量子位设计及其所在之处

Namit Anand [1, 2, *] Jeffrey Marshall, [1,3] Jason Saied, [1] Eleanor Rieffel, [1] 和 Andrea Morello[4, 5]1量子人工智能实验室，*NASA* 艾姆斯研究中心，美国加利福尼亚州莫菲特机场 *94035*2*KBR* 公司，美国得克萨斯州休斯敦杰斐逊街 *601* 号，邮编 *77002*3*USRA* 高级计算机科学研究所，美国加利福尼亚州山景城 *94043*4电气工程与电信学院，悉尼新南威尔士大学，澳大利亚新南威尔士州悉尼 *2052*5*ARC* 量子计算与通信技术卓越中心

（日期：2026年3月4日）

酉 t-设计是量子信息论中最为多用途的工具之一。它们的应用范围从随机基准测试和影子层析，到更为基础的应用，例如模拟量子混沌，以及建立经典查询复杂度与量子查询复杂度之间的指数级分离。对于量子比特系统而言，源自群结构的酉设计（例如 Clifford 群）已被证明极其有用，但遗憾的是，这一结论不再适用于量子位。事实上，有限群表示分类排除了任意量子位维数下酉 2-设计存在的可能性。这严重限制了标准量子信息原语在量子位系统中的适用性。

我们通过三方面的贡献克服了这些局限。首先，我们提出了一种通用方法，可在任意维数的量子多能级系统中构造加权态 t-设计族。这些加权态设计将经典影子层析协议从量子比特推广到了量子多能级系统。其次，我们提出了 Clifford 特征随机基准测试，使我们能够对任意维数下的量子位 Clifford 群进行基准测试，包括非素数幂维数。第三，我们为如何利用现有量子硬件（如高自旋系统和腔量子电动力学量子位）中的原生门生成近似酉设计，确立了量子电路复杂度的界限。本文工作还进一步突显了自旋相干态与光学相干态之间的类比：我们证明，自旋 GKP 码字构成态 2-设计，而自旋相干态则不构成态 2-设计；这与光学情形直接对应。本文以教学性、自成一体的方式介绍酉设计及其在量子多能级系统中的应用。

arXiv:2603.02659v1 [quant-ph] 3 Mar 2026

目录

I. 引言 2
A. 贡献概述 3
B. 酉设计 3
C. 酉设计文献综述 5
D. 复射影设计或态设计 6
E. 广义设计 7
F. SIC POVM 与互 unbiased 基 8
G. 近似设计与精确设计 9
H. 酉设计与表示论 9
I. 加权酉 t-设计 10

II. 量子位 11
A. 量子位 Clifford 群 12
B. 量子位伽罗瓦-Clifford 群构成酉 2-设计 13
C. 精确量子比特设计：Wootters 和 Fields 构造 13
D. 从均匀设计生成加权态设计 14

* 现地址：HPE Quantum、Emergent Machine Intelligence、HPE Labs。电子邮箱：namitana@usc.edu（Namit Anand）

E. 任意维度下的精确加权 2-设计 151. 2- 和3-设计的加权态示例 $d = 6$。 16

III. 实际应用 16
A. 自旋相干态与高自旋原子核的操控 B. 量子多能级系统的 16
实验平台 C. SNAP门与量子多能级通用性 D. $SU(2)$ 协变旋 17
转不是酉 2-设计 E. 自旋相干态不构成态 2-设计 F. 自旋- 18
GKP 态与态 2-设计 G. 由原生qudit门得到的近似设计 H. 18
腔量子电动力学量子位 19
20
20
21

IV. 特征随机基准测试 21
A. $SU(2)$ 的特征随机基准测试 B. 任意维度下单qudit Clifford群的 22
特征随机基准测试 23

V. 分数设计 24
A. 分数 t-设计的数值计算/讨论 1. 循环群框 27
架势 28

VI. 结语 29
A. 应用 B. 开放问 29
题 C. 讨论 30
30

致谢 参考文献 31
31

A1. $d = 2$Haar 随机酉矩阵特征值的概率密度 A1

A2. 式（89）的求值 A1

A3. 量子比特酉 5-设计 A2

A4. 特征标理论与Schur多项式 A3

I. 引言

无论怎样强调随机性在计算中的用途 [1]都不为过。在经典计算中，（伪）随机性出现在各种任务中，其中最常见的或许是密码学方法，因为若干协议的安全性从根本上依赖于随机性。在量子计算中，随机性的影响同样重大。量子系统中存在两种不同类型的随机性：基本随机性和统计随机性。基本随机性源于量子理论的结构，例如算符非对易性、测量-扰动关系等。统计随机性（或混合）则是在基本随机性的基础上叠加的经典不确定性。在尝试对某些类型的随机性建模时，这一区分十分重要，相关研究从广为人知的随机量子线路采样思路，一直到量子伪随机性 [2]，涵盖了各种内容。有多种

衡量对真正随机性的逼近程度的方法。对于“真正”随机的量子过程（通常称为 Haar 随机酉算子），人们已经有了广为接受的定义，即酉 t-设计 [3]。酉 t-设计有一个简单的解释：如果你只能访问 t 个酉系综的副本，那么它们与 Haar 随机酉算子无法区分。其密码学解释十分优雅，背后还有优美的数学结构，即设计。设计在数学中历史悠久，常被称为“求积公式” [4]。特别是球面设计及其与柏拉图立体的联系，长期以来一直被视为几何结构。在量子信息论中，酉设计有许多应用，从随机基准测试 [5–10] 最优层析方案[11, 12] 到经典影子层析、 [13], 量子信息扰乱、 [14], 量子混沌、 [15], 解耦方法，[16], 乃至查询复杂度上的指数级加速 [17]。参见文献 [18] ，其中对 Haar 测度、酉设计及其应用作了精彩的介绍。近年来出现的一个有趣联系，是酉设计与所谓“伪随机酉算子” [19]之间的关系。

A. 贡献总结

本文以半教学式的方式撰写，旨在汇集有关酉设计和量子位的有用结果。这里的挑战之一在于，量子位的量子信息原语通常会受到维数方面自身限制。例如，某些技术适用于素数维量子比特，某些技术适用于除 2 以外的素数维数，而另一些技术则适用于素数幂维数。很少有技术适用于任意量子比特维数，而这正是本文工作的重点。表 I 总结了许多与维数相关的细微问题。

第I节 介绍酉设计、复射影设计或态设计，以及它们与对称信息完备测度（SIC-POVM）和互 unbiased 基等几何对象之间的联系。我们简要讨论近似设计的概念，它不一定与自然的群或几何结构相关。我们重点关注精确群设计和表示论，并证明一些关于加权群设计的新结果。

第II节 回顾量子多能级系统以及量子位 Clifford 群的各种概念，包括伽罗瓦-克利福德群。我们讨论投影引理：该引理将维数为 d 的均匀态 t-设计投影到任意更小维数中的加权 t-设计。利用这一点，我们在所有维数中构造加权态 2-设计和 3-设计的族。

第三节 聚焦于量子多能级系统的实验平台，尤其是自旋和腔量子电动力学量子位。我们讨论这两种硬件中的原生门，以及如何由此为高维量子多能级系统生成酉设计。我们讨论了两项凸显自旋与玻色子之间相似性的结果：与光学相干态一样，自旋相干态也无法构成态 2-设计。然而，自旋-GKP 态与玻色 GKP 态一样，确实构成态 2-设计。

第四节 聚焦于这样一个事实：在量子比特系统中无处不在的标准 Clifford 随机基准测试，无法用于维数不是素数幂的量子位系统。为了解决这一问题，我们引入 Clifford 特征随机基准测试，以实质上相同的方式处理所有量子比特维数。该方法利用了量子位 Clifford 群的不可约表示结构。

第五节 介绍分数阶 t-设计的概念，可用于量化与精确 t-设计的接近程度。循环群被用作“半设计”的示例。

章节 VI 介绍这些技术的各种应用，以及未来的开放问题 .

B. 酉设计

我们首先将按照哈尔测度分布的酉算子/量子态的分布定义为“最大均匀”（分别是在酉群/态空间上）。这里的许多技术性结果在哈尔积分和酉设计理论中都很常见，例如， [20] 提供了精彩的介绍。令$\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^d$ 为我们的量子多能级系统的希尔伯特空间。回顾一下，哈尔测度 μ 是酉群上的唯一群不变归一化测度， $U(d)$。也就是说，

$$\mu(U(d)) = 1; \quad \text{and} \quad \mu(VU) = \mu(UV) = \mu(U) \ \ \forall V \in U(d), U \subset U(d). \tag{1}$$

假设给定一个酉算子系综 $\mathcal{E} = \{p_j, U_j\}_j$，其中 $\sum p_j = 1$ 是一个概率分布。那么，对该系综进行 t 重 j扭曲 所得的结果就是量子信道，

$$\Phi_{\mathcal{E}}^{(t)}(\cdot) := \sum_j p_j U_j^{\dagger \otimes t}(\cdot) U^{\otimes t}. \tag{2}$$

当且仅当扭曲信道的作用与对整个酉群按照哈尔测度进行扭曲的作用相同，系综 $\mathcal{E}$ 才是一个 t-设计；即 $\Phi_{\mathcal{E}}^{(t)}(X) = \Phi^{(t)}{}_{\text{哈尔}}(X) \quad \forall X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{\otimes t})$。这里，

$$\Phi_{\text{Haar}}^{(t)}(\cdot) := \int_{\text{Haar}} dU U^{\dagger\otimes t}(\cdot)U^{\otimes t}, \tag{3}$$

