beta_{t-1} \le 2\widetilde{\alpha}_0^{\max}$，因此无论哪种情况，只要 $\tau^\uparrow > t-1$， $\alpha_{t-1}^{\max} \le 2\widetilde{\alpha}_0^{\max}$ 就成立。

因此，令 $X_t = \widetilde{\alpha}_t^{\max}$和 $R = -\frac{18\widetilde{\alpha}_0^{\max}}{n}$ ~~$< 0$,~~ 我们有

$$\mathbf{1}_{\tau > t-1}\left(X_{t-1} + R - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[X_t]\right) = \mathbf{1}_{\tau > t-1}\left(\widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max} - \frac{18\widetilde{\alpha}_0^{\max}}{n} - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\widetilde{\alpha}_t^{\max}]\right) \le 0.$$

此外,

$$\mathbf{1}_{\tau > t-1}(X_{t-1} + R - X_t) \le \mathbf{1}_{\tau > t-1}\left(\widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}\left(1 + \frac{\alpha_{t-1}^{\max} - \gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}{2(1-\beta_{t-1}) + \gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}\right) - \frac{9\alpha_{t-1}^{\max}}{n} - \widetilde{\alpha}_t^{\max}\right)$$

满足单侧 $\left(O\left(\frac{1}{n}\right), O\left(\frac{\alpha_0^{\max}}{n}\right)\right)$-伯恩斯坦条件。注意，我们使用引理4.7（条目2）和引理3.7（条目 2 和3）。

应用引理3.11 （条目1），取 $I^- = (1 - c^{\downarrow}$⁀$\max)\widetilde{\alpha}_0^{\max}$、 $I^+ = (1 + c^{\uparrow}$⁀$\max)\widetilde{\alpha}_0^{\max}$和 $T \le C_{5.6(1)} n = \frac{c^{\downarrow}\text{⁀}\max}{36}$ ~~$n = \frac{X_0 - I^-}{-2R}$~~，可得

$$\Pr\left[\tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}} \le \min\{T, \tau^\uparrow, \tau^-_\beta, \tau^+_\psi\}\right] \le \exp\left(-\Omega\left(\frac{(\widetilde{\alpha}_0^{\max})^2}{\frac{\widetilde{\alpha}_0^{\max}}{n} T + \frac{\widetilde{\alpha}_0^{\max}}{n}}\right)\right) \le \exp\left(-\Omega\left(\frac{\widetilde{\alpha}_0^{\max} n}{T}\right)\right).$$

□

引理5.6 （条目1）的证明。对于 $s \ge 0$, 令 $\tau^{\downarrow}_s = \inf\{t \ge s :\ \widetilde{\alpha}_t^{\max} \le (1 - c^{\downarrow}$⁀$\max)\ \widetilde{\alpha}_s^{\max}\}$ 和$\tau^{\uparrow}_s = \inf\{t \ge s :\ \widetilde{\alpha}_t^{\max} \ge (1 + c^{\uparrow}$⁀$\max)\ \widetilde{\alpha}_s^{\max}\}$。应用引理A.7 （条目1），取 $\tau^* = \min\{\tau^-_\beta, \tau^+_\psi\}$ 和 $T \le C_{5.6(1)} n$，可得

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}} \le T \text{ and } \tau^* > T\right] &\le \sum_{s=0}^{T-1} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\widetilde{\alpha}_s^{\max} \ge \widetilde{\alpha}_0^{\max} \text{ and } \tau^* > s} \Pr_s\left[\tau^{\downarrow}_s \le \min\{T, \tau^{\uparrow}_s, \tau^*\}\right]\right] \\
&\le \sum_{s=0}^{T-1} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\widetilde{\alpha}_s^{\max} \ge \widetilde{\alpha}_0^{\max} \text{ and } \tau^* > s} \exp\left(-\Omega\left(\frac{\widetilde{\alpha}_s^{\max} n}{T}\right)\right)\right] \\
&\le T \exp\left(-\Omega\left(\frac{\widetilde{\alpha}_0^{\max} n}{T}\right)\right).
\end{aligned}$$

注意，我们在第二个不等式中应用引理5.7 。 □

引理的证明5.6(条目2)。令 $\tau = \min\{\tau^{\uparrow}_{\max}, \tau^{-}_{\beta}\}$。对于 $\tau > T$，我们有

$$\begin{aligned}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\alpha_t(i)] - \alpha_{t-1}(i) &= \alpha_{t-1}(i)(\alpha_{t-1}(i) + 1 - 2\beta_{t-1}) \\ &\le \alpha^{\max}_{t-1}\left(\alpha^{\max}_{t-1} + 2x_\beta\right) \\ &\le 3(1 + c^{\uparrow}_{\max})^2(\alpha^{\max}_0)^2. \end{aligned} \tag{13}$$

注意，在第二个不等式中，我们使用了关于 $\alpha^{\max}_0 = \bar{\omega}(\log n/\sqrt{n})$ 和 $x_\beta = o(\log n/\sqrt{n})$ 的假设。

因此，令 $X_t = -\alpha_t(i)$ 和 $R = -3(1 + c^{\uparrow}_{\max})^2(\alpha^{\max}_0)^2 < 0$，我们有

$$\mathbf{1}_{\tau > t-1}\left(X_{t-1} + R - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[X_t]\right) = \mathbf{1}_{\tau > t-1}\left(\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\alpha_t(i)] - \alpha_{t-1}(i) - 3(1 + c^{\uparrow}_{\max})^2(\alpha^{\max}_0)^2\right) \le 0$$

且 $\mathbf{1}_{\tau > t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[X_t] - X_t) = \mathbf{1}_{\tau > t-1}(\alpha_t(i) - \mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(i)])$ 满足 $(1/n, O(\alpha^{\max}_0/n))$-伯恩斯坦条件。注意，我们使用了引理 4.2 (第3项) 和引理 3.7 （第2 项和3）。

令 $\tau_i = \inf\{t \ge 0 : \alpha_t(i) \ge (1 + c^{\uparrow}_{\max})\alpha^{\max}_0\} = \inf\{t \ge 0 : X_t \le -(1 + c^{\uparrow}_{\max})\alpha^{\max}_0\}$。对于 $T \le \frac{C_{5.6(2)}}{\alpha^{\max}_0} = \frac{c^{\uparrow}_{\max}}{6(1+c^{\uparrow}_{\max})^2\alpha^{\max}_0} = \frac{-I}{-2R}$，应用引理 3.11 （第 1 项），并令 $I^{-} = -(1 + c^{\uparrow}_{\max})\alpha^{\max}_0$，我们有

$$\Pr\left[\tau_i \le \min\{T, \tau\}\right] \le \exp\left(-\Omega\left(\frac{(\alpha^{\max}_0)^2}{\frac{\alpha^{\max}_0}{n}T + \frac{\alpha^{\max}_0}{n}}\right)\right) \le \exp\left(-\Omega\left(\frac{\alpha^{\max}_0 n}{T}\right)\right).$$

因此，应用并集界，

$$\Pr\left[\tau^{\uparrow}_{\max} \le \min\{T, \tau\}\right] \le \Pr\left[\exists i \in [k] : \tau_i \le \min\{T, \tau\}\right] \le k\exp\left(-\Omega\left(\frac{\alpha^{\max}_0 n}{T}\right)\right).$$

□

最后，作为迄今讨论的自然推论，我们引入以下有用的引理。

**Lemma 5.8.** 设 $\beta_0 \ge 1/2 - x_\beta$ 和 $\psi_0 \le x_\psi$。那么，对于任意 $T \le C_{5.6(1)}n$，

$$\Pr\left[\min\{\tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}, \tau^{-}_{\beta}, \tau^{+}_{\psi}\} \le T\right] \le T\exp\left(-\Omega\left(\frac{n\widetilde{\alpha}^{\max}_0}{T}\right)\right) + T\exp\left(-\Omega(nx^2_\psi)\right).$$

证明。 首先，我们注意到，对于任意停时 $\tau_1$ 和 $\tau_2$，有

$$\begin{aligned}\Pr\left[\min\{\tau_1, \tau_2\} \le T\right] &\le \Pr\left[\{\tau_1 \le T \text{ or } \tau_2 \le T\} \text{ and } \tau_2 > T\right] + \Pr\left[\tau_2 \le T\right] \\ &= \Pr\left[\tau_1 \le T \text{ and } \tau_2 > T\right] + \Pr\left[\tau_2 \le T\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

因此，结合引理 5.6 (第 1 项)、引理 5.2 和引理 5.3，

$$\begin{aligned}&\Pr\left[\min\{\tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}, \tau^{-}_{\beta}, \tau^{+}_{\psi}\} \le T\right] \\ &\le \Pr\left[\tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}} \le T \text{ and } \min\{\tau^{-}_{\beta}, \tau^{+}_{\psi}\} > T\right] + \Pr\left[\tau^{-}_{\beta} \le T \text{ and } \tau^{+}_{\psi} > T\right] + \Pr\left[\tau^{+}_{\psi} \le T\right] \\ &\le T\exp\left(-\Omega\left(\frac{n\widetilde{\alpha}^{\max}_0}{T}\right)\right) + T\exp\left(-\Omega\left(nx^2_\beta\right)\right) + T\exp\left(-\Omega\left(nx^2_\psi\right)\right). \end{aligned}$$

□

## 5.5 两个意见之间差距的变化

对于两个意见 $i$, $j \in [k]$, 回顾 $\delta_t = \delta_t(i, j) = \alpha_t(i) - \alpha_t(j)$ 是时间 $t$时这两个意见之间的差距（定义4.1）。我们定义弱意见及其停时如下：

**定义 5.9** （弱意见）。 对于常数 $c_{\text{weak}} \in (0, 1/2)$ 以及一个意见 $i \in [k]$, 定义

$$\tau_i^{\text{weak}} := \inf\{t \geq 0 : \alpha_t(i) \leq (1 - c_{\text{weak}})\alpha_t^{\max}\}.$$

默认情况下，我们令 $c_{\text{weak}} = 0.1$。如果在时间 $t$ 时，意见 $i \in [k]$ 满足 $\alpha_t(i) \leq (1 - c_{\text{weak}})\alpha_t^{\max}$，则称其为弱意见。

本节的主要结果是以下两个引理。直观地说，它们表明，如果 $i$ 和 $j$ 都不是弱意见，那么：(i) 它们之间的差距 $\delta_t(i, j)$ 会在 $O$ 个（$\log n/\alpha_0^{\max}$）轮次内增长到至少 $\Omega(\sqrt{\log n/n})$（引理 5.10（第 1 项））；(ii) 如果初始差距 $\delta_0(i, j)$ 至少为 $\Omega(\sqrt{\log n/n})$，那么 $j$ 会在 $O$ 个（$\log n/\alpha_0^{\max}$）轮次内变为弱意见（引理 5.10（第 2 项））。

**引理 5.10** （两个非弱意见之一变为弱意见）。 令 $i, j \in [k]$ 为任意一对非弱意见。假设 $\beta_0 \geq 1/2 - x_\beta$, $\psi_0 \leq x_\psi$, 且 $\alpha_0^{\max} \geq \omega(\log n/\sqrt{n})$。我们有如下结论：

1. 令 $C$ 为任意正常数。那么，对于某个 $T = O(\log n/\alpha_0^{\max})$，有

$$\Pr\left[\min\left\{\tau_\delta^+\left(\sqrt{\frac{C\log n}{n}}\right), \tau_i^{\text{weak}}, \tau_j^{\text{weak}}\right\} > T \text{ or } \min\{\tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\} \leq T\right] \leq n^{-10}.$$

2. 假设 $\delta_0(i, j) \geq \sqrt{C\log n/n}$，其中常数 $C > 0$足够大。那么，对于某个$T = O(\log n/\alpha_0^{\max})$,

$$\Pr\left[\tau_j^{\text{weak}} > T \text{ or } \min\{\tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\} \leq T\right] \leq n^{-10}.$$

为此，我们首先证明，只要 $i$ 和 $j$ 均为非弱意见， $\delta_t$ 就会同时采用乘法与加法漂移。

**引理 5.11** （的乘法与加法漂移 $\delta_t$）。 令 $i, j \in [k]$ 为任意一对非弱意见。假设 $\psi_0 \leq x_\psi$, $\beta_0 \geq 1/2 - x_\beta$, 且 $\alpha_0^{\max} = \omega(\log n/\sqrt{n})$。令 $C_{5.6(2)} = \frac{c_{\max}^{\uparrow}}{6}(1+c_{\max}^{\uparrow})^2$为引理 5.6 （第2项）中定义的正常数。我们有如下结论：

1. 设 $\delta_0(i, j) \geq 0$。令 $c_\delta^{\uparrow} = C_{5.6(2)}(1-c^{\downarrow}_{\text{最大值}})(1-2c_{\text{weak}})(1-c_\delta^{\downarrow})\,12$。那么，

$$\Pr\left[\min\{\tau_\delta^{\uparrow}, \tau_j^{\text{weak}}, \tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\} > \frac{C_{5.6(2)}}{\alpha_0^{\max}}\right] \leq \exp\left(-\Omega\left(n\delta_0(i, j)^2\right)\right) + n\exp\left(-\Omega\left(n(\alpha_0^{\max})^2\right)\right).$$

2. 令 $x_\delta = c_\delta^+/\sqrt{n}$对于 $c_\delta^+ = \frac{c_{\max}^{\uparrow}(1-2c_{\text{weak}})^2(1-c^{\downarrow}_{\text{最大值}})}{6\cdot 96\cdot 64(1+c_{\max}^{\uparrow})^2(1-c_{\text{weak}})}$。那么，存在一个正常数$c_* \in (0, 1)$ 使得

$$\Pr\left[\min\left\{\tau_\delta^+, \tau_i^{\text{weak}}, \tau_j^{\text{weak}}, \tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\right\} > \frac{C_{5.6(2)}}{\alpha_0^{\max}}\right] \leq 1 - c_*.$$

**乘法漂移：引理的证明 5.11 (条目 1)。**本节旨在证明$\delta_t$ 在 $O(1/\alpha_0^{\max})$轮次内增长一个常数倍。

引理的证明 *5.11*(第 *1* 项)。令 $\tau^* = \min\{\tau_{\text{弱}j},\ \tau^{\uparrow}_{\max}\ \tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}\ \tau^{-}_{\beta},\ \tau^{+}_{\psi}\}$ 且 $\tau = \min\{\tau^{\uparrow}_{\delta}, \tau^{\downarrow}_{\delta}, \tau^*\}$。对于 $\tau > t-1$，我们有

$$\begin{aligned}
&\beta_{t-1}\widetilde{\alpha}^{\max}_{t-1}\left(\frac{\alpha_{t-1}(i)+\alpha_{t-1}(j)}{\alpha^{\max}_{t-1}} - \frac{\gamma_{t-1}}{\beta_{t-1}\alpha^{\max}_{t-1}} - \frac{\psi_{t-1}}{\beta^2_{t-1}\widetilde{\alpha}^{\max}_{t-1}}\right)\\
&\geq \frac{1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}}{3}\widetilde{\alpha}^{\max}_0\left(2(1-c_{\text{weak}}) - 1 - \underbrace{\frac{x_\psi}{(1/3)^2(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})\widetilde{\alpha}^{\max}_0}}_{o(1)}\right)\\
&\geq \frac{(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})(1-2c_{\text{weak}})}{6}\alpha^{\max}_0. \qquad (15)
\end{aligned}$$

注意，$\gamma_{t-1} \leq \beta_{t-1}\alpha^{\max}_{t-1}$ 且 $\widetilde{\alpha}^{\max}_0 \geq \alpha^{\max}_0 = \omega(\sqrt{\log n/n})$。因此，对于 $\tau > t-1$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\delta_t] &= \delta_{t-1} + \delta_{t-1}\beta_{t-1}\widetilde{\alpha}^{\max}_{t-1}\left(\frac{\alpha_{t-1}(i)+\alpha_{t-1}(j)}{\alpha^{\max}_{t-1}} - \frac{\gamma_{t-1}}{\beta_{t-1}\alpha^{\max}_{t-1}} - \frac{\psi_{t-1}}{\beta^2_{t-1}\widetilde{\alpha}^{\max}_{t-1}}\right)\\
&\geq \delta_{t-1} + \frac{(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})(1-c^{\downarrow}_{\delta})(1-2c_{\text{weak}})}{6}\delta_0\alpha^{\max}_0.
\end{aligned}$$

注意，我们使用引理4.4(第 1 项)。

令 $X_t = \delta_t$ 且 $R = \frac{(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})(1-c^{\downarrow}_{\delta})(1-2c_{\text{weak}})}{6}\delta_0\alpha^{\max}_0 > 0$，我们有

$$\mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(X_{t-1} + R - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[X_t]\right) = \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\delta_{t-1} + R - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\delta_t]\right) \leq 0$$

且 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[X_t] - X_t) = \mathbf{1}_{\tau>t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[\delta_t] - \delta_t)$ 满足 $(O(1/n)\ O(\alpha^{\max}_0/n))$-伯恩斯坦条件。注意，我们使用引理 4.4 (第3项）以及引理 3.7 (第 2 项和第 3项）。

回顾 $c^{\uparrow}_{\delta} = C_{5.6(2)}\frac{(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})(1-2c_{\text{weak}})(1-c^{\downarrow}_{\delta})}{12}$。令 $I^+ = (1+c)\delta_0$ 和 $I^- = (1-c)\delta_0$。令 $T = \frac{C_{5.6(2)}}{\alpha^{\max}_0}$。我们有 $T = \frac{1}{12c^{\uparrow}_{\delta}}\frac{(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})(1-2c_{\text{weak}})(1-c^{\downarrow}_{\delta})}{\alpha^{\max}_0} = \frac{1}{2}(I^+ - \delta_0)\,R$。因此，我们可以应用引理 3.11（条目 2），得到

$$\Pr\left[\min\{\tau^{\uparrow}_{\delta}, \tau^*\} > T\right] \leq \exp\left(-\Omega\left(n\delta_0^2\right)\right). \qquad (16)$$

应用引理 5.6(条目 2)，我们有

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\min\{\tau^{\uparrow}_{\delta}, \tau^{\text{weak}}_j, \tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}, \tau^{+}_{\psi}\} > T \text{ and } \tau^{-}_{\beta} > T\right]\\
&\leq \underbrace{\Pr\left[\min\{\tau^{\uparrow}_{\delta}, \tau^{\text{weak}}_j, \tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}, \tau^{+}_{\psi}\} > T \text{ and } \tau^{-}_{\beta} > T \text{ and } \tau^{\uparrow}_{\max} > T\right]}_{\text{指数}\left(-\Omega\left(n\delta_0^2\right)\right)\ (16)} + \underbrace{\Pr\left[\tau^{\uparrow}_{\max} \leq T \text{ and } \tau^{-}_{\beta} > T\right]}_{\textit{Lemma 5.6(Item 2)}}\\
&\leq \text{指数}\left(-\Omega\left(n\delta_0^2\right)\right) + n\,\text{指数}\left(-\Omega(n(\alpha^{\max}_0)^2)\right).
\end{aligned}$$

□

**加性漂移：引理 5.11 （项目 2）。** 接下来，我们证明 $|\delta_t|$ 至少以 $\Omega(1/\sqrt{n})$ 的速度增长，并在 $O(1/\alpha_0^{\max})$ 轮次内以常数概率实现。为证明引理5.11 （项目2），我们首先证明以下引理。

**引理 5.12。** 设 $\beta_0 \geq 1/2 - x_\beta$、$\psi_0 \leq x_\psi$ 和 $\alpha_0^{\max} \geq \omega(\log n/\sqrt{n})$。令 $\tau = \min\{\tau_\delta^+, \tau_{\text{弱}i}、\tau_{\text{弱}j}、\tau^{\downarrow}_{\max}、\tau_\beta^-、\tau_\psi^+\}$。令 $C_{5.12} = \frac{(1-2c_{\text{weak}})^2(1-c^{\downarrow}_{\max})}{96(1-c_{\text{weak}})}$。那么，我们有

$$\mathbb{E}[\tau] \leq \frac{n\,\mathbb{E}[\delta_\tau^2]}{C_{5.12}\alpha_0^{\max}}.$$

证明。 首先，对于 $\min\{\tau_{\text{弱}i}, \tau_j^{\text{weak}}\} > t-1$，我们注意到

$$\alpha_{t-1}^{\max} \leq \frac{\min\{\alpha_{t-1}(i), \alpha_{t-1}(j)\}}{1-c_{\text{weak}}} \leq \frac{1}{2(1-c_{\text{weak}})} \tag{17}$$

成立。因此，对于 $\min\{\tau_\beta^-, \tau_\psi^+, \tau_{\text{弱}i}, \tau_j^{\text{weak}}\} > t-1$，我们有

$$1-\beta_{t-1} = \frac{1}{2} - \frac{\psi_{t-1}+\gamma_{t-1}}{2\beta_{t-1}} \geq \frac{1}{2} - 6x_\psi - \frac{\alpha_{t-1}^{\max}}{2} \geq \frac{1}{2} - 6x_\psi - \frac{1}{4(1-c_{\text{weak}})} \geq \frac{1-2c_{\text{weak}}}{8(1-c_{\text{weak}})}.$$

注意，我们使用了假设 $x_\psi = o(1)$。此外，对于 $\min\{\tau_\beta^-, \tau_\psi^+, \tau_i^{\text{weak}}, \tau_j^{\text{weak}}\} > t-1$，

$$\begin{aligned}
&\alpha_{t-1}(i) + \alpha_{t-1}(j) + 1 - 2\beta_{t-1} \\
&= \beta_{t-1}\widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}\left(\frac{\alpha_{t-1}(i)+\alpha_{t-1}(j)}{\alpha_{t-1}^{\max}} - \frac{\gamma_{t-1}}{\beta_{t-1}\alpha_{t-1}^{\max}} - \frac{\psi_{t-1}}{\beta_{t-1}^2\widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}}\right) \\
&\geq \frac{1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}}{3}\widetilde{\alpha}_0^{\max}\left(2(1-c_{\text{weak}}) - 1 - \underbrace{\frac{x_\psi}{(1/3)^2(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})\widetilde{\alpha}_0^{\max}}}_{o(1)}\right) \geq 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

注意，$\gamma_{t-1} \leq \beta_{t-1}\alpha_{t-1}^{\max}$ 和 $\widetilde{\alpha}_0^{\max} \geq \alpha_0^{\max} = \omega\left(\sqrt{\text{对数}\, n/n}\right)$。

设 $\tau = \text{最小}\{\tau_\delta^+, \tau_{\text{弱}i}, \tau_{\text{弱}j}, \tau^{\downarrow}_{\text{最大}}, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\}$。对于 $t-1 < \tau$，

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\delta_t^2] &= \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\delta_t]^2 + \mathop{\mathbf{Var}}_{t-1}[\delta_t] \\
&\geq \delta_{t-1}^2(1+\alpha_{t-1}(i)+\alpha_{t-1}(j)+1-2\beta_{t-1})^2 + \frac{(1-\beta_{t-1})^2}{n}(\alpha_{t-1}(i)+\alpha_{t-1}(j)) \\
&\geq \delta_{t-1}^2 + \frac{(1-2c_{\text{weak}})^2}{32(1-c_{\text{weak}})n}\alpha_{t-1}^{\max} \\
&\geq \delta_{t-1}^2 + \frac{(1-2c_{\text{weak}})^2(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})}{96(1-c_{\text{weak}})} \cdot \frac{\alpha_0^{\max}}{n}.
\end{aligned}$$

注意，我们使用引理4.4（条目 1 和2）。

令 $R = C_{5.12}\frac{\alpha_0^{\max}}{n}$、$X_t = \delta_t^2 - Rt$ 和 $Y_t = X_{t\wedge\tau}$。则有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[Y_t - Y_{t-1}] = \mathbf{1}_{\tau>t-1}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[X_t - X_{t-1}] = \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\delta_t^2] - Rt - \delta_{t-1}^2 + R(t-1)\right) \geq 0,$$

即，$(Y_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ 是一个次鞅。根据定理A.4，可得

$$\mathbb{E}[Y_\tau] \geq \mathbb{E}[Y_0] = \delta_0^2 \geq 0$$

and

$$\mathbb{E}[Y_\tau] = \mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[\delta_\tau^2] - R\,\mathbb{E}[\tau].$$

因此，我们得到 $\mathbb{E}[\tau] \leq \frac{\mathbb{E}[\delta_\tau^2]}{R}$。 □

**引理 5.13**。令 $c \in (0,1)$ 为任意常数，并令 $x_\delta = c/\sqrt{n}$。令 $C_{5.13}$ 为充分大的正常数。假设 $\psi_0 \leq x_\psi$ 且 $\beta_0 \geq 1/2 - x_\beta$。假设 $\alpha_0^{\max} = \omega(\log n/\sqrt{n})$ 且$\alpha_0^{\max} \leq 16c^2/C_{5.13}$。令 $\tau = \min\{\tau_\delta^+, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+, \tau^{\downarrow}_{\max}, \tau_i^{\text{weak}}, \tau_j^{\text{weak}}, \tau^{\uparrow}_{\max}\}$。那么，

$$\mathbb{E}[\delta_\tau^2] \leq 16x_\delta^2 + \frac{C_{5.12}\alpha_0^{\max}\,\mathbb{E}[\tau]}{2n},$$

其中 $C_{5.12}$ 是引理5.12中定义的常数。

证明。记 $L = 16c^2/n$ 和 $R = C_{5.12}\alpha_0^{\max}/n$。我们有

$$\mathbb{E}[\delta_\tau^2] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\delta_\tau^2 \leq L}] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\delta_\tau^2 > L}] \leq L + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\delta_\tau^2 > L}]$$

and

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\delta_\tau^2>L}] = \sum_{t=1}^{\infty}\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\tau=t}\delta_t^2\mathbf{1}_{\delta_t^2>L}] \leq \sum_{t=1}^{\infty}\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\tau>t-1}\delta_t^2\mathbf{1}_{\delta_t^2>L}] = \sum_{t=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\tau>t-1}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\delta_t^2\mathbf{1}_{\delta_t^2>L}]\right].$$

接下来，我们证明

$$\mathbf{1}_{\tau>t-1}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\delta_t^2\mathbf{1}_{\delta_t^2>L}] \leq \frac{R}{2}. \tag{19}$$

注意，通过证明这个不等式，我们有

$$\mathbb{E}[\delta_\tau^2] \leq L + \frac{R}{2}\sum_{t=1}^{\infty}\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\tau>t-1}] = L + \frac{R}{2}\,\mathbb{E}[\tau],$$

这就证明了该结论。

首先，我们观察到

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\delta_t^2\mathbf{1}_{\delta_t^2>L}] = \int_0^1 \mathop{\Pr}_{t-1}[\delta_t^2\mathbf{1}_{\delta_t^2>L} > y]dy = \int_0^1 \mathop{\Pr}_{t-1}[\delta_t^2 > (y\vee L)]dy = \int_0^1 \mathop{\Pr}_{t-1}\left[|\delta_t| > \sqrt{y\vee L}\right]dy$$

成立。对于 $\tau_\delta^+ > t-1$，我们有

$$\left|\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\delta_t]\right| = |\delta_{t-1}(\alpha_{t-1}(i) + \alpha_{t-1}(j) + 2(1-\beta_{t-1}))| \leq 2|\delta_{t-1}| \leq 2x_\delta \leq \frac{\sqrt{L}}{2} \leq \frac{\sqrt{y\vee L}}{2}.$$

因此，对于 $\tau > t-1$，我们有

$$\begin{aligned}
\Pr_{t-1}\left[|\delta_t| > \sqrt{y \vee L}\right] &\le \Pr_{t-1}\left[\left|\delta_t - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\delta_t]\right| + \frac{\sqrt{y \vee L}}{2} > \sqrt{y \vee L}\right] \\
&\le 2\exp\left(-\frac{(y \vee L)/4}{\frac{2(\alpha_{t-1}(i)+\alpha_{t-1}(j))}{n} + \frac{\sqrt{y \vee L}}{3n}}\right) \\
&\le 2\exp\left(-\frac{(y \vee L)n/4}{4(1+c^{\uparrow}_{\max})\alpha_0^{\max} + \sqrt{y \vee L}/3}\right) \\
&\le 2\exp\left(-\frac{(y \vee L)n}{32(1+c^{\uparrow}_{\max})\alpha_0^{\max}}\right) + 2\exp\left(-\frac{3\sqrt{y \vee L}n}{8}\right).
\end{aligned}$$

注意，以轮次 $t-1$ 为条件的随机变量 $\delta_t - \mathbb{E}_{t-1}[\delta_t]$ 满足 $\left(\frac{2}{n}, {}^{2}(\alpha_{t-1}(i)+\alpha_{t-1}\ j\right)())$ - Bernstein条件。

于是，

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \exp\left(-\frac{3n}{8}\sqrt{y \vee L}\right)dy &= L\exp\left(-\frac{3n}{8}\sqrt{L}\right) + \int_L^1 \exp\left(-\frac{3n}{8}\sqrt{y}\right)dy \\
&\le L\exp\left(-\frac{3n}{8}\sqrt{L}\right) + 2\frac{(3/8)n\sqrt{L}+1}{(3/8)^2 n^2}\exp\left(-\frac{3n}{8}\sqrt{L}\right) \\
&\le \exp\left(-\Omega(\sqrt{n})\right).
\end{aligned}$$

注意，$\int \exp(-a\sqrt{x})dx = -{}^{2}\exp(-a\sqrt{x})(a\sqrt{x}+1)-a^2$。此外，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \exp\left(-\frac{(y \vee L)n}{32(1+c^{\uparrow}_{\max})\alpha_0^{\max}}\right)dy \\
&= L\exp\left(-\frac{Ln}{32(1+c^{\uparrow}_{\max})\alpha_0^{\max}}\right) + \int_L^1 \exp\left(-\frac{yn}{32(1+c^{\uparrow}_{\max})\alpha_0^{\max}}\right)dy \\
&\le L\exp\left(-\frac{Ln}{32(1+c^{\uparrow}_{\max})\alpha_0^{\max}}\right) + \frac{32(1+c^{\uparrow}_{\max})\alpha_0^{\max}}{n}\exp\left(-\frac{Ln}{32(1+c^{\uparrow}_{\max})\alpha_0^{\max}}\right) \\
&\le 2L\exp\left(-\frac{Ln}{32(1+c^{\uparrow}_{\max})\alpha_0^{\max}}\right).
\end{aligned}$$

注意，$\int \exp(-ax)dx = -\frac{\exp(-ax)}{a}$。最后一个不等式由 $\frac{\alpha_0^{\max}}{n} \le \frac{16c^2}{nC_{5.13}}$ 对充分大的 $C_{5.13}$ 成立。

因此，对于 $\tau > t-1$，

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\delta_t^2 \mathbf{1}_{\delta_t^2 > L}] &\le R\left(\frac{n}{C_{5.12}\alpha_0^{\max}}\exp\left(-\Omega(\sqrt{n})\right) + \frac{64c^2}{C_{5.12}\alpha_0^{\max}}\exp\left(-\frac{c^2}{2(1+c^{\uparrow}_{\max})\alpha_0^{\max}}\right)\right) \\
&\le R/2
\end{aligned}$$

成立，因为当 $C_{5.13}$ 足够大时，$\frac{c^2}{\alpha_0^{\max}} \ge \frac{C_{5.13}}{16}$ 成立。 □

**引理 5.14**。 设 $c_1, c_2 \in (0,1)$ 为任意常数，且设 $x_\delta = c_1/\sqrt{n}$。假设 $\psi_0 \le \bar{x}_\psi, \beta_0 \ge 1/2 - x_\beta$, 最小值$\{\alpha_0(i)\ \alpha_0(j)\} \ge (1-c_{\text{weak}})\alpha_0^{\max}$和 $\alpha_0^{\max} \ge c_2$ 成立。那么，

$$\Pr\left[\tau_\delta^+ > 1\right] \le 1 - c_*$$

对于某个 $c_* \in (0,1)$，它仅取决于 $c_1$, $c_2$ 和 $C_{5.12} = (1-2c_{\text{weak}})^2(1-c^{\downarrow}_{\text{最大值}})\ 96(1-c_{\text{weak}})$。

证明。由于 $n\delta_1 = \sum_{v\in V}(\mathbf{1}_{\text{opn}_1(v)=i} - \mathbf{1}_{\text{opn}_1(v)=j})$ 是 $n$ 个独立随机变量之和，根据中心极限定理，$\lim_{n\to\infty}\Pr\left[\frac{n\delta_1 - \mathbb{E}[n\delta_1]}{\sqrt{\mathbf{Var}[n\delta_1]}} \le x\right] = \Phi(x)$ 成立。这里，$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$ 是标准正态分布的累积分布函数。注意到

$$|\delta_1| \ge |\delta_1 - \mathbb{E}[\delta_1]| - |\mathbb{E}[\delta_1]| = |\delta_1 - \mathbb{E}[\delta_1]| - |\delta_0(\alpha_1(i) + \alpha_1(j) + 2(1-\beta_0))| \ge |\delta_1 - \mathbb{E}[\delta_1]| - 2x_\delta$$

and

$$\mathbf{Var}[\delta_1] \ge \frac{C_{5.12}\alpha_0^{\max}}{n} \ge \frac{C_{5.12}c_2}{n}$$

成立，我们得到

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\tau_\delta^+ > 1\right] &= \Pr\left[\tau_\delta^+ > 1 \text{ and } |\delta_1| < x_\delta\right] \\
&\le \Pr\left[|\delta_1 - \mathbb{E}[\delta_1]| < 3x_\delta \text{ and } \tau_\delta^+ > 1\right] \\
&\le \Pr\left[\left|\frac{\delta_1 - \mathbb{E}[\delta_1]}{\sqrt{\mathbf{Var}[\delta_1]}}\right| < \frac{3x_\delta}{\sqrt{\mathbf{Var}[\delta_1]}}\right] \\
&\le \Pr\left[\left|\frac{n\delta_1 - \mathbb{E}[n\delta_1]}{\sqrt{\mathbf{Var}[n\delta_1]}}\right| < 3\sqrt{\frac{c_1^2}{C_{5.12}c_2}}\right] \\
&\le 1 - 2\Psi\left(-3\sqrt{\frac{c_1^2}{C_{5.12}c_2}}\right) - o(1) \\
&\le 1 - c_*.
\end{aligned}$$

□

引理的证明 *5.11* （第 *2* 项）。注意，$(c_\delta^+)^2 = C_{5.6(2)}\frac{C_{5.12}}{64}$根据定义成立。首先，考虑 $\alpha_0^{\max} \ge 16(c_\delta^+)^2/C_{5.13}$ 的情况。为方便起见，令 $\tau =$最小值$\{\tau_\delta^+, \tau_{\bar{\beta}}, \tau_\psi^+, \tau^{\downarrow}_{\text{最大值}}\ \tau_{\text{弱}i}, \tau_{\text{弱}j}, \tau^{\uparrow}_{\text{最大值}}\}$。在这种情况下，结合引理 5.12 和 5.13，可得

$$\mathbb{E}[\tau] \le \frac{n}{C_{5.12}\alpha_0^{\max}}\left(\frac{16(c_\delta^+)^2}{n} + \frac{C_{5.12}\alpha_0^{\max}}{2n}\mathbb{E}[\tau]\right) = \frac{16(c_\delta^+)^2}{C_{5.12}\alpha_0^{\max}} + \frac{\mathbb{E}[\tau]}{2},$$