其中积分是对酉群上的 Haar 测度进行的。 定义 1 总结了酉设计的各种等价定义。

定义 1（定义酉设计的 t种等价方式）。 若对系综中的酉算子进行平均，与对整个酉群进行平均等价，则该系综 $\mathcal{E} = \{U_j\}$ 构成一个 t 阶酉设计。以下列出几种等价的表达方式：

1. 对酉算子及其伴随算子的 t 个副本取平均，结果相等：$\frac{1}{|\mathcal{E}|}\sum_{j=1}^{|\mathcal{E}|} U_j^{\otimes t} \otimes U_j^{\dagger\otimes t} = \int$哈尔 $U^{\otimes t} \otimes U^{\dagger\otimes t} dU$。

2. 对酉信道的 t 个副本取平均，结果相等：$\frac{1}{|\mathcal{E}|}\sum_{j=1}^{|\mathcal{E}|} U_j^{\otimes t} X U_j^{\dagger\otimes t} = \int$哈尔 $U^{\otimes t} X U^{\dagger\otimes t} dU$，其中$X \in \mathcal{L}($ $\mathcal{H}^{\otimes t})$。*3.* t 阶关联函数相等：对于所有ρ，$\frac{1}{|\mathcal{E}|}\sum_{j=1}^{|\mathcal{E}|} Tr\left(\rho U_j^{\otimes t} X U_j^{\dagger\otimes t}\right) = \int$哈尔 $Tr\left(\rho U^{\otimes t} X U^{\dagger\otimes t}\right) dU($ $X \in \mathcal{L})(\mathcal{H}^{\otimes t})$。*4.* 矩阵元 u_i、$_j$ 以及 u_i、$_j$ 的 $\overline{t}$ 阶多项式相等：$\frac{1}{|\mathcal{E}|}\sum_{j=1}^{|\mathcal{E}|} f_t(U) = \int$哈尔 $f_t(U)dU$，对任意此类函数 f_t 均成立。

有了这些定义，我们现在可以介绍度量了。给定一个系综 $\mathcal{E}$，其第 t 阶框架势定义为[14]，

$$F_{\mathcal{E}}^{(t)} := \frac{1}{|\mathcal{E}|^2}\sum_{U,V\in\mathcal{E}} \left|\text{Tr}\left[U^\dagger V\right]\right|^{2t}. \tag{4}$$

A除了量子信道 $\Phi_{\mathcal{E}}^{(t)}$，我们还引入与之密切相关的矩算子

$$\Delta_{\mathcal{E},t} := \sum_j p_j U_j^{\dagger\otimes t} \otimes U_j^{\otimes t}. \tag{5}$$

$\mathcal{E}$ 的框架势就是该算子的希尔伯特–施密特范数的平方，即：

$$F_{\mathcal{E}}^{(t)} = \|\Delta_{\mathcal{E},t}\|_2^2. \tag{6}$$

引理 1（框架势的界）。 任意酉算子系综的框架势都不小于 *Haar* 系综的框架势 $F_{\mathcal{E}}^{(t} \geq F^{(t))}{}_{\text{Haar}}$。当且仅当该系综 $\mathcal{E}$ 构成酉 t-设计时，等号成立。此外，$F^{(t)}{}_{\text{Haar}} = t!$ 对于 $t \leq d$。

由于 $F_{\mathcal{E}}^{(t)} \geq F^{(t)}{}_{\text{Haar}}$，它们的比值可自然地用来衡量系综 $\mathcal{E}$ 对 Haar 均匀系综的逼近程度。酉设计的一个关键性质是，酉/量子态 t-设计自动也是 $s \leq t, s, t \in \mathbb{N}$ 的 s-设计。这使我们可以讨论 t-设计的“最高”阶，同时默认较低阶的设计也存在。

关于 Haar 分布可逼近性的概念有多种彼此密切相关的说法。这里介绍两个重要的定义。第一个定义基于量子信道 $\Phi_{\mathcal{E}}^{(t)}$ 与 $\Phi^{(t)}{}_{\text{Haar}}$ 之间的菱形范数距离。众所周知，菱形范数距离量化了两个量子信道 [21] 的操作可区分性。因此，ϵ-近似酉设计定义为：

$$\left\|\Phi_{\mathcal{E}}^{(t)} - \Phi_{\text{Haar}}^{(t)}\right\|_\diamond \leq \epsilon. \tag{7}$$

设计类型	量子比特（$d=2$）	量子素数维系统（$d=p^k$，p素数）	量子多能级系统（$d\neq$素数幂）	量子连续变量（CV）（$d=\infty$）
态 1-设计	$\mathbb{B}=\{\|0\rangle,\|1\rangle\}$	$\mathbb{B}=\{\|0\rangle,\|1\rangle,\cdots,\|p-1\rangle\}$	$\mathbb{B}=\{\|0\rangle,\|1\rangle,\cdots,\|d-1\rangle\}$	$\{\|n\rangle_{n\in\mathbb{N}_0}\}$，$\{\|\alpha\rangle_{\alpha\in\mathbb{C}}\}$
酉 1-群	$\{\mathbb{I},\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z\}$	量子 p 进制位泡利算符	量子多能级泡利算符	$D(\alpha)=e^{\alpha a^\dagger-\overline{\alpha}a}$
态 2-设计	稳定子态	$k=1$：稳定子态 $k>1$： 伽罗瓦-克利福德群轨道 [24]	?	[25, 26]
酉 2-群	Clifford 群	$k=1$: Clifford 群 $k>1$： 伽罗瓦-克利福德群 [24]	[27]	[25, 26]
加权态 2-设计	✓ 本文工作	✓ 本文工作	✓ 本文工作	[25, 26]
加权酉 2-群	✓ 本文工作	✓ 本文工作	✗本文工作	[25, 26]
态 3-设计	稳定子态	[24]	通用 d：✗	[25, 26]
加权态 3-设计	✓ 本文工作	✓ 本文工作	✗本文工作	[25, 26]
加权酉 3-群	✓	✗本文工作	✗本文工作	[25, 26]
$t\geq 4$ 群设计	存在于 $t=4,\ 5$ [3]	[27]	[27]	[25, 26]
加权 $t\geq 4$群	✓	✗本文工作	✗本文工作	[25, 26]
Rigged $t\geq 1$，2 设计	√ [26]	√ [26]	?	√ [26]

表 I： 不同维数下精确量子态 t-设计和酉 t-群的分类。对于 $d<\infty$，我们仅考虑离散的 t-设计和 t-群。更多详情请参见 IC 节中的深入讨论。

一种类似的定义或许在操作性上较弱，但在数学上同样自然：考虑两个矩算子之间的算子范数距离。由此，我们可以将量子（η，t）张量积扩张器（TPE）定义为：

$$\|\Delta_{\mathcal{E},t}-\Delta_{\mathrm{Haar},t}\|_\infty\leq\eta. \tag{8}$$

鉴于有限维空间中的所有范数都等价，上述两种定义之间很容易建立联系。一个更具实质性的结果表明，如何迭代使用（η，t）-TPE 来生成一个 ϵ-近似 t-设计。

定理 1（迭代张量积扩张器可生成酉设计 [22]）。一个（η，t）量子张量积扩张器可以迭代 $\ell\geq\{1/\lceil\log(1/\eta)\rceil\}\log(d^t/\epsilon)$ 次，以生成一个 ϵ-近似酉 t-设计。

这一构造背后的思路是，先取一个满足 $\eta<1$ 的 TPE，并将其迭代 k 次，即 $\Delta^k=\underbrace{\Delta\circ\cdots\circ\Delta}_{k\text{ 次}}$

得到一个 η^k-TPE。并且由于 $\eta<1$ 我们有 $\eta^k\ll 1$，因此通过将TPE用作“种子”来生成越来越多的随机性，可以得到越来越好的近似。然而，这种迭代性质通常对算子范数成立，而并不直接对钻石范数成立。类似的想法被用于Brandao 等人 [23]的开创性工作中。

C. 酉设计文献综述

我们简要总结一些关键结论；在研究量子比特和量子多能级系统的酉设计时，这些结论相当“实用”。对于任意维度 d，广义泡利群构成一个（极小的）酉1-设计，因此我们很少讨论这一点。$t=2$-设计及更高阶设计的情况则有趣得多。对于多量子比特，t-设计的情况可以

恰如其分地概括为“1、2、3、无穷”[1] 因为目前已知的酉设计实例仅存在于以下情形：$t = 1$、2、3、∞。也就是说，酉算子群要么构成 1、2、3-设计，要么构成 ∞-设计。1、2、3-设计来自 Clifford 群。事实证明，任何构成 4-设计的酉算子集合也是一个通用生成集（即这些酉算子生成的群包含特殊酉群 $SU(d)$），因此它自动构成一个 ∞-设计（也就是说，它构成一个 t-设计，对任意 $t \in \mathbb{N}$ 均成立）。

对于量子位，具体情况取决于维数，可能是 1、2、∞ 或 1、∞。二元分类如下：(i) 对于素数幂维数（即 $d = p^n$，也就是 n “量子素数维系统”[2]），Clifford 群构成酉 2-设计。或者，也可能是通用群，因而构成 ∞-设计。(ii) 对于非素数幂维数（例如 $d = p^a q^b$），Clifford 群仅构成 1-设计。因此，对于任意量子多能级系统维数，我们甚至没有精确的酉 2-设计。

我们还简要说明连续群的情况（这在定理 5 中进行了总结）。可以证明，完整酉群的连续子群只有两种类型：它们至多构成酉 1-设计，或者是通用的，因而构成酉 ∞-设计。值得特别强调这一观察的一个具体例子，即 $G \subseteq U(d)$ 紧辛群。对于任意初始态 $|\psi\rangle$，其轨道 $\{U|\psi\rangle : U \in G\}$，在 G 上由 Haar 测度给定权重，是对所有 $t \geq 1$ [28] 都成立的状态 t-设计。然而，作为酉算子群，辛群并非通用群，因此定理 5 意味着，对于 $t \geq 2$，G 并不是酉 t-群。这展示了酉 t-群与状态 t-设计之间的差异：尽管酉 t-群的轨道是状态 t-设计，但状态 t-设计并不一定会产生酉 t-群。

所有这些结果可以概括如下：对于量子比特，酉 t-群族的唯一非平凡例子是克利福德群族，它们至多构成一个 3-设计。对于量子素数维系统，Clifford 群至多构成一个 2-设计。而对于任意维量子多能级系统，人们仅有非平凡的酉 1-群。虽然散在群存在，但我们最终会穷尽它们，并且上述通俗表述对于酉 t-群的族成立。

在第 II 节中，我们观察到酉 t-设计的加权版本并不会给出“新的”设计，其含义如下。设 $\mathcal{S}$为一组酉算子，并设 G 为由 $\mathcal{S}$生成的闭群。如果 $\mathcal{S}$ 的任一权重给出一个加权酉 t-设计，则G实际上是一个未加权的酉 t-群（见定理 2）。因此，在表 I 中，（非通用）加权酉t-群的存在性恰好对应于（非通用）未加权酉 t-群的存在性。此外，我们看到，即使是构成酉 t-设计的酉算子集合$\mathcal{S}$ 也受到高度限制，因为相应的群 G 必须是一个（未加权的）酉t-群。于是（如推论 1 所述），如果 t 和 d 使得在 $U(d)$中不存在非平凡的酉 t-群，那么对（精确）酉 t-设计的搜索就等价于对通用生成集的搜索。在这种背景下，更有趣的概念是近似酉 t-设计。近似设计通常对应于有界深度酉电路族。它们通常也是通用生成集，但此处文献关注的是，使用给定深度的相关类型随机电路能够在多大程度上逼近一个 t-设计。此处的最新进展是，n-量子比特上的酉 2-设计可以在对数深度内获得。更精确地说，对于 n 个量子比特上的酉 t-设计，深度为 $O(t\text{poly}(\log(t))\log(n))$ [29]，这相对于 [30]中先前的估计 $O(tn)$ 提供了指数级改进；而该估计本身又是对原始估计 $O(t^2 n^{10})$ [23]的改进。

D. 复射影设计或态设计

我们可以将酉群中的均匀性概念借用于量子态。令 Haar 均匀分布的量子态集合为“最均匀”的集合。也就是说，从任意（但固定的）量子态 $|\psi_0\rangle$ 出发，对其施加 Haar 随机酉算子所生成的分布，即 $\{|\psi_U\rangle := U|\psi_0\rangle\}$，$U \in U(d)$。注意，这个分布是酉不变的，因此不依赖于基准态 $|\psi_0\rangle$ 的选择。严格来说，我们关注的是射影表示，也就是说，我们将使用秩一投影算子 $|\psi\rangle\langle\psi|$（希尔伯特空间中的射线），而不是 $\mathcal{H}$ 中的向量。从这个意义上说，将这些设计视为复射影设计 [31] 更为准确。

接下来考虑 $\mathbb{E}_{\text{Haar}}(|\psi\rangle\langle\psi|)^{\otimes t}$，即对 Haar 随机态的 t 重张量积取平均。注意，这等于 $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{\otimes t})$ 中的某个线性算子。对于 $t = 1$，这只是最大混合态 $\mathbb{I}/d$；而对于 $t = 2$，则等于 $\frac{1}{d(d+1)}(\mathbb{I} + \mathbb{S})$，其中 $\mathbb{S}$ 是交换算子。对于一般的 t，我们有如下公式：

$$\mathbb{E}_{\text{Haar}}\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right)^{\otimes t} = \frac{1}{\binom{d+t-1}{t}}\Pi_{\text{sym}}, \tag{9}$$

其中 Π_{sym} 是对称子空间上的投影算符。注意，$\Pi_{\text{sym}} = \frac{1}{t!}\sum_{\pi \in S_t} W_\pi$ 其中 S_t 是作用于 $t$$\pi \in S_t$个元素的置换群，$W_\pi$是一个置换算子。也就是说，考虑满足以下条件的 $\pi \in S_t$：$\pi = (\pi(1) \cdots, \pi(t))$ 是一个置换

[1] 摘自乔治·伽莫夫的《从一到无穷大：科学中的事实与臆测》。[2] 感谢 Daniel Lidar 向我们介绍了这一术语。

t 个对象。于是，$W_\pi|\psi_1,\ \psi_2,\ \cdots,\ \psi_t\rangle = |\psi_{\pi(1)},\ \psi_{\pi(2)},\ \cdots,\ \psi_{\pi(t)}\rangle$。Welch 检验提供了一个简单的判据，用于判断一组量子态是否构成 t-设计，具体总结如下定理。

定义 2（加权态设计的 Welch 检验）。 量子态系综 $\mathcal{E} = \{w_j, |\psi_j\rangle\}$ 是加权t-设计，当且仅当 *[31]*

$$\sum_{j,k=1}^{|\mathcal{E}|} w_j w_k \left|\langle\psi_j|\psi_k\rangle\right|^{2t} = \frac{1}{\binom{d+t-1}{t}}. \tag{10}$$

对于 $t = 1$，2，等式右边分别给出 $\frac{1}{d}$，d^2 $(d+1)$。容易证明，复射影 t-设计的张量积只有在 $t = 1$ 的情况下才构成 t-设计。这是因为态 1-设计只是正交归一基，因此来自较小空间的张量积会为较大的希尔伯特空间生成一组基。相比之下，态 2-设计需要纠缠，因此无法仅通过对较小的设计取张量积来获得。

引理 2（加权酉设计基数的界）。 在 *[12,* 推论 *20* 和定理 *21],* 中，确立了加权酉 t-设计大小的以下界，

$$|\mathcal{E}| \geq D(d, \lceil t/2\rceil, \lfloor t/2\rfloor),$$

仅当 $\mathcal{E}$ 时等号成立 是一个酉 t-设计。此外，对于任意 t, d，存在一个基数为 ，

$$|\mathcal{E}| \leq D(d, t, t).$$

这里，$D(d, r, s)$ 是 $\mathbb{C}^{d\otimes r} \otimes \mathbb{C}^{*d\otimes s}$ 中 $U(d)$ 的不可约表示的维数。利用 *[12]* 的定理 7，可得 $D(d, r, s) = \sum_{|\mu|=r-s,|\mu+|\leq r} {d_\mu}^2$，其中求和遍历非递增的、长度为 d 的整数序列 μ 和 $d_\mu = \prod_{1\leq i<j\leq d} \binom{\mu_i-\mu_j+j-i}{j-i}$。

E. 广义设计

对于有限维系统，参考文献 [26] 中引入的“广义希尔伯特空间 t-设计”可以简单地视为“测量 t-设计”。对于无限维系统，必须使用广义希尔伯特空间；不过，对于我们感兴趣的有限维量子多能级系统，其思想很简单。尤其是当我们关注玻色模式的“硬截断”时。

算子集合 $\{M_j\}_j$ 构成正算子值测度，当且仅当它们是半正定的且其和为单位元，即：

$$0 \leq M_j \leq \mathbb{I} \text{ and } \sum_j M_j = \mathbb{I}. \tag{11}$$

正如（均匀）态设计可以由任意量子态在（均匀）酉设计的元素作用下的轨道得到，测量设计也同样如此。设 $\mathcal{E} = \{U_j\}_j$ 是一个 $t \geq 1$ 酉设计。并定义 $M_j := U_j M U_j^\dagger$ 为集合 $\mathcal{M} = \{M_j\}_j$ 中的元素，其中 $M \geq 0$。那么，

$$\frac{1}{|\mathcal{E}|}\sum_j M_j = \frac{1}{|\mathcal{E}|}\sum_j U_j M U_j^\dagger = \mathrm{Tr}\,[M]\,\frac{\mathbb{I}}{d}, \tag{12}$$

这里用到了 $\mathcal{E}$ 的 1-设计性质。如果我们将每个 M_j 重新归一化为

$$M_j \mapsto \frac{d}{|\mathcal{E}|\,\mathrm{Tr}\,[M]} M_j$$

那么，集合 $\mathcal{M}$ 构成一个正算子值测度。对于这种重新归一化，我们假设 $0 < \mathrm{Tr}\,[M] < \infty$，也就是说，初始算子 M 既是迹类的，又具有非零迹。这里有两个简单的例子：(i) $M = \mathbb{I}$，它会生成平凡的正算子值测度元素（从这个意义上说，这些测量不会从量子态中提取任何信息）；以及 (ii) $M = |\psi\rangle\langle\psi|$，这等同于将量子态设计中的元素用作正算子值测度的元素。这里，选择 $\mathcal{E}$ 为 1-设计，例如泡利群元素，就相当于将正算子值测度简化为一组投影测量（因为 $\mathcal{M}$ 的元素彼此正交）。如果 $\mathcal{E}$ 是 $t \geq 2$-设计，那么这些元素就不再彼此正交（每个酉 2-设计都必须有 $> d$ 个元素），因此它们构成真正的正算子值测度（而不只是伪装成投影测量）。