即，$\mathbb{E}[\tau] \le \frac{32}{C_{5.12}}(c_\delta^+)^2\cdot\frac{1}{\alpha_0^{\max}} = \frac{C_{5.6(2)}}{2\alpha_0^{\max}}$。因此，由马尔可夫不等式可得

$$\Pr\left[\tau > \frac{C_{5.6(2)}}{2\alpha_0^{\max}}\right] \le \frac{1}{2}. \tag{20}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\min\{\tau_\delta^+, \tau_i^{\text{weak}}, \tau_j^{\text{weak}}, \tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}, \tau_\psi^+, \tau_\beta^-\} > T\right] \\
&\le \Pr\left[\tau > T\right] + \Pr\left[\tau_\beta^- > T \text{ and } \tau_{\max}^{\uparrow} \le T\right] \\
&\le \frac{1}{2} + n\exp\left(-\Omega(n(\alpha_0^{\max})^2)\right) \qquad \text{(by (20) and Lemma 5.6 (Item 2))} \\
&\le 1 - c_*.
\end{aligned}$$

其次，考虑 $\alpha_0^{\max} \le 16(c_\delta^+)^2/C_{5.13}$ 的情况。在这种情况下，我们有

$$\Pr\left[\tau_\delta^+ > 1\right] \le 1 - c_*$$

根据引理 5.14。取 $C_{5.13} \ge 16(c_\delta^+)^2/C_{5.6(2)}$，$\frac{C_{5.6(2)}}{\alpha_0^{\max}} \ge \frac{C_{5.6(2)}}{16}\frac{C_{5.13}}{(c_\delta^+)^2} \ge 1$，即可得到所需结论。

□

**两个非弱意见之一变为弱意见：引理的证明 5.10。** 现在，我们可以证明引理5.10 (第 1 项和第 2项)。为此，我们援引已知的 [DGMSS11]漂移分析结果。具体而言，我们使用引理 A.6，这是对 [SS25]的一个修改版本。

引理的证明 *5.10* (第 *1*项)。我们对 A.6 引理应用于 $Z_t = \text{opn}_t$，$\varphi(Z_t) = \sqrt{n} \cdot |\delta_t(i, j)|$，

$$\tau = \min\left\{\tau_i^{\text{weak}}, \tau_j^{\text{weak}}, \tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\right\},$$

$c_\varphi^{\uparrow} = c_\delta^{\uparrow}$、$x_0 = c_\delta^+$ 和 $x^* = \sqrt{C \log n}$。定义

$$\tau^{\uparrow} = \begin{cases} \tau_\delta^{\uparrow}(i,j) & \text{if } \delta_0(i,j) \ge 0, \\ \tau_\delta^{\uparrow}(j,i) & \text{if } \delta_0(j,i) > 0 \text{ (i.e., } \delta_0(i,j) < 0) \end{cases},$$

其中 $\tau_\delta^{\uparrow}(i, j) = \tau_\delta^{\uparrow} = \inf\{t \ge 0 : \delta_t(i, j) \ge (1 + c_\delta^{\uparrow})\delta_0(i, j)\}$。那么，根据这些设定，我们有

$$\begin{aligned}
\tau_\varphi^+(x_0) &= \inf\{t \ge 0 : \sqrt{n}|\delta_t| \ge c_\delta^+\} = \tau_\delta^+, \\
\tau_\varphi^{\uparrow} &= \inf\{t \ge 0 : \sqrt{n}|\delta_t| \ge (1 + c_\delta^{\uparrow})\sqrt{n}|\delta_0|\} \le \tau^{\uparrow}.
\end{aligned}$$

根据引理5.11 (条目 2)，我们有

$$\Pr\left[\min\left\{\tau_\varphi^+(x_0), \tau\right\} > \frac{C_{5.6(2)}}{\alpha_0^{\max}}\right] \le 1 - c_*$$

对于某个常数 $c_* > 0$，即引理 A.6 的第一个条件对 $C_1 = c_*$成立。注意，如果$\beta_0 < \frac{1}{2} - x_\beta$或 $\psi_0 > -x_\psi$或 $\alpha_0^{\max} \le O(\sqrt{\log n/n})$，那么 $\tau = 0$。接下来，由引理 5.11 （第 1项），

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\min\{\tau_\varphi^{\uparrow}, \tau\} > \frac{C_{5.6(2)}}{\alpha_0^{\max}}\right] &\le \Pr\left[\min\{\tau^{\uparrow}, \tau\} > \frac{C_{5.6(2)}}{\alpha_0^{\max}}\right] \\
&\le \exp\left(-\Omega\left(n\delta_0(i,j)^2\right)\right) + n\exp\left(-\Omega\left(n(\alpha_0^{\max})^2\right)\right) \\
&\le \exp\left(-\Omega\left(\varphi(Z_0)^2\right)\right)
\end{aligned}$$

对 $\delta_0(i,j) \le C\sqrt{\log n/n}$ 成立，即引理 A.6 的第二个条件对某个正常数 $C_2$ 成立。注意，根据关于 $\alpha_0^{\max} = \omega(\sqrt{\log n/n})$ 的假设，$n\exp\left(-\Omega\left(n(\alpha_0^{\max})^2\right)\right) \le n^{-\omega(1)} \le \exp\left(-\Omega\left(n\delta_0(i,j)^2\right)\right)$。注意，如果 $\beta_0 < \frac{1}{2} - x_\beta$ 或 $\psi_0 > x_\psi$ 或 $\alpha_0^{\max} \le O(\sqrt{\log n/n})$，那么 $\tau = 0$。

记 $\tau^{\text{weak}} = \min\{\tau_{\text{弱}i},\ \tau_{\text{弱}j}\}$ 与 $\tau_{ini} = \min\{\tau^{\downarrow}_{\max}{}^{-}_{\beta},\ \tau^{+}_{\psi}\}$。由引理 A.6 与 5.8 结合 $\varepsilon = n^{-30}$，对某个 $T' = O(\log n/\alpha_0^{\max})$，

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left[\min\{\tau_\delta^+(\sqrt{C\log n/n}), \tau^{\text{weak}}\} > T' \text{ or } \tau_{ini} \le T'\right] \\
&\le \Pr\left[\left\{\min\{\tau_\varphi^+(x_*), \tau^{\text{weak}}\} > T' \text{ or } \tau_{ini} \le T'\right\} \text{ and } \tau_{ini} > T'\right] + \Pr\left[\tau_{ini} \le T'\right] \\
&\le \Pr\left[\min\{\tau_\varphi^+(x_*), \tau^{\text{weak}}, \tau_{ini}\} > T'\right] + \Pr\left[\tau_{ini} \le T'\right] \\
&\le n^{-20}.
\end{aligned}
$$

□

引理 5.10（第 2 项）的证明。设 $\tau^{\uparrow(s)} = \inf\{t \ge 0 :\ \delta_t \ge (1+c)^s\delta_0\}$。设 $\tau^* = \min\{\tau^{\downarrow}_{\max}{}^{-}_{\beta},\ \tau^{+}_{\psi}\}$。由定义，对某个 $\ell = \Theta(\log n)$，$\tau_{\text{弱}j} \le \tau^{\uparrow(\ell)}$ 成立。设 $T' = \frac{3C_{5.6(2)}(1-c^{\downarrow}_{\max})}{\alpha_0^{\max}}$。应用引理 A.7（第3项），我们有

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left[\min\{\tau_j^{\text{weak}}, \tau^*\} > \ell T'\right] \\
&\le \Pr\left[\min\{\tau^{\uparrow(\ell)}, \tau^*\} > \ell T'\right] \\
&\le \sum_{s=1}^{\ell} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\tau^* > \tau^{\uparrow(s-1)}} \Pr_{\tau^{\uparrow(s-1)}}\left[\min\{\tau^{\uparrow(s)}, \tau^*\} > \tau^{\uparrow(s-1)} + \frac{3C_{5.6(2)}}{(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})\alpha_0^{\max}}\right]\right] \\
&\le \sum_{s=1}^{\ell} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\tau^* > \tau^{\uparrow(s-1)}} \Pr_{\tau^{\uparrow(s-1)}}\left[\min\{\tau^{\uparrow(s)}, \tau^*\} > \tau^{\uparrow(s-1)} + \frac{C_{5.6(2)}}{\alpha^{\max}_{\tau^{\uparrow(s-1)}}}\right]\right] \\
&\le \ell\left(\exp\left(-\Omega(n\delta_0^2)\right) + n\exp\left(-\Omega\left(n(\alpha_0^{\max})^2\right)\right)\right).
\end{aligned}
$$

注意到 $\alpha^{\max}_{\tau^{\uparrow(s-1)}} \ge (1-c^{\downarrow}_{\max})\widetilde{\alpha}_0^{\max}/3 \ge (1-c^{\downarrow}_{\max})\alpha_0^{\max}/3 \ge \omega(\sqrt{\log n/n})$ 成立 s. □

## 5.6 唯一强势意见的出现

本节将说明，一旦某个意见变弱，在足够长的时间内，它就无法变得强——这是定义5.15中定义的关键概念。回顾 $\eta_t(j) = \delta^{(c_\eta)}\ t\ (I_t, j) = \alpha_t^{\max} - (1+c_\eta)\alpha_t(j)$以及根据定义 $\eta_t(j)$中定义的关于4.1 和 4.16的停时。我们定义唯一强势意见出现并持续的强意见及其停时，$\tau^+_{us}$和 $\tau^-_{us}$:

**定义 5.15** (强意见)。我们称意见 $j \in [k]$ 在时间 $t$ 是强的，当且仅当 $\alpha_t(j) \ge (1 - c_{\text{strong}})\alpha_t^{\max}$。默认情况下，令 $c_{\text{strong}} = 0.05 < c_{\text{weak}} = 0.1$。

令 $c_\eta := \frac{c_{\text{strong}}}{1-c_{\text{strong}}}$。对于正参数 $x$，定义

$$
\tau^-_{us}(x) := \inf\left\{t \ge 0 : \min_{j \ne I_t} \eta_t(j) < x\right\} \quad and \quad \tau^+_{us}(x) := \inf\left\{t \ge 0 : \min_{j \ne I_t} \eta_t(j) \ge x\right\}.
$$

弱、强的概念与 $\eta_t(j)$ 的取值之间的基本关系如下:

1. 对于任意弱意见 $j$，都有 $\eta_t(j) \geq \frac{c_{\text{weak}}-c_{\text{strong}}}{1-c_{\text{strong}}}\alpha_t^{\max}$。

2. 当 $\eta_t(j) > 0$ 时，意见 $j$ 不是强意见。

总之，如果意见 $j$ 是弱的，那么 $\eta_t(j) = \Omega(\alpha_t^{\max}) > 0$ (见条目 1)；如果 $\eta_t(j) > 0$，那么$j$ 不是强意见（条目 2）。因此，如果 $\min_{j \neq I_t} \eta_t(j) \geq x$ （其中 $x > 0$），这意味着除 $I_t$ 之外的所有意见都不是强意见；也就是说，在时间 $t$， $I_t$ 是唯一强势意见。注意，条目 1 由 $\eta_t(j) = \alpha_t^{\max} - \frac{1}{1-c_{\text{strong}}}\alpha_t(j) \geq \alpha_t^{\max} - \frac{1-c_{\text{weak}}}{1-c_{\text{strong}}}\alpha_t^{\max}$ 得出，而条目 2 由不等式 $\frac{\alpha_t\, j}{\alpha_t^{\max}} < \frac{1}{1+c_\eta}$ $= 1 - c_{\text{strong}}()$ 得出。

本节将证明，以高概率，(i) 在 $O(\log n/\alpha_0^{\max})$ 轮次内恰好存在一个强意见（引理 5.16 的条目 1），并且 (ii) 所有非强意见都会在足够长的时间内保持非强状态（引理 5.16 的条目 2）。

**引理 5.16** （唯一强势意见引理）。 假设 $\psi_0 \leq x_\psi$、 $\beta_0 \geq 1/2 - x_\beta$ 和$\alpha_0^{\max} = \omega(\log n/\sqrt{n})$。那么，我们有如下结论：

*1.* 对于某个 $T = O(\log n/\alpha_0^{\max})$，有

$$\Pr\left[\tau_{us}^+(x_\eta) > T \text{ or } \min\{\tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\} \leq T\right] \leq O(n^{-10}).$$

*2.* 假设 $\eta_0(j) \geq x_\eta$ 对所有 $j \neq I_0$均成立。令 $C_{5.6(1)} = c_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}/36$ 为引理 *5.6* （第 *1* 项）中定义的正常数。那么，对于任意 $T \leq C_{5.6(1)}n$，有

$$\Pr\left[\min\{\tau_{us}^-(x_\eta/2), \tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\} \leq T\right] \leq n^{-10}.$$

证明引理 5.16 的关键引理如下，该引理表明，一旦 $\eta_t(j)$ 变大，它就会在足够长的时间内保持较大——也就是说，一旦某个意见变弱，它就无法在很长一段时间内变强。

**引理 5.17** （ $\eta_t(j)$ 的有界下降）。 假设 $\psi_0 \leq x_\psi$、 $\beta_0 \geq 1/2 - x_\beta$、 $\alpha_0^{\max} = \omega(\log n/\sqrt{n})$，且 $\eta_0(j) \geq x_\eta$。那么，对于任意 $T \geq 0$,

$$\Pr\left[\tau_\eta^-(x_\eta/2) \leq T \text{ and } \min\{\tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\} > T\right] \leq Tn^{-\omega(1)}.$$

**弱者不能变强：引理的证明5.17**。为了证明引理5.17，我们先证明以下引理：

引理 *5.18.* 设 $y = y(n)$ 和 $I = I(n)$ 为满足以下条件的正参数： $I = \omega(x_\beta)$、 $y = \omega(I)$ 和 $y = o(\log n/\sqrt{n})$。假设 $\beta_0 \geq 1/2 - x_\beta$, $\psi_0 \leq x_\psi$, $\alpha_0^{\max} \geq \omega(\log n/\sqrt{n})$ 和 $\eta_0(j) \in [y, y+I]$。那么，对于任意 $T \geq 24(1+c_\eta)\, 1-c_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}$ $\max$. $I\,(y-I)\alpha_0^{\max}$，有

$$\Pr\left[\tau_\eta^-(y-I) < \tau_\eta^+(y+2I) \text{ and } \min\{\tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}, \tau_{\max}^{\uparrow}, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\} > T\right] \leq n^{-\omega(1)}.$$

证明。令 $\tau^* = \min\{\tau^{\downarrow}_{\widetilde{\text{最大值}}}\tau^{\uparrow}_{\text{最大值}}\ \tau_\beta^-,\ \tau_\psi^+\}$ 并令 $\tau = \min\{\tau_\eta^+(y+2I)\,\tau_\eta^-(y-I)\ \tau^*\}$。对于 $t-1<\tau$，有

$$\begin{aligned}
&\alpha_{t-1}^{\max} + \alpha_{t-1}(j) + 1 - 2\beta_{t-1} \\
&= \alpha_{t-1}^{\max}\left(1 + \frac{\alpha_{t-1}^{\max} - \eta_{t-1}(j)}{(1+c_\eta)\alpha_{t-1}^{\max}} - \frac{\gamma_{t-1}}{\beta_{t-1}\alpha_{t-1}^{\max}} - \frac{\psi_{t-1}}{\beta_{t-1}^2\widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}}\right) \\
&\geq \frac{1}{3}(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})\widetilde{\alpha}_0^{\max}\left(\frac{1}{1+c_\eta} - \underbrace{\frac{y+2I}{(1+c_\eta)(1/3)(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})\widetilde{\alpha}_0^{\max}}}_{o(1)} - \underbrace{\frac{x_\psi}{(1/3)^2(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})\widetilde{\alpha}_0^{\max}}}_{o(1)}\right) \\
&\geq \frac{1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}}{6(1+c_\eta)}\cdot\alpha_0^{\max}. \qquad (21)
\end{aligned}$$

因此，对于 $t-1<\tau$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\eta_t(j)] &\geq \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\delta_t^{(c_\eta)}(I_{t-1},j)] \\
&\geq \delta_{t-1}^{(c_\eta)}(I_{t-1},j) + \delta_{t-1}^{(c_\eta)}(I_{t-1},j)(\alpha_{t-1}(I_{t-1}) + \alpha_{t-1}(j) + 1 - 2\beta_{t-1}) \\
&\geq \eta_{t-1}(j) + \frac{1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}}{6(1+c_\eta)}\cdot(y-I)\alpha_0^{\max}.
\end{aligned}$$

注意我们使用引理4.4（第1项）。

令 $X_t = \eta_t(j)$ 与 $R = \frac{1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}}{6(1+c_\eta)}(y-I)\alpha_0^{\max} > 0$，我们有 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_{t-1}+R-\mathbb{E}_{t-1}[X_t]) = \mathbf{1}_{\tau>t-1}(\eta_{t-1}(j)+R-\mathbb{E}_{t-1}[\eta_t(j)]) \leq 0$ 且

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_{t-1}+R-X_t) &= \mathbf{1}_{\tau>t-1}(\eta_{t-1}(j)+R-\eta_t(j)) \\
&\leq \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\delta_t^{(c_\eta)}(I_{t-1},j)] - \delta_t^{(c_\eta)}(I_{t-1},j)\right),
\end{aligned}$$

即，$\mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_{t-1}+R-X_t)$ 满足单侧（$O(1/n)$ $O(\alpha_0^{\max}/n)$)-伯恩斯坦条件。注意我们使用引理4.11 （第3项）以及引理3.7 （第2项与第3项）。

设 $I^- = y-I$，$I_*^- = y$，$I_*^+ = y+I$，以及 $I^+ = y+2I$。注意 $I^+ - I_*^+ = I_*^+ - I_*^- = I_*^- - I^- = I$。令 $T \geq \frac{24}{(1+c_\eta)\,1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}\,I\,(y-I)\alpha_0^{\max}} \geq \frac{2}{(I^+-X_0)\,R}$。应用引理3.11 （第2项），对于 $\eta_0(j) \in [I_*^-, I_*^+]$，我们有

$$\Pr\left[\tau_\eta^-(y-I) < \tau_\eta^+(y+2I) \text{ and } \tau^* > T\right] \leq \exp\left(-\Omega\left(\frac{I^2}{\frac{\alpha_0^{\max}}{n}T + \frac{I}{n}}\right)\right) \leq \exp\left(-\Omega(nI(y-I))\right).$$

□

接下来，我们证明以下引理，以保证 $\eta_t(j)$在一步之内不会下降太多。

**引理 5.19**。设 $I = I(n)$ 为满足 $I = \omega(x_\psi)$ 和 $\tau_\eta^{jump} := $ 下确界$\{t \geq 0 :\ \eta_t(j) \leq \eta_{t-1}(j) - I\}$ 的正参数。假设 $\beta_0 \geq 1/2 - x_\beta$ 和 $\psi_0 \leq x_\psi$。那么，对于任意 $T \geq 0$,

$$\Pr\left[\tau_\eta^{jump} \leq T \ \textit{and}\ \min\{\tau_\beta^-, \tau_\psi^+\} > T\right] \leq Tn^{-\omega(1)}.$$

证明。令 $\tau = \text{最小值}\{\tau_\beta^-, \tau_\psi^+\}$。对于 $t-1<\tau$，我们有 $2\beta_{t-1}-1 \le \alpha_{t-1}^{\max}+3x_\psi$。因此，对于 $t-1<\tau$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\eta_t(j)] &\ge \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\delta_t^{(c_\eta)}(I_{t-1}, j)\right] \\
&\ge \eta_{t-1}(j)\big(1+\alpha_{t-1}^{\max}+\alpha_{t-1}(j)+1-2\beta_{t-1}\big) \\
&\ge \eta_{t-1}(j)(1-3x_\psi) \\
&\ge \eta_{t-1}(j)-3x_\psi.
\end{aligned}$$

因此，

$$\mathbf{1}_{\tau>t-1}(\eta_{t-1}(j)-3x_\psi-\eta_t(j)) \le \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\delta_t^{(c_\eta)}(I_{t-1},j)\right]-\delta_t^{(c_\eta)}(I_{t-1},j)\right)$$

成立。根据引理 3.7（第2项和第3项）以及引理 4.4（第3项），随机变量 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}\Big(\mathbb{E}_{t-1}\left[\delta_t^{(c_\eta)}(I_{t-1},j)\right]-\delta_t^{(c_\eta)}(I_{t-1},j)\Big)$ 在给定轮次 $t-1$ 的条件下满足 $\left(\frac{4}{n},\frac{10}{n}\right)$-伯恩斯坦条件。根据引理 3.7 的第4项，$\mathbf{1}_{\tau>t-1}(\eta_{t-1}(j)-3x_\psi-\eta_t(j))$ 满足单侧 $\left(\frac{4}{n},\frac{10}{n}\right)$-伯恩斯坦条件。因此，

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{\tau>t-1}\Pr_{t-1}\left[\eta_t(j)\le\eta_{t-1}(j)-I\right] &= \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\mathbf{1}_{\tau>t-1}\mathbf{1}_{\eta_{t-1}(j)-3x_\psi-\eta_t(j)\ge I-3x_\psi}\right] \\
&= \Pr_{t-1}\left[\tau>t-1 \text{ and } \eta_{t-1}(j)-3x_\psi-\eta_t(j)\ge I-3x_\psi\right] \\
&= \Pr_{t-1}\left[\mathbf{1}_{\tau>t-1}(\eta_{t-1}(j)-3x_\psi-\eta_t(j))\ge I-3x_\psi\right] \\
&\le \exp\left(-\Omega\left(nI^2\right)\right) \\
&\le n^{-\omega(1)}.
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\tau_\eta^{jump}\le T \text{ and } \tau>T\right] &= \Pr\left[\exists t\le T:\eta_t(j)\le\eta_{t-1}(j)-I \text{ and } \tau>T\right] \\
&\le \sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\tau>t-1}\Pr_{t-1}\left[\eta_t(j)\le\eta_{t-1}(j)-I\right]\right] \\
&\le Tn^{-\omega(1)}.
\end{aligned}$$

□

引理 5.17 的证明。令 $y=y(n)$ 和 $I=I(n)$ 为满足以下条件的正参数：$I=\omega(x_\beta)$、$y=\omega(I)$ 以及 $y=o(\log n/\sqrt{n})$。令 $I^-=y-I$、$I_*^-=y$、$I_*^+=y+I$ 和 $I^+=y+2I$。注意到 $I^+-I_*^+=I_*^+-I_*^-=I_*^--I^-=I$。令 $T'=\frac{24}{(1+c_\eta)(1-c^\downarrow)\max\{I,(y-I)\alpha_0^{\max}\}}=o\left(\frac{1}{\alpha_0^{\max}}\right)$。然后，结合引理 5.6 和 5.18，以及引理 5.2，若 $\beta_0\ge 1/2-x_\beta$、$\psi_0\le x_\psi$、$\alpha_0^{\max}=\omega(\log n/\sqrt{n})$，且 $\eta_0(j)\in[I_*^-,I_*^+]$，

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\tau_\eta^-(y-I)<\tau_\eta^+(y+2I)\right] \\
&\le \Pr\left[\tau_\eta^-(y-I)<\tau_\eta^+(y+2I) \text{ and } \min\{\tau_{\widetilde{\max}}^\downarrow,\tau_{\max}^\uparrow,\tau_\beta^-,\tau_\psi^+\}>T'\right] \\
&+\Pr\left[\tau_{\widetilde{\max}}^\downarrow\le T' \text{ and } \min\{\tau_{\max}^\uparrow,\tau_\beta^-,\tau_\psi^+\}>T'\right]+\Pr\left[\tau_{\max}^\uparrow\le T' \text{ and } \min\{\tau_\beta^-,\tau_\psi^+\}>T'\right] \\
&+\Pr\left[\tau_\beta^-\le T' \text{ and } \tau_\psi^+>T'\right]+\Pr\left[\tau_\psi^+\le T'\right] \\
&\le n^{-\omega(1)}.
\end{aligned}$$

令 $\tau^* = \min\{\tau_\eta^{jump}, \tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\}$。令 $\tau_s^- = \inf\{t \geq s : \eta_t(j) \leq I^-\}$，以及 $\tau_s^+ = \inf\{t \geq s : \eta_t(j) \geq I^+\}$。假设 $\eta_0(j) \in [I_*^-, I_*^+]$、$\beta_0 \geq 1/2 - x$、$\psi_0 \leq x$，且 $\alpha_0^{\max} \geq \omega(\log n/\sqrt{n})$。应用引理 A.7（条目 2），我们有

$$\Pr\left[\tau_\eta^-(y - I) \leq T \text{ and } \tau^* > T\right] \leq \sum_{s=0}^{T-1} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\eta_s(j) \in [I_*^-, I_*^+] \text{ and } \tau^* > s} \Pr_s\left[\tau_s^- < \tau_s^+\right]\right] \leq T n^{-\omega(1)}.$$

□

**唯一强势意见的出现：引理5.16的证明。**

引理 *5.16* （条目 *1*）。任取一对不同的意见 $i$ 和 $j$。注意以下结论成立：

- 结合引理 5.10 的条目 1 和条目 2，对于某个 $T_1 = O(\log n/\alpha_{\max 0})$，$\min\{\alpha_{T_1}(i), \alpha_{T_1}(j)\} \leq (1 - c$弱$)\alpha_{\max T_1}$，$\beta_{T_1} \geq 1/2 - x_\beta$，$\psi_{T_1} \leq x_\psi$，且 $\alpha_{\max T_1} = \Omega(\alpha_{\max 0}) = \omega(\log n/\sqrt{n})$ 以至少 $1 - n^{-10}$ 的概率成立。假设 $\alpha_{T_1}(j) \leq (1 - c$弱$)\alpha_{\max T_1}$，不失一般性。根据 $\eta_t(j)$ 的定义，我们有 $\eta_{T_1}(j) \geq {}^{c}$弱$-c$强$_{1-c}$强$\,\alpha_{\max T_1} = \Omega(\alpha_{\max 0}) \geq 2x_\eta$。
- 由引理 5.17，对于任意 $t \in [T_1, T_1 + T_2]$，其中 $T_2 \geq n\alpha_{\max_{T_1}}/C\log n = \Omega(n\alpha_{\max_0}/\log n)$，$\eta_t(j) \geq x_\eta$，$\beta_t \geq 1/2 - x_\beta$，$\psi_t \leq x_\psi$，且 $\alpha_{\max t} = \Omega(\alpha_{\max 0}) = \omega(\log n/\sqrt{n})$ 的概率至少为 $1 - n^{-\omega_{(1)}}$。

由于 $T_1 = O(\log n/\alpha_0^{\max}) = o(\sqrt{n})$ 且 $T_2 = \Omega(n\alpha_0^{\max}/\log n) = \omega(\sqrt{n})$，我们有 $T_1 < T_2$。因此，对所有不同意见对 $i, j \in [k]$ 使用并集界后，以高概率存在 $t \leq T_1$，使得对于所有 $j \neq I_t$，$\eta_t(j) \geq x_\eta$。

□

引理的证明 *5.16 (*第 *2* 项*)*。考虑任意一个意见 $j \neq I_0$。结合引理 5.8和 5.17，

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\tau_\eta^-(x_\eta/2) \leq T \text{ or } \min\{\tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\} \leq T\right] \\
&\leq \Pr\left[\left\{\tau_\eta^-(x_\eta/2) \leq T \text{ or } \min\{\tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\} \leq T\right\} \text{ and } \min\{\tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\} > T\right] \\
&+ \Pr\left[\min\{\tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\} \leq T\right] \\
&\leq n^{-11}. \qquad (22)
\end{aligned}$$

因此，根据并集界，

$$\Pr\left[\min\{\tau_{us}^-(x_\eta/2), \tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\} \leq T\right] \leq \sum_{j \neq I_0} \Pr\left[\min\{\tau_\eta^-(x_\eta/2), \tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}, \tau_\beta^-, \tau_\psi^+\} \leq T\right] \leq n^{-10}.$$

□

## 5.7 迈向共识

现在，我们着手建立共识时间的上界。具体而言，我们证明，一旦只剩下恰好一个强意见，过程就会以高概率在 $O(\log n/\alpha_0^{\max})$ 轮次内达成共识（见引理 5.20）。

**引理 5.20**（唯一强意见导向共识）。假设 $\psi_0 \le x_\psi$，$\beta_0 \ge 1/2 - x_\beta$，$\alpha_0^{\max} = \omega(\log n/\sqrt{n})$，并且 $\eta_0(j) \ge x_\eta$ 对所有 $\bar{j} \ne I_0$ 均成立。那么，$\Pr[\tau_{\text{cons}} > T] \le 1/n$ 对某个 $T = O(\log n/\alpha_0^{\max})$ 成立。

定义以下停时：

$$\tau^+_{\max}(x) := \inf\{t \ge 0 : \widetilde{\alpha}_t^{\max} \ge x\}, \qquad \tau^-_{\max}(x) := \inf\{t \ge 0 : \widetilde{\alpha}_t^{\max} \le x\},$$
$$\tau^+_{\widetilde{\max}}(x) := \inf\{t \ge 0 : \widetilde{\alpha}_t^{\max} \ge x\}, \qquad \tau_{\text{all}} := \inf\{t \ge 0 : \alpha_t^{\max} = \beta_t\}.$$

为简便起见，我们有时假设 $\alpha_0(1) = \alpha_0^{\max}$。以下引理描述了唯一强势意见如何演化，进而推出引理 5.20。

**引理 5.21**。我们有如下结论：

*1.* 设 $c \in (0,1)$ 为任意常数。假设 $\psi_0 \le x_\psi$, $\beta_0 \ge 1/2 - x_\beta$, $\alpha_0^{\max} = \omega(\log n/\sqrt{n})$，且 $\eta_0(j) \ge \bar{x}_\eta$ 对所有 $j \ne I_0$ 均成立。那么，对某个 $T = O(\log n/\alpha_0^{\max})$，

$$\Pr\left[\tau^+_{\widetilde{\max}}(1-c) > T \ \text{ or } \ \min\{\tau^+_\psi, \tau^-_\beta\} \le T\right] \le n^{-10}.$$

*2.* 假设 $\psi_0 \le x_\psi$, $\beta_0 \ge 1/2 - x_\beta$ 和 $\alpha_0(1) \ge (1 - c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})\beta_0$。那么，对某个 $T = O(\log n)$，

$$\Pr\left[\tau^+_{\max}(1 - 4c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}) > T \ \text{ or } \ \min\{\tau^+_\psi, \tau^-_\beta\} \le T\right] \le n^{-10}.$$

*3.* 假设 $\alpha_0(1) \ge 7/8$。那么，$\Pr[\tau_{all} > 8\log n$ 或 $\tau^-_{\max}(3/4) \le 8\log n] \le 1/n$.

*4.* 假设 $\alpha_0(1) = \beta_0$ 且 $\beta_0 \ge 1/2 - x_\beta$。那么，$\Pr[\tau_{\text{cons}} > 6\log n] \le 1/n$。

引理的证明 *5.21 (*第 *1* 项*)*。令 $\tau^{\uparrow}_{\widetilde{\max}} = \inf\{t \ge 0 : \widetilde{\alpha}_t^{\max} \ge (1 + c^{\uparrow}_{\widetilde{\max}})\widetilde{\alpha}_0^{\max}\}$，其中某个正常数 $c^{\uparrow}_{\widetilde{\max}} \in$ 属于 $(0,1)$。令 $\tau^* = \min\{\tau^{\pm}_{\widetilde{\max}}\ \tau^-_\beta, \tau^-_{us}(x_\eta)\}$，且 $\tau = \min\{\tau^{\uparrow}_{\widetilde{\max}}\tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}\ \tau^*\}$。对于 $t-1 < \tau$，我们有

$$\begin{aligned}
\alpha_{t-1}^{\max} - \frac{\gamma_{t-1}}{\beta_{t-1}} &\ge \alpha_{t-1}^{\max} - \frac{(\alpha_{t-1}^{\max})^2}{\beta_{t-1}} - \frac{(1-c_{\text{strong}})\alpha_{t-1}^{\max}(\beta_{t-1} - \alpha_{t-1}^{\max})}{\beta_{t-1}} \\
&= c_{\text{strong}}\alpha_{t-1}^{\max}(1 - \widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}) \\
&\ge c_{\text{strong}} c \alpha_{t-1}^{\max}. \qquad (23)
\end{aligned}$$

因此，对于 $t-1 < \tau$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\widetilde{\alpha}_t^{\max}] &\ge \widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}\left(1 + \frac{\alpha_{t-1}^{\max} - \gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}{2}\right) - \frac{9\alpha_{t-1}^{\max}}{n} \\
&\ge \widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}\left(1 + \frac{c_{\text{strong}} c \alpha_{t-1}^{\max}}{2}\right) - \frac{9\alpha_{t-1}^{\max}}{n} \\
&= \widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max} + \frac{c_{\text{strong}} c \beta_{t-1}(\widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max})^2}{2} - \frac{9\alpha_{t-1}^{\max}}{n} \\
&\ge \widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max} + \frac{c_{\text{strong}} c (1 - c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})^2 (\alpha_0^{\max})^2}{12}.
\end{aligned}$$

注意，我们使用引理4.7 （条目1）和 $\alpha_{t-1}^{\max} \ge \underline{(1-c^{\downarrow}_{\text{最大值}})_3\ \widetilde{\alpha}_0^{\max}} = \omega(1/n)$。

令 $X_t = \widetilde{\alpha}_t^{\max}$且 $R = \frac{c_{\text{strong}} c_{(1-c^{\downarrow}_{\sim\text{最大值}})^2 \alpha_0^{\max 2}}}{12} > 0$(), 则有 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_{t-1} + R - \mathbb{E}_{t-1}[X_t]) = \mathbf{1}_{\tau>t-1}\big(\widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max} + R - \mathbb{E}_{t-1}[\widetilde{\alpha}_t^{\max}]\big) \le 0$. 此外, 随机变量满足

$$\mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_{t-1} + R - X_t) \le \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}\left(1 + \frac{\alpha_{t-1}^{\max} - \gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}{2}\right) - \frac{9\alpha_{t-1}^{\max}}{n} - \widetilde{\alpha}_t^{\max}\right)$$

满足单侧 $\left(O\left(\frac{1}{n}\right), O\left(\frac{\alpha_0^{\max}}{n}\right)\right)$-伯恩斯坦条件。注意，我们使用引理 4.7(第 2 项)和引理 3.7(第 2 项和第 3 项)。

对 $I^+ = (1 + c^{\uparrow}_{\sim\max})\widetilde{\alpha}_0^{\max}$, $I^- = (1 + c^{\downarrow}_{\sim\max})\widetilde{\alpha}_0^{\max}$, 以及 $T' = \frac{2(I^+ - X_0)}{R} = \frac{1}{24 c_{\text{strong}} c^{+}_{\sim\max}(1-c^{\downarrow}_{\sim\max})^2 \alpha_0^{\max}}$ 应用引理 3.11 (第 2 项), 可得

$$\Pr\left[\tau^{\uparrow}_{\widetilde{\max}} > T' \text{ and } \tau^* > T'\right] \le \exp\left(-\Omega\big(n(\alpha_0^{\max})^2\big)\right).$$

令 $\tau^{\uparrow(s)} = \inf\{t \ge 0\colon \widetilde{\alpha}_t^{\max} \ge (1 + c^{\uparrow}_{\sim\max})^s \widetilde{\alpha}_0^{\max}\}$。根据定义，对于某个 $\ell = \Theta(\log n)$, $\tau^{+}_{\sim\max} \le \tau^{\uparrow(\ell)}$成立。应用引理 A.7(第 3 项)，得到

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\min\{\tau^{+}_{\widetilde{\max}}, \tau^*\} > \ell T'\right] &\le \Pr\left[\min\{\tau^{\uparrow(\ell)}, \tau^*\} > \ell T'\right] \\
&\le \sum_{s=1}^{\ell} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\tau^* > \tau^{\uparrow(s-1)}} \Pr_{\tau^{\uparrow(s-1)}}\left[\min\{\tau^{\uparrow(s)}, \tau^*\} > \tau^{\uparrow(s-1)} + T'\right]\right] \\
&\le \ell \exp\left(-\Omega\big(n(\alpha_0^{\max})^2\big)\right).
\end{aligned}$$