因此，从一个非平凡的半正定算子 M出发，且满足 $0 < \mathrm{Tr}\,[M] < \infty$，再用酉设计的元素对其进行“演化”，我们便生成了一个正算子值测度。回到参考文献 t中引入的“加权 [26]-设计”；对于有限维希尔伯特空间，我们可以将其视为“测量 t-设计”。也就是说，它们是能够生成未归一化的 对称投影算符的正算子值测度元素。注意，任何加权 $t \geq 1$设计都是加权 $t = 1$-设计。对于 $t = 1$这会将量子态集合缩减为 $|\chi\rangle$满足以下条件：

$$\int_X |\chi\rangle\langle\chi| d\mu(\chi) \propto \mathbb{I}. \tag{13}$$

由于这些投影算符满足 $0 \leq |\chi\rangle\langle\chi| \leq \mathbb{I}$，通过适当重新归一化测度，我们得到一组（可能是连续的）正算子值测度元素。此外，将 rigged t设计视为广义测量，也使我们能够直接构造它们。例如，很容易看出，任何量子态 t设计都可用于生成 rigged t设计。

F. 对称信息完备 SIC POVM 与互 unbiased 基

框架势的原始理论源自量子态，尤其是对称信息完备（SIC）正算子值测度的研究。SIC 是由 d^2 个单位向量组成的集合，它们位于一个 d 维希尔伯特空间中，并且“等角”，也就是说，

$$|\langle\psi_j|\psi_k\rangle|^2 = \frac{1}{d+1}, \quad 1 \leq j,k \leq d \text{ and } j \neq k. \tag{14}$$

回顾一下，一组算子构成正算子值测度，当且仅当 $0 \leq M_j \leq \mathbb{I}$ 且 $\sum_{j=1}^m M_j = \mathbb{I}$。信息完备性是指正算子值测度元素构成算子空间的一组基，也就是说，张成 $\{M_j\} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$，因此任意密度矩阵都可以写成它们的线性组合。对称性对应于正算子值测度元素之间的希尔伯特–施密特内积具有对称性，即 $\mathrm{Tr}\,[M_j M_k] = c \ \forall j \neq k$。

例如，我们来考虑量子比特的情形。这里，泡利算子的特征向量，

$$\{|0\rangle\langle 0|, |1\rangle\langle 1|, |+\rangle\langle +|, |-\rangle\langle -|, |+i\rangle\langle +i|, |-i\rangle\langle -i|\}$$

乘以$_{1\,3}$ 这一系数后，构成一个信息完备（超完备）的正算子值测度。为了构造一个极小信息完备正算子值测度，我们也可以改用以下集合，

$$\{|0\rangle\langle 0|, |+\rangle\langle +|, |+i\rangle\langle +i|, \underbrace{|1\rangle\langle 1| + |-\rangle\langle -| + |-i\rangle\langle -i|}_{\text{single POVM}}\}.$$

与之相对，量子比特对称信息完备正算子值测度的一个例子由以下这组（非平凡）量子态给出，

$$\{|0\rangle, \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle, \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}|1\rangle, \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\frac{4\pi}{3}}|1\rangle\}.$$

这些量子态在量子比特布洛赫球内构成一个正四面体，这令人联想到它们的等角结构。

互为无偏基。— 设 $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^d$ 和 $\mathbb{B}$，$\tilde{\mathbb{B}}$ 是 $\mathcal{H}$的两个（不同的）标准正交基。那么，当且仅当互为无偏˜时，$\mathbb{B}$ 相对于 $\mathbb{B}$ 满足

$$\left|\langle\psi_j|\tilde{\phi}_k\rangle\right|^2 = \frac{1}{d} \ \forall |\psi_j\rangle \in \mathbb{B}, |\tilde{\phi}_k\rangle \in \tilde{\mathbb{B}}. \tag{15}$$

˜由此定义可立即得出一个结论：给定一个量子态 $|\psi_j\rangle \in \mathbb{B}$，在基 $\mathbb{B}$ 下进行测量会得到该量子态的无偏估计量。对于单个量子比特，计算基与泡利 σ_x 和σ_y的特征向量均互为无偏。对于任意量子多能级系统，给定一个正交归一基，都可以通过施加（离散）量子傅里叶变换来构造一个互为无偏基。

引理 3 (态设计、SIC-POVM 与互 unbiased 基的等价性 [32])。 对于任意 d维希尔伯特空间，以下等价关系成立。

1. *SIC-POVM* 构成一个（去随机化的）量子态2-设计，且
2. 一组 $d+1$ 个互 *unbiased* 基构成一个量子态 2-设计。

G. 近似设计与精确设计

Brandao 等人的一项开创性工作表明，由深度为 poly (t) 的二局域 Haar 随机酉算子以砖墙式生成的局域随机量子电路构成近似的 t-设计 [23]。最近的研究则表明， [33] 插入 $O(t^4 \log^2(t) \log(\frac{1}{\epsilon}))$ 个非 Clifford 门（例如 T-门），足以将随机 Clifford 电路转化为一个 ϵ-近似 t-设计。尽管已有大量研究探讨了如何在砖墙式电路（也称为随机量子电路、局域随机电路等，近期综述见参考文献 [34] ）中生成 t-设计，但这些电路所假设的结构并不适合我们的目的。例如，这些电路通常假设能够对任意一对量子比特施加双量子比特 Haar 随机酉算子；这相当于假设能够实现一个 4×4 随机酉算子。相比之下，我们关注的是局域维数为 $d = 16$ 的量子多能级系统（例如这种高自旋施主量子多能级系统架构 [35]），而保持相同结构就相当于假设能够“轻松生成”一个 16×16 随机酉算子。也就是说，随着局域希尔伯特空间维数的增加，假设能够执行局域随机酉算子，对于量子计算架构而言是一项非平凡的假设。

因此，我们希望转而关注另一种方法，即参考文献 [22, 36]，中所采用的方法，概述如下。由于本文主要关注单个量子比特，这种构造对我们来说更加自然。例如，正如我们将在下文论证的，我们希望在两个不同的基中执行随机对角酉算子，并了解它们收敛到 t-设计的速度。

值得一提的是，在参考文献 [36] 中，作者提出了“对角酉设计”，即能够在固定基 $\mathbb{B}$ 中近似对角酉算子均匀分布的酉算子。这并非文献中讨论的通常意义上的酉设计；后者旨在近似哈尔随机酉算子。在参考文献 [22] 中，作者提出了一种交替应用来自互 unbiased 基的随机酉算子以生成近似2-设计的方法。

H. 酉设计与表示论

本节将回顾酉 t设计与表示论之间的联系。此前，部分作者曾在文献 [3, 37, 38] 和文献 [39] 中讨论过这些联系。我们将考虑酉群 $U(d)$ 的一个（有限或紧）子群 G ，以及相应的系综 $\mathcal{E}$ ：其酉算子为 G 的元素，在有限情形下权为 $1/|G|$，在（无限）紧情形下则由 Haar 测度确定。为方便起见，我们将相应的框架势记为 $F_G^{(t)}$ 。在陈述结果之前，我们先简要回顾一些标准的表示论概念。

群 G 的一种表示 由一对 (ρ, V) 给出，其中包含一个向量空间 V 和一个群同态 $\rho: G \to GL(V)$。表示通常仅以向量空间 V 指称，尤其是在映射 ρ 可从上下文中明确时。一个重要的例子是矩阵群 $G \subseteq GL(d)$ 在 $\mathbb{C}^d$ 上通过矩阵向量乘法给出的自然表示；形式上，自然表示对应于有序对 $(I, \mathbb{C}^d)$，其中 I 是 G 上的恒等映射。通常，我们将 $\mathbb{C}^d$ 称为 G 的自然表示，而不指定群同态 $\rho = I$。

如果存在一个线性映射 $\phi: V_1 \to V_2$，它是向量空间之间的同构，并且与群作用相容，那么两个表示 $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ 就是等价的：也就是说，对所有 $v_1 \in V_1$ 和 $g \in G$， $\phi(\rho_1(g)v_1) = \rho_2(g)\phi(v_2)$。这是表示之间相关的同构概念；当映射 ρ_1, ρ_2 已知时，我们记作 $V_1 \cong V_2$。

给定 G 的一个表示 (ρ, V)，子表示是一个向量空间 $W \subseteq V$，满足对所有 $g \in G$ 和 $w \in W$，$\rho(g)w \in W$。这是 G 的一个新表示，定义为 (ρ', W)，其中 $\rho'(g) = \rho(g)|_W$。类似地，给定两个群$G_1 \subseteq G_2$，以及较大群 G_2 的一个表示 (ρ, V)，我们得到较小群 G_1 的限制表示$(\rho|_{G_1}, V)$，其中 $\rho|_{G_1}(g) = \rho(g)$ 就是将 ρ 限制到 G_1 上。

给定 G的两个表示(ρ_1, V_1)，(ρ_2, V_2)，我们可以构造直和表示 (ρ, V)，其中 $V = V_1 \oplus V_2$，并且对于 $g \in G$和 $v_i \in V_i$，$\rho(g)(v_1 \oplus v_2) = \rho_1(g)v_1 \oplus \rho_2(g)v_2$. 我们还有张量积表示，其中 $V = V_1 \otimes V_2$且 $\rho(g)(v_1 \otimes v_2) = (\rho_1(g)v_1) \otimes (\rho_2(g)v_2)$。

一个表示(ρ, V)是不可约 的，如果它没有非零的真子表示：换言之，若 $W \subseteq V$是一个子表示，则 $W = 0$ 或 $W = V$。术语“不可约表示”常被简写为不可约表示。G 的一个表示(ρ, V)是完全可约 的，如果它分解为不可约表示的直和：$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$， 其中每个 W_i 都是 G的一个不可约表示。通常我们只关心此类分解在等价意义下的情形，写作 $V \cong \bigoplus_i V_i^{\oplus n_i}$， 其中每个 V_i 都是不可约的，$V_i \cong V_j$ 当且仅当 $i = j$，并且 n_i 被称为不可约表示 V_i的重数 。对于我们这里所关心的群，特别是有限群和紧群，每一个有限维表示(ρ, V)都是完全可约的。

为了将这一理论与 t-设计联系起来，我们现在考虑向量空间 $\mathcal{V} = \mathbb{C}^d$，其对应的酉群为 $U(d)$。如上所述， $U(d)$ 在 $\mathcal{V}$ 上有自然表示 $(\tau, \mathcal{V})$，其中 τ只是恒等映射。事实上，这个表示τ 是不可约的。接着，我们取自然表示的 t 个副本的张量积，从而确定张量积

表示（或对角表示）$(\tau^t, \mathcal{V}^{\otimes t})$，由 $\tau^t(U) = U^{\otimes t}$ 给出。该表示可分解为 $U(d)$ 的不可约表示，

$$\mathcal{V}^{\otimes t} \cong \bigoplus_i V_i^{\oplus n_i}, \tag{16}$$

其中，如上所述，每个 V_i 都是不可约的，且 $V_i \cong V_j$ 当且仅当 $i = j$。可以证明，框架势恰好等于式（16）中的重数之和：$F_{(t)\,\text{哈尔}} = \sum_i n_i$。换言之，框架势等于 $\mathcal{V}^{\otimes t}$ 的 $U(d)$-不可约表示总数，按重数计数。对于 $t = 1$，如上所述，$\mathcal{V}$ 已经是不可约的，因此 $F^{(1)}{}_{\text{哈尔}} = \sum_i n_i = 1$。对于 $t = 2$，$\mathcal{V}^{\otimes 2}$ 分解为两个不等价不可约表示的直和，即对称张量和反对称张量，因此$F^{(2)}{}_{\text{哈尔}} = \sum_i n_i = 2$。

现在设 G 是 $G \subseteq U(d)$ 的一个（有限或紧）子群。表示 $\mathcal{V}^{\otimes t}$ 限制后成为 G 的一个表示，随后可将其分解为关于 G 的不可约表示。推广上述结论，框架势 $F_G^{(t)}$ 等于 G 的 $\mathcal{V}^{\otimes t}$-不可约表示总数，按重数计数。（这一联系可以通过将框架势表示为群特征标的内积来证明。）根据引理1，我们得到以下众所周知的结果（例如，参见文献 [3], 的定理 3、文献 [37], 的命题 3，或文献 [38] 的命题 34）：

命题 1 ([3, 37, 38])。 设 $G \subseteq U(d)$ 是酉群的一个（有限或紧）子群。以下各项等价：

1. G 是酉 t-设计。*2.* G的 t重对角作用（记作 $\tau^t(G)$）分解出的不可约表示数目，与 $U(d)$的 t重对角作用分解出的不可约表示数目相同。*3.* $\tau^t(G)$与 $\tau^t(U(d))$具有相同的交换子。*4.* $F_{(t}{}_{G} = F^{(t)})$哈尔。

因此，判断酉群的一个子群是否构成 t-设计，可归结为理解其表示论。特别地，G 是 1-设计，当且仅当 $\mathcal{V}$ 是一个不可约 G-表示；而 G 是 2-设计，当且仅当 $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ 恰有 2 个不可约 G-子表示（分别对应对称子空间和反对称子空间）。

I. 加权酉 t-设计

在上文第 IB 节和 I D 节中，我们分别讨论了（非加权）酉 t-设计和加权量子态 t-设计。这里，我们考虑加权酉 t-设计 $\mathcal{E} = \{w_U, U\}_{U \in \mathcal{S}}$ [12]的情形，尤其关注 $\mathcal{S} = G$ 为群的情况。参考文献 [40] 研究了权 w_U 来自 G的一个不可约表示的情形，并将其称为“扭曲酉t-群”，并用它们来构造量子码。然而，以这种方式得到的加权 t-设计并未产生“新的”设计阶数：参考文献 [40]的引理 4 $\mathcal{E} = \{w_U, U\}_{U \in G}$表明，如果 t是一个扭曲酉 G-群，那么 t就是一个非加权-设计。这与权具有表示论结构这一假设无关：我们很快将证明，类似结论在一般情况下也成立。

我们现在给出　定义，即对定义 1 第 2 部分的直接推广。（回顾（2）的扭转记号　　.）

定义 3. *[12]*设 $\mathcal{E} = \{w_U, U\}_{U \in \mathcal{S}}$为 U（d）中的酉算子的加权系综。$\mathcal{E}$是一个加权酉 t-设计，若对所有 $X \in \mathcal{L}$（$\mathcal{H}^{\otimes t}$），

$$\Phi_{\mathcal{E}}^{(t)}(X) = \Phi_{\text{Haar}}^{(t)}(X). \tag{17}$$

为记号方便，我们修改上文所用的扭转记号，记作 $\Phi_{\mathcal{S}}^{(t)}{}_{,\,w}(X) = \sum_{U \in \mathcal{S}} w_U U^{\dagger \otimes t} X U^{\otimes t}$。在非加权情形或 Haar 情形中，我们从记号中省略权重。

在非加权情形中，$\Phi_G^{(t)}$ 是到 $\mathcal{L}_G(\mathcal{H}^{\otimes t})$上的投影，即 G-不变的 $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{\otimes t})$的元素。

注意，我们总可以通过平凡扩张将 $\mathcal{S}$ 扩展为更大的集合，并为新增的酉算子取 $w_U = 0$。特别地，令 G 为由 $\mathcal{S}$ 生成的闭群，它要么是有限群，要么是连续紧李群。（如果 $\mathcal{S}$ 生成有限群，即 G。否则，如果 $\mathcal{S}$ 生成 U（d）的无限子群，那么它的闭包必定是连续李子群 G。）因此，我们总可以将加权 t-设计视为对应于某个有限群或紧群 G。

定理 2。 设 $\mathcal{E}=\{w_U,U\}_{U\in G}$ 是加权酉 t-设计，其中 G 是 $U(d)$ 的闭子群。那么 G 是无权 t-设计。

证明。 我们证明其逆否命题：假设群 G 不是无权重的 t-设计。我们将证明，不存在任何权重能使其成为加权 t-设计。注意，$\mathcal{L}_G(\mathcal{H}^{\otimes t})\supseteq\mathcal{L}_{U(d)}(\mathcal{H}^{\otimes t})$。根据假设，$G$ 不是无权重的 t-设计，因此这必然是严格包含（否则两个投影将相等），故存在 $X\in\mathcal{L}(\mathcal{H}^{\otimes t})$，使得 $\Phi_G^{(t)}(X)=X$且 $\Phi_{U(d)}^{(t)}(X)\neq X$。于是，对于任意加权系综 $\mathcal{E}=\{w_U,U\}_{U\in G}$，我们有

$$\Phi_{G,w}^{(t)}(X)=\sum_{U\in G}w_U(U^{\otimes t})^\dagger AU^{\otimes t}=\sum_{U\in G}w_UA=A\neq\Phi_{U(d)}^{(t)}(X). \tag{18}$$

根据定义3，$\mathcal{E}$ 不是加权酉 t-设计。 ■

因此，对于一个无法构成 t-设计的群 G，我们无法将其“挽救”为加权 t-设计。如果我们的目标是在无权重的情况下无法实现的基础上，构造更高阶的酉 t-设计，就必须使用通用生成集：

推论 1. 假设 d 和 t 满足以下条件：在 $U(d)$中，不存在非通用的无权群 t设计。如果$\mathcal{E}=\{w_U,U\}_{U\in\mathcal{S}}$是一个加权酉 t设计，那么相应的群 G（由 $\mathcal{S}$生成的群的闭包）是通用的。

证明。 根据上述讨论，我们可以直接将 $\mathcal{E}$扩展为 t上的加权酉 G设计。定理 2 继而推出，G是一个无权酉 t设计。根据假设，G是通用的。■

文献 [41]引入了广义群 t设计的概念，其中我们有一个群序列 $(G_1,\ldots,G_\ell)$，并要求在乘积集合 $\{g_1\cdots g_\ell$ 上赋予某种权重：$g_i\in G_i\}$，从而得到一个酉 t设计。等价地，$(G_1,\ldots,G_\ell)$ 是广义群 t设计，当且仅当

$$\Phi_{U(d)}^{(t)}=\Phi_{G_1}^{(t)}\cdots\Phi_{G_\ell}^{(t)}. \tag{19}$$

根据推论 1，如果我们有一个“新”阶 t 的广义群 t-设计（高于用无权重群t-设计所能得到的阶），那么由 G_i 生成的闭群 G 必定是通用的。不过，这种方法是有用的，因为它允许人们在更一般的语境中应用表示论工具（扩展第IH节中的那些工具）。例如，参考文献 [41] 的定理 1给出了一种利用群 G_i的表示论构造广义群 t-设计的方法。这类设计自然会导出便于从 t-设计中采样的有限长度量子电路：只需从 G_ℓ中采样一个随机酉算子，然后是 $G_{\ell-1}$，依此类推。注意，只要我们独立地从每个 G_i 中采样，这种采样就是无权重的；参考文献 [41] 中给出的权重仅在我们希望将 t-设计视为从乘积集合 $\{g_1\cdots g_\ell:g_i\in G_i\}$ 中采样时才是必要的（该集合的元素个数可能少于 $|G_1|\cdots|G_\ell|$）。