注意，$\alpha^{\max}_{\tau^{\uparrow(s-1)}} \ge \Omega(\alpha_0^{\max})$ 成立。

最后，结合上述内容和（22），可得

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\tau^{+}_{\widetilde{\max}} > T \text{ or } \min\{\tau^{+}_{\psi}, \tau^{-}_{\beta}\} \le T\right] \\
&\le \Pr\left[\left\{\tau^{+}_{\widetilde{\max}} > T \text{ or } \min\{\tau^{+}_{\psi}, \tau^{-}_{\beta}\} \le T\right\} \text{ and } \min\{\tau^{+}_{\psi}, \tau^{-}_{\beta}, \tau^{-}_{us}(x_\eta/2)\} > T\right] \\
&+ \Pr\left[\min\{\tau^{+}_{\psi}, \tau^{-}_{\beta}, \tau^{-}_{us}(x_\eta/2)\} \le T\right] \\
&\le n^{-10}.
\end{aligned}$$

□

引理的证明 5.21 （第 2 项）。设 $\tau^{\downarrow}_{\max} = \inf\{t \ge 0\colon \alpha_t^{\max} \le (1 - c^{\downarrow}_{\max})\alpha_0^{\max}\}$。设 $\tau^* = \min\{\tau^{+}_{\max}(1 - 4c^{\downarrow}_{\sim\max}), \tau^{\downarrow}_{\sim\max}, \tau^{-}_{\beta}\}$，且 $\tau = \min\{\tau^{\uparrow}_{\max}, \tau^{\downarrow}_{\max}, \tau^*\}$。对于 $t - 1 < \tau$，有

$$1 - \alpha_{t-1}(1)\left(\frac{2}{\widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}} - 1\right) \ge 1 - (1 - 4c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})\left(\frac{2}{(1 - c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})^2} - 1\right) \ge \frac{8(c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})^2}{1 - 2c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}}.$$

注意，$\widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max} \ge (1 - c^{\downarrow}_{\sim\text{最大值}})\widetilde{\alpha}_0^{\max} \ge (1 - c^{\downarrow}_{\sim\text{最大值}})^2 \ge 1 - 2c^{\downarrow}_{\sim\text{最大值}}$ 成立。因此，对于任意 $t - 1 < \tau$，我们有

$$\mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(1)] - \alpha_{t-1}(1) = \alpha_{t-1}(1)\left(1 - \alpha_{t-1}(1)\left(\frac{2}{\widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}} - 1\right)\right) \ge \frac{8(c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})^2(1 - c^{\downarrow}_{\max})}{1 - 2c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}}\alpha_0(1).$$

令 $X_t = \alpha_t(1)$ 和 $R = \frac{8}{(c^{\downarrow}_{\text{最大值}})^2(1-c^{\downarrow}_{\max})}\frac{1-2c^{\downarrow}_{\text{最大值}}}{\alpha_0(1)} > 0$，则有 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_{t-1} + R - \mathbb{E}_{t-1}[X_t]) =_{\text{最大值}} \mathbf{1}_{\tau>t-1}(\alpha_{t-1}(1) + R - \mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(1)]) \le 0$。此外，随机变量满足

$$\mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[X_t] - X_t\right) = \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\alpha_t(1)] - \alpha_t(1)\right)$$

满足单侧 $\left(O\left(\frac{1}{n}\right), O\left(\frac{\alpha_0(1)}{-n}\right)\right)$-伯恩斯坦条件。注意，我们使用引理 4.2(第 3 项）和引理 3.7(第 2 和 3 项）。

应用引理 3.11 (第 2 项）于 $I^+ = (1 + c^{\uparrow}_{\max})\alpha_0(1)$、$I^- = (1 - c^{\downarrow}_{\max})\alpha_0(1)$ 和 $T' = \frac{c^{\uparrow}_{\max}(1-2c^{\downarrow}_{\text{最大值}})}{4(c^{\downarrow}_{\text{最大值}})^2(1-c^{\downarrow}_{\max})} = \frac{2(I^+ - X_0)}{R}$，可得

$$\Pr\left[\tau^{\uparrow}_{\max} > T' \text{ and } \tau^* > T'\right] \le \exp\left(-\Omega\left(n(\alpha_0^{\max})^2\right)\right).$$

令 $\tau^{\uparrow(s)} = \text{下确界}\{t \ge 0 : \alpha_t^{\max} \ge (1 + c^{\uparrow}_{\max})^s \alpha_0^{\max}\}$。根据定义，对某个 $\ell = \Theta(\text{对数 } n)$，$\tau^{+}_{\max}(1 - 4c^{\downarrow}_{\text{最大值}}) \le \tau^{\uparrow(\ell)}$ 成立。应用引理 A.7 (第 3 项），可得

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\min\{\tau^{+}_{\max}(1 - 4c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}), \tau^*\} > \ell T'\right] &\le \Pr\left[\min\{\tau^{\uparrow(\ell)}, \tau^*\} > \ell T'\right] \\
&\le \sum_{s=1}^{\ell} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\tau^* > \tau^{\uparrow(s-1)}} \Pr_{\tau^{\uparrow(s-1)}}\left[\min\{\tau^{\uparrow(s)}, \tau^*\} > \tau^{\uparrow(s-1)} + T'\right]\right] \\
&\le \ell \exp\left(-\Omega\left(n(\alpha_0^{\max})^2\right)\right).
\end{aligned}$$

注意，$\alpha^{\max}_{\tau^{\uparrow(s-1)}} \ge \Omega(\alpha_0^{\max})$成立。

最后，结合上述结果和引理 5.8，可得

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\tau^{+}_{\max}(1 - 4c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}) > T \text{ or } \min\{\tau^{+}_{\psi}, \tau^{-}_{\beta}\} \le T\right] \\
&\le \Pr\left[\left\{\tau^{+}_{\max}(1 - 4c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}) > T \text{ or } \min\{\tau^{+}_{\psi}, \tau^{-}_{\beta}\} \le T\right\} \text{ and } \min\{\tau^{+}_{\psi}, \tau^{-}_{\beta}, \tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}\} > T\right] \\
&+ \Pr\left[\min\{\tau^{+}_{\psi}, \tau^{-}_{\beta}, \tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}\} \le T\right] \\
&\le n^{-10}.
\end{aligned}$$

□

引理 *5.21* （条目 *3*）。首先，我们证明以下断言。

**断言 5.22**。设 $c \in (0, 1/2)$ 为任意常数。假设 $\psi_0 \le x_\psi$, $\beta_0 \ge 1/2 - x_\beta$, 和$\alpha_0(1) \ge 1 - c$。那么，对于某个 $T = \Omega(1/x_\psi)$,

$$\Pr\left[\tau^{-}_{\max}(1 - 2c) \le \min\{T, \tau^{-}_{\beta}, \tau^{+}_{\psi}\}\right] \le \exp\left(-\Omega(n)\right).$$

证明。设 $\tau = \min\{\tau^{-}_{\beta}, \tau^{+}_{\psi}\}$。那么，对于 $t - 1 < \tau$，有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\alpha_t(1)] = \alpha_{t-1}(1)\left(1 + \alpha_{t-1}(1) - \frac{\gamma_{t-1} + x_\psi}{\beta_{t-1}}\right) \ge \alpha_{t-1}(1) - 3x_\psi.$$

注意，我们在第一个等式中使用了引理 4.2（第1项）。

因此，令 $X_t = \alpha_t(1)$ 和 $R = -3x_\psi < 0$，我们有 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_{t-1} + R - \mathbb{E}_{t-1}[X_t]) = \mathbf{1}_{\tau>t-1}(\alpha_{t-1}(1) - 3x_\psi - \mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(1)]) \le 0$，并且 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[X_t] - X_t) = \mathbf{1}_{\tau>t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(1)] - \alpha_t(1))$ 满足 $(O(1/n), O(1/n))$-伯恩斯坦条件。注意，我们使用了引理 4.2（第3项）和引理 3.7（第2项和第3项）。

因此，应用引理 3.11 （条目 1），结合 $I^- = 1 - 2c$，对于 $T \le \frac{c}{6x_\psi} \le \frac{X_0 - I^-}{-2R}$，我们有

$$\Pr\left[\tau^-_{\max}(1-2c) \le \min\{T, \tau^-_\beta, \tau^+_\psi\}\right] \le \exp\left(-\Omega(n)\right). \tag{24}$$

□

为方便起见，记 $g_t = \beta_t - \alpha_t(1) = \sum_{j\ge 2} \alpha_t(j)$。令 $\tau = \min\{\tau_{all}, \tau^-_{\max}(3/4)\}$。那么，对于 $t-1 < \tau$，我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[g_t] = \sum_{j\ge 2} \alpha_{t-1}(j)(1 + \alpha_{t-1}(j) + 1 - 2\beta_{t-1}) \le g_{t-1}\left(1 - \frac{1}{4}\right).$$

注意，$\alpha_{t-1}(j) \le 1 - \alpha_{t-1}(1) \le 1/4$ 且 $\beta_{t-1} \ge \alpha_{t-1}(1) \ge 3/4$。

令 $r = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$，$X_t = r^{-t} g_t$ 和 $Y_t = X_{t\wedge\tau}$。那么，

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[Y_t] - Y_{t-1} = \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[X_t] - X_{t-1}\right) \le \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(r^{-t}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[g_t] - r^{-(t-1)} g_{t-1}\right) \le 0,$$

即，$Y_t$ 是一个次鞅。因此，我们有 $\mathbb{E}[Y_T] \le \mathbb{E}[Y_0] = g_0 \le 1$ 并且

$$\mathbb{E}[Y_T] \ge \mathbb{E}[X_T \mid \tau > T]\Pr[\tau > T] = r^{-T}\mathbb{E}[g_T \mid \tau > T]\Pr[\tau > T] \ge r^{-T} n^{-1}\Pr[\tau > T].$$

因此，我们有

$$\Pr[\tau > T] \le n r^T \le n\exp\left(-\frac{T}{4}\right) \le 1/n^2.$$

因此，结合以上内容，命题5.22以及引理5.2 和 5.3可得

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\tau_{all} > T \text{ or } \tau^-_{\max}(3/4) \le T\right] \\
&\le \Pr\left[\left\{\tau_{all} > T \text{ or } \tau^-_{\max}(3/4) \le T\right\} \text{ and } \min\{\tau^-_{\max}(3/4), \tau^-_\beta, \tau^+_\psi\} > T\right] \\
&+ \Pr\left[\min\{\tau^-_{\max}(3/4), \tau^-_\beta, \tau^+_\psi\} \le T\right] \\
&\le \Pr\left[\tau > T\right] + \Pr\left[\tau^-_{\max}(3/4) \le T \text{ and } \min\{\tau^-_\beta, \tau^+_\psi\} > T\right] + \Pr\left[\min\{\tau^-_\beta, \tau^+_\psi\} \le T\right] \\
&\le 1/n.
\end{aligned}$$

□

*Pr*引理 *5.21* （条目 *4*）。设 $\tau =$ 最小值$\{\tau_{\text{cons}}, \tau^-_\beta\}$。设 $u_t = 1 - \alpha_t$（1）。那么 ，

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[u_t] = 1 - \alpha_{t-1}(1)(1 + 1 + \alpha_{t-1}(1) - 2\beta_{t-1}) = u_{t-1}(1 - \alpha_{t-1}(1)) \le u_{t-1}\left(1 - \frac{1}{3}\right).$$

令 $r = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$、$X_t = r^{-t} u_t$ 和 $Y_t = X_{t\wedge\tau}$。则，

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[Y_t] - Y_{t-1} = \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[X_t] - X_{t-1}\right) \le \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(r^{-t}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[u_t] - r^{-(t-1)} u_{t-1}\right) \le 0,$$

即， $Y_t$ 是一个次鞅。因此，我们有 $\mathbb{E}[Y_T] \le \mathbb{E}[Y_0] = u_0 \le 1$ 和

$$\mathbb{E}[Y_T] \ge \mathbb{E}[X_T \mid \tau > T] \Pr[\tau > T] = r^{-T} \mathbb{E}[u_T \mid \tau > T] \Pr[\tau > T] \ge r^{-T} n^{-1} \Pr[\tau > T].$$

因此，我们有

$$\Pr[\tau > T] \le n r^T \le n \exp\left(-\frac{T}{3}\right) \le 1/n^2.$$

因此，根据引理5.2 和5.3，我们有

$$\begin{aligned}\Pr[\tau_{\text{cons}} > T] &\le \Pr[\tau > T] + \Pr\left[\tau_\beta^- \le T\right] \\ &\le \Pr[\tau > T] + \Pr\left[\tau_\beta^- \le T \text{ and } \tau_\psi^+ > T\right] + \Pr\left[\tau_\psi^+ \le T\right] \\ &\le 1/n.\end{aligned}$$

□

引理的证明 *5.20*。 我们有如下结论：

- 根据引理 5.21 （条目 1），对于某个 $T_1 = O(\log n/\alpha_{\max 0})$，我们有 $\alpha_{T_1}(1) \ge (1 - c^{\downarrow}_{\text{最大值}})\beta_{T_1}$，$\beta_{T_1} \ge 1/2 - x_\beta$ $\psi_{T_1} \le x_\psi$ $1 - n^{-10}$ ，且，其概率至少为 。

- 根据引理 5 21 2 $T_2 = O$ $n$ $\alpha_{T_1+T_2}$ 1 $\beta_{T_1+T_2} \ge$。（条目 ），$1/2 - x_\beta$ $\psi_{T_1+T_2} \le x_\psi$ $1 - n^{-10}$ 对于某个 (log )，我们有 ( ) $\ge 1 - 4c^{\downarrow}_{\text{最大值}}$， ，且，其概率至少为 。

- 假设 $c^{\downarrow}_{\text{最大值}} = 1/32$。根据引理 5.21 （第 3 项），对于某个 $T_3 = O(\log n)$，我们有 $\alpha_{T_1+T_2+T_3}(1) = \beta_{T_1+T_2+T_3}$ 并且 $\alpha_{T_1+T_2+T_3}(1) \ge 3/4$，其概率至少为 $1 - 1/n^2$。

- 根据引理 5.21 （第 4 项），对于某个 $T_4 = O(\log n)$，我们有 $\alpha_{T_1+T_2+T_3+T_4}(1) = 1$，其概率至少为 $1 - 1/n^2$。

因此，我们得到了所要证明的结论。 □

## 5.8 整合起来

**引理 5.23**。 设 $C > 0$ 为任意常数。对于某个

$$T = \begin{cases} O(\log n) & \left(if\ k \le \frac{C\sqrt{n}}{(\log n)^2}\right), \\ O\left(\sqrt{n}(\log n)^3\right) & (otherwise), \end{cases} \tag{25}$$

我们有

$$\Pr\left[\psi_T \le x_\psi \ and\ \beta_T \ge \frac{1}{2} - x_\beta \ and\ \alpha_T^{\max} \ge \frac{(\log n)^{1.5}}{\sqrt{n}}\right] \ge 1 - p_\perp - O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

证明。 结合引理 5.2 至 5.4，可得如下结论：

1. 根据引理 5.3 （条目 1）以及 $p_\perp$， $\psi_1 \le x_\psi$ 和 $\beta_1 \ge 1/n$ 成立的概率至少为 $1 - p_\perp - n^{-\Omega(1)}$。

2. 根据引理 5.2 （第 1 项和第 2项），对于某个 $T = O(\log n)$， $\beta_{1+T} \ge 1/2 - x_\beta$ 以至少 $1 - O(\log n/n)$ 的概率成立。

3. 根据引理 5.3 （第 2项），$\max_{t\in[n^2]}\psi_t \le x_\psi$ 以至少 $1-n^{-10}$ 的概率成立。

4. 根据引理 5.4，对于某个 $T'=O\left(\sqrt{n}(\log n)^3\right)$，$\gamma_{1+T+T'}\ge(\log n)^2/\sqrt{n}$，$\psi_{1+T+T'}\le x_\psi$，且 $\beta_{1+T+T'}\ge 1/2-x_\beta$以至少 $1-n^{-\Omega(1)}$ 的概率。

由于 $\alpha_t^{\max}\ge\gamma_t/\beta_t\ge\gamma_t$ 对任意 $t$均成立，结合第 1 项至第 4项，我们得到一般 $k$情形下的结论。对于 $k=O\left(\sqrt{n}/(\log n)^2\right)$，$\alpha_t^{\max}\ge\beta_t/k=\Omega(\beta_t(\log n)^2/\sqrt{n})$ 对任意 $t$均成立。因此，结合第 1项至第 3项，我们得到所述结论。

□

**引理 5.24**。设 $\psi_0\le x_\psi$、$\beta_0\ge 1/2-x_\beta$ 和 $\alpha_0^{\max}=\omega(\log n/\sqrt{n})$。则，$\tau_{\text{cons}}=O(\log n/\alpha_0^{\max})$ 以高概率成立。

证明。我们有如下结论：

- 根据引理 5.16 （条目 1），对于某个 $T_1=O(\log n/\alpha_{\max 0})$，我们有 $\min^{j\neq I_{T_1}}\eta_{T_1}(j)\ge x_\eta$，$\beta_{T_1}\ge 1/2-x_\beta$，$\psi_{T_1}\le x_\psi$，且 $\alpha_{\max T_1}=\Omega(\alpha_{\max 0})=\omega(\log n/\sqrt{n})$，其概率至少为$1-n^{-10}$。

- 根据引理 5.20，对于某个 $T_2=O(\log n/\alpha_{\max 0})$，我们有 $\tau_{\text{共识}}\le T_1+T_2$，其概率至少为 $1-1/n$。

因此，我们得到了所需结论。 □

定理 *1.1*的证明。根据引理 5.23，对于某个 $T$（定义见（25）（引理 5.23））， $\psi_T\le x_\psi$、$\beta_T\ge 1/2-x_\beta$和 $\alpha_T^{\max}\ge(\log n)^{1.5}/\sqrt{n}$ 以高概率成立。然后，根据引理 5.24，再经过 $O\left(\frac{\log n}{\alpha_T^{\max}}\right)=O\left(\min\left\{k\log n,\sqrt{n/\log n}\right\}\right)$ 轮次后，我们以高概率达到共识。这里，当 $k$较小时，我们使用 $\alpha_T^{\max}\ge\frac{\beta_T}{k}=\Omega(k)$；当 $k$ 较大时，我们使用 $\alpha_T^{\max}\ge(\log n)^{1.5}/\sqrt{n}$。因此，共识时间的上界为

$$\tau_{\text{cons}}\le T+O\left(\min\left\{k\log n,\sqrt{n/\log n}\right\}\right)=\widetilde{O}(\min\{k,\sqrt{n}\})$$

并得出该结论。 □

## 5.9 下界

在本小节中，我们证明定理 1.3。

**引理 5.25**。若 $\beta_0\ge 1/2-x_\beta$、$\psi_0\le x_\psi$ 和 $\alpha_0^{\max}\ge C\sqrt{\log\frac{n}{n}}$满足某个充分大的常数$C>0$，则 $\tau_{\text{cons}}=\Omega(1/\alpha_0^{\max})$ 以高概率成立。

证明。令 $T=\frac{C_{5.6(2)}}{\alpha_0^{\max}}$。由引理5.6 （第2项）和引理5.2 （第3项），可得

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\tau_{\text{cons}}\le T\right]&\le\Pr\left[\tau_{\max}^{\uparrow}\le T\right]\\
&\le\Pr\left[\tau_{\max}^{\uparrow}\le T\text{ and }\tau_\beta^->T\right]+\Pr\left[\tau_\beta^-\le T\right]\\
&\le\Pr\left[\tau_{\max}^{\uparrow}\le\min\{T,\tau_\beta^-\}\right]+\Pr\left[\tau_\beta^-\le T\right]\\
&\le\underbrace{k\exp\left(-\Omega\left(\frac{\alpha_0^{\max}n}{T}\right)\right)}_{=\exp\left(-\Omega((\alpha_0^{\max})^2n)\right)}+T\exp\left(-\Omega\left(nx_\beta^2\right)\right)\\
&\le 1/n.
\end{aligned}$$

□

*P*定理*1.3*的证明。 对于常数 $c > 0$ 使得 $k \leq (1/2 - c) \cdot n$，定义

$$k^* = \frac{2\sqrt{n}}{c \log n}.$$

假设 $k \leq k^*$。考虑如下定义的初始配置

$$\alpha_0(i) = \frac{1}{2k} \text{ for all } i \in [k].$$

那么，$\beta_0 = 1/2$，$\psi_0 \leq 0$，并且 $\alpha_0^{\max} = \frac{1}{2k} \geq \Omega\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)$。因此，根据引理5.25，以高概率，$\tau_{\text{cons}} = \Omega(1/\alpha_0^{\max}) = \Omega(k)$。

假设 $k > k^*$。考虑如下定义的初始配置

$$\alpha_0(i) = \begin{cases} \frac{1}{2k^*} - \frac{k-k^*}{nk^*} & \text{if } i \in [k^*], \\ \frac{1}{n} & \text{if } k^* < i \leq k. \end{cases}$$

那么，$\beta_0 = 1/2$，$\psi_0 \leq 0$，并且

$$\begin{aligned} \alpha_0^{\max} &= \frac{1}{2k^*}\left(1 - \frac{2k - 2k^*}{n}\right) \\ &\geq \frac{1}{2k^*}\left(1 - \frac{2k}{n}\right) \\ &\geq \frac{c}{2k^*} && \because k \leq (1/2 - c) \cdot n \\ &= \Omega\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

因此，根据引理5.25，以高概率，$\tau_{\text{cons}} = \Omega(1/\alpha_0^{\max}) = \Omega(k^*) = \Omega(\sqrt{n})$。 □

# 6 群体协议模型的分析

本节中，我们回顾定义 4.1 和4.16中定义的量和首次到达时间。我们经常使用第 4.2 节中的结果。

与闲聊模型的关键区别在于，在群体协议模型中，我们为参数 $\tau_\beta^-$ 和 $\tau_\psi^+$ 引入了一个优势 。在闲聊模型中，我们可以证明，一旦 $\beta_t$ 超过阈值 $1/2 - x_\beta$，由于每一轮都具有集中性，它就不会再低于该阈值。相比之下，在群体协议模型中，即使 $\beta_t$ 超过 $1/2 - x_\beta$，它仍有可能降至阈值以下。为了解决这一问题，我们转而证明 $\beta_t$ 在足够长的时间内不会低于较低的阈值 $1/2 - 2x_\beta$（引理 6.1 的第 3 项）。我们还在 $x_\psi$ 的定义中，为参数 $\tau_\psi^+(x)$ 引入了类似的优势（引理 6.2 的第 2 项）。

为清晰易读起见，我们分别给出群体协议模型和闲聊模型的完整证明，并包含所有必要的引理和论证。尽管这两种模型在较高层次上具有共同的结构，但交错呈现它们的证明会使论述晦涩难懂，并降低可读性。

## 6.1 已决顶点比例的行为

考虑定义 4.16 中定义的停时。本节给出以下两个引理：(i) $\beta_t$ 在 $O(n\log n)$ 步内达到至少 $1/2-x$，随后在足够长的一段时间内保持至少为 $1/2-O(x)$（引理 6.1）；以及 (ii) $\psi_t$ 在 $O(n\log n)$ 步内降至至多 $x$，随后在足够长的一段时间内保持至多为 $O(x)$（引理 6.2）。具体而言，我们计划将以下结果用于 $x$，使得 $x=\omega(\sqrt{\log n/n})$ 且 $x=o(\log n/\sqrt{n})$。

**引理 6.1**（增长率 $\beta_t$）。设 $x=x(n)$ 是任意正函数，满足 $x=\omega(\sqrt{\log n/n})$ 以及 $x=o(\log n/\sqrt{n})$。我们有以下结论：

*1.* 设 $C>0$ 为任意常数。假设 $\beta_0>0$。那么，对于某个 $\ell=O(\log n)$，$\beta_{\ell n}\geq C\log n/n$ 以至少 $1-O(n^{-10})$ 的概率成立。*2.* 对于某个 $\ell=O(\log n)$，$\Pr\left[\tau_\beta^+(x)>\ell n\right]\leq \ell(\exp(-\Omega(n\beta_0))+\exp\left(-\Omega\left(nx^2\right)\right))$ *3.* 假设 $\beta_0\geq 1/2-x$。那么，对于任意 $T>0$，$\Pr\left[\tau_\beta^-(2x)\leq T\right]\leq T\exp\left(-\Omega\left(nx^2\right)\right)$。

**引理 6.2**（$\psi_t$的衰减）。令 $x=x(n)$ 为任意一个正函数，使得 $x=\omega(\sqrt{\log n/n})$ 且 $x=o(\log n/\sqrt{n})$。以下结论成立：

*1.* 假设 $\psi_0\geq x$。那么，对于某个 $\ell=O(\log n)$，$\Pr\left[\tau_\psi^-(x)>\ell n\right]\leq \ell\exp\left(-\Omega\left(nx^2\right)\right)$。

*2.* 假设 $\psi_0\leq x$。那么，对于任意 $T\geq 1$，$\Pr\left[\tau_\psi^+(2x)\leq T\right]\leq T\exp\left(-\Omega\left(nx^2\right)\right)$。

引理 6.1 的条目 1 的证明。对于正常数 $c_\beta^\uparrow, c_\beta^\downarrow\in(0,1)$，令 $\tau_\beta^\uparrow:=\inf\{t\geq 0\colon \beta_t\geq(1+c_\beta^\uparrow)\beta_0\}$ 和 $\tau_\beta^\downarrow:=\inf\{t\geq 0\colon \beta_t\leq(1-c_\beta^\downarrow)\beta_0\}$。对于 $y\leq 1/2-c$，令 $\tau=\min\{\tau_\beta^\uparrow,\tau_\beta^\downarrow,\tau_\beta^+(y)\}$。那么，对于 $\tau>t-1$，我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t]=\beta_{t-1}+\frac{\beta_{t-1}(1-2\beta_{t-1})+\gamma_{t-1}}{n}\geq\beta_{t-1}+\frac{2c(1-c_\beta^\downarrow)\beta_0}{n}. \tag{26}$$

注意，我们在第一个等式中使用了引理4.10(第 1项)。

因此，通过令 $X_t=\beta_t$ 和 $R=\frac{2c(1-c_\beta^\downarrow)\beta_0}{n}>0$，我们得到 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_{t-1}+R-\mathbb{E}_{t-1}[X_t])=\mathbf{1}_{\tau>t-1}(\beta_{t-1}+R-\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t])\leq 0$. 此外，$\mathbf{1}_{\tau>t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[X_t]-X_t)=\mathbf{1}_{\tau>t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]-\beta_t)$ 满足 $\left(\frac{1}{n},\frac{(1+c_\beta^\uparrow)\beta_0}{n^2}\right)$-伯恩斯坦条件。注意，我们使用了引理 4.10（第3项）、$\mathbf{1}_{\tau>t-1}\beta_{t-1}\leq(1+c_\beta^\downarrow)\beta_0$，以及引理 3.7（第2项和第3项）。

对任意常数 $\varepsilon>0$，应用引理 3.11（第 2 项），取 $I^+=(1+c_\beta^\uparrow)\beta_0$、$I^-=(1-c_\beta^\downarrow)\beta_0$ 以及 $T'=\frac{(1+\varepsilon)(I^+-X_0)R}{2c}=(1+\varepsilon\, c_\beta^\uparrow)(1-c_\beta^\downarrow)n=\Theta(n)$，我们有

$$\Pr\left[\min\{\tau_\beta^\uparrow,\tau_\beta^+(y)\}>T'\right]\leq\exp\left(-\Omega\left(\frac{\beta_0^2}{\frac{\beta_0}{n^2}\cdot n+\frac{\beta_0}{n}}\right)\right)\leq\exp\left(-\Omega(n\beta_0)\right). \tag{27}$$

我们将引理 A.6 应用于 $Z_t=\mathrm{opn}_t$、$T=T'$、$\varphi(Z_t)=\sqrt{n\beta_t}$、$\tau=\tau_\beta^+(y)$、$c_\varphi^\uparrow=c_\beta^\uparrow$、$x_0=1$ 以及 $x^*=\sqrt{C\log n}$。根据这些设置，我们有 $\tau_\varphi^+(x_0)=\inf\{t\geq 0\colon \sqrt{n\beta_t}\geq 1\}=0$、$\tau_\varphi^+(x_*)=\inf\{t\geq 0\colon \beta_t\geq C\log n/n\}$，以及 $\tau_\varphi^\uparrow=\inf\{t\geq 0\colon \sqrt{n\beta_t}\geq(1+c_\varphi^\uparrow)\sqrt{n\beta_0}\}=\tau_\beta^\uparrow$。因此，

$$\Pr\left[\min\left\{\tau_\varphi^+(x_0),\tau\right\}\leq T'\right]=1$$

成立，即满足引理 A.6 的第一个条件，对于 $C_1 = 1$成立。接下来，对于 $\beta_0 \le C\log n/n$的任意配置，我们有

$$\Pr\left[\min\left\{\tau_\varphi^{\uparrow}, \tau\right\} > T'\right] \ge 1 - \exp\left(-\Omega(n\beta_0)\right) = 1 - \exp\left(-\Omega(\varphi(Z_0)^2)\right).$$

即，引理 A.6 的第二个条件对某个正常数 $C_2 > 0$成立。注意，我们在第二个不等式中使用了（27）。

因此，根据引理 A.6，取 $\varepsilon = n^{-10}$，对于某个 $\ell = O(\log n)$，$\Pr\left[\tau_\varphi^{+}(x_*) > \ell T'\right] \le n^{-10}$. □

引理 *6.1*的第 *2* 项的证明。令 $c$ 为满足 $0 < c < 1/2$的任意常数。我们将证明分为两个阶段：$0 < \beta_0 < \frac{1}{2} - c$和 $\frac{1}{2} - c \le \beta_0 < \frac{1}{2} - x$。

**阶段1**。 $0 < \beta_0 < \frac{1}{2} - c$。因此，对某个 27，应用（$\ell = O(\log n)$）次，$\beta_t$ 在 $1/2 - c$内以至少 $\ell n = O(n\log n)$ 步的概率达到大于或等于 $1 - \ell\exp\left(-\Omega(n\beta_0)\right)$.

**情形 2**。 $\frac{1}{2} - c \le \beta_0 < \frac{1}{2} - x$。在这种情况下，考虑参数 $B_t = 1 - 2\beta_t$（注意$\beta_t = (1 - B_t)/2$和 $2x \le B_0 \le 2c$）。对于正常数 $c_B^{\uparrow}$, $c_B^{\downarrow} \in (0, 1)$，令 $\tau_B^{\uparrow} := \inf\{t \ge 0 : B_t \ge (1 + c_B^{\uparrow})B_0\}$, $\tau_B^{\downarrow} := \inf\{t \ge 0 : B_t \le (1 - c_B^{\downarrow})B_0\}$, $\tau^{2x} := \inf\{t \ge 0 : B_t \le 2x\} = \tau_\beta^{+}(x)$，以及$\tau = \min\{\tau_B^{\uparrow}, \tau_B^{\downarrow}, \tau^{2x}\}$。对于 $\tau > t - 1$，我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[B_t] = 1 - 2\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t] = B_{t-1} - \frac{B_{t-1}(1 - B_{t-1}) + \gamma_{t-1}}{n} \le B_{t-1} - \frac{(1 - c_B^{\downarrow})(1 - (1 + c_B^{\downarrow})B_0)B_0}{n}. \tag{28}$$

我们在第一个等式中使用引理 4.10（第 1项）。

因此，令 $X_t = -B_t$ 和 $R = (1-c_B^{\downarrow})(1-(1+c_B^{\downarrow})B_0)B_0 \ge 0$），我们有 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_{t-1} + R - \mathbb{E}_{t-1}[X_t]) = \mathbf{1}_{\tau>t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[B_t] - B_{t-1} + R) \le 0$，且 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[X_t] - X_t) = 2\mathbf{1}_{\tau>t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t] - \beta_t)$ 满足 $\left(\frac{2}{n}, \frac{4}{n^2}\right)$-伯恩斯坦条件。注意，我们使用了引理 4.10（第3项）、$\beta_{t-1} \le 1$和引理 3.7（第2项和第3项）。

应用引理 3.11（条目 2）以及 $I^+ = X_0 + c_B^{\downarrow}B_0$、$I^- = X_0 - c_B^{\uparrow}B_0$ 和 $T' = (1+\varepsilon)\, c_B^{\downarrow}\, (1-c_B^{\downarrow})\, (1-(1+c_B^{\downarrow})B_0)\, n = \Theta(n)$，对于任意常数 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\Pr\left[\min\{\tau_B^{\downarrow}, \tau_\beta^{+}(x)\} > T'\right] = \Pr\left[\min\{\tau_B^{\downarrow}, \tau^{2x}\} > T'\right] \le \exp\left(-\Omega\left(nB_0^2\right)\right) \le \exp\left(-\Omega\left(nx^2\right)\right). \tag{29}$$

因此，对某个 $\ell = O(\log n)$ 次应用（29），$B_t$ 小于或等于 $2x$，即 $\beta_t \ge 1/2 - x$以至少 $T = O(n\log n)$ 的概率在 $1 - \ell\exp\left(-\Omega\left(nx^2\right)\right)$步内。 □

引理 *6.1* 的条目 *3* 的证明。令 $I^- = 1/2 - 2x$、$I_*^- = 1/2 - x$、$I_*^+ = 1/2 - x/2$ 和 $I^+ = 1/2 - x/4$。注意 $I^+ - I_*^+ = I_*^+ - I_*^- = I_*^- - I^- = \Theta(x)$。令 $\tau^+ = \inf\{t \ge 0 : \beta_t \ge I_*^+\}$ 和 $\tau = \min\{\tau^+, \tau_\beta^-(2x)\}$。那么，对于 $\tau > t - 1$，我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t] = \beta_{t-1} + \frac{\beta_{t-1}(1 - 2\beta_{t-1}) + \gamma_{t-1}}{n} \ge \beta_{t-1} + \frac{x}{6n}. \tag{30}$$

在第一个等式中，我们使用引理4.10 。因此，令 $X_t = \beta_t$ 和 $R = \frac{x}{6n} > 0$，可得$\mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_{t-1} + R - \mathbb{E}_{t-1}[X_t]) = \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\beta_{t-1} + \frac{x}{6n} - \mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]\right) \le 0$ 以及 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[X_t] - X_t) = \mathbf{1}_{\tau>t-1}\,\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t] - \beta_t$ $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ 4 10 3 ( ) 满足 , -伯恩斯坦条件。

注意，我们使用了引理 。(第 项)，$\beta_{t-1} \le 1$，以及引理 3.7 (第 2 项和第 3项)。

对 $\beta_0 \in [I_*^+, I^+]$，应用引理 3.11 (第 2 项)，可得

$$\Pr\left[\tau_\beta^-(2x) < \tau^+\right] \le \exp\left(-\Omega\left(nx^2\right)\right). \tag{31}$$

因此，由引理 A.7（条目 2），在 $\tau_s^- = \inf\{t \ge s\colon\ \beta_t \le I^-\}$ 与 $\tau_s^+ = \inf\{t \ge s\colon\ \beta_t \ge I^+\}$ 的条件下，我们得到

$$\Pr\left[\tau_\beta^-(2x) \le T\right] \le \sum_{s=0}^{T-1} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\beta_s \in [I_*^-, I_*^+]} \Pr_s\left[\tau_s^- < \tau_s^+\right]\right] \le T\exp\left(-\Omega\left(nx^2\right)\right).$$

□

引理 *6.2* 条目 *1* 的证明。设 $c_\psi^\uparrow$、$c_\psi^\downarrow \in (0,\ 1)$ 为常数，$\tau_\psi^\uparrow = \inf\{t \ge 0\colon\ \psi_t \ge (1+c_\psi^\uparrow)\psi_0\}$，且 $\tau_\psi^\downarrow = \inf\{t \ge 0\colon\ \psi_t \le (1-c_\psi^\downarrow)\psi_0\}$。记 $\tau = \min\{\tau_\psi^\uparrow, \tau_\psi^\downarrow, \tau_\psi^-(x)\}$。