II. 量子位

量子位是 d维量子系统，其量子态可被操控以进行量子信息处理 [42]。希尔伯特空间为$\mathcal{H}\cong\mathbb{C}^d$，我们将该空间的典范基记为 $\mathbb{B}=\{|j\rangle\}_{j=0}^{d-1}$。对于量子比特系统，泡利矩阵构成算子空间的一组酉正交归一基，$\mathbb{I}$，X，Y，Z。对于量子位情形，可以定义广义泡利算子，有时称为“时钟与移位”矩阵（从其在典范基上的作用即可明白）。它们承载海森堡-外尔代数的一个表示，并在此意义上是由位置与动量算子生成的酉平移的离散化。我们将可互换地把量子位泡利元素称为泡利算子或海森堡-外尔群元素，并理解为它们是同一对象。

我们通常会用下标 d 标记广义泡利算子，以强调它们是量子多能级系统泡利算子，而非标准的量子比特泡利算子，从而避免混淆。请注意，对于任意 $d>2$，$\mathcal{L}(\mathcal{H})$的一组算子正交归一基可以是酉的（如下文的量子多能级系统泡利算子），也可以是厄米的（如盖尔曼基），但不能两者兼具。考虑到这一点，量子多能级系统泡利生成元是由下式定义的酉算子

$$Z_d|j\rangle=\omega^j|j\rangle,\quad \omega=e^{\frac{2\pi i}{d}}, \tag{20}$$
$$X_d|j\rangle=|j+1\rangle, \tag{21}$$

其中，狄拉克记号中的态以模 d 的整数为索引。对于单个量子比特，令

$$\mathcal{P}_d = \{X_d^i Z_d^j : i, j \in \mathbb{Z}_d\} \tag{22}$$

是由 X_d 和 Z_d 生成的群（模去相位），我们称之为海森堡-外尔群或泡利群。我们注意到， $\mathcal{P}_d$ 的 d^2个元素构成 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$的一组正交基。这些生成元满足$(X_d)^d = \mathbb{I} = (Z_d)^d$ 以及 $X_d Z_d = \omega^{-1} Z_d X_d$。后者使人联想到（与位置与动量算子相关联的平移算子的）对易关系，并可推广至 [43]

$$\left(X_d^j Z_d^k\right)\left(X_d^s Z_d^t\right) = \omega^{ks-jt}\left(X_d^s Z_d^t\right)\left(X_d^j Z_d^k\right). \tag{23}$$

A. 量子位 Clifford 群

G给定量子位泡利群 $\mathcal{P}_d$，我们可以将其正规化子定义为量子位 Clifford 群。即，

$$Cl_d = \{U \in U(d) \mid UPU^\dagger \in \mathcal{P}_d \ \forall P \in \mathcal{P}_d\}/U(1), \tag{24}$$

从而 Clifford 的共轭作用将泡利算子映为泡利算子（模去相位）。请注意，我们将 Clifford 群定义为模去 $U(1)$，从而通过避免全局相位得到一个有限群。当然，也可以将泡利群和克利福德群推广到多个量子位；我们将这些群分别称为 $\mathcal{P}_d^{(n)}$ 和 $Cl_d^{(n)}$。

量子位泡利算子群构成一个酉1-设计，适用于所有维数 $d \in \mathbb{N}$；这是因为它们构成了 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 的正交酉基。回顾一下，多量子比特 Clifford 群 $Cl_2^{(n)}$ 是一个 3-设计 [20]。量子比特 Clifford 群的情况则更加复杂：当 $d > 2$ 为素数时，Clifford 群 $Cl_d^{(n)}$ 仅是一个2-设计。如果量子比特维数 d 是合数，那么$Cl_d^{(n)}$ 按此处定义的群仅是一个 1-设计。然而，对于 $d = p^k$ 素数幂，可以定义经过修改的泡利群和 Clifford 群，其相位结构来自阶为 p^k的有限域，而它们是 2-设计 [24]：参见第 IIB 节。

现在我们回顾一般情况下量子位泡利群和 Clifford 群的辛刻画 d。由于合数d 的情形很少被讨论，我们将在此详细说明，但为简便起见，仅限于单个量子比特的情形。我们可以通过对应关系 $\mathcal{P}_d$将 $\mathbb{Z}_d^2$ 与 $X^i Z^j \leftrightarrow \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}^T$ 中的向量对应起来。于是，上文关系式（23）中的指数对应于 f 上的一个辛形式 $\mathbb{Z}_d^2$:

$$f\left(\begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} j & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = ks - jt. \tag{25}$$

现在我们来考察 Clifford 作用如何转化到辛结构中。根据定义，Clifford 群 Cl_d 通过共轭作用置换 $\mathcal{P}_d$ 中的 Pauli 算符：这一作用完全由 X 和 Z的像（并且线性地）决定，因此我们可以将 $\mathcal{P}_d$ 上的 Clifford 作用映射为 2×2 上、元素属于 $\mathbb{Z}_d$ 的矩阵。然而，Clifford 群不能任意置换 X 和 Z，因为它必须保持关系（23）。特别地，适当的矩阵 M 必须保持辛结构，这意味着对于所有 v、$w \in \mathbb{Z}_d^2$，都必须有 $f(Mv, Mw) = f(v, w)$。于是 M必须满足

$$M^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

或者等价地

$$\det(M) = wz - xy = 1 \text{ for } M = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}. \tag{27}$$

于是，我们可以将 Clifford 群 Cl_d 的像看作 $Sp_2(\mathbb{Z}_d)$，或者在这个单量子位情形下看作 $SL_2(\mathbb{Z}_d)$。（尽管 $\mathbb{Z}_d$ 通常不是一个域，但这里不存在可逆性问题，因为我们只考虑满足 $\det(M) = 1$的矩阵。）总之，我们有

引理 4. Cl_d 在 $\mathcal{P}_d$ 上的共轭作用，等价地可描述为 $Sp_2(\mathbb{Z}_d) = SL_2(\mathbb{Z}_d)$ 在 $\mathbb{Z}_d^2$上的乘法作用。我们有群同构 $Cl_d/\mathcal{P}_d \cong Sp_2(\mathbb{Z}_d)$。

B. 量子多能级系统伽罗瓦-克利福德群构成酉 2-设计

在本研究中，我们主要关注上文定义的“标准”量子多能级系统 Clifford 群 Cl_d，即由“时钟与移位”矩阵 X_d 和 Z_d 生成的群的正规化子。不过，Clifford 群还有另一种不同的定义，有时称为 伽罗瓦-克利福德群，关于这一概念的精彩阐述，见参考文献 [24] 。值得注意的是，对于所有素数幂维数，伽罗瓦-克利福德群都构成一个酉 2-设计，而“标准”量子多能级系统 Clifford 群则不 [24, 44]。

在本节余下内容中，令 p 为素数，并取 $d = p^k$。我们关注射影克利福德群（即模掉相位）。存在一个阶为 d 的域 $\mathbb{F}_d$，称为 伽罗瓦域。作为加法群，它同构于 $\mathbb{F}_p^{\oplus k}$。因此，我们将 $\mathbb{F}_d$ 视为 $\mathbb{F}_p^{\oplus k}$的一个副本，并赋予其非平凡的乘法运算。我们将希尔伯特空间 $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^d$的基按 $\mathbb{F}_d$ 中的元素而非 $\mathbb{Z}_d$来标记。令 χ 为一个非平凡的加性特征，它是从 $\mathbb{F}_d$ （视为加法群）到 $\mathbb{C}$的群同态。然后，我们如下定义“伽罗瓦-泡利”算子（海森堡-外尔泡利算符的类比）：对于$u, x, \ z \in \mathbb{F}_d$,

$$X(x)\,|u\rangle = |u+x\rangle\,,$$
$$Z(z)\,|u\rangle = \chi(zu)\,|u\rangle\,.$$

这自然导出泡利群和 Clifford 群的一种变体：令 GP_d 为由 $X\,(x)$ 和 $Z\,(z)$ 生成的（射影）酉算子群，并对相位取模；令 GC_d 为将 GP_d 规范化的（射影）酉算子群。（或者，也可以像参考文献 [24] 中那样，通过非常谨慎地选择相位来进行非射影处理。）

伽罗瓦-克利福德群 GC_d 是 GC_d 的一个子群，其选取方式使得 $GC_d/GP_d \cong Sp_2\,(\mathbb{F}_d)$ 通过与上文 Cl_d 所讨论的类似同态实现。这是关键区别：在相关的泡利群上，GC_d 通过 $Sp_2\,(\mathbb{F}_d)$ 作用，而 Cl_d 则通过 $Sp_2\,(\mathbb{Z}_d)$ 作用。特别是，当 $d = p$ 为素数时，这些构造都彼此等价，并且有 $GC_p = GC_p = Cl_p$。

类似的构造也可用于多量子位系统。设 $GC_{d,m}$ 为作用于 m d 维量子位上的 Clifford 群，则存在一个自然嵌入

$$GC_{p^k,m} \hookrightarrow GC_{p,km},$$

事实上$GC_{p^k,m} \cong GC_{p,km} = GC_{p,km}$ [24]。在量子多能级系统的情形下，究竟选择“哪个 Clifford 群”这一差别，一直是关于酉 2-设计是否存在的争议根源，例如参见文献 [45, 46]。

C. 精确量子多能级系统设计：Wootters 和 Fields 构造

虽然对所有 $t, d \in \mathbb{N}$ [12] 都存在（无权重）酉设计，但目前只在特殊情形下找到了这类设计的明确实例。原则上，我们完全不清楚该如何着手寻找它们。群论的联系在这方面取得了显著成效。通过运用某些群的表示论，并借助特征标表，文献 [27] 对各种维数下的酉设计进行了系统分类。对量子信息而言，这一分类的主要结论是：对于所有素数幂维数，Clifford 群构成一个酉 2-设计。事实上，目前已知的、随维数变化的酉设计族中，唯一的一族（适用于 $t > 1$ ）就是 Clifford 群。

群论方法所提供的喘息既是福音，也是祸根。例如， [27] 的结果还告诉我们，所谓的“酉 t-群”在诸如 $d = 6$、10这样的非素数幂维数中并不存在。当然，人们总能找到这些维数下的散在群，但它们同样会被用尽。因此，如何执行依赖于酉2-或3-设计性质的量子信息原语（如随机基准测试和经典影子层析）并不显而易见。我们的加权酉2-和3-设计使人们能够规避这些问题。我们在表 I中总结了已知的量子多能级系统酉设计与态设计族。

在文献 [47], 中，Wootters 和 Fields引入了如下量子态集合（沿用文献 [26]中的记号），

$$|q_1, q_2\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=0}^{d-1} \exp\left[\frac{2\pi \mathrm{i}}{d}\left(q_1 n + q_2 n^2\right)\right] |n\rangle \tag{28}$$

对于每个 $q_2 \in \{0, \ldots, d-1\}$，很容易证明 $\{|q_1, q_2\rangle \mid q_1 \in \{0, \ldots, d-1\}\}$ 构成一个正交归一基。此外，若d 是素数，那么上述 d^2 个量子态与计算基共同构成一个精确 2-设计；同时也是一组互 unbiased 基。

在参考文献 [26], 中，作者将这里的离散状态集推广为适用于无限维（可分）希尔伯特空间的连续设计。他们引入了不可归一化量子态，

$$|\theta,\phi\rangle := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \exp\left[\mathrm{i}\left(\theta n + \varphi n^2\right)\right] |n\rangle. \tag{29}$$

他们进一步证明， $\mathcal{H}$ 的福克基连同现已连续参数化的量子态 $\{|\theta,\phi\rangle\}$ ，在对 θ,ϕ 积分时构成一个“架设2-设计”。更形式地说，令 $\Pi_2 := \frac{1}{2}(\mathbb{I}+\mathbb{S})$为 $\mathcal{H}^{\otimes 2}$上的对称投影算符，则，

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |n\rangle\langle n|^{\otimes 2}\right) + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left(|\theta,\phi\rangle\langle\theta,\phi|\right)^{\otimes 2}. \tag{30}$$

我们工作的一项关键结果源于如下观察：上述（连续集合的）量子态在针对有限 d维希尔伯特空间适当重新定义后，对任意 $d\in\mathbb{N}$构成加权2-设计。或许更为重要的是，这一有限维构造不会遭遇无限维情形中出现的任何问题，而正是这些问题促使参考文献 [26]的作者引入架设 t-设计等概念。

更形式地说，令 $\mathcal{H}\cong\mathbb{C}^d$ 为任意有限维希尔伯特空间， $\mathbb{B}=\{|n\rangle\}_{n=0}^{d-1}$为其正交归一基（我们称之为“福克”基）。将（相对于福克基的）“相位”量子态定义为，

$$|\theta,\phi\rangle := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=0}^{d-1} \exp\left[i\left(\theta n + \phi n^2\right)\right] |n\rangle, \tag{31}$$

其中 θ， $\phi\in[-\pi,\pi)$ 。因此，福克态与相位态共同构成一个适用于 $\mathcal{H}$ 的加权 2-设计。我们将其总结为以下观察结果。

命题2。 对于任意有限维量子比特系统，以下量子态系综构成连续加权态2-设计。

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{d-1} |n\rangle\langle n|^{\otimes 2}\right) + \frac{d^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left(|\theta,\phi\rangle\langle\theta,\phi|\right)^{\otimes 2}. \tag{32}$$

请注意，与无限维情形中的投影算符不同，式（30）中，相位态前面有一个系数 $d^2/2$ 。这就是上述量子态构成加权 2-设计，而非均匀 2-设计的原因。

D. 从均匀设计生成加权态设计

在参考文献 [37], 中，隐含地提出了以下非正式定理：给定一个（均匀） t-设计，它在 d 维中会导出一个加权 t-设计，适用于所有 $d\le d$。将系综 $\mathcal{E}$ 定义为：

$$\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{w}_j, |\tilde{\psi}_j\rangle\}, \quad |\tilde{\psi}_j\rangle := \frac{1}{\|P|\psi_j\rangle\|}|\psi_j\rangle \quad \text{and} \quad \tilde{w}_j = \|P|\psi_j\rangle\|. \tag{33}$$

这里， P是一个投影算符，它投影到 $\mathbb{V}\subset\mathcal{H}$，即 $\mathcal{H}$中的一个 d维子空间。于是， $\mathcal{E}$ 是一个加权 t设计。不幸的是，上述说法并不成立。我们对其稍作修改，以解决这个问题[3]。

[3] 据我们所知，首次提出这种构造的是参考文献 [37]。然而，该文中陈述的结果存在错别字和错误。作者独立地意识到如何（简单地）修正这些问题，但希望指出最初那篇尚未发表的论文。特别是，作者谨此感谢 Huangjun Zhu 就此主题提供私人通信。

定理 3 (通过投影构造加权态设计 [37])。 给定一个均匀量子态 t设计， $\mathcal{E} = \{|\psi_j\rangle\}$ 在一个 q维空间中，它可导出一个加权 t设计，对所有 $d \leq q$。加权态 t设计可表示为 $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{w}_j, |\psi_j\rangle\}$，其中，

$$|\tilde{\psi}_j\rangle := \frac{1}{\|P|\psi_j\rangle\|} P|\psi_j\rangle, \tilde{w}_j = \nu \|P|\psi_j\rangle\|^{2t}, \text{ and } \nu = \frac{1}{\sum_{j=1}^{|\mathcal{E}|} \|P|\psi_j\rangle\|^{2t}}. \tag{34}$$

一个简单的计算 $\tilde{}$ion表明，所选的权抵消了新量子态 $|\psi_j\rangle \in \mathbb{V}$的归一化，即 .,

$$\sum_{j=1}^{|\mathcal{E}|} \tilde{w}_j |\tilde{\psi}_j\rangle\langle\tilde{\psi}_j|^{\otimes t} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{|\mathcal{E}|} \|P|\psi_j\rangle\|^{2t}} \sum_{j=1}^{|\mathcal{E}|} (P|\psi_j\rangle\langle\psi_j|P)^{\otimes t}. \tag{35}$$

现在还需证明这等于 $\mathbb{V}^{\otimes t}$上的对称投影算符。让我们看看这对 $t = 1$的情形如何成立，推广到更大的 t由于多重线性而很直接。对于 $t = 1$，让我们考虑一个均匀的1-设计，针对 $\mathcal{H}$。当然我们可以选择一个 $t > 1$ 设计，但这对说明目的已经足够。由于 $\mathcal{H}$ 的任意正交归一基都足以构成一个1-设计，我们有 $|\mathcal{E}| = d$ 以及 $\sum_{j=1}^{|\mathcal{E}|} |\psi_j\rangle\langle\psi_j| = \mathbb{I}$。因此，式 (35) 简化为， $\sum_{j=1}^{|\mathcal{E}|} P|\psi_j\rangle\langle\psi_j|P = P\mathbb{I}P = P$。但请注意 $P|_{\mathbb{V}} = \mathbb{I}_{\mathbb{V}}$，也就是说，限制在子空间 $\mathbb{V}$ 上的投影算符就是该子空间上的恒等算符。归一化可以简化为

$$\sum_{j=1}^{|\mathcal{E}|} \|P|\psi_j\rangle\|^2 = \sum_{j=1}^{|\mathcal{E}|} \mathrm{Tr}\left[P|\psi_j\rangle\langle\psi_j|P\right] = \mathrm{Tr}\left[P\right] = \tilde{d}. \tag{36}$$

$\tilde{}$因此，等式右边的式（35）等于 P/d正如预期的那样。

这个投影公式的一个直接推论是，它立即使任意维度下的量子比特 3-设计成为可能。这是因为多量子比特 Clifford 群构成一个 3-设计，并且可以选择一个投影算符作用于 $d < 2^n$维子空间。

E. 任意维度下的精确加权2-设计

请注意，这是少数几个由不来自 Clifford 群（轨道）的量子态生成 2-设计的情形之一。下面尝试构造一个例子。设 $p > 2$ 为奇素数。那么，Wootters-Fields 构造在每个 p维空间中都给出一个 2-设计。该系综的元素为：

$$\mathcal{E} = \{|0\rangle, |1\rangle, \cdots, |p-1\rangle\} \cup \{|q_1, q_2\rangle\}_{q_1,q_2=0}^{p-1}, \tag{37}$$

其中 $|\mathcal{E}| = p(p+1)$。由于上文定理 3 中的投影算符完全通用，我们可以直接将其选为$d-1$形式， $P = \sum |n\rangle\langle n|$，其中 $d = \dim(\mathbb{V})$ $d \leq p$ 并不一定是素数。由此可以得出以下结果。$n=0$