对任意 $\tau > t-1$，我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\psi_t] = \psi_{t-1} - \frac{\psi_{t-1}}{n} + \frac{\beta_{t-1}-\gamma_{t-1}}{n^2} \le \psi_{t-1} - \frac{\psi_{t-1}}{n} + \frac{\psi_{t-1}}{2n} \le \psi_{t-1} - \frac{(1-c_\psi^\downarrow)\psi_0}{2n}. \tag{32}$$

我们在第一个等式中使用引理 4.13（条目 1）。注意 $\psi_{t-1} \ge x \ge \frac{2}{n}$。

因此，令 $X_t = -\psi_t$ 与 $R = \frac{(1-c_\psi^\downarrow)\psi_0}{2n} \ge 0$，我们有 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_{t-1} + R - \mathbb{E}_{t-1}[X_t]) = \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\mathbb{E}_{t-1}[\psi_t] - \psi_{t-1} + \frac{(1-c_\psi^\downarrow)\psi_0}{2n}\right) \le 0$ 与 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[X_t] - X_t) = \mathbf{1}_{\tau>t-1}(\psi_t - \mathbb{E}_{t-1}[\psi_t])$ 满足 $(O(1/n)\ O(1/n^2))$-伯恩斯坦条件。注意，我们使用了引理 4.13（条目 2）、$\beta_{t-1} \le 1$ 以及引理 3.7（条目 2 和 3）。

对任意常数 $\varepsilon > 0$，应用引理 3.11（条目 2），取 $I^+ = X_0 + c_\psi^\downarrow\psi_0$、$I^- = X_0 - c_\psi^\uparrow\psi_0$ 和 $T' = \frac{2(1+\varepsilon)c_\psi^\downarrow}{1-c_\psi^\downarrow} n = \Theta(n)$，可得

$$\Pr\left[\min\{\tau_\psi^\downarrow, \tau_\psi^-\} > T'\right] \le \exp\left(-\Omega\left(n\psi_0^2\right)\right) \le \exp\left(-\Omega\left(nx^2\right)\right). \tag{33}$$

因此，反复应用 33) $\ell = O(\log n)$ 次后，$\psi_t$ 在 $\ell n = O(n\log n$ 步内变得小于或等于 $x$，其概率至少为 $1 - \ell\exp\left(-\Omega\left(nx^2\right)\right)$。 □

引理 *6.2* 的条目 *2* 的证明。令 $\tau^{x/4} = \inf\{t \ge 0\colon\ \psi_t \le x/4\}$。令 $\tau = \min\{\tau_\psi^+(2x)\ \tau^{x/4}\}$。那么，对于 $\tau > t-1$，有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\psi_t] = \psi_{t-1} - \frac{\psi_{t-1}}{n} + \frac{\beta_{t-1}-\gamma_{t-1}}{n^2} \le \psi_{t-1} - \frac{\psi_{t-1}}{n} + \frac{\psi_{t-1}}{2n} \le \psi_{t-1} - \frac{x}{8n}. \tag{34}$$

在第一个等式中，我们使用引理 4.13。注意，$\psi_{t-1} \ge x/4 \ge \frac{2}{n}$。因此，令 $X_t = -\psi_t$ 和 $R = \frac{x}{8n} > 0$，可得 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_{t-1} + R - \mathbb{E}_{t-1}[X_t]) = \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\mathbb{E}_{t-1}[\psi_t] - \psi_{t-1} + \frac{x}{8n}\right) \le 0$，且 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[X_t] - X_t) = \mathbf{1}_{\tau>t-1}(\psi_t - \mathbb{E}_{t-1}[\psi_t])$ 满足 $(O(1/n)\ O(1/n^2))$-Bernstein 条件。注意，我们使用了引理 4.13（条目 2）、$\beta_{t-1} \le 1$ 以及引理 3.7（条目 2 和 3）。

令 $I^- = -2x$，$I_*^- = -x$，$I_*^+ = -x/2$，以及 $I^+ = -x/4$。令 $\tau^+ =$下确界$\{t \ge 0\colon\ X_t \ge I^+\} = \tau^{x/4}$ 以及 $\tau^- =$下确界$\{t \ge 0\colon\ X_t \le I^-\} = \tau_\psi^+(2x)$。注意到 $I^+ - I_*^+ = I_*^+ - I_*^- = I_*^- - I^- = \Theta(x)$。对 3.11（条目 2）应用引理，取 $X_0 \in [I_*^-, I_*^+]$，即 $\psi_0 \in [x/2, x]$，我们得到

$$\Pr\left[\tau^- < \tau^+\right] = \Pr\left[\tau_\psi^+(2x) < \tau^-\right] \le \exp\left(-\Omega\left(nx^2\right)\right). \tag{35}$$

因此，取 A.7 （条目 2）应用引理，其中 $\tau_s^- = $ 下确界$\{t \geq s: \quad X_t \leq I^-\} = $ 下确界$\{t \geq s: \quad \psi_t \geq 2x\}$ 以及 $\tau_s^+ = $ 下确界$\{t \geq s: \quad X_t \geq I^+\} = $ 下确界$\{t \geq s: \quad \psi_t \leq x/4\}$，可得

$$\Pr\left[\tau_\psi^+(2x) \leq T\right] \leq \sum_{s=0}^{T-1} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\psi_s \in [I_*^-, I_*^+]} \Pr_s\left[\tau_s^- < \tau_s^+\right]\right] \leq T\exp\left(-\Omega\left(nx^2\right)\right).$$

□

## 6.2 归一化总体平方 $\ell^2$ 范数的行为

在本节中，我们证明 $\gamma_t$ 以高概率在 $x_\gamma$ 步内达到 $O(n^2 x_\gamma \log n)$（引理 6.3）。回忆 $\tau_\gamma^+ = \inf\{t \geq 0: \quad \gamma_t \geq x_\gamma\}$ 对于某个 $x_\gamma = (\log n)^2/\sqrt{n}$ （见定义 4.16）。与闲聊模型的主要区别在于 $\widetilde{\gamma}_t$ 的漂移幅度：在闲聊模型中，我们有 $\mathbb{E}_{t-1}[\widetilde{\gamma}_t] \geq \widetilde{\gamma}_{t-1} + \Omega(1/n)$，而在群体协议模型中，成立的是 $\mathbb{E}_{t-1}[\widetilde{\gamma}_t] \geq \widetilde{\gamma}_{t-1} + \Omega(1/n^2)$。

**引理 6.3 ( $\gamma_t$ 的增长)。** 令 $x = x(n)$ 为任意一个正函数，满足 $x = \omega(\sqrt{\log n/n})$ 且 $x = o(\log n/\sqrt{n})$。假设 $\beta_0 \geq 1/2 - x$。那么，对于某个 $T = O(n^2 x_\gamma \log n)$，

$$\Pr\left[\tau_\gamma^+ > T \text{ or } \tau_\beta^-(2x) \leq T\right] \leq n^{-10}.$$

引理的证明6.3 的关键思路是将 $\widetilde{\gamma}_t$ 的加性漂移（引理 4.15）与可选停止定理结合起来。

**引理 6.4。** 设 $x = x(n)$ 是任意一个正函数，满足 $x = \omega(\sqrt{\log n/n})$ 且$x = o(\log n/\sqrt{n})$。假设 $\beta_0 \geq 1/2 - x$。那么， $\mathbb{E}\left[\min\{\tau_\gamma^+, \tau_\beta^-(x)\}\right] \leq 72n^2 x_\gamma$。

证明。 根据引理 4.15，对于 $\min\{\tau_\gamma^+, \tau_\beta^-(x)\} > t-1$，有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\widetilde{\gamma}_t] \geq \widetilde{\gamma}_{t-1} + \frac{1}{12n^2}.$$

设 $\tau = \min\{\tau_\gamma^+, \tau_\beta^-(x)\}$, $X_t = \widetilde{\gamma}_t - \frac{t}{12n^2}$且 $Y_t = X_{t\wedge\tau}$。那么，我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[Y_t - Y_{t-1}] = \mathbf{1}_{\tau > t-1} \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[X_t - X_{t-1}] = \mathbf{1}_{\tau > t-1}\left(\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\widetilde{\gamma}_t] - \frac{t}{12n^2} - \widetilde{\gamma}_{t-1} + \frac{t-1}{12n^2}\right) \geq 0,$$

也就是说，$(Y_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ 是一个次鞅。因此，根据定理 A.4，我们有 $\mathbb{E}[Y_\tau] \geq \mathbb{E}[Y_0] = \widetilde{\gamma}_0 \geq 0$。于是，$0 \leq \mathbb{E}[Y_\tau] = \mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[\widetilde{\gamma}_\tau] - \frac{\mathbb{E}[\tau]}{12n^2}$并得到

$$\mathbb{E}[\tau] \leq 12n^2\,\mathbb{E}[\widetilde{\gamma}_\tau] \leq 36n^2(x_\gamma + 1) \leq 72n^2 x_\gamma.$$

□

引理的证明 *6.3*。 令 $\tau = \min\{\tau_\gamma^+, \tau_\beta^-(2x)\}$ 且 $T' = 72en^2 x_\gamma$。根据马尔可夫不等式和引理 6.4，如果对于某个 $x = \omega(\sqrt{\log n/n})$ 有 $\beta_0 \geq 1/2 - 2x$，且 $x = o(1)$（即， $2x = \omega(\sqrt{\log n/n})$ 和 $2x = o(1)$），则 $\Pr[\tau > T'] \leq \frac{\mathbb{E}[\tau]}{T'} \leq {}^1\mathrm{e}\cdot$因此，对于任意 $\ell \geq 1$，马尔可夫性意味着

$$\Pr\left[\tau > \ell T' \mid \tau > (\ell-1)T'\right] = \mathbb{E}\left[\Pr_{(\ell-1)T'}\left[\tau > \ell T'\right] \mid \tau > (\ell-1)T'\right] \leq \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

因此，我们得到

$$\Pr\left[\tau > \ell T'\right] = \Pr\left[\tau > \ell T' \mid \tau > (\ell-1)T'\right]\Pr\left[\tau > (\ell-1)T'\right] \le \frac{1}{\mathrm{e}}\Pr\left[\tau > (\ell-1)T'\right] \le \cdots \le \frac{1}{\mathrm{e}^{\ell}}.$$

应用引理 6.1（条目 3），我们得到

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\tau_{\gamma}^{+} > \ell T' \text{ or } \tau_{\beta}^{-}(2x) \le \ell T'\right] \\
&\le \Pr\left[\left\{\tau_{\gamma}^{+} > \ell T' \text{ or } \tau_{\beta}^{-}(2x) \le \ell T'\right\} \text{ and } \tau_{\beta}^{-}(2x) > \ell T'\right] + \Pr\left[\tau_{\beta}^{-}(2x) \le \ell T'\right] \\
&\le \frac{1}{\mathrm{e}^{\ell}} + \ell T' \exp\left(-\Omega\left(nx^2\right)\right).
\end{aligned}$$

取足够大的常数 $\ell = C\log n$ $C > 0$，我们得到该结论。 □

### 6.3 最大总体的行为

在本节中，我们证明：（i） $\widetilde{\alpha}_t^{\max} \ge (1 - c^{\downarrow}_{\text{最大值}})\widetilde{\alpha}_0^{\max}$以高概率对所有 $t \le O(n^2\alpha_0^{\max}/\log n)$ 成立（引理 6.5 （条目 1））；以及（ii） $\alpha_t^{\max} \le (1 + c^{\uparrow}_{\max})\widetilde{\alpha}_0^{\max}$以高概率对所有 $t \le O(n/\alpha_0^{\max})$ 成立（引理 6.5 （条目 2））。直观地说，在群体协议模型中， $s$ 在 $\widetilde{\alpha}_t^{\max}$（或 $\alpha_t^{\max}$）的伯恩斯坦条件中的漂移和方差大致比闲聊模型中的$1/n$ 小一个因子。

**引理 6.5 (** $\widetilde{\alpha}_t^{\max}$和 $\alpha_t^{\max}$的关键性质)。设 $x = x(n)$ 为任意一个正函数，使得 $x = \omega(\sqrt{\log n/n})$ 且 $x = o(\log n/\sqrt{n})$。假设 $\beta_0 \ge 1/2 - x$。我们有以下结论：

*1.* 设 $C_{6.5(1)} = c^{\downarrow}_{\max}/72$ 为正常数。那么，对任意 $T \le C_{6.5(1)}n^2$,

$$\Pr\left[\tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}} \le T \text{ and } \tau_{\beta}^{-}(x) > T\right] \le T\exp\left(-\Omega\left(\frac{\widetilde{\alpha}_0^{\max}n^2}{T+n}\right)\right).$$

*2.* 假设 $\alpha_0^{\max} = \omega(\log n/\sqrt{n})$。设 $C_{6.5(2)} = \frac{c^{\uparrow}_{\max}}{6(1+c^{\uparrow}_{\max})^2}$。那么，对任意 $T \le \frac{C_{6.5(2)}n}{\alpha_0^{\max}}$，有

$$\Pr\left[\tau^{\uparrow}_{\max} \le \min\left\{T, \tau_{\beta}^{-}(x)\right\}\right] \le k\exp\left(-\Omega\left(\frac{\alpha_0^{\max}n^2}{T+n}\right)\right).$$

证明引理 6.5 (第1项)的关键工具是以下引理。

**引理 6.6**。设 $x = x(n)$ 为任意一个正函数，使得 $x = \omega(\sqrt{\log n/n})$ 且$x = o(\log n/\sqrt{n})$。假设 $\beta_0 \ge 1/2 - x$。设 $\tau^{\uparrow} = \max\{\tau^{\uparrow}_{\max}\ \tau^{\uparrow}_{\max}\}$。设 $C_{6.5(1)} = c^{\downarrow}_{\max}/72$为引理 *6.5*(第*1*项)中定义的正常数。那么，对任意 $T \le C_{6.5(1)}n^2$,

$$\Pr\left[\tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}} \le \min\{T, \tau^{\uparrow}, \tau_{\beta}^{-}(x)\}\right] \le \exp\left(-\Omega\left(\frac{\widetilde{\alpha}_0^{\max}n^2}{T+n}\right)\right).$$

证明。 设 $\tau^{\uparrow} =$最大值$\{\tau^{\uparrow}_{\text{最大值}}\ \tau^{\uparrow}_{\text{最大值}}\}$且 $\tau =$最小值$\{\tau^{\downarrow}_{\text{最大值}}\tau^{\uparrow},\ \tau_{\beta}^{-}(x)\}$。由引理 4.14(第 1 项)，当$\tau > t-1$时，有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\widetilde{\alpha}_t^{\max}\right] \ge \widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}\left(1 + \frac{\alpha_{t-1}^{\max} - \gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}{2n}\right) - \frac{18\alpha_{t-1}^{\max}}{n^2} \ge \widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max} - \frac{36\widetilde{\alpha}_0^{\max}}{n^2}.$$

注意，$\alpha_{t-1}^{\max} \le \alpha_0^{\max} \le 2\widetilde{\alpha}_0^{\max}$ $\alpha_{t-1}^{\max} \le \widetilde{\alpha}_0^{\max}\beta_{t-1} \le 2\widetilde{\alpha}_0^{\max}$ $\alpha_{t-1}^{\max} \le (1+c_{\max}^{\uparrow})$ 或 $(1+c^{\uparrow}$—最大值$)2\widetilde{\alpha}_0^{\max}$，也就是说，对于 $\tau^{\uparrow} > t-1$，该结论成立。

因此，令 $X_t = \widetilde{\alpha}_t^{\max}$ 和 $R = -\frac{36\widetilde{\alpha}_0^{\max}}{n^2} < 0$，我们得到

$$\mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(X_{t-1} + R - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[X_t]\right) = \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max} - \frac{36\widetilde{\alpha}_0^{\max}}{n^2} - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\widetilde{\alpha}_t^{\max}]\right) \le 0.$$

此外，

$$\mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_{t-1} + R - X_t) \le \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}\left(1 + \frac{\alpha_{t-1}^{\max} - \gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}{2n}\right) - \frac{18\alpha_{t-1}^{\max}}{n^2} - \widetilde{\alpha}_t^{\max}\right)$$

满足单边 $\left(O\left(\frac{1}{n}\right), O\left(\frac{\alpha_0^{\max}}{n^2}\right)\right)$-伯恩斯坦条件。注意，我们使用了引理 4.14(条目 2) 和引理 3.7 (条目 2 和3)。

应用引理 3.11 (条目 1)，其中 $I^- = (1 + c^{\downarrow}$—最大值$)\widetilde{\alpha}_0^{\max}$，$I^+ = (1 + c^{\uparrow}$—最大值$)\widetilde{\alpha}_0^{\max}$，以及 $T \le \frac{X_0 - I^-}{-2R} = \frac{c^{\downarrow}\text{—最大值}}{72} n^2 = C_{6.5(1)}n^2$，

$$\Pr\left[\tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow} \le \min\{T, \tau^{\uparrow}, \tau_{\beta}^{-}(x)\}\right] \le \exp\left(-\Omega\left(\frac{\widetilde{\alpha}_0^{\max} n^2}{T+n}\right)\right).$$

□

引理的证明 *6.5* (条目 *1*)。对于 $s \ge 0$，令 $\tau_s^{\downarrow} =$ 下确界$\{t \ge s : \widetilde{\alpha}_t^{\max} \le (1 + c^{\downarrow}$—最大值$)\widetilde{\alpha}_s^{\max}\}$ 和$\tau_s^{\uparrow} =$ 下确界$\{t \ge s : \widetilde{\alpha}_t^{\max} \ge (1 + c^{\uparrow}$—最大值$)\widetilde{\alpha}_s^{\max}\}$。应用引理 A.7 (条目 1) 并取 $T \le C_{6.5(1)}n^2$，可得

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow} \le T \text{ and } \tau_{\beta}^{-}(x) > T\right] &\le \sum_{s=0}^{T-1} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\widetilde{\alpha}_s^{\max} \ge \widetilde{\alpha}_0^{\max} \text{ and } \tau_{\beta}^{-}(x) > s} \Pr_s\left[\tau_s^{\downarrow} \le \min\{T, \tau_s^{\uparrow}, \tau_{\beta}^{-}(x)\}\right]\right] \\
&\le \sum_{s=0}^{T-1} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\widetilde{\alpha}_s^{\max} \ge \widetilde{\alpha}_0^{\max} \text{ and } \tau_{\beta}^{-}(x) > s} \exp\left(-\Omega\left(\frac{\widetilde{\alpha}_s^{\max} n^2}{T+n}\right)\right)\right] \\
&\le T \exp\left(-\Omega\left(\frac{\widetilde{\alpha}_0^{\max} n^2}{T+n}\right)\right).
\end{aligned}$$

注意，第二个不等式中应用了引理6.6。 □

引理的证明 *6.5*(条目 *2*)。令 $\tau =$最小值$\{\tau^{\uparrow}$最大值 $\tau_{\beta}^{-}(x)\}$。对于 $\tau > t-1$，与（13）类似，可得

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\alpha_t(i)] - \alpha_{t-1}(i) = \alpha_{t-1}(i) \cdot \frac{\alpha_{t-1}(i) + 1 - 2\beta_{t-1}}{n} \le \alpha_{t-1}(i) + \frac{3(1 + c_{\max}^{\uparrow})^2(\alpha_0^{\max})^2}{n}.$$

注意，我们使用引理 4.9 (条目 1)。因此，令 $X_t = -\alpha_t(i)$ 和 $R = -\frac{3(1+c_{\max}^{\uparrow})^2}{n}\frac{\alpha_0^{\max\ 2}}{} < 0$()，可得

$$\mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(X_{t-1} + R - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[X_t]\right) = \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\alpha_t(i)] - \alpha_{t-1}(i) - \frac{3(1 + c_{\max}^{\uparrow})^2(\alpha_0^{\max})^2}{n}\right) \le 0$$

且 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[X_t] - X_t) = \mathbf{1}_{\tau>t-1}(\alpha_t(i) - \mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(i)])$ 满足 $(1/n,\ O(\alpha_0^{\max}/n^2))$-Bernstein 条件。注意，我们使用引理 4.9 (条目3) 和引理 3.7 (条目 2 和 3)。

设 $\tau_i = \inf\{t \geq 0 : \alpha_t(i) \geq (1 + c^{\uparrow}_{\max})\alpha_0^{\max}\} = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq -(1 + c^{\uparrow}_{\max})\alpha_0^{\max}\}$。回顾 $C_{6.5(2)} = \frac{c^{\uparrow}_{\max}}{6(1+c^{\uparrow}_{\max})^2}$。对 $I^- = -(1 + c^{\uparrow}_{\max})\alpha_0^{\max}$ 应用引理 3.11（条目 1），对于 $T \leq \frac{C_{6.5(2)} n}{\alpha_0^{\max}} = \frac{X_0 - I^-}{-2R}$，我们有

$$\Pr[\tau_i \leq \min\{T, \tau\}] \leq \exp\left(-\Omega\left(\frac{\alpha_0^{\max} n^2}{T+n}\right)\right).$$

因此，应用并集界，

$$\Pr\left[\tau^{\uparrow}_{\max} \leq \min\{T, \tau\}\right] \leq \Pr[\exists i \in [k] : \tau_i \leq \min\{T, \tau\}] \leq k \exp\left(-\Omega\left(\frac{\alpha_0^{\max} n^2}{T+n}\right)\right).$$

□

以下引理自然地由前面的讨论得到。注意，关于 $\beta_t$ 和 $\psi_t$ 的界与闲聊模型中的界不同。

**引理 6.7**。令 $x = x(n)$ 为任意正函数，使得 $x = \omega(\sqrt{\text{对数}\, n/n})$ 且 $x = o(\text{对数}\, n/\sqrt{n})$。假设 $\beta_0 \geq 1/2 - x$ 和 $\psi_0 \leq x$。那么，对于任意 $T \leq C_{6.5(1)} n^2$，

$$\Pr\left[\min\{\tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}, \tau^-_\beta(2x), \tau^+_\psi(2x)\} \leq T\right] \leq T \exp\left(-\Omega\left(\frac{n^2 \widetilde{\alpha}_0^{\max}}{T+n}\right)\right) + T \exp\left(-\Omega(nx^2)\right).$$

证明。结合（14）和引理6.5（第 1项），引理 6.1、引理6.2，

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\min\{\tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}, \tau^-_\beta(2x), \tau^+_\psi(2x)\} \leq T\right] \\
&\leq \Pr\left[\tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}} \leq T \text{ and } \min\{\tau^-_\beta(2x), \tau^+_\psi(2x)\} > T\right] + \Pr\left[\tau^-_\beta(2x) \leq T\right] + \Pr\left[\tau^+_\psi(2x) \leq T\right] \\
&\leq T \exp\left(-\Omega\left(\frac{n^2 \widetilde{\alpha}_0^{\max}}{T+n}\right)\right) + T \exp\left(-\Omega(nx^2)\right).
\end{aligned}$$

□

## 6.4 两个意见之间的差距的行为

回顾定义 5.9 中弱意见及其停时的定义5.9。本节的主要结果如下引理。

**引理 6.8**（两个非弱意见中的一个会变为弱意见）。设 $i, j \in [k]$ 是任意一对非弱意见。设 $x = x(n)$ 是任意正函数，使得 $x = \omega(\sqrt{\log n/n})$ 且 $x = o(\log n/\sqrt{n})$。假设 $\psi_0 \leq x$，$\beta_0 \geq 1/2 - x$，且 $\alpha_0^{\max} = \omega(\log n/\sqrt{n})$。我们有如下结论：

*1.* 设 $C$ 是任意正常数。那么，对于某个 $T = O(n \log n/\alpha_0^{\max})$，有

$$\Pr\left[\min\left\{\tau^+_\delta\left(\sqrt{\frac{C \log n}{n}}\right), \tau_i^{\text{weak}}, \tau_j^{\text{weak}}\right\} > T \text{ or } \min\{\tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}, \tau^-_\beta(2x), \tau^+_\psi(2x)\} \leq T\right] \leq n^{-10}.$$

*2.* 假设 $\delta_0(i, j) \geq C\sqrt{\text{对数}\, n/n}$，其中常数 $C > 0$ 足够大。那么，对于某个 $T = O(n \text{对数}\, n/\alpha_0^{\max})$，

$$\Pr\left[\tau_j^{\text{weak}} > T \text{ or } \min\{\tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}, \tau^-_\beta(2x), \tau^+_\psi(2x)\} \leq T\right] \leq n^{-10}.$$

在群体协议模型中，与闲聊模型相比，伯恩斯坦条件下 $\delta_t$ 的漂移和方差 $s$ 都大约缩小了 $1/n$ 倍。我们给出以下引理。

**引理 6.9**（的乘法与加法漂移 $\delta_t$）。设 $i$、$j \in [k]$ 为任意一对非弱意见。设 $x = x(n)$ 为任意正函数，使得 $x = \omega(\sqrt{\log n/n})$ 和 $x = o(\log n/\sqrt{n})$。假设 $\beta_0 \geq 1/2 - x$、$\psi_0 \leq x$ 和 $\alpha_0^{\max} = \omega(\log n/\sqrt{n})$。我们有如下结论：

*1.* 假设 $\delta_0(i, j) \geq 0$。令 $c_\delta^\uparrow = C_{6.5(2)}(1-c^\downarrow_{\widetilde{\max}})(1-c_\delta^\downarrow)(1-2c_{\text{weak}})/12$，其中 $C_{6.5(2)}$ 是引理 6.5（第 2 项）中定义的正常数。则，

$$\Pr\left[\min\{\tau_\delta^\uparrow, \tau_j^{\text{weak}}, \tau^\downarrow_{\widetilde{\max}}, \tau_\beta^-(2x), \tau_\psi^+(2x)\} > \frac{C_{6.5(2)}n}{\alpha_0^{\max}}\right] \leq \exp\left(-\Omega\big(n\delta_0(i,j)^2\big)\right) + n\exp\left(-\Omega(n(\alpha_0^{\max})^2)\right).$$

*2.* 令 $x_\delta = c/\sqrt{n}$，其中 $c \in (0, 1)$ 是任意常数。令 $C_{6.9(2)} = 24c/(1-2c_{\text{weak}})(1-c^\downarrow_{\widetilde{\max}})$。则，

$$\Pr\left[\min\left\{\tau_\delta^+, \tau_i^{\text{weak}}, \tau_j^{\text{weak}}, \tau^\downarrow_{\widetilde{\max}}, \tau_\beta^-(x), \tau_\psi^+(x)\right\} > \frac{C_{6.9(2)}n}{\alpha_0^{\max}}\right] \leq \frac{1}{2}.$$

引理 6.9(第 1项）。设 $\tau^* = \min\{\tau_{\text{弱}j}, \tau^\uparrow_{\text{最大}}, \tau^\downarrow_{\widetilde{\text{最大}}}, \tau_\beta^-(2x), \tau_\psi^+(2x)\}$ 且 $\tau = \min\{\tau_\delta^\uparrow, \tau_\delta^\downarrow, \tau^*\}$。对于 $\tau > t-1$，我们有

$$\begin{aligned}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\delta_t] &= \delta_{t-1} + \frac{\delta_{t-1}\beta_{t-1}\widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}}{n}\left(\frac{\alpha_{t-1}(i)+\alpha_{t-1}(j)}{\alpha_{t-1}^{\max}} - \frac{\gamma_{t-1}}{\beta_{t-1}\alpha_{t-1}^{\max}} - \frac{\psi_{t-1}}{\beta_{t-1}^2\widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}}\right)\\ &\geq \delta_{t-1} + \frac{(1-c^\downarrow_{\widetilde{\max}})(1-c_\delta^\downarrow)(1-2c_{\text{weak}})}{6}\cdot\frac{\delta_0\alpha_0^{\max}}{n}.\end{aligned}$$

注意，我们使用引理4.11(第 1项）和（15）。

令 $X_t = \delta_t$ 和 $R = (1-c^\downarrow_{\widetilde{\text{最大}}})(1-c_\delta^\downarrow)(1-2c_{\text{weak}})/6 \cdot \delta_0\alpha_0^{\max}/n > 0)$，我们有

$$\mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(X_{t-1} + R - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[X_t]\right) = \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\delta_{t-1} + R - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\delta_t]\right) \leq 0$$

且 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[X_t] - X_t) = \mathbf{1}_{\tau>t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[\delta_t] - \delta_t)$ 满足 $(O(1/n)\ O(\alpha_0^{\max}/n^2))$-伯恩斯坦条件。注意，我们使用引理4.11 (第3项）和引理3.7(第 2项和第3项）。

设 $I^+ = (1+c)\delta_0$ 和 $I^- = (1-c)\delta_0$。回想一下，$c_\delta^\uparrow = C_{6.5(2)}(1-c^\downarrow_{\widetilde{\max}})(1-c_\delta^\downarrow)(1-2c_{\text{weak}})/12$。令 $T = C_{6.5(2)}n/\alpha_0^{\max}$。于是，我们有 $T = 2(I^+ - \delta_0)/R$。因此，我们可以应用引理 3.11 (第 2 项）并得到

$$\Pr\left[\min\{\tau_\delta^\uparrow, \tau^*\} > T\right] \leq \exp\left(-\Omega\big(n\delta_0^2\big)\right).$$

应用引理 6.5(第 2 项)，可得

$$\begin{aligned}&\Pr\left[\min\{\tau_\delta^\uparrow, \tau_j^{\text{weak}}, \tau^\downarrow_{\widetilde{\max}}, \tau_\psi^+(2x)\} > T \text{ and } \tau_\beta^-(2x) > T\right]\\ &\leq \Pr\left[\min\{\tau_\delta^\uparrow, \tau_j^{\text{weak}}, \tau^\downarrow_{\widetilde{\max}}, \tau_\psi^+(2x)\} > T \text{ and } \tau_\beta^-(2x) > T \text{ and } \tau_{\max}^\uparrow > T\right]\\ &+ \Pr\left[\tau_{\max}^\uparrow \leq T \text{ and } \tau_\beta^-(2x) > T\right]\\ &\leq \exp\left(-\Omega\big(n\delta_0^2\big)\right) + n\exp\left(-\Omega(n(\alpha_0^{\max})^2)\right).\end{aligned}$$

□

引理 6.9(第 2 项)的证明。 令 $\tau = \min\{\tau_\delta^+, \tau_i^{\text{weak}}, \tau_j^{\text{weak}}, \tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}, \tau_\beta^-(x)\ \tau_\psi^+(x)\}$。对于 $t-1<\tau$,

$$\begin{aligned}
\underset{t-1}{\mathbf{Var}}[\delta_t] &\geq \frac{\alpha_{t-1}(i)(1-\alpha_{t-1}(i))}{n^2} + \frac{\alpha_{t-1}(j)(1-\alpha_{t-1}(j))}{n^2} - \frac{4\delta_{t-1}(i,j)^2}{n^2} && \text{(by Lemma 4.11)}\\
&\geq \frac{(1-2c_{\text{weak}})\alpha_{t-1}^{\max} - 4c^2/n}{n^2} && \text{(by (17))}\\
&\geq \frac{(1-2c_{\text{weak}})(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})\alpha_0^{\max} - 12c^2/n}{3n^2}\\
&\geq \frac{(1-2c_{\text{weak}})(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})\alpha_0^{\max}}{6n^2}.
\end{aligned}$$

注意 $\alpha_0^{\max} = \omega(1/n)$。因此，对于 $t-1<\tau$，我们有

$$\underset{t-1}{\mathbb{E}}[\delta_t^2] = \underset{t-1}{\mathbb{E}}[\delta_t]^2 + \underset{t-1}{\mathbf{Var}}[\delta_t] \geq \delta_{t-1}^2 + \frac{(1-2c_{\text{weak}})(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})\alpha_0^{\max}}{6n^2}.$$

注意 $\mathbb{E}_{t-1}[\delta_t]^2 \geq \delta_{t-1}^2$ 对 $\tau > t-1$ ((18))成立。设 $R = \frac{(1-2c_{\text{weak}})(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})}{6n^2}\alpha_0^{\max}$ 以及 $X_t = \delta_t^2 - Rt$和 $Y_t = X_{t\wedge\tau}$。于是，我们有

$$\underset{t-1}{\mathbb{E}}[Y_t - Y_{t-1}] = \mathbf{1}_{\tau>t-1}\underset{t-1}{\mathbb{E}}[X_t - X_{t-1}] = \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\underset{t-1}{\mathbb{E}}[\delta_t^2] - Rt - \delta_{t-1}^2 + R(t-1)\right) \geq 0,$$

即，$(Y_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ 是一个次鞅。由定理 A.4，我们有 $\mathbb{E}[Y_\tau] \geq \mathbb{E}[Y_0] = \delta_0^2 \geq 0$ 与 $\mathbb{E}[Y_\tau] = \mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[\delta_\tau^2] - R\,\mathbb{E}[\tau]$ 成立。因此，

$$\mathbb{E}[\tau] \leq \frac{\mathbb{E}[\delta_\tau^2]}{R} \leq \frac{\left(\frac{c}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)^2}{R} \leq \frac{24c}{(1-2c_{\text{weak}})(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})}\frac{n}{\alpha_0^{\max}} = \frac{C_{6.9(2)}n}{2\alpha_0^{\max}}.$$

我们由马尔可夫不等式得到该结论。 □

证明引理 6.8 （第 1 项）。 应用引理 A.6 于 $Z_t = \text{opn}_t$, $\varphi(Z_t) = \sqrt{n}\cdot|\delta_t(i,j)|$, $^-$

$$\tau = \min\left\{\tau_i^{\text{weak}}, \tau_j^{\text{weak}}, \tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}, \tau_\beta^-(2x), \tau_\psi^+(2x)\right\},$$

$c_\varphi^\uparrow = c_\delta^\uparrow$、 $x_0 = c_\delta^+$ 和$x^* = \sqrt{C\log n}$。 定义

$$\tau^\uparrow = \begin{cases} \tau_\delta^\uparrow(i,j) & \text{if } \delta_0(i,j) \geq 0,\\ \tau_\delta^\uparrow(j,i) & \text{if } \delta_0(j,i) > 0 \text{ (i.e., } \delta_0(i,j) < 0) \end{cases},$$

其中 $\tau_\delta^\uparrow(i,j) = \tau_\delta^\uparrow = \inf\{t\geq 0 :\ \delta_t(i,j) \geq (1+c_\delta^\uparrow)\delta_0(i,j)\}$。那么，根据这些设定，我们有

$$\begin{aligned}
\tau_\varphi^+(x_0) &= \inf\{t\geq 0 : \sqrt{n}|\delta_t| \geq c_\delta^+\} = \tau_\delta^+,\\
\tau_\varphi^\uparrow &= \inf\{t\geq 0 : \sqrt{n}|\delta_t| \geq (1+c_\delta^\uparrow)\sqrt{n}|\delta_0|\} \leq \tau^\uparrow.
\end{aligned}$$

由引理6.9 （第 2 项），可得

$$\Pr\left[\min\left\{\tau_\varphi^+(x_0), \tau\right\} > \frac{C_{6.9(2)}n}{\alpha_0^{\max}}\right] \leq 1/2,$$

即，引理 A.6 的第一个条件对 $C_1 = 1/2$成立。注意，若 $\beta_0 < 1/2 - 2x$ 或 $\psi_0 > 2x$或 $\alpha_0^{\max} \le O$（$\sqrt{}$对数 $n/n$），则 $\tau = 0$。接下来，由引理 6.9 （第 1 项），

$$\begin{aligned}\Pr\left[\min\{\tau_\varphi^{\uparrow}, \tau\} > \frac{C_{6.5(2)} n}{\alpha_0^{\max}}\right] &\le \Pr\left[\min\{\tau^{\uparrow}, \tau\} > \frac{C_{6.5(2)} n}{\alpha_0^{\max}}\right] \\ &\le \exp\left(-\Omega\left(n\delta_0(i,j)^2\right)\right) + n\exp\left(-\Omega\left(n(\alpha_0^{\max})^2\right)\right) \\ &\le \exp\left(-\Omega\left(\varphi(Z_0)^2\right)\right)\end{aligned}$$

对 $\delta_0(i,j) \le C\sqrt{\log n/n}$ 成立，即引理 A.6 的第二个条件对某个正常数 $C_2$ 成立。注意，根据关于 $\alpha_0^{\max} = \omega(\sqrt{\log n/n})$ 的假设，$n\exp\left(-\Omega(n(\alpha_0^{\max})^2)\right) \le n^{-\omega(1)} \le \exp\left(-\Omega(n\delta_0(i,j)^2)\right)$。注意，如果 $\beta_0 < 1/2 - 2x$ 或 $\psi_0 > 2x$ 或 $\alpha_0^{\max} \le O(\sqrt{\log n/n})$，那么$\tau = 0$。

写出 $\tau_{\text{弱}} =$最小值$\{\tau_{\text{弱}i}, \tau_j^{\text{weak}}\}$以及 $\tau_{ini} =$最小值$\{\tau^{\downarrow}$最大值 $\tau_\beta^-(2x)$ $\tau_\psi^+(2x)\}$。根据引理 A.6和 6.7，取 $\varepsilon = n^{-30}$，对于某个 $T' = O(n\log n/\alpha_0^{\max})$，

$$\begin{aligned}&\Pr\left[\min\{\tau_\delta^+(\sqrt{C\log n/n}), \tau^{\text{weak}}\} > T' \text{ or } \tau_{ini} \le T'\right] \\ &\le \Pr\left[\left\{\min\{\tau_\varphi^+(x_*), \tau^{\text{weak}}\} > T' \text{ or } \tau_{ini} \le T'\right\} \text{ and } \tau_{ini} > T'\right] + \Pr\left[\tau_{ini} \le T'\right] \\ &\le \Pr\left[\min\{\tau_\varphi^+(x_*), \tau^{\text{weak}}, \tau_{ini}\} > T'\right] + \Pr\left[\tau_{ini} \le T'\right] \\ &\le n^{-20}.\end{aligned}$$

□

引理 6.8（条目 2）的证明。令 $\tau^{\uparrow(s)} = \inf\{t \ge 0\colon \delta_t \ge (1+c)^s\delta_0\}$。令 $\tau^* = \min\{\tau^{\downarrow}$max $\tau_\beta^-(2x)$ $\tau_\psi^+(2x)\}$。根据定义，对于某个 $\ell = \Theta(\log n)$，$\tau_{\text{弱}j} \le \tau^{\uparrow(\ell)}$成立。令 $T' = \frac{3C_{6.5(2)}n}{(1-c^{\downarrow}\text{max})\alpha_0^{\max}}$。应用引理 A.7（第3项），我们有 $\Pr\left[\min\{\tau_{\text{弱}j}, \tau^*\} > \ell T'\right] \ge \Pr\left[\min\{\tau^{\uparrow(\ell)}, \tau^*\} > \ell T'\right]$ 以及

$$\begin{aligned}\Pr\left[\min\{\tau^{\uparrow(\ell)}, \tau^*\} > \ell T'\right] &\le \sum_{s=1}^{\ell} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\tau^* > \tau^{\uparrow(s-1)}} \Pr_{\tau^{\uparrow(s-1)}}\left[\min\{\tau^{\uparrow(s)}, \tau^*\} > \tau^{\uparrow(s-1)} + \frac{3C_{6.5(2)}}{(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})\alpha_0^{\max}}\right]\right] \\ &\le \sum_{s=1}^{\ell} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\tau^* > \tau^{\uparrow(s-1)}} \Pr_{\tau^{\uparrow(s-1)}}\left[\min\{\tau^{\uparrow(s)}, \tau^*\} > \tau^{\uparrow(s-1)} + \frac{C_{6.5(2)}}{\alpha_{\tau^{\uparrow(s-1)}}^{\max}}\right]\right] \\ &\le \ell\left(\exp\left(-\Omega(n\delta_0^2)\right) + n\exp\left(-\Omega\left(n(\alpha_0^{\max})^2\right)\right)\right).\end{aligned}$$

注意，$\alpha_{\tau^{\uparrow(s-1)}}^{\max} \ge (1 - c^{\downarrow}\text{max})\widetilde{\alpha}_0^{\max}/3 \ge (1 - c^{\downarrow}\text{max})\alpha_0^{\max}/3 \ge \omega(\sqrt{\log n/n})$ 成立。 □

## 6.5 唯一强势意见的出现

回顾定义 5.15 中停时的定义。我们可以通过与闲聊模型中类似的方法证明以下引理，从而确保唯一强意见的出现与持续存在。

**引理 6.10** (唯一强意见引理)。设 $x = x(n)$ 和 $y = y(n)$ 为任意正函数，使得 $x = \omega(\sqrt{\log n/n})$、$y = \omega(x)$以及 $y = o(\log n/\sqrt{n})$。假设 $\psi_0 \le x$，$\beta_0 \ge 1/2 - x$ 和 $\alpha_0^{\max} = \omega(\log n/\sqrt{n})$。我们有如下结论：

*1.* 对于某个 $T = O(n\log n/\alpha_0^{\max})$，有

$$\Pr\left[\tau_{us}^{+}(y) > T \text{ or } \min\{\tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}, \tau_{\beta}^{-}(8x), \tau_{\psi}^{+}(8x)\} \le T\right] \le O(n^{-10}).$$

*2.* 假设 $\eta_0(j) \ge y$ 对所有 $j \ne I_0$均成立。那么，对于任意 $T \le C_{6.5(1)}n^2$，我们有

$$\Pr\left[\min\{\tau_{us}^{-}(y/2), \tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}, \tau_{\beta}^{-}(2x), \tau_{\psi}^{+}(2x)\} \le T\right] \le n^{-10}.$$

引理 6.10 的证明依赖于以下引理。本质上，该引理源于群体协议模型中 $\eta_t(j)$ 的漂移，该漂移约为闲聊模型中漂移的 $1/n$ 倍。

引理 *6.11*（$\eta_t(j)$ 的有界下降）。设 $x = x(n)$ 和 $y = y(n)$ 是任意正函数，使得 $x = \omega(\sqrt{\log n/n})$、$y = \omega(x)$ 和 $y = o(\log n/\sqrt{n})$。假设 $\psi_0 \le x$，$\beta_0 \ge 1/2 - x$，$\alpha_0^{\max} = \omega(\log n/\sqrt{n})$，且 $\eta_0(j) \ge y$ 对所有 $j \ne I_0$均成立。那么，对于任意 $T \ge 0$，

$$\Pr\left[\tau_{\eta}^{-}(y/2) \le T \text{ and } \min\{\tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}, \tau_{\beta}^{-}(x), \tau_{\psi}^{+}(x)\} > T\right] \le Tn^{-\omega(1)}.$$

**弱者不能变强：引理 6.11 的证明。** 为了证明引理 6.11，我们使用以下引理：

引理 *6.12.* 设 $x = x(n)$、$y = y(n)$ 和 $I = I(n)$ 为任意正函数，使得$x = \omega(\sqrt{\log n/n})$、$I = \omega(x)$、$y = \omega(I)$ 和 $y = o(\log n/\sqrt{n})$。假设 $\beta_0 \ge 1/2 - x$、$\psi_0 \le x$、$\alpha_0^{\max} \ge \omega(\log n/\sqrt{n})$ 和 $\eta_0(j) \in [y, y + I]$。则对任意 $T \ge {}^{24}(1+c_\eta)\,1-c^{\downarrow}\widetilde{\max}\, In\,(y-I)\alpha_0^{\max}$，我们有

$$\Pr\left[\tau_{\eta}^{-}(y - I) < \tau_{\eta}^{+}(y + 2I) \text{ and } \min\{\tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}, \tau_{\max}^{\uparrow}, \tau_{\beta}^{-}(x), \tau_{\psi}^{+}(x)\} > T\right] \le n^{-\omega(1)}.$$

证明。设 $\tau^* = \min\{\tau^{\downarrow}\widetilde{\max}\ \tau_{\beta}^{-}(x)\ \tau_{\psi}^{+}(x)\}$并设 $\tau = \min\{\tau_{\eta}^{+}(y+2I)\,\tau_{\eta}^{-}(y-I)\ \tau^*\}$。对 $t-1 < \tau$，我们有 $\mathbb{E}_{t-1}[\eta_t(j)] \ge \mathbb{E}_{t-1}[\delta_t^{(c_\eta)}(I_{t-1}, j)]$ 且

$$\begin{aligned}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\delta_t^{(c_\eta)}(I_{t-1}, j)] &\ge \delta_{t-1}^{(c_\eta)}(I_{t-1}, j) + \frac{\delta_{t-1}^{(c_\eta)}(I_{t-1}, j)}{n}(\alpha_{t-1}(I_{t-1}) + \alpha_{t-1}(j) + 1 - 2\beta_{t-1}) \\ &\ge \eta_{t-1}(j) + \frac{1 - c_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}}{6(1 + c_\eta)} \cdot \frac{(y - I)\alpha_0^{\max}}{n}.\end{aligned}$$

注意，我们使用引理4.11（第1项）和（21）。

令 $X_t = \eta_t(j)$ 和 $R = {}^{1-c^{\downarrow}\widetilde{\max}6(1+c_\eta)}\cdot{}_{(y-I)n}\,\alpha_0^{\max} > 0$，则有 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_{t-1} + R - \mathbb{E}_{t-1}[X_t])$ $=\mathbf{1}_{\tau>t-1}(\eta_{t-1}(j) + R - \mathbb{E}_{t-1}[\eta_t(j)]) \le 0$。此外，有 $X_{t-1} + R - X_t = \eta_{t-1}(j) + R - \eta_t(j)$，并且

$$\mathbf{1}_{\tau>t-1}(\eta_{t-1}(j) + R - \eta_t(j)) \le \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\delta_t^{(c_\eta)}(I_{t-1}, j)] - \delta_t^{(c_\eta)}(I_{t-1}, j)\right),$$

即，$\mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_{t-1} + R - X_t)$ 满足单侧 $(O(1/n)\ O(\alpha_0^{\max}/n^2))$-伯恩斯坦条件。注意，我们使用引理 4.11（第3项）和引理 3.7（第2 和第 3项）。

令 $I^- = y - I$，$I_*^- = y$，$I_*^+ = y + I$，以及 $I^+ = y + 2I$。注意到 $I^+ - I_*^+ = I_*^+ - I_*^- = I_*^- - I^- = I$。令 $T \ge {}^{24}(1+c_\eta)\,1-c^{\downarrow}\widetilde{\max}\,In\,(y-I)\alpha_0^{\max} \ge {}_2\,(I^{\pm} - X_0)\,R$。对 3.11（条目 2）中的引理应用于 $\eta_0(j) \in [I_*^-, I_*^+]$，可得

$$\Pr\left[\tau_{\eta}^{-}(y - I) < \tau_{\eta}^{+}(y + 2I) \text{ and } \tau^* > T\right] \le \exp\left(-\Omega\left(\frac{I^2}{\frac{\alpha_0^{\max}}{n^2}T + \frac{I}{n}}\right)\right) \le \exp\left(-\Omega(nI(y - I))\right).$$

□

引理 6.11 的证明。令 $I = I(n)$ 为正参数，使得 $I = \omega(x)$ 且 $I = o(y)$。令$I^- = y - I$、 $I_*^- = y$、 $I_*^+ = y + I$和 $I^+ = y + 2I$。注意到 $I^+ - I_*^+ = I_*^+ - I_*^- = I_*^- - I^- = I$。令 $T' = {}^{24}(1+c_\eta)\,{}^{1-c}\!\downarrow\!\frown\max I n$ ( $_{y-I)\alpha_0^{\max}} = o\left(\frac{n}{\alpha_0^{\max}}\right)$。然后，结合引理 6.1、6.2、6.5 和 6.6（条目 2），若 $\beta_0 \geq 1/2 - x \geq 1/2 - 2x$、 $\psi_0 \leq x \leq 2x$、 $\alpha_0^{\max} \geq \omega(\log\, n/\sqrt{n})$ 且 $\eta_0(j) \in [I_*^-, I_*^+]$，则由引理 6.12 可得， $^-$

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\tau_\eta^-(y-I) < \tau_\eta^+(y+2I)\right] \\
&\leq \Pr\left[\tau_\eta^-(y-I) < \tau_\eta^+(y+2I) \text{ and } \min\{\tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}, \tau_{\max}^{\uparrow}, \tau_\beta^-(2x), \tau_\psi^+(2x)\} > T'\right] \\
&+ \Pr\left[\min\{\tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}, \tau_{\max}^{\uparrow}, \tau_\beta^-(2x)\} \leq T'\right] + \Pr\left[\tau_\psi^+(2x) \leq T'\right] \\
&\leq n^{-\omega(1)}.
\end{aligned}$$

设 $\tau^* = \min\{\tau^{\downarrow}\!\frown\max\, \tau_\beta^-(x)\ \tau_\psi^+(x)\}$。设 $\tau_s^- = \inf\{t \geq s\colon\ \eta_t(j) \leq I^-\}$且 $\tau_s^+ = \inf\{t \geq s\colon \eta_t(j) \geq I^+\}$。假设 $\eta_0(j) \in [I_*^-, I_*^+]$、 $\beta_0 \geq 1/2 - x$、 $\psi_0 \leq x$，以及 $\alpha_0^{\max} \geq \omega(\log\, n/\sqrt{n})$。应用引理 A.7（条目 2），我们有

$$\Pr\left[\tau_\eta^-(y-I) \leq T \text{ and } \tau^* > T\right] \leq \sum_{s=0}^{T-1} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\eta_s(j)\in[I_*^-, I_*^+] \text{ and } \tau^* > s} \Pr_s\left[\tau_s^- < \tau_s^+\right]\right] \leq T n^{-\omega(1)}.$$

□

**唯一强势意见的出现：引理的证明6.10。**

引理的证明 *6.10* （条目 *1*）。固定任意一对不同的意见 $i$ 和 $j$。观察到以下成立：

- 结合引理 6.8 的条目 1 和条目 2，对某个 $T_1 = O(n\log\, n/\alpha\max 0)$，$\min\{\alpha_{T_1}(i)\ \alpha_{T_1}(j)\} \leq (1-c\text{弱})\alpha\max_{T_1}$、 $\beta_{T_1} \geq 1/2 - 4x$、 $\psi_{T_1} \leq 4x$，以及 $\alpha\max_{T_1} = \Omega(\alpha\max 0) = \omega(\log n/\sqrt{n})$，其概率至少为 $1 - n^{-10}$。假设 $\alpha_{T_1}(j) \leq (1-c\text{弱})\alpha\max_{T_1}$，不失一般性。由 $\eta_t(j)$ 的定义，我们有 $\eta_{T_1}(j) \geq {}^{c}$弱$-c$强 $^{1-c\text{强}}\,\alpha\max_{T_1} = \Omega(\alpha\max 0) \geq 2y$。
- 由引理 6.11 可知，对任意 $t \in [T_1, T_1 + T_2]$，其中 $T_2 \geq n^2\alpha_{\max_{T_1}}/C\log\, n = \Omega(n^2\alpha_{\max_0}/\log\, n)$,$\eta_t(j) \geq y$, $\beta_t \geq 1/2 - 8x$, $\psi_t \leq 8x$，且 $\alpha_{\max t} = \Omega(\alpha_{\max 0}) = \omega(\log n/\sqrt{n})$，其成立概率至少为 $1 - n^{-\omega}{}_{(1)}$。

由于 $T_1 = O(n\log\, n/\alpha_0^{\max}) = o(n\sqrt{n})$,$^-$且 $T_2 = \Omega(n^2\alpha_0^{\max}/\log\, n) = \omega(n\sqrt{n})$，因此有 $T_1 < T_2$。于是，对所有不同意见对 $i, j \in [k]$ 应用并集界可得，以高概率存在 $t \leq T_1$，使得对所有 $j \neq I_t$， $\eta_t(j) \geq y$。

□

引理证明 *6.10* （项目 *2*）。考虑任意一个意见 $j \neq I_0$。结合引理 6.7和 6.11，

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\tau_\eta^-(y/2) \leq T \text{ or } \min\{\tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}, \tau_\beta^-(2x), \tau_\psi^+(2x)\} \leq T\right] \\
&\leq \Pr\left[\left\{\tau_\eta^-(y/2) \leq T \text{ or } \min\{\tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}, \tau_\beta^-(2x), \tau_\psi^+(2x)\} \leq T\right\} \text{ and } \min\{\tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}, \tau_\beta^-(2x), \tau_\psi^+(2x)\} > T\right] \\
&+ \Pr\left[\min\{\tau_{\widetilde{\max}}^{\downarrow}, \tau_\beta^-(2x), \tau_\psi^+(2x)\} \leq T\right] \\
&\leq n^{-11}. \qquad (36)
\end{aligned}$$

因此，根据并集界，我们得到了所要证明的结论。 □

## 6.6 迈向共识

一旦我们证明在 $O(n\log n/\alpha_0^{\max})$ 轮次内恰好存在一个强意见，就可以证明以高概率在 $O(n\log n/\alpha_0^{\max})$ 轮次内达成共识。本节的主要引理如下：

引理 *6.13*（唯一强意见导向共识）。设 $x=x(n)$ 和 $y=y(n)$ 是任意正函数，满足 $x=\omega(\sqrt{\log n/n})$、$y=\omega(x)$ 和 $y=o(\log n/\sqrt{n})$。假设 $\psi_0\le x,\beta_0\ge 1/2-x$，$\alpha_0^{\max}=\omega(\log n/\sqrt{n})$，且对所有 $j\neq I_0$，$\eta_0(j)\ge y$。那么，对于某个 $T=O(n\log n/\alpha_0^{\max})$，有 $\Pr[\tau_{\text{cons}}>T]\le 1/n$。

回顾第5.7节中定义的停时。我们引入以下引理来证明引理6.13。这些引理与闲聊模型中的引理类似，但伯恩斯坦条件中的漂移和方差有所不同。

**引理 6.14**。设 $x=x(n)$ 和 $y=y(n)$ 是任意正函数，满足 $x=\omega(\sqrt{\log n/n})$、$y=\omega(x)$和 $y=o(\log n/\sqrt{n})$。我们有如下结论：

1. 令 $c\in(0,1)$ 为任意常数。假设对所有 $j\neq I_0$，$\psi_0\le x$，$\beta_0\ge 1/2-x$，$\alpha_0^{\max}=\omega(\log n/\sqrt{n})$，且 $\eta_0(j)\ge y$。那么，对于某个 $T=O(n\log n/\alpha_0^{\max})$，
$$\Pr\left[\tau^+_{\widetilde{\max}}(1-c)>T \text{ or } \min\{\tau^+_\psi(2x),\tau^-_\beta(2x)\}\le T\right]\le n^{-10}.$$
2. 假设 $\psi_0\le x$，$\beta_0\ge 1/2-x$，且 $\alpha_0(1)\ge(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\text{最大}}})\beta_0$。那么，对于某个 $T=O(n\log n)$，
$$\Pr\left[\tau^+_{\max}(1-4c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})>T \text{ or } \min\{\tau^+_\psi(2x),\tau^-_\beta(2x)\}\le T\right]\le n^{-10}.$$
3. 假设 $\alpha_0(1)\ge 7/8$。那么，概率 $[\tau_{all}>8n\log n$ 或 $\tau^-_{\max}(3/4)\le 8n\log n]\le 1/n.$
4. 假设 $\alpha_0(1)=\beta_0$ 且 $\beta_0\ge 1/2-x$。那么，概率$[\tau_{\text{cons}}>6n\log n]\le 1/n$。

引理 6.14 的证明（条目 1）。令 $\tau^{\uparrow}_{\widetilde{\max}}=\inf\{t\ge 0:\widetilde{\alpha}^{\max}_t\ge(1+c^{\uparrow}_{\widetilde{\max}})\widetilde{\alpha}^{\max}_0\}$，其中 $c^{\uparrow}_{\widetilde{\max}}\in(0,1)$ 是某个正常数。令 $\tau^*=\min\{\tau^+_{\widetilde{\max}}\ \tau^-_\beta(2x)\ \tau^-_{us}(y/2)\}$，且 $\tau=\min\{\tau^{\uparrow}_{\widetilde{\max}}\ \tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}\ \tau^*\}$。对于$t-1<\tau$，通过类似于引理 5.21（条目 1）证明中的计算，我们有
$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\widetilde{\alpha}^{\max}_t]\ge\widetilde{\alpha}^{\max}_{t-1}\left(1+\frac{\alpha^{\max}_{t-1}-\gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}{2n}\right)-\frac{18\alpha^{\max}_{t-1}}{n^2}\ge\widetilde{\alpha}^{\max}_{t-1}+\frac{c_{\text{strong}}c(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})^2(\alpha^{\max}_0)^2}{12n^2}.$$
注意，我们使用了引理 4.14、(23) 和 $\alpha^{\max}_{t-1}\ge(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})\widetilde{\alpha}^{\max}_0/3=\omega(1/n)$。

因此，令 $X_t=\widetilde{\alpha}^{\max}_t$和 $R=\frac{c_{\text{strong}}c(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\text{最大值}}})^2(\alpha^{\max}_0)^2}{12n}>0$，我们有 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_{t-1}+R-\mathbb{E}_{t-1}[X_t])=\mathbf{1}_{\tau>t-1}(\widetilde{\alpha}^{\max}_{t-1}+R-\mathbb{E}_{t-1}[\widetilde{\alpha}^{\max}_t])\le 0$ 和
$$\mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_{t-1}+R-X_t)\le\mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\widetilde{\alpha}^{\max}_{t-1}\left(1+\frac{\alpha^{\max}_{t-1}-\gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}{2n}\right)-\frac{18\alpha^{\max}_{t-1}}{n^2}-\widetilde{\alpha}^{\max}_t\right)$$
满足单侧 $\left(O\left(\frac{1}{n}\right),O\left(\frac{\alpha^{\max}_0}{n^2}\right)\right)$-伯恩斯坦条件。注意，我们使用引理 4.14和引理 3.7 (条目2 和 3)。

应用引理 3.11 (条目 2)，对于 $I^+ = (1 + c^{\uparrow}_{\widetilde{\text{最大值}}})\widetilde{\alpha}_0^{\max}$, $I^- = (1 + c^{\downarrow}_{\widetilde{\text{最大值}}})\widetilde{\alpha}_0^{\max}$，以及 $T' = \frac{2(I^+ - X_0)}{c_{\text{strong}} c^+} \frac{R}{(1-c^{\downarrow}_{\widetilde{\text{最大值}}})^2 \alpha_0^{\max}}$，我们有

$$\Pr\left[\tau^{\uparrow}_{\widetilde{\max}} > T' \text{ and } \tau^* > T'\right] \le \exp\left(-\Omega\left(n(\alpha_0^{\max})^2\right)\right).$$

设 $\tau^{\uparrow(s)} = \inf\{t \ge 0 : \widetilde{\alpha}_t^{\max} \ge (1 + c^{\uparrow}_{\widetilde{\max}})^s \widetilde{\alpha}_0^{\max}\}$。由定义，对某个 $\ell = \Theta(\log n)$，$\tau^{\pm}_{\widetilde{\max}} \le \tau^{\uparrow(\ell)}$ 成立。应用引理 A.7（条目 3），我们得到 $\Pr\left[\min\{\tau^{\pm}_{\widetilde{\max}}, \tau^*\} > \ell T'\right] \le \Pr\left[\min\{\tau^{\uparrow(\ell)}, \tau^*\} > \ell T'\right]$ 以及

$$\begin{aligned}\Pr\left[\min\{\tau^{\uparrow(\ell)}, \tau^*\} > \ell T'\right] &\le \sum_{s=1}^{\ell} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\tau^* > \tau^{\uparrow(s-1)}} \Pr_{\tau^{\uparrow(s-1)}}\left[\min\{\tau^{\uparrow(s)}, \tau^*\} > \tau^{\uparrow(s-1)} + T'\right]\right] \\ &\le \ell \exp\left(-\Omega\left(n(\alpha_0^{\max})^2\right)\right).\end{aligned}$$

注意 $\alpha^{\max}_{\tau^{\uparrow(s-1)}} \ge \Omega(\alpha_0^{\max})$ 成立。最后，结合上述结果与（36），我们有

$$\begin{aligned}&\Pr\left[\tau^{\pm}_{\widetilde{\max}} > T \text{ or } \min\{\tau^+_{\psi}(2x), \tau^-_{\beta}(2x)\} \le T\right] \\ &\le \Pr\left[\left\{\tau^{\pm}_{\widetilde{\max}} > T \text{ or } \min\{\tau^+_{\psi}(2x), \tau^-_{\beta}(2x)\} \le T\right\} \text{ and } \min\{\tau^+_{\psi}(2x), \tau^-_{\beta}(2x), \tau^-_{us}(y/2)\} > T\right] \\ &+ \Pr\left[\min\{\tau^+_{\psi}(2x), \tau^-_{\beta}(2x), \tau^-_{us}(y/2)\} \le T\right] \\ &\le n^{-10}.\end{aligned}$$

□

引理 6.14 的证明（条目 2）。设 $\tau^{\downarrow}_{\max} = \inf\{t \ge 0 : \alpha_t^{\max} \le (1 - c^{\downarrow}_{\max})\alpha_0^{\max}\}$。设 $\tau^* = \min\{\tau^+_{\max}(1 - 4c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}), \tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}, \tau^-_{\beta}(2x)\}$ 以及 $\tau = \min\{\tau^{\uparrow}_{\max}, \tau^{\downarrow}_{\max}, \tau^*\}$。对于 $t - 1 < \tau$，采用与引理 5.21（条目 2）的证明类似的计算，

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\alpha_t(1)] - \alpha_{t-1}(1) = \frac{\alpha_{t-1}(1)}{n}\left(1 - \alpha_{t-1}(1)\left(\frac{2}{\widetilde{\alpha}^{\max}_{t-1}} - 1\right)\right) \ge \frac{8(c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})^2(1 - c^{\downarrow}_{\max})}{1 - 2c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}} \frac{\alpha_0(1)}{n}.$$

因此，令 $X_t = \alpha_t(1)$ and $R = \frac{8(c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}})^2(1-c^{\downarrow}_{\max})}{1-2c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}} \alpha_0(1)_n > 0$，我们有 $\mathbf{1}_{\tau > t-1}(X_{t-1} + R - \mathbb{E}_{t-1}[X_t]) = \max \mathbf{1}_{\tau > t-1}(\alpha_{t-1}(1) + R - \mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(1)]) \le 0$，并且 $\mathbf{1}_{\tau > t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[X_t] - X_t) = \mathbf{1}_{\tau > t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(1)] - \alpha_t(1))$ 满足单侧 $\left(O\left(\frac{1}{n}\right), O\left(\alpha_0\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$-伯恩斯坦条件。注意，我们使用了引理 4.2（第3项）和引理 3.7（第2项和第3项）。

对 $I^+ = (1 + c^{\uparrow}_{\max})\alpha_0(1)$、$I^- = (1 - c^{\downarrow}_{\max})\alpha_0(1)$ 和 $T' = \frac{c^{\uparrow}_{\max}(1-2c^{\downarrow}_{\widetilde{\text{最大值}}})}{2(I^+ - X_0)} \frac{4(c^{\downarrow}_{\widetilde{\text{最大值}}})^2(1-c^{\downarrow}_{\max})}{R}$，$n = $ 应用引理 3.11（条目 2），可得

$$\Pr\left[\tau^{\uparrow}_{\max} > T' \text{ and } \tau^* > T'\right] \le \exp\left(-\Omega\left(n(\alpha_0^{\max})^2\right)\right).$$

令 $\tau^{\uparrow(s)} = \inf\{t \ge 0 : \alpha_t^{\max} \ge (1 + c^{\uparrow}_{\max})^s \alpha_0^{\max}\}$。根据定义，对于某个 $\ell = \Theta(\log n)$，$\tau^+_{\max}(1 - 4c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}) \le \tau^{\uparrow(\ell)}$ 成立。应用引理 A.7 (第 3 项，可得

$$\begin{aligned}\Pr\left[\min\{\tau^+_{\max}(1 - 4c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}), \tau^*\} > \ell T'\right] &\le \Pr\left[\min\{\tau^{\uparrow(\ell)}, \tau^*\} > \ell T'\right] \\ &\le \sum_{s=1}^{\ell} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\tau^* > \tau^{\uparrow(s-1)}} \Pr_{\tau^{\uparrow(s-1)}}\left[\min\{\tau^{\uparrow(s)}, \tau^*\} > \tau^{\uparrow(s-1)} + T'\right]\right] \\ &\le \ell \exp\left(-\Omega\left(n(\alpha_0^{\max})^2\right)\right).\end{aligned}$$

注意，$\alpha^{\max}_{\tau^{\uparrow(s-1)}} \geq \Omega(\alpha_0^{\max})$ 成立。最后，结合上述结果和引理 6.7，可得

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\tau^+_{\max}(1-4c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}) > T \text{ or } \min\{\tau^+_\psi(2x), \tau^-_\beta(2x)\} \leq T\right] \\
&\leq \Pr\left[\left\{\tau^+_{\max}(1-4c^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}) > T \text{ or } \min\{\tau^+_\psi(2x), \tau^-_\beta(2x)\} \leq T\right\} \text{ and } \min\{\tau^+_\psi(2x), \tau^-_\beta(2x), \tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}\} > T\right] \\
&+ \Pr\left[\min\{\tau^+_\psi(2x), \tau^-_\beta(2x), \tau^{\downarrow}_{\widetilde{\max}}\} \leq T\right] \\
&\leq n^{-10}.
\end{aligned}$$

□

引理 *6.14* (条目 *3*)的证明。 首先，我们证明以下命题。

**命题 6.15**。 设 $c \in (0, 1/2)$ 为任意常数。设 $x = x(n)$ 为任意正函数，使得 $x = \omega(\sqrt{\log n/n})$ 且 $x = o(\log n/\sqrt{n})$。假设 $\psi_0 \leq x$、 $\beta_0 \geq 1/2 - x$ 和$\alpha_0(1) \geq 1 - c$。那么，对于某个 $T = \Omega(n/x)$，

$$\Pr\left[\tau^-_{\max}(1-2c) \leq \min\{T, \tau^-_\beta(x), \tau^+_\psi(x)\}\right] \leq \exp\left(-\Omega(n)\right).$$

证明。 令 $\tau = \min\{\tau^-_\beta(x)\ \tau^+_\psi(x)\}$。那么，对于 $t-1 < \tau$，我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\alpha_t(1)] = \alpha_{t-1}(1)\left(1 + \frac{\alpha_{t-1}(1) - \frac{\gamma_{t-1}+x}{\beta_{t-1}}}{n}\right) \geq \alpha_{t-1}(1) - \frac{3x}{n}.$$

注意，在第一个等式中我们使用了引理4.2(条目 1)。

因此，令 $X_t = \alpha_t(1)$ 和 $R = -\frac{3x}{n} < 0$，我们有 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(X_{t-1} + R - \mathbb{E}_{t-1}[X_t]) = \mathbf{1}_{\tau>t-1}(\alpha_{t-1}(1) - 3x - \mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(1)]) \leq 0$，且 $\mathbf{1}_{\tau>t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[X_t] - X_t) = \mathbf{1}_{\tau>t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(1)] - \alpha_t(1))$ 满足 $(O(1/n)\ O(1/n))$-伯恩斯坦条件。注意，我们使用了引理 4.9（第3项）和引理 3.7（条目 2 和 3）。因此，将 $I^- = 1 - 2c$ 和 $T \leq \frac{c}{6x}n \leq \frac{X_0 - I^-}{-2R}$ 代入引理 3.11（条目 1），即可得到所述命题。 □

为方便起见，记 $g_t = \beta_t - \alpha_t(1) = \sum_{j\geq 2}\alpha_t(j)$。令 $\tau = \min\{\tau_{all}, \tau^-_{\max}(3/4)\}$。那么，对于 $t-1 < \tau$，有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[g_t] = \sum_{j\geq 2}\alpha_{t-1}(j)\left(1 + \frac{\alpha_{t-1}(j) + 1 - 2\beta_{t-1}}{n}\right) \leq g_{t-1}\left(1 - \frac{1}{4n}\right).$$

注意， $\alpha_{t-1}(j) \leq 1 - \alpha_{t-1}(1) \leq 1/4$ 且 $\beta_{t-1} \geq \alpha_{t-1}(1) \geq 3/4$。

令 $r = 1 - \frac{1}{4n}$、 $X_t = r^{-t}g_t$ 和 $Y_t = X_{t\wedge\tau}$。那么，

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[Y_t] - Y_{t-1} = \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[X_t] - X_{t-1}\right) \leq \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(r^{-t}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[g_t] - r^{-(t-1)}g_{t-1}\right) \leq 0,$$

即， $Y_t$ 是一个次鞅。因此，我们有 $\mathbb{E}[Y_T] \leq \mathbb{E}[Y_0] = g_0 \leq 1$ 并且

$$\mathbb{E}[Y_T] \geq \mathbb{E}[X_T \mid \tau > T]\Pr[\tau > T] = r^{-T}\,\mathbb{E}[g_T \mid \tau > T]\Pr[\tau > T] \geq r^{-T}n^{-1}\Pr[\tau > T].$$

因此，我们有 $\Pr[\tau > T] \leq nr^T \leq n\exp\left(-\frac{T}{4n}\right) \leq 1/n^2$. 因此，结合上述结果，命题 6.15 和引理 6.1 和6.2可得

$$\Pr\left[\tau_{all} > T\text{或 } \tau^-_{\max}(3/4) \leq T\right] \leq \Pr\left[\{\tau_{all} > T\text{或 } \tau^-\text{最大值}(3/4) \leq T\}\text{和最小值}\{\tau^-\text{最大值}(3/4)\ \tau^-_\beta(2x)\ \tau^+_\psi(2x)\} > T\right] + \Pr\left[\text{最小值}\{\tau^-\text{最大值}(3/4)\ \tau^-_\beta(2x)\ \tau^+_\psi(2x)\} \leq T\right] \leq \Pr[\tau > T] + \Pr\left[\tau^-\text{最大值}(3/4) \leq T\text{和最小值}\{\tau^-_\beta(2x)\ \tau^+_\psi(2x)\} > T\right] + \Pr\left[\text{最小值}\{\tau^-_\beta(2x)\ \tau^+_\psi(2x)\} \leq T\right] \leq 1/n.$$

□

引理 *6.14*(第 *4*项)。令 $\tau = \min\{\tau_{\text{cons}}, \tau^-_\beta\}$。令 $u_t = 1 - \alpha_t(1)$。那么，

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[u_t] = 1 - \alpha_{t-1}(1)\left(1 + \frac{1 + \alpha_{t-1}(1) - 2\beta_{t-1}}{n}\right) = u_{t-1}\left(1 - \frac{\alpha_{t-1}(1)}{n}\right) \leq u_{t-1}\left(1 - \frac{1}{3n}\right).$$

令 $r = 1 - \frac{1}{3n}$、$X_t = r^{-t}u_t$ 和 $Y_t = X_{t\wedge\tau}$。那么，

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[Y_t] - Y_{t-1} = \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[X_t] - X_{t-1}\right) \leq \mathbf{1}_{\tau>t-1}\left(r^{-t}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[u_t] - r^{-(t-1)}u_{t-1}\right) \leq 0,$$

即，$Y_t$ 是一个次鞅。因此，我们有 $\mathbb{E}[Y_T] \leq \mathbb{E}[Y_0] = u_0 \leq 1$ 并且

$$\mathbb{E}[Y_T] \geq \mathbb{E}[X_T \mid \tau > T]\Pr[\tau > T] = r^{-T}\mathbb{E}[u_T \mid \tau > T]\Pr[\tau > T] \geq r^{-T}n^{-1}\Pr[\tau > T].$$

因此，我们有 $\Pr[\tau > T] \leq nr^T \leq n\exp\left(-\frac{T}{3n}\right) \leq 1/n^2$. 因此，根据引理 6.1，我们有

$$\Pr[\tau_{\text{cons}} > T] \leq \Pr\left[\min\{\tau_{\text{cons}}, \tau^-_\beta(2x)\} > T\right] + \Pr\left[\tau^-_\beta(2x) \leq T\right] \leq 1/n.$$

□

引理 *6.13*的证明。我们有如下结论：

- 根据引理 6.14(第 1 项)，对于某个 $T_1 = O(n\log n/\alpha_{\max 0})$，我们有 $\alpha_{T_1}(1) \geq (1 - c^{\downarrow}_{\max})\beta_{T_1}$、$\beta_{T_1} \geq 1/2 - 2x$ $\psi_{T_1} \leq 2x$ $1 - n^{-10}$，且，其概率至少为。
- 由引理6.14（第2项），对某个 $T_2 = O(n\log n)$，我们有 $\alpha_{T_1+T_2}(1) \geq 1 - 4c^{\downarrow}_{\max}$、$\beta_{T_1+T_2} \geq 1/2 - 4x$和 $\psi_{T_1+T_2} \leq 4x$，其概率至少为 $1 - n^{-10}$。
- 假设 $c^{\downarrow}_{\max} = 1/32$。由引理6.14（第3项），对某个 $T_3 = O(n\log n)$，我们有$\alpha_{T_1+T_2+T_3}(1) = \beta_{T_1+T_2+T_3}$且 $\alpha_{T_1+T_2+T_3}(1) \geq 3/4$，其概率至少为 $1 - 1/n^2$。
- 由引理6.14（第4项），对某个 $T_4 = O(n\log n)$，我们有 $\alpha_{T_1+T_2+T_3+T_4}(1) = 1$，其概率至少为 $1 - 1/n^2$。

因此，我们得到了所要证明的结论。 □

## 6.7 整合起来

**引理 6.16。** 令 $C>0$ 为任意常数。令 $x=x(n)$ 为任意正函数，使得$x=\omega(\sqrt{\log n/n})$ 且 $x=o(\log n/\sqrt{n})$。对于某个

$$T=\begin{cases} O(n\log n) & \left(if\ k\le \frac{C\sqrt{n}}{(\log n)^2}\right), \\ O\left(n^{1.5}(\log n)^3\right) & (otherwise) \end{cases}, \tag{37}$$

我们有

$$\Pr\left[\psi_T\le x\ and\ \beta_T\ge\frac{1}{2}-x\ and\ \alpha_T^{\max}\ge\frac{(\log n)^{1.5}}{\sqrt{n}}\right]\ge 1-O\left(n^{-10}\right).$$

证明。 首先，由引理 6.1和6.2，我们有如下结论：

1. 合并引理 1 3 6 1, $T_1=O\ n\quad n\quad T_2=\quad n^3\quad t\in[T_2]\ \beta_{T_1+t}\ge$ 中的各项，可得。对于某些 ( $1-O\ n^{-10}$ $1/2-x/2$ log ) 和 Ω( ), min 以至少 ( ) 的概率成立。

2. 合并引理 6.2中的 1 和 2，对于某些 $T_1'=O(n\log n)$ 和 $T_2'=\Omega(n^3),\min_{t\in[T_2']}\psi_{T_1'+t}\le x/2$ 以至少 $1-n^{-\omega(1)}$的概率成立。

第 1 项和第 2 项意味着，对于某些 $T=O(n\log n)$， $\beta_T\ge 1/2-x/2$ 和 $\psi_T\le x/2$ 以至少 $1-O(n^{-10})$ 的概率成立。对于 $k=O\left(\sqrt{n}/(\log n)^2\right)$ 的情况，由于对任意 $t$， $\alpha_t^{\max}\ge\beta_t/k=\Omega(\beta_t(\log n)^2/\sqrt{n})$ 都成立，因此我们得到了所需结论。对于一般情况，根据引理 6.3，对于某些 $T'=O\left(n^{1.5}(\log n)^3\right)$，我们有 $\gamma_{T+T'}\ge(\log n)^2/\sqrt{n}$、 $\psi_{T+T'}\le x$ 和 $\beta_{T+T'}\ge 1/2-x$以至少 $1-n^{-\omega(1)}$ 的概率成立。

□

**引理 6.17.** 设 $x=x(n)$ 是任意一个正函数，使得 $x=\omega(\sqrt{\log n/n})$ 且$x=o(\log n/\sqrt{n})$。假设 $\psi_0\le x$、 $\beta_0\ge 1/2-x$ 和 $\alpha_0^{\max}=\omega(\log n/\sqrt{n})$。那么， $\tau_{\text{cons}}=O(n\log n/\alpha_0^{\max})$ 以高概率成立。

证明。 我们有如下结论：

- 根据引理 6.10 （条目 1），对于某个 $T_1=O(n\log n/\alpha_{\max 0})$，有 $\min^{j\ne I_{T_1}}\eta_{T_1}(j)\ge y$、 $\beta_{T_1}\ge 1/2-8x$、 $\psi_{T_1}\le 8x$，且 $\alpha_{\max T_1}=\Omega(\alpha_{\max 0})=\omega(\log n/\sqrt{n})$ 的概率至少为 $1-n^{-10}$。

- 根据引理 6.13，对于某个 $T_2=O(n\log n/\alpha_{\max 0})$，有 $\tau_{\text{cons}}\le T_1+T_2$，其概率至少为 $1-1/n$。

由此，我们得到了所述结论。 □

定理*1.1*的证明。由引理6.16可知，对于某个 $T$， $\psi_T\le x$、 $\beta_T\ge 1/2-x$ 和 $\alpha_T^{\max}\ge(\log n)^2/\sqrt{n}$ 以高概率成立，其中 $T$ 的定义见（37）（引理6.16）。接着，由引理5.24可知，我们以高概率在额外的 $O\left(\frac{n}{\log_{\alpha_T^{\max}} n}\right)=O\left(\min\left\{kn\log n,\ n^{1.5}/\sqrt{\log n}\right\}\right)$ 步内达成共识。这里，当 $k$较小时，我们使用 $\alpha_T^{\max}\ge\frac{\beta_T}{k}=\Omega(k)$；当 $k$ 较大时，则使用 $\alpha_T^{\max}\ge(\log n)^{1.5}/\sqrt{n}$。因此，共识时间有如下界：

$$\tau_{\text{cons}}\le T+O\left(\min\left\{kn\log n,n^{1.5}/\sqrt{\log n}\right\}\right)=\widetilde{O}(\min\left\{kn,n^{1.5}\right\})$$

并得到该结论。 □

# 参考文献

[AABBHKL23] T. Amir, J. Aspnes, P. Berenbrink, F. Biermeier, C. Hahn, D. Kaaser 和 J. Lazarsfeld。“群体协议模型中 k 意见未决状态动态的快速收敛”。载于：2023 年 ACM 分布式计算原理研讨会论文集。PODC ’23。2023 年，第 13–23 页。 DOI：10.1145/ 3583668.3594589（引用见第 4–6、8、9 页）。[AADFP06] D. Angluin, J. Aspnes, Z. Diamadi, M. J. Fischer 和 R. Peralta。“被动移动有限状态传感器网络中的计算”。英文。载于：分布式计算 18（4，2006），第 235–253 页。 DOI：10.1007/s00446-005-0138-3（引用见第 4 页）。[AAE07] D. Angluin, J. Aspnes 和 D. Eisenstat。“用于快速稳健近似多数的简单群体协议”。载于：分布式计算。2007 年，第 20–32 页。 DOI：10.1007/978-3-540-75142-7_5 （引用见第 4、6 页）。[BBBEHKK22] G. Bankhamer, P. Berenbrink, F. Biermeier, R. Els¨asser, H. Hosseinpour, D. Kaaser 和 P. Kling。“通过无约束未决状态动态实现快速共识”。载于：2022 年 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集（SODA）。论文集。工业与应用数学学会，2022 年，第 3417–3429 页。 DOI：10.1137/1.9781611977073.135（引用见第 6、9 页）。[BBH24] P. Berenbrink, F. Biermeier 和 C. Hahn。“ 带顽固智能体的未决状态动态 ”。载于：arXiv *[cs.DC]* （ 2024 ）。arXiv：2406.07335 [cs.DC]（引用见第 6 页）。[BCEKMN17] P. Berenbrink, A. Clementi, R. Els¨asser, P. Kling, F. Mallmann-Trenn 和 E. Natale。“忽略还是服从？论共识中的对称性破缺”。载于：ACM分布式计算原理研讨会论文集。PODC ’17。2017 年，第 335–344 页。 DOI：10.1145/3087801.3087817（引用见第 7、9、10 页）。[BCN20] L. Becchetti, A. Clementi 和 E. Natale。“共识动力学”。载于：ACM SIGACT 新闻 51（1，2020），第 58–104 页。 DOI：10.1145/3388392.3388403（引用见第 7 页）。[BCNPS15] L. Becchetti, A. Clementi, E. Natale, F. Pasquale 和 R. Silvestri。“闲聊模型中的多数共识”。载于：离散算法研讨会论文集（SODA）（加利福尼亚州圣迭戈）。SODA ’15。2015 年，第 371–390 页（引用见第 4–6、9、11 页）。[BCNPST17] L. Becchetti, A. Clementi, E. Natale, F. Pasquale, R. Silvestri 和 L. Trevisan。“多数共识的简单动态”。载于：分布式计算 30（4，2017），第 293–306 页。 DOI：10.1007/s00446-016-0289-4（引用见第 7、9 页）。[BCNPT16] L. Becchetti, A. Clementi, E. Natale, F. Pasquale 和 L. Trevisan。“多意见下的稳定共识”。载于：第二十七届 ACM-SIAM 离散算法年会论文集（弗吉尼亚州阿灵顿）。SODA ’16。2016 年，第 620–635 页（引用见第 7、9 页）。[BF20] B. Doerr 和 F. Neumann。《进化计算理论：离散优化的最新进展》。施普林格国际出版公司，2020 年（引用见第 71 页）。

[BFGK16] P. Berenbrink、T. Friedetzky、G. Giakkoupis 和 P. Kling。《高效多元共识，或：时不时清理的好处》。英文。2016年。 DOI：10.4230/LIPICS.ICALP.2016.136（引用见第 6 页）。[CGGNPS18] A. Clementi、M. Ghaffari、L. Gual`a、E. Natale、F. Pasquale 和 G. Scornavacca。《两种颜色下并行未决状态动力学的紧确分析》。载于：国际计算机科学数学基础研讨会（MFCS）论文集（2018年）。 DOI：10.4230/LIPIcs.MFCS.2018.28（引用见第 4、6 页）。[CHKM17] A. Condon、M. Hajiaghayi、D. Kirkpatrick 和 J. Ma˘nuch。《简化化学反应网络近似多数分析》。载于：《DNA计算与分子编程》。2017年，第 188–209 页。 DOI：10.1007/978-3- 319-66799-7_13 （引用见第 4、6 页）。[CMRSS25] C. Cooper、F. Mallmann-Trenn、T. Radzik、N. Shimizu 和 T. Shiraga。《多种意见下的异步三多数动力学》。英文。载于：2025年ACM-SIAM离散算法年会（SODA）论文集。宾夕法尼亚州费城：工业与应用数学学会，2025年，第 4095–4131 页。DOI：10.1137/1.9781611978322.140（引用见第 7、9、10、13 页）。[CR16] C. Cooper 和 N. Rivera。《线性投票模型》。载于：国际自动机、语言与编程研讨会（ICALP）论文集（2016年）。 DOI：10.4230/LIPIcs.ICALP.2016.144（引用见第 4 页）。[dCN20] F. d’Amore、A. Clementi 和 E. Natale。《含噪交互下非线性意见动力学的相变》。载于：国际结构信息与通信复杂性研讨会（SIROCCO）论文集（2020年），第 255–272 页。 DOI：10.1007/978-3-030-54921-3_15（引用见第 6 页）。[DGMSS11] B. Doerr、L. A. Goldberg、L. Minder、T. Sauerwald 和 C. Scheideler。《利用二选一的力量稳定共识》。载于：第二十三届ACM算法与体系结构并行性研讨会论文集。SPAA ’11。2011年，第 149–158 页。 DOI：10.1145/1989493.1989516（引用见第 13、38 页）。[DLLSV25] S. Duppala、G. Z. Li、J. Luque、A. Srinivasan 和 R. Valieva。《负相关下次模函数与read-k族的集中性》。载于：第16届理论计算机科学创新会议（ITCS 2025）。R. Meka 编。莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs）。2025年，47:1–47:16。 DOI：10.4230/LIPIcs.ITCS.2025.47（引用见第 13、71 页）。[Dur19] R. Durrett。《概率论：理论与例题》。剑桥大学出版社，2019年（引用见第 71 页）。[EES25] A. El-Hayek、R. Els¨asser 和 S. Schmid。《群体协议模型中采用未决状态动力学的多元共识的近乎紧确下界》。英文。载于：ACM分布式计算原理研讨会论文集。PODC ’25：ACM分布式计算原理研讨会（拉斯布里萨斯瓦图尔科酒店，瓦图尔科，瓦图尔科，墨西哥）。2025年，第 532–540 页。 DOI：10.1145/3732772.3733505（引用见第 4–6 页）。[EFKMT17] R. Els¨asser、T. Friedetzky、D. Kaaser、F. Mallmann-Trenn 和 H. Trinker。《简短公告：快速异步多元共识》。载于：ACM分布式计算原理研讨会论文集。PODC ’17。2017年，第 363–365 页。 DOI：10.1145/3087801.3087860（引用见第 7 页）。

[GACMMVM25] M. M. Gauy、A. Abramishvili、E. Colli、T. Madeira、F. Mallmann-Trenn、V. F. Vasconcelos 和 D. K. Marzag˜ao。《投票者模型遇上谣言传播：无知节点图上的共识协议研究》。载于：第24届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集。2025年，第 848–857 页（引用见第 7 页）。[GL18] M. Ghaffari 和 J. Lengler。《二选一与三多数共识动力学的近乎紧确分析》。载于：分布式计算原理研讨会（PODC）论文集（2018年），第 305–313 页。 DOI: 10.1145/3212734.3212738（引用见第 7、9 页）。[GLSS15] D. Gavinsky、S. Lovett、M. Saks 和 S. Srinivasan。《read-k族函数的尾界》。英文。载于：随机结构与算法 47.1（2015年），第 99–108 页。 DOI：10.1002/rsa.20532 （引用见第 13 、 71 页）。[GP16] M. Ghaffari 和 M. Parter。《用于多元共识的多对数级闲聊算法》。英文。载于：2016年ACM分布式计算原理研讨会论文集。PODC '16：ACM分布式计算原理研讨会（美国伊利诺伊州芝加哥）。2016年。 DOI: 10 . 1145 / 2933057 . 2933097（引用见第 6 页）。[HP01] Y. Hassin 和 D. Peleg。《分布式概率轮询及其在比例一致中的应用》。载于：信息与计算 171（2）（2001年），第 248–268 页。 DOI: 10.1006/inco.2001.3088（引用见第 4 页）。[KMN15] D. Kaaser、F. Mallmann-Trenn 和 E. Natale。《确定性多数过程的投票时间》。2015年。arXiv：1508.03519 [cs.DC]（引用见第 7 页）。[KSSV00] R. Karp、C. Schindelhauer、S. Shenker 和 B. Vocking。《随机谣言传播》。载于：第41届计算机科学基础年度研讨会论文集。FOCS '00。2000年，第 565 页。 DOI: 10.1109/SFCS.2000.892324（引用见第 4 页）。[Len20] J. Lengler。《漂移分析》。英文。载于：自然计算系列。自然计算系列。Cham：施普林格国际出版公司，2020年，第 89–131 页。 DOI: 10.1007/978-3-030-29414-4_2（引用见第 17 页）。[SS25] N. Shimizu 和 T. Shiraga。《多种意见下的三多数与二选一》。英文。载于：ACM分布式计算原理研讨会论文集。PODC '25：ACM分布式计算原理研讨会（拉斯布里萨斯瓦图尔科酒店，瓦图尔科，瓦图尔科，墨西哥）。2025年，第 207–217 页。 DOI：10.1145/3732772. 3733511（引用见第 7、9、10、13、15、17、38、71 页）。[Wai19] M. J. Wainwright。《高维统计：非渐近视角》。剑桥大学出版社，2019年。 DOI：10.1017/9781108627771（引用见第 15 页）。

## 技术不等式与辅助引理

本附录汇集了分析中反复用到、但并非 USD 专有的若干技术工具。其中包括切尔诺夫型界的变体、针对 read-$\ell$族的集中性结果、可选停止定理，以及随机支配等基本概念。这些结果都不是新的；在此列出是为了完整起见，并使主要证明自成一体。

**引理 A.1** ([BF20，推论 1.10。4])。 设 $X_1$， ...， $X_n$ 是取值于 $[0,1]$中的独立随机变量。设 $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$。那么，对任意 $h \geq 2\mathrm{e}\,\mathbb{E}[X]$，我们有

$$\Pr[X \geq h] \leq 2^{-h}.$$

虽然切尔诺夫界为独立随机变量之和给出了尾界，但我们还需要一个更一般的集中性结果，以处理不一定相互独立的随机变量之和。下面，我们引入*read-$\ell$* 族的概念。这类随机变量族不一定相互独立，但具有一定的结构 [GLSS15；DLLSV25]。

**定义 A.2** (Read-$\ell$ 族； [GLSS15])。若一个实值随机变量族($Y_1$、.....、 $Y_n$)满足以下条件，则称为 read-$\ell$ 族： $m \in \mathbb{N}$存在 $X_1$、.....、 $X_m$个独立随机变量 $S_1$以及 $S_n \subseteq [m]$ 个子集，使得：

1. 每个 $Y_i$ 都可以表示为$(x_s)_{s\in S_i}$ 的函数，其中 $i \in [n]$。
2. 对每个 $j \in [m]$，包含 $j$ 的子集数量至多为 $\ell$。

Gavinsky、Lovett、Saks 和 Srinivasan [GLSS15] 首次通过信息论论证，为 read-$\ell$ 族的和给出了尾界，但无法由此得到矩母函数的界。最近，Duppala、Li、Luque、Srinivasan 和 Valieva[DLLSV25] 基于矩母函数，利用以下一般不等式，给出了 read-$\ell$ 族的和的集中性结果。

**引理 A.3** ([DLLSV25，引理 16])。 设 $F_1,\ldots,F_n$ 是一个 *read-$\ell$* 族。那么， $\mathbb{E}\left[\prod_{i\in[n]} F_i\right] \leq \left(\prod_{i\in[n]} \mathbb{E}[F_i^{\ell}]\right)^{1/\ell}$。

注意，若（$Y_1,\ldots,Y_n$）构成一个 read-1 族，那么对于任意 $F_1,\ldots,F_n$，族（ $F_i = \exp(\lambda Y_i)$ 也构成一个 read-1 族，其中 $\lambda \in \mathbb{R}$。将引理 A.3 应用于该族（$F_1,\ldots,F_n$），即可得到矩母函数的界。

**定理 A.4** （可选停止定理。参见，例如， [Dur19]）。 设 $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$是一个次鞅（分别地，上鞅），满足 $\mathbb{E}_{t-1}[|X_t - X_{t-1}|] < \infty$ 几乎必然成立，并设 $\tau$ 是一个停时，满足 $\mathbb{E}[\tau] < \infty$。则 $\mathbb{E}[X_\tau] \geq \mathbb{E}[X_0]$（分别地，$\mathbb{E}[X_\tau] \leq \mathbb{E}[X_0]$）。

**定义 A.5** （随机支配）。 对于两个随机变量 $X$ 和 $Y$，我们称 $Y$随机支配 $X$，记作 $X \preceq Y$，若对所有 $\lambda \in \mathbb{R}$，都有 $\Pr[X \leq \lambda] \geq \Pr[Y \leq \lambda]$。

引理 *A.6* （[*SS25*，引理 *5.*1]）。设 $(Z_t)_{t\geq 0}$ 是一个定义在状态空间 $\Omega$ 上、与自然滤过 $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 相对应的马尔可夫链，并设 $\tau$是相对于 $\mathcal{F}$的任意停时。设 $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$是一个函数。对于参数 $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，令 $\tau_\varphi^+(x) = \inf\{t \geq 0\colon \varphi(Z_t) \geq x\}$。令 $T, x_0, c_\varphi^{\uparrow} > 0, x^* > x_0$ 为参数，并令 $\Omega^* \subseteq \Omega$ 表示满足 $\varphi(z) \leq x^*$的状态 $z \in \Omega$ 的集合。假设以下条件成立：

*(i)* 存在 $C_1 > 0$，使得对于任意 $z \in \Omega^*$，

$$\Pr\left[\min\left\{\tau_\varphi^+(x_0), \tau\right\} \leq T \;\middle|\; Z_0 = z\right] \geq C_1.$$

*(ii)* 定义 $\tau_\varphi^{\uparrow} = \inf\left\{t \geq 0\colon \varphi(Z_t) \geq (1+c_\varphi^{\uparrow})\cdot\varphi(Z_0)\right\}$。则存在 $C_2 > 0$使得对任意 $z \in \Omega^*$，

$$\Pr\left[\min\left\{\tau_\varphi^{\uparrow}, \tau\right\} \leq T \;\middle|\; Z_0 = z\right] \geq 1 - \exp\left(-C_2\varphi(z)^2\right).$$

则存在一个常数 $C_{A.6} = C_{A.6}(C_1, C_2, c_{\varphi}^{\uparrow}, x_0) > 0$ （独立于 $x^*$），使得对任意$z \in \Omega^*$ 以及任意 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\Pr\left[\min\left\{\tau_{\varphi}^{+}(x^*), \tau\right\} \le C_{A.6} \cdot T \cdot (\log(1/\varepsilon) + \log(x^*/x_0)) \;\middle|\; Z_0 = z\right] \ge 1 - \varepsilon.$$

## A.1 漂移分析结果

本节介绍一些对 USD 分析有用的漂移分析工具。

引理的证明 *3.11* (第 *1*项)。我们将引理 3.9 (第 1项)应用于 $Y_t = -X_t$，其中 $R_Y = -R > 0$。我们有 $\mathbf{1}_{\tau > t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[Y_t] - Y_{t-1} - R_Y) = \mathbf{1}_{\tau > t-1}(X_{t-1} + R - \mathbb{E}_{t-1}[X_t]) \le 0$，并且 $\mathbf{1}_{\tau > t-1}(Y_t - Y_{t-1} - R_Y) = \mathbf{1}_{\tau > t-1}(X_{t-1} + R - X_t)$ 满足单边 $(D,\ s)$-伯恩斯坦条件。因此，令 $h = X_0 - I^-, T = \frac{(1-\varepsilon)h}{-R} = \frac{(1-\varepsilon)h}{R_Y}$，以及 $z = \overline{h - R_Y T} = \overline{\varepsilon h} = \varepsilon(X_0 - I^-)$，我们得到

$$\Pr\left[\tau^- \le \min\{T, \tau\}\right] \le \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 (X_0 - I^-)^2/2}{sT + (\varepsilon(X_0 - I^-)D)/3}\right).$$

注意，$\tau^- = \inf\{t \ge 0 :\ X_t \le I^-\} = \inf\{t \ge 0 :\ Y_t \ge Y_0 + h\}$。 □

引理的证明 *3.11* (条目 *2*)。我们有

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\tau^+ > T \text{ and } \tau^* > T\right] \\
&= \Pr\left[\tau^+ > T \text{ and } \tau^* > T \text{ and } \tau^- > T\right] + \Pr\left[\tau^+ > T \text{ and } \tau^* > T \text{ and } \tau^- \le T\right] \\
&\le \Pr\left[\min\{\tau^+, \tau^-, \tau^*\} > T\right] + \Pr\left[\tau^- \le \min\{T, \tau^+, \tau^*\}\right]
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\tau^+ > \tau^- \text{ and } \tau^* > T\right] \\
&= \Pr\left[\tau^+ > \tau^- \text{ and } \tau^* > T \text{ and } \tau^- > T\right] + \Pr\left[\tau^+ > \tau^- \text{ and } \tau^* > T \text{ and } \tau^- \le T\right] \\
&\le \Pr\left[\min\{\tau^+, \tau^-, \tau^*\} > T\right] + \Pr\left[\tau^- \le \min\{T, \tau^+, \tau^*\}\right].
\end{aligned}$$

对于 $\Pr\left[\min\{\tau^+, \tau^-, \tau^*\} > T\right]$，我们将引理 3.9（条目 2）应用于 $Y_t = -X_t$，其中 $R_Y = -R < 0$。我们有 $\mathbf{1}_{\tau > t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[Y_t] - Y_{t-1} - R_Y) = \mathbf{1}_{\tau > t-1}(X_{t-1} + R - \mathbb{E}_{t-1}[X_t]) \le 0$，且 $\mathbf{1}_{\tau > t-1}(Y_t - Y_{t-1} - R_Y) = \mathbf{1}_{\tau > t-1}(X_{t-1} + R - X_t)$ 满足单侧（$D,\ s$）-伯恩斯坦条件。因此，令 $h = I^+ - X_0, T = \frac{(1+\varepsilon)h}{R} = \frac{(1+\varepsilon\ h\ )}{-R_Y}$，以及 $\overline{z = (-R_Y)T} - h = \varepsilon h = \varepsilon(I^+ - X_0)$，我们得到

$$\Pr\left[\min\{\tau^+, \tau\} > T\right] \le \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 (I^+ - X_0)^2/2}{sT + (\varepsilon(I^+ - X_0)D)/3}\right).$$

注意到 $\tau^+ = \text{无穷}\{t \ge 0 :\ X_t \ge I^+\} = \text{无穷}\{t \ge 0 :\ Y_t \le Y_0 - h\}$。

对于 $\Pr\left[\tau^- \le \text{最小值}\{T, \tau^+, \tau^*\}\right]$，我们将引理 3.9(第 1 项）应用于 $Y_t = -X_t$和 $R_Y = 0$。于是，由于 $R > 0$，我们有 $\mathbf{1}_{\tau > t-1}(\mathbb{E}_{t-1}[Y_t] - Y_{t-1} - R_Y) \le \mathbf{1}_{\tau > t-1}(X_{t-1} + R - \mathbb{E}_{t-1}[X_t]) \le 0$ 和$\mathbf{1}_{\tau > t-1}(Y_t - Y_{t-1} - R_Y) \le \mathbf{1}_{\tau > t-1}(X_{t-1} + R - X_t)$ 满足单侧（$D,\ s$）-伯恩斯坦条件。因此，令 $z = h = X_0 - I^-$，我们得到

$$\Pr\left[\tau^- \le \min\{T, \tau\}\right] \le \exp\left(-\frac{(X_0 - I^-)^2/2}{sT + ((X_0 - I^-)D)/3}\right).$$

注意，$\tau^- = \text{下确界}\{t \ge 0 :\ X_t \le I^-\} = \text{下确界}\{t \ge 0 :\ Y_t \ge Y_0 + h\}$。

□

**引理 A.7**。 设$(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ 是一列随机变量，且$(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ 是一个滤过，使得对所有 $t \geq 0$， $X_t$ 都是 $\mathcal{F}_t$-可测的。设 $\tau^*$ 是相对于$(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$的一个停时。我们有如下结论：

*1.* 设 $c^{\uparrow}$、 $c^{\downarrow} > 0$ 为正常数。对于 $s \geq 0$，令

$$\tau_s^{\uparrow} := \inf\{t \geq s : X_t \geq (1+c^{\uparrow})X_s\},\ \tau_s^{\downarrow} := \inf\{t \geq s : X_t \leq (1-c^{\downarrow})X_s\}.$$

假设 $X_0 > 0$。那么，对于 $\tau^{\downarrow} = \tau_0^{\downarrow}$ 和任意 $T > 0$，有

$$\Pr\left[\tau^{\downarrow} \leq T \text{ and } \tau^* > T\right] \leq \sum_{s=0}^{T-1} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{X_s \geq X_0 \text{ and } \tau^* > s} \Pr_s\left[\tau_s^{\downarrow} \leq \min\{T, \tau_s^{\uparrow}, \tau^*\}\right]\right].$$

*2.* 设 $I^- < I_*^- < I_*^+ < I^+$ 为参数。对于 $s \geq 0$，令

$$\tau_s^+ := \inf\left\{t \geq s\colon X_t \geq I^+\right\},\ \tau_s^- := \inf\left\{t \geq s\colon X_t \leq I^-\right\}.$$

令 $\tau^{jump}$：=无穷 $\{t > 0\colon\ X_t \leq X_{t-1} - (I_*^+ - I_*^-)\}$。那么，对于 $\tau^- = \tau_0^-$、 $X_0 \geq I_*^-$ 和 $T > 0$，有

$$\Pr\left[\tau^- \leq T \text{ and } \min\{\tau^{jump}, \tau^*\} > T\right] \leq \sum_{s=0}^{T-1} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{X_s \in [I_*^-, I_*^+] \text{ and } \tau^* > s} \Pr_s\left[\tau_s^- < \tau_s^+\right]\right].$$

*3.* 设 $c^{\uparrow} > 0$ 为正常数。对于 $s \geq 0$，令

$$\tau^{\uparrow(s)} := \inf\{t \geq 0 : X_t \geq (1+c^{\uparrow})^s X_0\}.$$

假设 $X_0 > 0$。那么，对于任意 $T > 0$ 和 $\ell > 0$，

$$\Pr\left[\min\{\tau^{\uparrow(\ell)}, \tau^*\} > \ell T\right] \leq \sum_{s=1}^{\ell} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\tau^* > \tau^{\uparrow(s-1)}} \Pr_{\tau^{\uparrow(s-1)}}\left[\min\{\tau^{\uparrow(s)}, \tau^*\} > \tau^{\uparrow(s-1)} + T\right]\right].$$

引理的证明 *A.7* （条目 *1*）。 首先，我们断言如下：设 $\omega$ 是任意满足以下条件的样本路径：$\tau^{\downarrow}(\omega) \leq T$。那么，存在 $s \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ 使得 $X_s(\omega) \geq X_0(\omega)$ 且 $\tau_s^{\downarrow}(\omega) \leq$最小值$\{T, \tau_s^{\uparrow}(\omega)\}$ 成立。

为证明这一点，定义 $s$ 为满足 $X_s(\omega) =$ 最大值$_{0\leq t<\tau^{\downarrow}(\omega)} X_t(\omega)$ 的最大整数。对于这样的 $s$，有 $X_s(\omega) \geq X_0(\omega)$ 且 $\tau_s^{\downarrow}(\omega) < \tau_s^{\uparrow}(\omega)$。此外， $\tau_s^{\downarrow}(\omega) \leq \tau^{\downarrow}(\omega) \leq T$因为 $(1-c^{\downarrow})X_s(\omega) \geq (1-c^{\downarrow})X_0(\omega)$。因此， $\tau_s^{\downarrow}(\omega) \leq$最小值$\{T, \tau_s^{\uparrow}(\omega)\}$ 成立，由此完成了该断言的证明。

由上述断言，我们得到

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\tau^{\downarrow} \leq T \text{ and } \tau^* > T\right] &\leq \Pr\left[\exists s \in \{0, \ldots, T-1\} : X_s \geq X_0 \text{ and } \tau_s^{\downarrow} \leq \min\{T, \tau_s^{\uparrow}\} \text{ and } \tau^* > T\right] \\
&\leq \sum_{s=0}^{T-1} \Pr\left[X_s \geq X_0 \text{ and } \tau_s^{\downarrow} \leq \min\{T, \tau_s^{\uparrow}\} \text{ and } \tau^* > T \text{ and } \tau^* > s\right] \\
&\leq \sum_{s=0}^{T-1} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{X_s \geq X_0 \text{ and } \tau^* > s} \Pr_s\left[\tau_s^{\downarrow} \leq \min\{T, \tau_s^{\uparrow}, \tau^*\}\right]\right].
\end{aligned}$$

□

引理 *A.7* *(条目 2)* 的证明。 首先，我们断言如下：令 $\omega$ 为任意满足以下条件的样本路径$\tau^{-}(\omega) \leq T$ 且 $\tau^{jump}(\omega) > T$。那么，存在 $s \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ 使得 $I_*^- \leq X_s(\omega) \leq I_*^+$且 $\tau_s^-(\omega) < \tau_s^+(\omega)$。

为说明这一点，定义 $s \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ 为满足 $X_s(\omega) \in [I_*^-, I_*^+]$的最大整数。这样的 $s$ 存在，因为 $X_0(\omega) \geq I_*^-$且 $\tau^{jump}(\omega) > T$。根据 $s$的定义，对于任意 $t > s$，我们有 $X_t(\omega) \notin [I_*^-, I_*^+]$。此外，由于 $\tau^{jump}(\omega) > T$，也就是说，过程不会在一步之内跳过区间$[I_*^-, I_*^+]$，因此对所有 $t \geq s$，都有 $X_t(\omega) \leq I_*^+$，从而 $\tau_s^-(\omega) < \tau_s^+(\omega)$。事实上，若存在某个 $t \geq s$ 使得 $X_t(\omega) > I_*^+$，那么 $\tau_s^-(\omega) < \tau_s^+(\omega)$ 的发生将意味着存在某个时间 $t' > t$，使得 $X_{t'}(\omega) \in [I_*^-, I_*^+]$，这与 $s$ 的定义相矛盾。

因此，

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\tau^- \leq T \text{ and } \tau^{jump} > T \text{ and } \tau^* > T\right] \\
&\leq \Pr\left[\exists s \in \{0, 1, \ldots, T-1\} : \tau_s^- < \tau_s^+ \text{ and } X_s \in [I_*^-, I_*^+] \text{ and } \tau^* > T\right] \\
&\leq \sum_{s=0}^{T-1} \Pr\left[X_s \in [I_*^-, I_*^+] \text{ and } \tau_s^- < \tau_s^+ \text{ and } \tau^* > s\right] \\
&\leq \sum_{s=0}^{T-1} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{X_s \in [I_*^-, I_*^+] \text{ and } \tau^* > s} \Pr_s\left[\tau_s^- < \tau_s^+\right]\right].
\end{aligned}$$

□

引理的证明 *A.7* *(条目 3)*。 设 $\sigma_0 = 0$ 并且对于 $s \geq 1$，令

$$\sigma_s := \min\{\tau^{\uparrow(s)}, \tau^*, \sigma_{s-1} + T\}.$$

首先，我们断言如下：如果事件 $\min\{\tau^{\uparrow(\ell)} \tau^*\} > \ell T$发生，那么存在 $s \in \{1, \ldots, \ell\}$使得事件 $\sigma_{s-1} = \tau^{\uparrow(s-1)}$、 $\tau^* > \sigma_{s-1}$和 $\min\{\tau^{\uparrow(s)} \tau^*\} > \sigma_{s-1} + T$发生。为此，定义 $s$为满足 $\min\{\tau^{\uparrow(s)}, \tau^*\} > \sigma_{s-1} + T$的最小整数。根据 $s$的最小性，对于任意 $i \leq s-1$，都有 $\min\{\tau^{\uparrow(i)}, \tau^*\} \leq \sigma_{i-1} + T$。此外，$\min\{\tau^{\uparrow(s)} \tau^*\} > \sigma_{s-1} + T$意味着$\tau^* > \sigma_{s-1} + T$，因此 $\tau^* > \sigma_{s-1}$。于是，对于任意 $i \leq s-1$，可得 $\tau^* > \sigma_{i-1}$，进而得到 $\sigma_i = \tau^{\uparrow(i)}$。这就证明了该断言。由此断言可得

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\min\{\tau^{\uparrow(\ell)}, \tau^*\} > \ell T\right] \\
&\leq \Pr\left[\exists s \in \{1, \ldots, \ell\} : \sigma_{s-1} = \tau^{\uparrow(s-1)} \text{ and } \tau^* > \sigma_{s-1} \text{ and } \min\{\tau^{\uparrow(s)}, \tau^*\} > \sigma_{s-1} + T\right] \\
&\leq \sum_{s=1}^{\ell} \Pr\left[\tau^* > \tau^{\uparrow(s-1)} \text{ and } \min\{\tau^{\uparrow(s)}, \tau^*\} > \tau^{\uparrow(s-1)} + T\right] \\
&= \sum_{s=1}^{\ell} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\tau^* > \tau^{\uparrow(s-1)}} \Pr_{\tau^{\uparrow(s-1)}}\left[\min\{\tau^{\uparrow(s)}, \tau^*\} > \tau^{\uparrow(s-1)} + T\right]\right].
\end{aligned}$$

□

# B 基本性质的证明

在本节中，我们将证明 Gossip 和群体协议模型中关键量的基本不等式。首先介绍以下引理，该引理将在证明 $\widetilde{\gamma}_t$ 和 $\widetilde{\alpha}_t^{\max}$时使用。

**引理 B.1.** 定义函数 $f(x,y)$ 如下

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{y} & \text{if } y>0,\\ 0 & \text{if } y=0.\end{cases}$$

那么，对于满足 $0\le X\le Y$（几乎处处）且 $\mathbb{E}[Y]>0$ 的非负随机变量 $X$ 和 $Y$，我们有以下结论：

1. $\mathbb{E}[f(X,Y)]\ge\frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[Y]}-\text{协方差}\frac{[X,Y]}{\mathbb{E}[Y]^2}$。2. $\frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[Y]}-f(X,Y)-\text{协方差}\frac{[X,Y]}{\mathbb{E}[Y]^2}\le\frac{2(\mathbb{E}[X]-X}{\mathbb{E}[Y]}+\frac{XY-\mathbb{E}[XY])}{\mathbb{E}[Y]^2}$（几乎处处）。

证明。由于结论 1 可由对结论 2两边取期望立即得到，因此我们给出结论 2的证明。

首先，我们注意到以下不等式成立：对于任意 $a\ge 0$、$b>0$、$x\ge 0$ 和 $y\ge x\ge 0$,

$$\frac{a}{b}-f(x,y)\le\frac{a-x}{b}+\frac{x}{b^2}(y-b).$$

为说明这一点，考虑以下两种情况：$y=0$ 和 $y>0$。若 $y=0$，则根据定义，$f(x,y)=0$ 且 $x=0$。因此，$\frac{a}{b}-f(x,y)=\frac{a}{b}=\frac{a-x}{b}+\frac{x}{b^2}(y-b)$，不等式成立。若 $y>0$，则由于 $\frac{a}{b}-f(x,y)=\frac{a}{b}-\frac{x}{y}=\frac{a-x}{b}+\frac{x}{b^2}(y-b)-\frac{x}{b^2y}(y-b)^2$，不等式成立。Hence, we obtain

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[Y]}-f(X,Y)-\frac{\mathbf{Cov}[X,Y]}{\mathbb{E}[Y]^2}&\le\frac{\mathbb{E}[X]-X}{\mathbb{E}[Y]}+\frac{X}{\mathbb{E}[Y]^2}(Y-\mathbb{E}[Y])-\frac{\mathbf{Cov}[X,Y]}{\mathbb{E}[Y]^2}\\&=\frac{2(\mathbb{E}[X]-X)}{\mathbb{E}[Y]}+\frac{XY-\mathbb{E}[XY]}{\mathbb{E}[Y]^2}.\end{aligned}$$

□

## B.1 Gossip 模型

根据 gossip USD（定义 3.2）的定义，对于任意 $v\in V$和 $t\ge 1$:

$$\Pr_{t-1}[\mathrm{opn}_t(v)=i]=\begin{cases}\alpha_{t-1}(i)+1-\beta_{t-1} & (\text{if } \mathrm{opn}_{t-1}(v)=i),\\ \alpha_{t-1}(i) & (\text{if } \mathrm{opn}_{t-1}(v)=\perp),\\ 0 & (\text{otherwise}).\end{cases}\tag{38}$$

引理 *4.2*的证明。**(i) 期望**。由（38）可得

$$\begin{aligned}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\alpha_t(i)]&=\frac{1}{n}\sum_{v\in V:\mathrm{opn}_{t-1}(v)=i}\Pr_{t-1}[\mathrm{opn}_t(v)=i]+\frac{1}{n}\sum_{v\in V:\mathrm{opn}_{t-1}(v)=\perp}\Pr_{t-1}[\mathrm{opn}_t(v)=i]\\&=\alpha_{t-1}(i)(\alpha_{t-1}(i)+1-\beta_{t-1})+(1-\beta_{t-1})\alpha_{t-1}(i)\\&=\alpha_{t-1}(i)(\alpha_{t-1}(i)+2(1-\beta_{t-1})).\end{aligned}$$

**(ii) 方差**。由于 $\alpha_t(i)=(\sum_{v\in V}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=i})/n$，由（38），

$$\begin{aligned}\underset{t-1}{\mathbf{Var}}[\alpha_t(i)] &= \frac{1}{n^2}\sum_{v\in V}\underset{t-1}{\mathbf{Var}}\left[\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=i}\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{v\in V}\Pr_{t-1}[\mathrm{opn}_t(v)=i]\Pr_{t-1}[\mathrm{opn}_t(v)\neq i] \\ &= \frac{\alpha_{t-1}(i)}{n}(\alpha_{t-1}(i)+1-\beta_{t-1})(\beta_{t-1}-\alpha_{t-1}(i)) + \frac{1-\beta_{t-1}}{n}\alpha_{t-1}(i)(1-\alpha_{t-1}(i)) \\ &= \frac{\alpha_{t-1}(i)}{n}[(1-\beta_{t-1})(1+\beta_{t-1}-2\alpha_{t-1}(i)) + \alpha_{t-1}(i)(\beta_{t-1}-\alpha_{t-1}(i))].\end{aligned}$$

因此,

$$\underset{t-1}{\mathbf{Var}}[\alpha_t(i)] \le \frac{\alpha_{t-1}(i)}{n}$$

and

$$\underset{t-1}{\mathbf{Var}}[\alpha_t(i)] \ge \frac{(1-\beta_{t-1})^2\alpha_{t-1}(i)}{n}.$$

**(iii) 伯恩斯坦条件**。对于 $v\in V$，定义

$$X_t(v) = \frac{1}{n}\left(\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=i} - \underset{t-1}{\mathbb{E}}[\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=i}]\right).$$

由于 $|X_t(v)|\le 1/n$，引理 3.7**(i)** 表明 $X_t(v)$ 满足一个

$$\left(\tfrac{1}{n}, \underset{t-1}{\mathbf{Var}}[X_t(v)]\right)\text{-Bernstein condition.}$$

因为

$$\alpha_t(i) - \underset{t-1}{\mathbb{E}}[\alpha_t(i)] = \sum_{v\in V} X_t(v)$$

且变量 $X_t(v)$、 $v\in V$ 相互独立，引理 3.7**(v)** 表明该和满足一个

$$\left(\tfrac{1}{n}, \sum_{v\in V}\underset{t-1}{\mathbf{Var}}[X_t(v)]\right)\text{-Bernstein condition.}$$

使用引理 4.2的第 2 项,

$$\sum_{v\in V}\underset{t-1}{\mathbf{Var}}[X_t(v)] = \underset{t-1}{\mathbf{Var}}[\alpha_t(i)] \le \frac{\alpha_{t-1}(i)}{n}.$$

因此结论得证。 □

引理的证明 *4.3*。 **(i) 期望**。 根据引理1 4.2的第 1 项，我们有 e

$$\underset{t-1}{\mathbb{E}}[\beta_t] = \sum_{i\in[k]}\alpha_{t-1}(i)(\alpha_{t-1}(i)+2(1-\beta_{t-1})) = \gamma_{t-1}+2\beta_{t-1}(1-\beta_{t-1}).$$

**(ii) 方差**。 我们先计算 **协方差**$_{t-1}[\alpha_t(i)\ \alpha_t(j)]$ 和 **协方差**$_{t-1}[\alpha_t(i)\ \beta_t]$，这些结果稍后会用到。

**断言 B.2**。 *For* 任意不同的 $i$、 $j\in[k]$ 和 $t\ge 1$、**协方差**$_{t-1}[\alpha_t(i)\ \alpha_t(j)] = -\frac{\alpha_{t-1}(i)\ \alpha_{t-1}(j)}{n}(1-\beta_{t-1})$ .

证明。 由（38），

$$\begin{aligned}\operatorname*{\mathbf{Cov}}_{t-1}\left[\alpha_t(i),\alpha_t(j)\right] &= \frac{1}{n^2}\sum_{v\in V}\sum_{u\in V}\operatorname*{\mathbf{Cov}}_{t-1}\left[\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=i},\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(u)=j}\right]\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{v\in V}\operatorname*{\mathbf{Cov}}_{t-1}\left[\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=i},\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=j}\right]\\ &= -\frac{1}{n^2}\sum_{v\in V}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=i}\right]\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=j}\right]\\ &= -\frac{1-\beta_{t-1}}{n}\alpha_{t-1}(i)\alpha_{t-1}(j).\end{aligned}$$

□

**命题 B.3**。 对于任意 $i\in[k]$ 和 $t\geq 1$，有

$$\mathbf{Cov}_{t-1}[\alpha_t(i),\beta_t]=\frac{\alpha_{t-1}(i)}{n}[(1-\beta_{t-1})(1-\alpha_{t-1}(i))+\alpha_{t-1}(i)(\beta_{t-1}-\alpha_{t-1}(i))].$$

具体而言，**协方差**$_{t-1}[\alpha_t(i)\ \beta_t]\leq \frac{\alpha_{t-1}(i)}{n}$。

证明。 由命题 B.2和引理 4.2 (条目 2)，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}_{t-1}[\alpha_t(i),\beta_t] &= \operatorname*{\mathbf{Var}}_{t-1}\left[\alpha_t(i)\right]+\sum_{j\in[k]\setminus\{i\}}\mathbf{Cov}_{t-1}[\alpha_t(i),\alpha_t(j)]\\ &= \operatorname*{\mathbf{Var}}_{t-1}\left[\alpha_t(i)\right]-\frac{(1-\beta_{t-1})\alpha_{t-1}(i)(\beta_{t-1}-\alpha_{t-1}(i))}{n}\\ &= \frac{\alpha_{t-1}(i)}{n}[(1-\beta_{t-1})(1-\alpha_{t-1}(i))+\alpha_{t-1}(i)(\beta_{t-1}-\alpha_{t-1}(i))]\\ &\leq \frac{\alpha_{t-1}(i)}{n}.\end{aligned}$$

□

由于 **方差**$_{t-1}\left[\beta_{t-1}\right]=\sum_{i\in[k]}\sum_{j\in[k]}$**协方差**$_{t-1}\left[\alpha_t(i)\ \alpha_t(j)\right]=\sum_{i\in[k]}$**协方差**$_{t-1}\left[\alpha_t(i)\ \beta_t\right]$，我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname*{\mathbf{Var}}_{t-1}\left[\beta_{t-1}\right] &= \frac{(1-\beta_{t-1})(\beta_{t-1}-\gamma_{t-1})+\beta_{t-1}\gamma_{t-1}-\|\alpha_{t-1}\|_3^3}{n}\\ &= \frac{(\beta_{t-1}-\gamma_{t-1})(1-\beta_{t-1}+\gamma_{t-1})+\gamma_{t-1}^2-\|\alpha_{t-1}\|_3^3}{n}\\ &\leq \frac{\beta_{t-1}}{n}.\end{aligned}$$

注意，根据柯西-施瓦茨不等式，$\gamma_{t-1}^2\leq\beta_{t-1}\|\alpha_{t-1}\|_3^3$ 成立。因此，结论得证。(iii) 伯恩斯坦条件。为方便起见，记 $Y_t(v)=\frac{1}{n}(\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)\neq\perp}-\mathbb{E}_{t-1}[\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)\neq\perp}])$。由引理 3.7 的条目 1，$Y_t(v)$ 满足 $\left(\frac{1}{n},\right.$ $\left.\mathrm{Var}_{t-1}[Y_t(v)]\right)$-伯恩斯坦条件。根据定义，我们有 $\beta_t-\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]=\sum_{v\in V}Y_t(v)$，即，给定 $t-1$ 轮次，$\beta_t-\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]$ 是 $n$个独立随机变量 $(Y_t(v))_{v\in V}$之和。因此，根据引理 3.7 的条目 5，$\beta_t-\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]$ 满足$\left(\frac{1}{n},\right.$ $\left.\sum_{v\in V}\mathrm{Var}_{t-1}[Y_t(v)]\right)$-伯恩斯坦条件。由于

$$\sum_{v\in V}\operatorname*{\mathbf{Var}}_{t-1}[Y_t(v)]=\mathbf{Var}[\beta_t]\leq\frac{\beta_{t-1}(i)}{n}$$

由引理 4.3（第 2 项）成立，我们得到该断言。 □

引理 *4.4* 的证明。**(i) 期望**。 由第1 项（引理 4.2），我们有

$$\begin{aligned}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\delta_t^{(\varepsilon)}\right] &= \alpha_{t-1}(i)(\alpha_{t-1}(i)+2(1-\beta_{t-1})) - (1+\varepsilon)\alpha_{t-1}(j)(\alpha_{t-1}(j)+2(1-\beta_{t-1}))\\ &= (\alpha_{t-1}(i)-(1+\varepsilon)\alpha_{t-1}(j))(\alpha_{t-1}(i)+\alpha_{t-1}(j)+2(1-\beta_{t-1}))+\varepsilon\alpha_{t-1}(i)\alpha_{t-1}(j).\end{aligned}$$

**(ii) 方差**。由条目2 和引理B.2 的断言4.2，可得

$$\mathop{\mathbf{Var}}_{t-1}[\delta_t] = \mathop{\mathbf{Var}}_{t-1}[\alpha_t(i)] + \mathop{\mathbf{Var}}_{t-1}[\alpha_t(j)] - 2\mathop{\mathbf{Cov}}_{t-1}[\alpha_t(i),\alpha_t(j)] \ge \frac{(1-\beta_{t-1})^2}{n}(\alpha_{t-1}(i)+\alpha_{t-1}(j)).$$

**(iii) 伯恩斯坦条件**。由引理 4.2 （条目 3）和引理 3.7 （条目 3），对于任意 $l\in[k]$和 $x\ge 0$, $x\cdot(\alpha_t(l) - \mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(l)])$ 满足 $\left(\frac{x}{n}, \frac{x^2\alpha_{t-1}(i)}{n}\right)$-伯恩斯坦条件。由于

$$\delta_t^{(\varepsilon)} - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\delta_t^{(\varepsilon)}\right] = \Big(\alpha_t(i) - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\alpha_t(i)]\Big) - (1+\varepsilon)\Big(\alpha_t(j) - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\alpha_t(j)]\Big),$$

由引理3.7 （条目2）和引理3.8 （条目1），即可得到该结论。 □

引理*4.5*的证明。**(i) 期望上界**。首先，我们注意到

$$\sum_{i\in[k]}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\alpha_t(i)]^2 = 4(1-\beta_{t-1})^2\gamma_{t-1} + 4(1-\beta_{t-1})\|\alpha_t\|_3^3 + \|\alpha_t\|_4^4 \tag{39}$$

由引理1的条目4.2可得。因此，

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\gamma_t] = 4(1-\beta_{t-1})^2\gamma_{t-1} + 4(1-\beta_{t-1})\|\alpha_t\|_3^3 + \|\alpha_t\|_4^4 + \sum_{i\in[k]}\mathop{\mathbf{Var}}_{t-1}[\alpha_t(i)] \le 10\gamma_{t-1}.$$

成立。注意到 $\sum_{i\in[k]}$**方差**$_{t-1}[\alpha_t(i)] \le \frac{\beta_{t-1}}{n}$ 由引理2 的条目4.2 以及 $\beta_{t-1}\le n\gamma_{t-1}$ 成立。**(ii) 期望下界**。由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\gamma_t^2 = \left(\sum_{i\in[k]}\alpha_t(i)^{0.5}\alpha_t(i)^{1.5}\right)^2 \le \beta_t\|\alpha_t\|_3^3 \quad\text{and}\quad \|\alpha_t\|_3^6 = \left(\sum_{i\in[k]}\alpha_t(i)\alpha_t(i)^2\right)^2 \le \gamma_t\|\alpha_t\|_4^4.$$

因此，由（39）和引理 4.3（条目1），可得

$$\begin{aligned}\beta_{t-1}^2\gamma_{t-1}\sum_{i\in[k]}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\alpha_t(i)]^2 &\ge 4(1-\beta_{t-1})^2\beta_{t-1}^2\gamma_{t-1}^2 + 4(1-\beta_{t-1})\beta_{t-1}^2\gamma_{t-1}\|\alpha_t\|_3^3 + \beta_{t-1}^2\gamma_{t-1}\|\alpha_{t-1}\|_4^4\\ &\ge 4(1-\beta_{t-1})^2\beta_{t-1}^2\gamma_{t-1}^2 + 4(1-\beta_{t-1})\beta_{t-1}\gamma_{t-1}^3 + \gamma_{t-1}^4\\ &= \gamma_{t-1}^2\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t]^2.\end{aligned}$$

此外，$\mathbf{Var}_{t-1}[\alpha_t(i)] \ge (1-\beta_{t-1})^2\alpha_{t-1}(i)\,n$ 根据引理 4.2 (条目 2)，我们得到

$$\beta_{t-1}^2\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\gamma_t] = \beta_{t-1}^2\left(\sum_{i\in[k]}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\alpha_t(i)]^2 + \sum_{i\in[k]}\mathop{\mathbf{Var}}_{t-1}[\alpha_t(i)]\right) \ge \gamma_{t-1}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t]^2 + \frac{\beta_{t-1}^3(1-\beta_{t-1})^2}{n}.$$

**(iii) 伯恩斯坦条件**。写作

$$Z_t(v,u)=\frac{1}{n^2}\left(\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=\mathrm{opn}_t(u)}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)\neq\perp}-\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=\mathrm{opn}_t(u)}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)\neq\perp}]\right)$$

为方便起见。根据引理 3.7 的条目 1，$Z_t(v,u)$ 满足 $\left(\frac{1}{n^2},\ \mathrm{Var}_{t-1}[Z_t(v,u)]\right)$-伯恩斯坦条件。注意到 $\gamma_t-\mathbb{E}_{t-1}[\gamma_t]=\sum_{v\in V}\sum_{u\in V}Z_t(v,u)$。换言之，在给定 $t-1$ 轮次的条件下，$\gamma_t-\mathbb{E}_{t-1}[\gamma_t]$ 是 $n^2$ 个随机变量的和（$Z_t(v,u)$）$_{v,u\in V}$。此外，（$Z_t(v,u)$）$_{v,u\in V}$ 是一个由相互独立随机变量构成的 read-$2n-1$ 家族（$\mathrm{opn}_t(v)$）$_{v\in V}$。因此，根据引理 3.7 的条目 2，$\gamma_t-\mathbb{E}_{t-1}[\gamma_t]$ 满足 $\left(\frac{2n-1}{n^2},(2n-1)\sum_{v,u\in V}\mathrm{Var}_{t-1}[Z_t(v,u)]\right)$-伯恩斯坦条件。现在，我们对 $\sum_{v,u\in V}\mathrm{Var}_{t-1}[Z_t(v,u)]$ 进行界定。根据引理 4.5（条目 1），我们有

$$\sum_{v,u\in V}\mathop{\mathbf{Var}}_{t-1}[Z_t(v,u)]\le\frac{1}{n^4}\sum_{v,u\in V}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=\mathrm{opn}_t(u)}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)\neq\perp}]=\frac{1}{n^2}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\gamma_t]\le\frac{10\gamma_{t-1}}{n^2},$$

即可得出结果。 □

引理的证明*4.6*。**(i) 期望**。根据 $\psi_t$ 和引理4.3(第1项)，有

$$\begin{aligned}
&\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\psi_t]=2\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t]^2-\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t]-\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\gamma_t]+\mathop{\mathbf{Var}}_{t-1}[\beta_t],\\
&\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t]=\beta_{t-1}-\psi_{t-1},\\
&2\beta_{t-1}^2-\gamma_{t-1}=\beta_{t-1}+\psi_{t-1}.
\end{aligned}$$

应用引理4.8 (第2项)，有

$$\begin{aligned}
\beta_{t-1}^2\left(2\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t]^2-\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t]-\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\gamma_t]\right)&\le\beta_{t-1}^2\left(2\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t]^2-\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t]\right)-\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t]^2\gamma_{t-1}\\
&=-\psi_{t-1}^2\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t]\\
&\le 0.
\end{aligned}$$

因此，由引理4.3 (第2项)，可得

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\psi_t]\le\mathop{\mathbf{Var}}_{t-1}[\beta_t]\le\frac{\beta_{t-1}}{n}.$$

**(ii) 伯恩斯坦条件**。首先，我们证明以下断言：

**断言 B.4.** $\beta_t^2-\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t^2]$ 满足 $\left(\frac{2}{n},\frac{20\beta_{t-1}^2}{n}\right)$-伯恩斯坦条件。

证明。记

$$Y_t(v,u)=\frac{1}{n^2}\left(\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)\neq\perp}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(u)\neq\perp}-\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)\neq\perp}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(u)\neq\perp}]\right)$$

为方便起见。由引理 3.7 的条目 1，$Y_t(v,u)$ 满足 $\left(\frac{1}{n^2},\ \mathrm{Var}_{t-1}[Y_t(v,u)]\right)$-伯恩斯坦条件。注意到 $\beta_t^2-\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t^2]=\sum_{v\in V}\sum_{u\in V}Y_t(v,u)$。换言之，在以 $t-1$ 轮次为条件时，$\beta_t^2-\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t^2]$ 是 $n^2$ 个随机变量 $(Y_t(v,u))_{v,u\in V}$ 之和。此外，$(Y_t(v,u))_{v,u\in V}$是独立随机变量的 read-$2n-1$ 族 $(\mathrm{opn}_t(v))_{v\in V}$。因此，由条目 2

引理 3.7， $\beta_t^2 - \mathbb{E}_{t-1}[\beta_t^2]$ 满足 $\left(\binom{2n-1}{n^2}, (2n-1)\sum_{v,\ u\in V}\mathbf{Var}_{t-1}[Y_t(v,\ u)]\right)$-伯恩斯坦条件。现在，我们界定 $\sum_{v,\ u\in V}\mathbf{Var}_{t-1}[Y_t(v,\ u)]$。由引理 4.3 （条目 1 和 2），我们有

$$\begin{aligned}\sum_{v,u\in V}\underset{t-1}{\mathbf{Var}}[Y_t(v,u)] &\le \frac{1}{n^4}\sum_{v,u\in V}\underset{t-1}{\mathbb{E}}[\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)\neq\perp}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(u)\neq\perp}]\\ &= \frac{1}{n^2}\underset{t-1}{\mathbb{E}}[\beta_t^2]\\ &= \frac{1}{n^2}\left(\underset{t-1}{\mathbb{E}}[\beta_t]^2 + \underset{t-1}{\mathbf{Var}}[\beta_t]\right)\\ &\le \frac{1}{n^2}\left(9\beta_{t-1}^2 + \frac{\beta_{t-1}}{n}\right)\\ &\le \frac{10\beta_{t-1}^2}{n^2}.\end{aligned}$$

成立，因此得证。 □

根据定义， $\psi_t - \mathbb{E}_{t-1}[\psi_t] = 2\big(\beta_t^2 - \mathbb{E}_{t-1}[\beta_t^2]\big) + (\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t] - \beta_t) + (\mathbb{E}_{t-1}[\gamma_t] - \gamma_t)$。结合引理 3.7 的第 1 项和第 3 项， $2\big(\beta_t^2 - \mathbb{E}_{t-1}[\beta_t^2]\big) + (\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t] - \beta_t) + (\mathbb{E}_{t-1}[\gamma_t] - \gamma_t)$ 满足 $\left(3\cdot\frac{8}{n}, 3\cdot\left(\frac{80\beta_{t-1}}{n} + \frac{\beta_{t-1}}{n} + \frac{20\beta_{t-1}}{n}\right)\right)$-伯恩斯坦条件。 □

引理 4.7 的证明。**(i) 期望**。由引理4.2 和4.3，

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(I_{t-1})]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]} &= \frac{\alpha_{t-1}(I_{t-1})}{\beta_{t-1}}\left(1 + \frac{\frac{\mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(I_{t-1})]}{\alpha_{t-1}(I_{t-1})} - \frac{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]}{\beta_{t-1}}}{\frac{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]}{\beta_{t-1}}}\right)\\ &= \frac{\alpha_{t-1}(I_{t-1})}{\beta_{t-1}}\cdot\frac{\alpha_{t-1}(I_{t-1}) + 2(1-\beta_{t-1})}{2(1-\beta_{t-1}) + \gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}\\ &= \widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}\left(1 + \frac{\alpha_{t-1}^{\max} - \gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}{2(1-\beta_{t-1}) + \gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}\right) \qquad (40)\end{aligned}$$

成立。注意 $I_{t-1} = \text{最小值}\{i\in[k]:\ \alpha_{t-1}(i) = \alpha_{t-1}^{\max}\} = \text{最小值}\{i\in[k]:\ \widetilde{\alpha}_{t-1}(i) = \widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}\}$。结合上述结果和引理 B.1(第 1 项)，得到

$$\begin{aligned}\underset{t-1}{\mathbb{E}}[\widetilde{\alpha}_t(I_{t-1})] &\ge \frac{\mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(I_{t-1})]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]} - \frac{\mathbf{Cov}_{t-1}[\alpha_t(I_{t-1}),\beta_t]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2}\\ &\ge \widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}\left(1 + \frac{\alpha_{t-1}^{\max} - \gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}{2(1-\beta_{t-1}) + \gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}\right) - \frac{9\alpha_{t-1}^{\max}}{n}. \qquad (41)\end{aligned}$$

最后一个不等式根据断言 B.3 (**协方差**$_{t-1}[\alpha_t(i)\ \beta_t] \le \alpha_{t-1}(i)/n$) 以及$\beta_{t-1}\ge 1/2 - o(1)$、 $\psi_{t-1}\le o(1)$ 和 $\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t] = \beta_{t-1} - \psi_{t-1} \ge 1/2 - o(1) \ge 1/3$ 的假设得出。

**(ii) 伯恩斯坦条件**。由命题B.3，可得**协方差**$_{t-1}[\alpha_t(I_{t-1})\ \beta_t] \le \frac{\alpha_{t-1}(I_{t-1}}{n} = \frac{\alpha_{t-1}^{\max})}{n}$。由 (40) 和引理B.1（第2项），可得

$$\begin{aligned}&\widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}\left(1 + \frac{\alpha_{t-1}^{\max} - \gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}{2(1-\beta_{t-1}) + \gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}\right) - \widetilde{\alpha}_t^{\max} - \frac{9\alpha_{t-1}^{\max}}{n}\\ &\le \frac{\mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(I_{t-1})]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]} - \widetilde{\alpha}_t(I_{t-1}) - \frac{\mathbf{Cov}_{t-1}[\alpha_t(I_{t-1}),\beta_t]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2} \qquad \text{(from (41))}\\ &\le \frac{2(\mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(I_{t-1})] - \alpha_t(I_{t-1}))}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]} + \frac{\alpha_t(I_{t-1})\beta_t - \mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(I_{t-1})\beta_t]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2}. \qquad \text{(f由引理B.1 (第 2 项))}\end{aligned}$$

注意，在第二个不等式中我们使用了 $\widetilde{\alpha}_t(I_{t-1}) \le \widetilde{\alpha}_t^{\max}$。由引理4.2 的第3项和引理3.7 的第3项可知，随机变量 $^{2}{}_{(\mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(I_{t-1})]-\alpha_t(I_{t-1}))\ \mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]}$ 在给定轮次 $t-1$ 的条件下满足 $\left(\frac{2}{n\,\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]}, \frac{4\alpha_{t-1}^{\max}}{n\,\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2}\right)$-伯恩斯坦条件。现在我们检验 $\alpha_t(i)\beta_t - \mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(i)\beta_t]$ 的伯恩斯坦条件。

**命题B.5.** 对于任意 $t \ge 1$ 和 $i \in [k]$，$\alpha_t(i)\beta_t - \mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(i)\beta_t]$ 在给定轮次 $t-1$ 的条件下满足 $\left(\frac{2}{n}, \frac{14\alpha_{t-1}(i)\beta_{t-1}}{n}\right)$-伯恩斯坦条件。

命题 *B.5*的证明。 记

$$X_t(v,u) = \frac{1}{n^2}\left(\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=i}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(u)\neq\perp} - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=i}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(u)\neq\perp}]\right)$$

以简化表达。根据引理 3.7 的条目 1，随机变量 $X_t(v,u)$ 在给定轮次$t-1$ 的条件下满足 $\left(\frac{1}{n^2}, \mathrm{Var}_{t-1}[X_t(v,u)]\right)$-伯恩斯坦条件。注意到 $\alpha_t(i)\beta_t - \mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(i)\beta_t] = \sum_{v\in V}\sum_{u\in V} X_t(v,u)$。换言之，给定 $t-1$ 轮次时，$\alpha_t(i)\beta_t - \mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(i)\beta_t]$ 是 $n^2$ 个随机变量 $(X_t(v,u))_{v,u\in V}$之和。此外，$(X_t(v,u))_{v,u\in V}$是一个读-$2n-1$ 独立随机变量族（$\mathrm{opn}_t(v))_{v\in V}$。因此，根据引理 3.7 的条目 2，$\alpha_t(i)\beta_t - \mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(i)\beta_t]$满足 $\left(\frac{2n-1}{n^2}, (2n-1)\sum_{v,u\in V}\mathrm{Var}_{t-1}[X_t(v,u)]\right)$-伯恩斯坦条件。现在，我们如下界定求和式 $\sum_{v,u\in V}\mathrm{Var}_{t-1}[X_t(v,u)]$ ： 由于

$$\begin{aligned}
\sum_{v,u\in V}\mathop{\mathbf{Var}}_{t-1}[X_t(v,u)] &\le \frac{1}{n^4}\sum_{v,u\in V}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=i}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(u)\neq\perp}] \\
&= \frac{1}{n^2}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\alpha_t(i)\beta_t] \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\alpha_t(i)]\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t] + \mathbf{Cov}_{t-1}[\alpha_t(i),\beta_t]\right) \\
&\le \frac{1}{n^2}\left(6\alpha_{t-1}(i)\beta_{t-1} + \frac{\alpha_{t-1}(i)}{n}\right) \\
&\le \frac{7\alpha_{t-1}(i)\beta_{t-1}}{n^2}
\end{aligned}$$

由引理 4.2 和 4.3 以及命题 B.3，可得该结论。 □

由命题 B.5 以及引理 3 的第 3.7项可知，随机变量 $^{\alpha_t(I_{t-1})\beta_t - \mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t I_{t-1}\ \beta_t]\ ()}{}_{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2}$ 在给定轮次 $t-1$ 的条件下满足 $\left(\frac{2}{n\,\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2}, \frac{14\alpha_{t-1}^{\max}\beta_{t-1}}{n\,\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^4}\right)$-伯恩斯坦条件。因此，由引理 1的第 3.7 项和引理 2 的第 3.7项可得该结论。注意，根据以下假设$\beta_{t-1} \ge 1/2 - o(1)$ 和 $\psi_{t-1} \le o(1)$，有 $\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t] = \beta_{t-1} - \psi_{t-1} \ge 1/2 - o(1) \ge 1/3$。 □

引理的证明 *4.8*。 **(i) 期望**。 由引理 4.8 （第2项），我们有

$$\frac{\mathbb{E}_{t-1}[\gamma_t]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2} \ge \widetilde{\gamma}_{t-1} + \frac{\beta_{t-1}(1-\beta_{t-1})^2}{n\,\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2}.$$

因此，由引理 B.1 （第 1 项）、引理 4.3 （第 2 项）、引理 4.5（第 1 项）以及断言 B.6（我们将在后文证明这一点），我们有

$$\begin{aligned}
\underset{t-1}{\mathbb{E}}\left[\widetilde{\gamma}_t\right] &\geq \frac{\mathbb{E}_{t-1}\left[\gamma_t\right]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t^2]} - \frac{\mathbf{Cov}_{t-1}\left[\gamma_t, \beta_t^2\right]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t^2]^2} \\
&= \frac{\mathbb{E}_{t-1}\left[\gamma_t\right]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2} - \frac{\mathbb{E}_{t-1}\left[\gamma_t\right]\mathbf{Var}_{t-1}[\beta_t]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t^2]\,\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2} - \frac{\mathbf{Cov}_{t-1}\left[\gamma_t, \beta_t^2\right]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t^2]^2} \\
&\geq \widetilde{\gamma}_{t-1} + \frac{\beta_{t-1}(1-\beta_{t-1})^2}{n\,\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2} - \frac{\mathbb{E}_{t-1}[\gamma_t]\beta_{t-1}}{n\,\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^4} - \frac{4\,\mathbb{E}_{t-1}[\gamma_t]}{n\,\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^4} && \text{(Claim B.6)} \\
&\geq \widetilde{\gamma}_{t-1} + \frac{1}{n\,\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2}\left(\beta_{t-1}(1-\beta_{t-1})^2 - \frac{50\gamma_{t-1}}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2}\right) && \text{(Lemma 4.5 (Item 1))} \\
&= \widetilde{\gamma}_{t-1} + \frac{1}{n\,\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2}\left(\frac{\beta_{t-1}}{4}\left(1 - \frac{\psi_{t-1}+\gamma_{t-1}}{\beta_{t-1}}\right)^2 - \frac{50\gamma_{t-1}}{(\beta_{t-1}-\psi_{t-1})^2}\right).
\end{aligned}$$

注意，根据 $\psi_t = \beta_t(2\beta_t - 1) - \gamma_t$ 的定义，$1 - \beta_{t-1} = \frac{1}{2} - \frac{\psi_{t-1}+\gamma_{t-1}}{2\beta_{t-1}}$ 成立。由假设 $\psi_{t-1}, \gamma_{t-1} \leq o(1)$ 和 $\beta_{t-1} \geq 1/2 - o(1)$，可得该断言。

**断言 B.6**。对于任意 $t \geq 1$，我们有 **协方差**$_{t-1}\left[\gamma_t, \beta_t^2\right] \leq \frac{4\,\mathbb{E}_{t-1}[\gamma_t]}{n}$。

证明。我们有

$$\gamma_t = \sum_{i\in[k]}\left(\frac{1}{n}\sum_{v\in V}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=i}\right)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{v\in V}\sum_{u\in V}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=\mathrm{opn}_t(u)}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)\neq\perp}, \tag{42}$$

$$\beta_t^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{v\in V}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=\perp}\right)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{v\in V}\sum_{u\in V}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)\neq\perp}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(u)\neq\perp}. \tag{43}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\underset{t-1}{\mathbf{Cov}}\left[\gamma_t, \beta_t^2\right] &= \frac{1}{n^4}\sum_{v,u,a,b\in V}\underset{t-1}{\mathbf{Cov}}\left[\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=\mathrm{opn}_t(u)}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)\neq\perp}, \mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(a)\neq\perp}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(b)\neq\perp}\right] \\
&= \frac{1}{n^4}\sum_{v,u,a,b\in V:\{v,u\}\cap\{a,b\}\neq\emptyset}\underset{t-1}{\mathbf{Cov}}\left[\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=\mathrm{opn}_t(u)}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)\neq\perp}, \mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(a)\neq\perp}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(b)\neq\perp}\right] \\
&\leq \frac{1}{n^4}\sum_{v,u,a,b\in V:\{v,u\}\cap\{a,b\}\neq\emptyset}\underset{t-1}{\mathbb{E}}\left[\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=\mathrm{opn}_t(u)}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)\neq\perp}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(a)\neq\perp}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(b)\neq\perp}\right] \\
&\leq \frac{1}{n^4}\sum_{v,u\in V}\sum_{a,b\in V:\{v,u\}\cap\{a,b\}\neq\emptyset}\underset{t-1}{\mathbb{E}}\left[\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)=\mathrm{opn}_t(u)}\mathbf{1}_{\mathrm{opn}_t(v)\neq\perp}\right] \\
&\leq \frac{4n}{n^2}\underset{t-1}{\mathbb{E}}\left[\gamma_t\right].
\end{aligned}$$

□

□

## B.2 群体协议模型

证明引理 *4.9*。 **(i) 期望**。 首先，注意到，对任意 $i \in [k]$ 和 $t \geq 1$,

$$\alpha_t(i) - \alpha_{t-1}(i) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{with probability } (1-\beta_{t-1})\alpha_{t-1}(i), \\ -\frac{1}{n} & \text{with probability } \alpha_{t-1}(i)(\beta_{t-1} - \alpha_{t-1}(i)), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{44}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\alpha_t(i)] &= \alpha_{t-1}(i) + \frac{1}{n}(1-\beta_{t-1})\alpha_{t-1}(i) - \frac{1}{n}\alpha_{t-1}(i)(\beta_{t-1} - \alpha_{t-1}(i)) \\ &= \alpha_{t-1}(i)\left(1 + \frac{\alpha_{t-1}(i) + 1 - 2\beta_{t-1}}{n}\right). \end{aligned}$$

**(ii) 方差**。 由 $\mathbf{Var}_{t-1}[\alpha_t(i)] = \mathbf{Var}_{t-1}\left[\alpha_t(i) - \alpha_{t-1}(i)\right]$ 以及（44），我们有

$$\begin{aligned} \mathop{\mathbf{Var}}_{t-1}[\alpha_t(i)] &= \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[(\alpha_t(i) - \alpha_{t-1}(i))^2\right] - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\alpha_t(i) - \alpha_{t-1}(i)\right]^2 \\ &= \frac{\alpha_t(i)(1-\alpha_{t-1}(i))}{n^2} - \frac{\alpha_{t-1}(i)^2}{n^2}(1 - 2\beta_{t-1} + \alpha_{t-1}(i))^2. \end{aligned}$$

(iii) 伯恩斯坦条件。首先，$\alpha_t(i) - \mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(i)]$ 满足 $\left(\frac{1}{n}, \mathrm{Var}_{t-1}[\alpha_t(i)]\right)$-伯恩斯坦条件（引理 3.7，条目 1）。此外，根据引理 4.2 的条目 2，我们有 $\mathrm{Var}_{t-1}[\alpha_t(i)] \leq \frac{\alpha_{t-1}(i)}{n}$。因此，由引理 3.7（条目 2）可得所述结论。

□

引理 *4.10*的证明。 **(i) 期望**。 根据定义，

$$\beta_t - \beta_{t-1} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{with probability } (1-\beta_{t-1})\beta_{t-1}, \\ -\frac{1}{n} & \text{with probability } \sum_{i\in[k]} \alpha_{t-1}(i)(\beta_{t-1} - \alpha_{t-1}(i)) = \beta_{t-1}^2 - \gamma_{t-1}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{45}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t] &= \beta_{t-1} + \frac{(1-\beta_{t-1})\beta_{t-1}}{n} - \frac{\beta_{t-1}^2 - \gamma_{t-1}}{n} \\ &= \beta_{t-1} + \frac{\beta_{t-1}(1-2\beta_{t-1}) + \gamma_{t-1}}{n}. \end{aligned}$$

**(ii) 方差**。 由 $\mathbf{Var}_{t-1}[\beta_t] = \mathbf{Var}_{t-1}\left[\beta_t - \beta_{t-1}\right]$ 以及（45），可得

$$\mathop{\mathbf{Var}}_{t-1}[\beta_t] \leq \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[(\beta_t - \beta_{t-1})^2\right] = \frac{(1-\beta_{t-1})\beta_{t-1} + \beta_{t-1}^2 - \gamma_{t-1}}{n^2} = \frac{\beta_{t-1} - \gamma_{t-1}}{n^2}. \tag{46}$$

**(iii) 伯恩斯坦条件**。 根据引理 3.7 (第 1 项 $\beta_t - \mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]$ 满足 $\left(\frac{1}{n}, \mathbf{Var}_{t-1}[\beta_t]\right)$- 伯恩斯坦条件。因此，根据引理 3.7 (第 2 项)和引理 4.10 (第 2 项)，即可得到所述结论。

□

引理 *4.11* 的证明。 **(i) 期望**。 根据引理4.9 (第 1 项)，我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\delta_t^{(\varepsilon)}\right] = \delta_{t-1}^{(\varepsilon)}\left(1+\frac{\alpha_{t-1}(i)+\alpha_{t-1}(j)+1-2\beta_{t-1}}{n}\right)+\frac{\varepsilon\alpha_{t-1}(i)\alpha_{t-1}(j)}{n}.$$

**(ii) 方差**。 由引理 4.11 （条目1），可得

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathbf{Var}}_{t-1}\left[\delta_t\right] &= \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\left(\delta_t-\delta_{t-1}\right)^2\right]-\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\delta_t-\delta_{t-1}\right]^2 \\
&= \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\left(\alpha_t(i)-\alpha_{t-1}(i)\right)^2\right]+\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\left(\alpha_t(j)-\alpha_{t-1}(j)\right)^2\right]-\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\delta_t-\delta_{t-1}\right]^2 \\
&\frac{\alpha_{t-1}(i)(1-\alpha_{t-1}(i))}{n^2}+\frac{\alpha_{t-1}(j)(1-\alpha_{t-1}(j))}{n^2}-\frac{\delta_{t-1}^2}{n^2}(1-2\beta_{t-1}+\alpha_{t-1}(i)+\alpha_{t-1}(j))^2 \\
&\geq \frac{\alpha_{t-1}(i)(1-\alpha_{t-1}(i))}{n^2}+\frac{\alpha_{t-1}(j)(1-\alpha_{t-1}(j))}{n^2}-\frac{4\delta_{t-1}^2}{n^2}.
\end{aligned}$$

**(iii) 伯恩斯坦条件**。 由于

$$\delta_t^{(\varepsilon)}-\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\delta_t^{(\varepsilon)}\right] = \left(\alpha_t(i)-\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\alpha_t(i)\right]\right)-(1+\varepsilon)\left(\alpha_t(j)-\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\alpha_t(j)\right]\right),$$

应用引理 3.8 （条目 1）和引理 4.9 （条目 3）， $\delta_t^{(\varepsilon)}-\mathbb{E}_{t-1}\left[\delta_t^{(\varepsilon)}\right]$ 满足 $\left(\frac{2(1+\varepsilon)}{n}, s\right)$- 伯恩斯坦条件，其中 $s=\frac{2}{n^2}\left(\alpha_{t-1}(i)+(1+\varepsilon)^2\alpha_{t-1}(j)\right)$。 □

引理 *4.12* 的证明。 假设 $v\in V$在时间 $u\in V$选择 $t-1$。那么，

$$\gamma_t-\gamma_{t-1} = \begin{cases} -\frac{2\alpha_{t-1}(i)}{n}+\frac{1}{n^2} & \text{if } \mathrm{opn}_{t-1}(v)=i \text{ and } \mathrm{opn}_{t-1}(u)=j \text{ for } i\neq j, \\ \frac{2\alpha_{t-1}(i)}{n}+\frac{1}{n^2} & \text{if } \mathrm{opn}_{t-1}(v)=\perp \text{ and } \mathrm{opn}_{t-1}(u)=i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{47}$$

事实上，对于第一种情况，可得

$$\gamma_t-\gamma_{t-1}=\alpha_t(i)^2-\alpha_{t-1}(i)^2=\left(\alpha_{t-1}(i)-\frac{1}{n}\right)^2-\alpha_{t-1}(i)^2=-\frac{2\alpha_{t-1}(i)}{n}+\frac{1}{n^2},$$

对于第二种情况，可得

$$\gamma_t-\gamma_{t-1}=\alpha_t(i)^2-\alpha_{t-1}(i)^2=\left(\alpha_{t-1}(i)+\frac{1}{n}\right)^2-\alpha_{t-1}(i)^2=\frac{2\alpha_{t-1}(i)}{n}+\frac{1}{n^2}.$$

注意，47）意味着以下事实：对于任意 $t\geq 1$，我们都有

$$|\gamma_t-\gamma_{t-1}|\leq\frac{1}{n^2}+\frac{2\alpha_{t-1}^{\max}}{n}\leq\frac{3\alpha_{t-1}^{\max}}{n}. \tag{48}$$

这里，我们利用如下事实： $\alpha_{t-1}^{\max}\leq\frac{1}{n}$成立（若不成立，则 $\gamma_t-\gamma_{t-1}=0$ 与（48）平凡成立）。

**(i) 期望。** 由（47），

$$\begin{aligned}
&\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\gamma_t-\gamma_{t-1}]\\
&=\sum_{i\in[k]}\sum_{j\in[k]\setminus\{i\}}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2\alpha_{t-1}(i)}{n}\right)\alpha_{t-1}(i)\alpha_{t-1}(j)+\sum_{i\in[k]}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2\alpha_{t-1}(i)}{n}\right)(1-\beta_{t-1})\alpha_{t-1}(i)\\
&=\frac{2}{n}\sum_{i\in[k]}\alpha_{t-1}(i)^2(1-2\beta_{t-1}+\alpha_{t-1}(i))+\frac{1}{n^2}\sum_{i\in[k]}\alpha_{t-1}(i)(1-\alpha_{t-1}(i))\\
&=\frac{2}{n}\Big((1-2\beta_{t-1})\gamma_{t-1}+\|\alpha_{t-1}\|_3^3\Big)+\frac{\beta_{t-1}-\gamma_{t-1}}{n^2}
\end{aligned}$$

成立，因此我们得到了所要证明的结论。

**(ii) 方差。** 注意到 $\textbf{方差}_{t-1}[\gamma_t]=\textbf{方差}_{t-1}[\gamma_t-\gamma_{t-1}]\le\mathbb{E}_{t-1}[(\gamma_t-\gamma_{t-1})^2]$。由 (47)，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[(\gamma_t-\gamma_{t-1})^2\right]\\
&=\sum_{i\in[k]}\sum_{j\in[k]\setminus\{i\}}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2\alpha_{t-1}(i)}{n}\right)^2\alpha_{t-1}(i)\alpha_{t-1}(j)+\sum_{i\in[k]}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2\alpha_{t-1}(i)}{n}\right)^2(1-\beta_{t-1})\alpha_{t-1}(i)\\
&=\frac{1}{n^4}\sum_{i\in[k]}\alpha_{t-1}(i)(1-\alpha_{t-1}(i))+\frac{4}{n^2}\sum_{i\in[k]}\alpha_{t-1}(i)^3(1-\alpha_{t-1}(i))\\
&\quad+\frac{4}{n^3}\sum_{i\in[k]}\alpha_{t-1}(i)^2(1-2\beta_{t-1}+\alpha_{t-1}(i))\\
&=\frac{\beta_{t-1}-\gamma_{t-1}}{n^4}+\frac{4}{n^2}\Big(\|\alpha_{t-1}\|_3^3-\|\alpha_{t-1}\|_4^4\Big)+\frac{4}{n^3}\Big((1-2\beta_{t-1})\gamma_{t-1}+\|\alpha_{t-1}\|_3^3\Big).
\end{aligned}$$

由于

$$\sum_{i\in[k]}\alpha_{t-1}(i)^{h+\ell}=\sum_{i\in[k]:\alpha_{t-1}(i)>0}\alpha_{t-1}(i)^{h+\ell}\ge\frac{1}{n^\ell}\sum_{i\in[k]:\alpha_{t-1}(i)>0}\alpha_{t-1}(i)^h=\frac{1}{n^\ell}\sum_{i\in[k]}\alpha_{t-1}(i)^h$$

对任意 $h,\ell\ge1$ 均成立，因此我们有 $\|\alpha_{t-1}\|_3^3\le n\|\alpha_{t-1}\|_4^4$、$\gamma_{t-1}\le n\|\alpha_{t-1}\|_3^3$ 和 $\beta_{t-1}\le n^2\|\alpha_{t-1}\|_3^3$。于是，我们得到了所要证明的结论。

**(iii) 伯恩斯坦条件。** 由 (48)，我们有

$$\left|\gamma_t-\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\gamma_t]\right|=\left|\gamma_t-\gamma_{t-1}-\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\gamma_t-\gamma_{t-1}]\right|\le2|\gamma_t-\gamma_{t-1}|\le\frac{6\alpha_{t-1}^{\max}}{n}.\tag{49}$$

因此，由引理 3.7 (条目 1)，$\gamma_t-\mathbb{E}_{t-1}[\gamma_t]$ 满足 $\left(\frac{6\alpha_{t-1}^{\max}}{n},\textbf{方差}_{t-1}[\gamma_t]\right)$-伯恩斯坦条件。结合引理3.7 (条目2) 和引理4.12 (条目2)，我们得到了所要证明的结论。 □

引理 *4.13* 的证明。**(i) 期望。** 首先，根据引理 4.12 （条目 1），可得

$$\begin{aligned}
\beta_{t-1}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\gamma_t-\gamma_{t-1}]&=\frac{2}{n}\Big(\beta_{t-1}(1-2\beta_{t-1})\gamma_{t-1}+\beta_{t-1}\|\alpha_{t-1}\|_3^3\Big)+\beta_{t-1}\frac{\beta_{t-1}-\gamma_{t-1}}{n^2}\\
&\ge\frac{2}{n}\big(\beta_{t-1}(1-2\beta_{t-1})\gamma_{t-1}+\gamma_{t-1}^2\big)+\beta_{t-1}\frac{\beta_{t-1}-\gamma_{t-1}}{n^2}\\
&=-\frac{2\gamma_{t-1}}{n}\psi_{t-1}+\beta_{t-1}\frac{\beta_{t-1}-\gamma_{t-1}}{n^2}.
\end{aligned}$$

注意到 $\gamma_{t-1}^2 \le \beta_{t-1}\|\alpha_{t-1}\|_3^3$ 由柯西-施瓦茨不等式成立。因此，根据（45）和（46），

$$\begin{aligned}
&\beta_{t-1} \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\psi_t - \psi_{t-1}] \\
&= 2\beta_{t-1} \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\beta_t^2 - \beta_{t-1}^2\right] - \beta_{t-1} \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t - \beta_{t-1}] - \beta_{t-1} \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\gamma_t - \gamma_{t-1}] \\
&= 2\beta_{t-1} \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[(\beta_t - \beta_{t-1})^2\right] + \beta_{t-1}(4\beta_{t-1} - 1) \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t - \beta_{t-1}] - \beta_{t-1} \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\gamma_t - \gamma_{t-1}] \\
&\le 2\beta_{t-1}\frac{\beta_{t-1} - \gamma_{t-1}}{n^2} - \beta_{t-1}(4\beta_{t-1} - 1)\frac{\psi_{t-1}}{n} + \frac{2\gamma_{t-1}}{n}\psi_{t-1} - \beta_{t-1}\frac{\beta_{t-1} - \gamma_{t-1}}{n^2} \\
&= \frac{\psi_{t-1}}{n}(-2\psi_{t-1} - \beta_{t-1}) + \beta_{t-1}\frac{\beta_{t-1} - \gamma_{t-1}}{n^2} \\
&\le -\frac{\psi_{t-1}}{n}\beta_{t-1} + \beta_{t-1}\frac{\beta_{t-1} - \gamma_{t-1}}{n^2}
\end{aligned}$$

成立，因此我们得到了所要证明的结论。

**(ii) 伯恩斯坦条件**。根据定义，$\psi_t - \mathbb{E}_{t-1}[\psi_t] = 2\big(\beta_t^2 - \mathbb{E}_{t-1}[\beta_t^2]\big) - \big(\beta_t - \mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]\big) - (\gamma_t - \mathbb{E}_{t-1}[\gamma_t])$。接下来，我们证明 $\beta_t^2 - \mathbb{E}_{t-1}[\beta_t^2]$ 满足 $\left(\frac{16}{n}, \frac{36\beta_{t-1}^4}{n^2}\right)$-伯恩斯坦条件。若此条件成立，则由引理3.7 (第2项），结合引理4.10 (第3项）和引理4.12 (第3项），即可得到所要证明的结论。

首先，我们有

$$\left|\beta_t^2 - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t^2]\right| = \left|\beta_t^2 - \beta_{t-1}^2 - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}[\beta_t^2 - \beta_{t-1}^2]\right| \le 2\left|\beta_t^2 - \beta_{t-1}^2\right| \le 4|\beta_t - \beta_{t-1}| \le \frac{4}{n}.$$

现在，我们证明 $\mathbf{Var}_{t-1}[\beta_t^2] \le \frac{9\beta_{t-1}^4}{n^2}$。若 $\beta_{t-1} = 0$，则 $\beta_t^2 - \beta_{t-1}^2 = 0$，且不等式成立。假设 $v \in V$ 在时间 $t-1$ 选择了 $u \in V$。若对于 $i \ne j$，$\mathsf{opn}_{t-1}(v) = i$ 且 $\mathsf{opn}_{t-1}(u) = j$，则我们有

$$\beta_t^2 - \beta_{t-1}^2 = -\frac{2\beta_{t-1}}{n} + \frac{1}{n^2}. \tag{50}$$

如果 $\mathsf{opn}_{t-1}(v) = \perp$ 且 $\mathsf{opn}_{t-1}(u) = i$，则有

$$\beta_t^2 - \beta_{t-1}^2 = \frac{2\beta_{t-1}}{n} + \frac{1}{n^2}. \tag{51}$$

否则，有 $\beta_t^2 - \beta_{t-1}^2 = 0$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\left(\beta_t^2 - \beta_{t-1}^2\right)^2\right] \\
&= \sum_{i\in[k]}\sum_{j\in[k]\setminus\{i\}}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{2\beta_{t-1}}{n}\right)^2\alpha_{t-1}(i)\alpha_{t-1}(j) + \sum_{i\in[k]}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2\beta_{t-1}}{n}\right)^2(1-\beta_{t-1})\alpha_{t-1}(i) \\
&= \left(\frac{1}{n^2} - \frac{2\beta_{t-1}}{n}\right)^2\left(\beta_{t-1}^2 - \gamma_{t-1}\right) + \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2\beta_{t-1}}{n}\right)^2\beta_{t-1}(1-\beta_{t-1}) \\
&= \left(\frac{1}{n^4} + \frac{4\beta_{t-1}^2}{n^2}\right)\left(\beta_{t-1}^2 - \gamma_{t-1}\right) + \frac{4\beta_{t-1}^2}{n^3}(\beta_{t-1}(1-2\beta_{t-1}) + \gamma_{t-1}) \\
&\le \frac{9\beta_{t-1}^4}{n^2}.
\end{aligned}$$

注意到 $\mathbf{方差}_{t-1}[\beta_t^2] = \mathbf{方差}_{t-1}[\beta_t^2 - \beta_{t-1}^2] \le \mathbb{E}_{t-1}[(\beta_t^2 - \beta_{t-1}^2)^2]$。因此，由引理 3.7 （条目 1），可得所述结论。

□

引理 *4.14* 的证明。 **(i) 期望**。 由引理B.1 （条目1），我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\widetilde{\alpha}_t^{\max}\right] \geq \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\widetilde{\alpha}_t(I_{t-1})\right] \geq \frac{\mathbb{E}_{t-1}\left[\alpha_t(I_{t-1})\right]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]} - \frac{\mathbf{Cov}_{t-1}[\alpha_t(I_{t-1}),\beta_t]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2}.$$

由引理 4.9 (条目 1) 和引理 4.10 (条目1)，可得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}_{t-1}\left[\alpha_t(I_{t-1})\right]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]} &= \frac{\alpha_{t-1}(I_{t-1})}{\beta_{t-1}}\left(1+\frac{\frac{\mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(I_{t-1})]}{\alpha_{t-1}(I_{t-1})}-\frac{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]}{\beta_{t-1}}}{\frac{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]}{\beta_{t-1}}}\right)\\
&= \widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}\left(1+\frac{\alpha_{t-1}^{\max}-\gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}{n\,\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]/\beta_{t-1}}\right)\\
&\geq \widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}\left(1+\frac{\alpha_{t-1}^{\max}-\gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}{2n}\right). \qquad (52)
\end{aligned}$$

注意， $\gamma_{t-1} \leq \alpha_{t-1}^{\max}\beta_{t-1}$ 成立。

现在，只需证明 **协方差** $_{t-1}[\alpha_t(I_{t-1})\ \beta_t] \leq \frac{2\alpha_{t-1}^{\max}}{n^2}$，即可完成证明。为此，由引理 4.9 (条目 2) 和引理 4.10 (条目1)，可得

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathbf{Cov}}_{t-1}\left[\alpha_t(i),\beta_t\right] &= \mathop{\mathbf{Cov}}_{t-1}\left[\alpha_t(i)-\alpha_{t-1}(i),\beta_{t-1}-\beta_{t-1}\right]\\
&= \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[(\alpha_t(i)-\alpha_{t-1}(i))(\beta_t-\beta_{t-1})\right] - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\alpha_t(i)-\alpha_{t-1}(i)\right]\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\beta_t-\beta_{t-1}\right]\\
&= \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[(\alpha_t(i)-\alpha_{t-1}(i))^2\right] - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\alpha_t(i)-\alpha_{t-1}(i)\right]\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\beta_t-\beta_{t-1}\right]\\
&= \frac{\alpha_{t-1}(i)}{n^2}(1-\alpha_{t-1}(i)-(1-2\beta_{t-1}+\alpha_{t-1}(i))(\beta_{t-1}(1-2\beta_{t-1})+\gamma_{t-1})))\\
&\leq \frac{2\alpha_{t-1}(i)}{n^2}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\frac{\mathbf{Cov}_{t-1}[\alpha_t(I_{t-1}),\beta_t]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2} \leq \frac{18\alpha_{t-1}^{\max}}{n^2} \qquad (53)$$

从而得到所述结论。注意，我们使用了 $\beta_{t-1} \geq 1/2 - o(1)$ 和 $\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t] \geq \beta_{t-1} - 1/n \geq 1/3$ 的假设。

**(ii) 伯恩斯坦条件**。 由引理 B.1 (条目2)、引理4.10 以及 (52) 和 (53)，可得

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\alpha}_{t-1}^{\max}\left(1+\frac{\alpha_{t-1}^{\max}-\gamma_{t-1}/\beta_{t-1}}{2n}\right) - \widetilde{\alpha}_t^{\max} - \frac{18\alpha_{t-1}^{\max}}{n^2}\\
&\leq \frac{\mathbb{E}_{t-1}\left[\alpha_t(I_{t-1})\right]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]} - \alpha_t(I_{t-1}) - \frac{\mathbf{Cov}_{t-1}\left[\alpha_t(I_{t-1}),\beta_t\right]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2}\\
&\leq \frac{2(\mathbb{E}_{t-1}\left[\alpha_t(I_{t-1})\right]-\alpha_{t-1}(I_{t-1}))}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]} - \frac{\alpha_t(I_{t-1})\beta_t - \mathbb{E}_{t-1}\left[\alpha_t(I_{t-1})\beta_t\right]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2}.
\end{aligned}$$

根据引理 4.9 （条目 3），前一项 $\frac{2}{(\mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t(I_{t-1})]-\alpha_{t-1}(I_{t-1}))\,\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]}$ 满足 $\left(\frac{2}{n\,\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]}, \frac{4\alpha_{t-1}^{\max}}{n^2\,\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2}\right)$- 伯恩斯坦条件。

现在，我们证明 $\frac{\alpha_t}{(I_{t-1})\beta_t - \mathbb{E}_{t-1}[\alpha_t\ I_{t-1}\ \beta_t]\,()}$ 满足 $\left(\frac{6\beta_{t-1}}{n\,\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2}, \frac{20\alpha_{t-1}^{\max}\beta_{t-1}}{n^2\,\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^4}\right)$-Bernstein 条件。一旦得到这一结论，应用引理3.8 （条目1）和引理3.7 （条目1），并结合 $\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t] \geq \beta_{t-1} - 1/n \geq 1/3$ 即可完成证明。

首先，我们有

$$\begin{aligned}\left|\alpha_t(i)\beta_t - \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\alpha_t(i)\beta_t\right]\right| &\le 2|\alpha_t(i)\beta_t - \alpha_{t-1}(i)\beta_{t-1}| \\ &\le 2\alpha_t(i)|\beta_t(i) - \beta_{t-1}(i)| + 2\beta_{t-1}|\alpha_t(i) - \alpha_{t-1}(i)| \\ &\le \frac{6\beta_{t-1}}{n}.\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\mathop{\mathbf{Var}}_{t-1}\left[\alpha_t(i)\beta_t\right] = \mathop{\mathbf{Var}}_{t-1}\left[\alpha_t(i)\beta_t - \alpha_{t-1}(i)\beta_{t-1}\right] \le \mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\left(\alpha_t(i)\beta_t - \alpha_{t-1}(i)\beta_{t-1}\right)^2\right]$$

and

$$\begin{aligned}\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\left(\alpha_t(i)\beta_t - \alpha_{t-1}(i)\beta_{t-1}\right)^2\right] &= \left(\frac{\alpha_{t-1}(i)}{n} + \frac{\beta_{t-1}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^2 (1-\beta_{t-1})\alpha_{t-1}(i) \\ &+ \left(\frac{\alpha_{t-1}(i)}{n}\right)^2 (1-\beta_{t-1})(\beta_{t-1} - \alpha_{t-1}(i)) \\ &+ \left(-\frac{\alpha_{t-1}(i)}{n} - \frac{\beta_{t-1}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^2 \alpha_{t-1}(i)(\beta_{t-1} - \alpha_{t-1}(i)) \\ &+ \left(-\frac{\alpha_{t-1}(i)}{n}\right)^2 \sum_{j\in[k]\setminus\{i\}} \alpha_{t-1}(j)(\beta_{t-1} - \alpha_{t-1}(j)) \\ &\le \frac{20\alpha_{t-1}(i)\beta_{t-1}}{n^2},\end{aligned}$$

并且由引理 3.7 (条目1)得出该结论。 □

引理 *4.15* 的证明。为方便起见，记 $x = \frac{1}{n}\left(1 - 2\beta_{t-1} + \frac{\gamma_{t-1}}{\beta_{t-1}}\right)$。那么，由引理 4.10(条目 1)，我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\beta_t\right] = \beta_{t-1} + \frac{\beta_{t-1}(1-2\beta_{t-1}) + \gamma_{t-1}}{n} = \beta_{t-1}(1+x),$$

并且由引理4.12(条目 1)，我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\gamma_t\right] \ge \gamma_{t-1} + \frac{2}{n}\left((1-2\beta_{t-1})\gamma_{t-1} + \frac{\gamma_{t-1}^2}{\beta_{t-1}}\right) + \frac{\beta_{t-1} - \gamma_{t-1}}{n^2} = \gamma_{t-1}(1+2x) + \frac{\beta_{t-1} - \gamma_{t-1}}{n^2}.$$

注意到 $\|\alpha_{t-1}\|_3^3 \ge \beta_{t-1}\left(\sum_{i\in[k]} \alpha_{t-1}\left(\frac{i}{\beta_{t-1}}\right)^2 = \gamma_{t-1}^2/\beta_{t-1}\right)$ 由詹森不等式成立。因此，

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}_{t-1}\left[\gamma_t\right]}{\mathbb{E}_{t-1}\left[\beta_t\right]^2} &\ge \frac{\gamma_{t-1}(1+2x) + \frac{\beta_{t-1}-\gamma_{t-1}}{n^2}}{\beta_{t-1}^2(1+x)^2} \\ &= \widetilde{\gamma}_{t-1} + \frac{\frac{\beta_{t-1}-\gamma_{t-1}}{n^2} - \gamma_{t-1}x^2}{\beta_{t-1}^2(1+x)^2} \\ &= \widetilde{\gamma}_{t-1} + \frac{\beta_{t-1} - \gamma_{t-1} - \gamma_{t-1}\left(1 - 2\beta_{t-1} + \frac{\gamma_{t-1}}{\beta_{t-1}}\right)^2}{n^2\,\mathbb{E}_{t-1}\left[\beta_t\right]^2}.\end{aligned}$$

现在，我们给出 **协方差**$_{t-1}\left[\gamma_t, \beta_t^2\right]$的上界。由（47）、（50）和（51），我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[(\gamma_t-\gamma_{t-1})(\beta_t^2-\beta_{t-1}^2)\right] \\
&=\sum_{i\in[k]}\sum_{j\in[k]\setminus\{i\}}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2\alpha_{t-1}(i)}{n}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2\beta_{t-1}}{n}\right)\alpha_{t-1}(i)\alpha_{t-1}(j) \\
&+\sum_{i\in[k]}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2\alpha_{t-1}(i)}{n}\right)\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2\beta_{t-1}}{n}\right)(1-\beta_{t-1})\alpha_{t-1}(i) \\
&=\frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{n}-2\beta_{t-1}\right)\left(\beta_{t-1}^2-\gamma_{t-1}\right)-\frac{2}{n^2}\left(\frac{1}{n}-2\beta_{t-1}\right)\left(\gamma_{t-1}\beta_{t-1}-\|\alpha_{t-1}\|_3^3\right) \\
&+\frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{n}+2\beta_{t-1}\right)\beta_{t-1}(1-\beta_{t-1})+\frac{2}{n^2}\left(\frac{1}{n}+2\beta_{t-1}\right)\gamma_{t-1}(1-\beta_{t-1}) \\
&\le\frac{24\gamma_{t-1}}{n^2}.
\end{aligned}
$$

注意到 $\beta_{t-1}\ge 1/n$、$\gamma_{t-1}\ge\frac{\beta_{t-1}^2}{k}$ 和 $\|\alpha_{t-1}\|_3^3\le\gamma_{t-1}\alpha_{t-1}^{\max}$成立。此外，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\beta_t^2-\beta_{t-1}^2\right] \\
&=\sum_{i\in[k]}\sum_{j\in[k]\setminus\{i\}}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2\beta_{t-1}}{n}\right)\alpha_{t-1}(i)\alpha_{t-1}(j)+\sum_{i\in[k]}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2\beta_{t-1}}{n}\right)(1-\beta_{t-1})\alpha_{t-1}(i) \\
&=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-2\beta_{t-1}\right)\left(\beta_{t-1}^2-\gamma_{t-1}\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+2\beta_{t-1}\right)\beta_{t-1}(1-\beta_{t-1}) \\
&\le\frac{6\beta_{t-1}^2}{n}
\end{aligned}
$$

并且 $\mathbb{E}_{t-1}\left[\gamma_t-\gamma_{t-1}\right]\le\frac{5\gamma_{t-1}}{n\beta_{t-1}}$由引理 4.12 （第 1 项）成立。因此，

$$
\begin{aligned}
\mathop{\mathbf{Cov}}_{t-1}\left[\gamma_t,\beta_t^2\right]&=\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\gamma_t-\gamma_{t-1}\right]\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\beta_t^2-\beta_{t-1}^2\right]-\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\gamma_t-\gamma_{t-1}\right]\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\beta_t^2-\beta_{t-1}^2\right] \\
&\le\frac{24\gamma_{t-1}}{n^2}+\frac{5\gamma_{t-1}}{n\beta_{t-1}}\cdot\frac{6\beta_{t-1}^2}{n} \\
&\le\frac{54\gamma_{t-1}}{n^2}.
\end{aligned}
$$

综合上述不等式，我们得到

$$
\begin{aligned}
\mathop{\mathbb{E}}_{t-1}\left[\widetilde{\gamma}_t\right]&\ge\frac{\mathbb{E}_{t-1}\left[\gamma_t\right]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t^2]}-\frac{\mathbf{Cov}_{t-1}\left[\gamma_t,\beta_t^2\right]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t^2]^2} \\
&=\frac{\mathbb{E}_{t-1}\left[\gamma_t\right]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2}-\frac{\mathbb{E}_{t-1}\left[\gamma_t\right]\mathbf{Var}_{t-1}[\beta_t]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t^2]\,\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t]^2}-\frac{\mathbf{Cov}_{t-1}\left[\gamma_t,\beta_t^2\right]}{\mathbb{E}_{t-1}[\beta_t^2]^2} \\
&\ge\widetilde{\gamma}_{t-1}+\frac{\beta_{t-1}}{n^2\,\mathbb{E}_{t-1}\left[\beta_t\right]^2}-\frac{5\gamma_{t-1}}{n^2\,\mathbb{E}_{t-1}\left[\beta_t\right]^2}-\frac{6\gamma_{t-1}\beta_{t-1}}{n^2\,\mathbb{E}_{t-1}\left[\beta_t\right]^4}-\frac{54\gamma_{t-1}}{n^2\,\mathbb{E}_{t-1}\left[\beta_t\right]^4} \\
&\ge\widetilde{\gamma}_{t-1}+\frac{1}{6n^2}-\frac{80000\gamma_{t-1}}{n^2} \\
&\ge\widetilde{\gamma}_{t-1}+\frac{1}{12n^2}.
\end{aligned}
$$

在此，我们采用假设 $\beta_{t-1}\ge 1/3$ 和 $\gamma_{t-1}=o(1)$。请注意，$\beta_t\ge\beta_{t-1}-\frac{1}{n}\ge\frac{\beta_{t-1}}{2}\ge\frac{1}{6}$。 □

## C 第一轮 $\beta_0 = 1$

本节中，我们证明，在 gossip USD 中，经过第一~轮次后，已决顶点的数量将以高概率变为 $O(n\gamma_0)$。

**引理 C.1.** 考虑具有 $\beta_0 = 1$ 的闲聊模型中的未决定状态动力学。则以高概率有 $\gamma_0 - \sqrt{\gamma_0 \log n/n} \leq \beta_1 \leq \gamma_0 \log n$。

证明。 由于 $\beta_0 = 1$，顶点 $u$ 在第一次同步更新后仍然处于已决定状态，当且仅当它与持有和 $u$ 相同意见的顶点通信；如果 $u$ 持有意见 $i$，这种情况发生的概率为 $\alpha_0(i)$。因此，我们有

$$\mathbb{E}[\beta_1] = \sum_{i \in [k]} \alpha_0(i) \cdot \alpha_0(i) = \gamma_0.$$

此外，量 $n\beta_1$ 是 $n$ 个独立随机变量之和，每个变量均以 1 为上界。因此，根据切尔诺夫界的一个变体（引理 A.1），对于 $h = n\gamma_0 \log n \geq 6\,\mathbb{E}[\beta_1]$（对所有充分大的 $n$），我们有

$$\Pr\left[n\beta_1 \geq n\gamma_0 \log n\right] \leq 2^{-n\gamma_0 \log n} \leq n^{-\Omega(1)}.$$

□

根据这个引理，我们知道，第一轮之后，剩余意见的数量以高概率至多为 $\gamma_0 \log n$。

**推论 C.2.** 考虑带有 $\beta_0 = 1$的闲聊模型中的未决定状态动力学。令 $k'$表示第一轮后保留的意见数量。那么，以高概率， $k' \leq \min\{k, n\gamma_0 \log n\}$。

证明. 根据引理 C.1，以高概率有 $k' \leq \min\{k, n\beta_1\} \leq \min\{k, n\gamma_0 \log n\}$。 □