定理 4 （任意量子多能级系统维数下的精确加权量子态 2-设计）。 设 p、 $d \in \mathbb{N}$ 和 $p \geq d$ 为奇素数。那么，对于每个量子多能级系统维数 d，下列系综构成一个加权2-设计。

$$\mathcal{E} = \{|0\rangle, |1\rangle, \cdots, |d-1\rangle\} \cup \{|\widetilde{\theta,\phi}\rangle\}_{\theta,\phi}, \text{ where } |\widetilde{\theta,\phi}\rangle := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=0}^{d-1} \exp\left[\frac{2\pi i}{p}\left(\theta n + \phi n^2\right)\right] |n\rangle, \tag{38}$$

$$\text{and } \theta, \phi \in \{0, 1, \cdots, p-1\}.$$

注意，此处 θ， $\phi \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$因此我们仍有 p^2 个这样的元素。也就是说，这个系综的大小为 $p^2 + d \geq d(d+1)$，通常并非最优系综。额外元素的数量（超出最优界的部分）为 $p^2 - d^2$。

与此系综相关联的权为，

$$w_{\mathrm{Fock}} = \frac{1}{d(d+1)} \quad \text{and} \quad w_{\mathrm{Phase}} = \frac{d}{p^2(d+1)}. \tag{39}$$

顺带一提，这意味着在任何截断福克态模拟中，我们始终可以使用 $t = 3$ 设计，而不需要使用 [26]的严格设计构造。

1. $d = 6$ 的加权态2-和3-设计示例。

酉 t 群结构限制设计存在性的最小维数是 $d = 6$，不过这是存在“散在群”的情况之一，因此 $d = 6$ 确实存在酉群 2-设计，但不存在酉群 3-设计 [27]。尽管如此，我们仍可以构造加权 2-设计和 3-设计的显式示例。对于 2-设计的情况，只需列出来自受限设计情形的量子态。对于 3-设计的情况，我们针对 $d = 2^3$ 从 Clifford 群构造这些设计。请注意，Clifford 群（因而稳定子态）在维数 2^n [20, 37, 48]下构成精确多量子比特 3-设计。构造加权 3-设计可能并非易事，因为 n个量子比特对应的稳定子态数量会随着 $2^{(n+1)(n+2)/2}$ [49]呈指数增长，而且要使用投影引理，就需要计算这些量子态与投影算符之间的内积。不过，由于可以高效估算稳定子态之间的内积 [50], ，我们可以轻松地在任意维数 d下构造加权态 3-设计，尽管构造并非最优。

III. 实际应用

A. 自旋相干态与高自旋原子核的操控

这里我们依据一篇出色的参考文献（略去其中的一些笔误）[51]，简要介绍自旋相干态（SCS）。本文的讨论也可见于参考文献 [52] 的补充材料，该文由部分作者撰写。我们将聚焦于一个 $(2S+1)$ 维的希尔伯特空间，$\mathcal{H}_S$它可以承载 $SU(2)$[4] 的一个不可约表示。也就是说，我们需要李代数 $su(2)$ 的一个不可约表示，其生成元为 $\left\{\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z\right\}$，且满足正则对易关系：

$$\left[\hat{S}_x, \hat{S}_y\right] = i\hat{S}_z, \tag{40}$$

以及它们的循环置换。Casimir 算符 $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S(S+1)\mathbb{I}$ 与李代数的所有元素对易。回想一下，希尔伯特空间由 S^2，S_z 的（同时）特征基张成，即：

$$\mathcal{H}_S = \text{span}\{|S, m\rangle \mid m = -S, \cdots, S\}, \tag{41}$$
$$S^2|S, m\rangle = S(S+1)|S, m\rangle \tag{42}$$
$$S_z|S, m\rangle = m|S, m\rangle. \tag{43}$$

升降算符的作用方式如下：

$$\hat{S}_+|S, m\rangle = \sqrt{(S-m)(S+m+1)}|S, m+1\rangle \tag{44}$$
$$\hat{S}_-|S, m\rangle = \sqrt{(S+m)(S-m+1)}\rangle|S, m-1\rangle \tag{45}$$

相空间是 $SU(2)/U(1) \cong S^2$，即布洛赫球。我们将位移算符定义为

$$\hat{D}(\theta, \phi) = \exp\left[\frac{\theta}{2}\left(e^{i\phi}S_- - e^{-i\phi}S_+\right)\right]. \tag{46}$$

若定义 $\mathbf{n} = (\sin\,\theta\cos\,\phi, \sin\,\theta\sin\,\phi, \cos\,\theta)$，则 $SU(2)$ 相干态也可等价地定义为

$$|\mathbf{n}\rangle = \hat{D}(\mathbf{n})|S, S\rangle, \tag{47}$$

其中 θ, ϕ 表示布洛赫球上单位向量$\mathbf{n}$ 的球坐标。利用立体投影，我们可以定义坐标

$$\zeta = \tan(\theta/2)e^{i\phi}, \quad \eta = \ln\left(1 + |\zeta|^2\right). \tag{48}$$

[4] 在 [53] 中，他们用 I 表示我们称为 S 的自旋量子数

这样，我们就可以用类似的形式定义 $SU(2)$ 相干态

$$|\mathbf{n}\rangle = \frac{1}{(1+|\zeta|^2)^S} \exp\left(\zeta \hat{S}_-\right) |S,S\rangle. \tag{49}$$

SCS 的一些重要性质包括：它是自旋算符沿布洛赫球上方向$\mathbf{n}$ 的本征态：$\hat{}S_{\mathbf{n}} = \hat{}\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ 则 $\hat{} S_{\mathbf{n}}|\mathbf{n}\rangle = -S|\mathbf{n}\rangle$。不同 SCS 之间并不正交：$|\langle \mathbf{n}_1 \mid \mathbf{n}_2\rangle|^2 = \left[\frac{1}{2}(1+\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2)\right]^{2S}$。此外还存在连续的单位算符完备关系：

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} d\mathbf{n}|\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| = \frac{\mathbb{I}}{d}, \tag{50}$$

其中 $d = 2S +$ 1. 特别是，后者表明 SCS 构成连续的 1-设计，其中 $d\mathbf{n} = \sin(\theta)d\theta d\phi$.

B. 量子多能级系统的实验平台

量子多能级系统在实际量子信息处理中或许显得相对少见，但它们在物理世界中无处不在 [42]。事实上，许多量子比特平台都是更复杂高维系统中最低能级双重态的截断。对高维量子信息计算价值的认识不断深入 [54] 促使人们重新审视某些平台，转而接纳而非回避多于两个量子能级的存在。最早的一些量子多能级系统实验演示源自原子与光学物理。研究人员已在铯[55] 和镝原子 [56], 以及近年来的囚禁离子 [57]中实现了精细的量子多能级系统控制。光子学提供了丰富的高维量子态，例如高轨道角动量态 [58], 、空间 [59], 、时间 [60] 和频率 [61]模式。具有量子数 $S > 1/2$的自旋是物理量子多能级系统的典型例子，其希尔伯特空间维数为$d = 2S + 1$。这类高自旋系统天然存在于固态核自旋或电子自旋中 [52, 62–64], 以及磁性分子中 [65]。

量子多能级系统也可以在人工量子系统中实现。例如，横向量子比特是超导量子处理器的主力。在通常将横向量子比特用作量子比特时，它是对非谐振子最低两个能量态的截断。不过，通过优化横向量子比特的参数，可以实现对两个以上量子态的寻址[66, 67], ，甚至模拟八维自旋 [68]。谐振子也可以视为具有 $d \to \infty$的量子多能级系统。这种看待谐振子的方式催生了所谓的连续变量量子计算 [69]。也可以继续采用离散变量量子信息的框架：将若干福克态与辅助横向量子比特耦合，以控制福克态之间的跃迁矩阵元 [70]。一个有趣的新方向是，在由连续变量定义的量子态（例如 Gotteman-Kitaev-Preskill（GKP）量子态 [71]）之上，构造逻辑有限维量子高维系统。耐人寻味的是，开创性的 GKP 方案本身 [72] 最初也是从考虑量子多能级系统的编码开始的，其中量子比特是一个特例。

允许实现通用量子比特控制的最简哈密顿量可以写成：

$$\mathcal{H}_0 = \alpha S_z + \beta S_z^2 + \mathcal{H}_{\text{control}}(t). \tag{51}$$

这种形式对应一个自然基 $\mathbb{B} = \{|m\rangle\}_{m=-S}^{S}$，其中 $|m\rangle$ 是 S_z 的特征向量；对于实际的自旋系统，它们表示沿量子化轴的投影。如果 $|\alpha| \gg |\beta|$，则每对相邻本征态 $|m\rangle$，$|m-1\rangle$ 之间的能级间距为 $\approx \alpha + 2\beta(m-1/2)$。为简单起见，我们假设 H_{control} 的算子范数相对于原始哈密顿量 H_0较小。对于自旋系统，线性项 αS_z 通常是塞曼能，即自旋与静磁场 B_0的相互作用。二次项 βS_z^2 取决于物理系统的具体性质。对于固态中的核自旋，它可能源自电四极相互作用，即核电四极矩与电场梯度 [62]之间的耦合；对于电子自旋，它可能源于晶体场与自旋轨道相互作用 [65]的共同作用；对于冷原子，它可能是失谐激光场 [73]产生的交流斯塔克频移；对于横向量子比特，它是束缚势 [68],非谐性的函数，等等。

控制哈密顿量 $\mathcal{H}_{\text{control}}(t)$ 通常形式最为多样。以自旋 $S > 1/2$为例，H_{control} 它通常是一个 B_1 垂直于量子化轴的振荡磁场，因此：

$$\mathcal{H}_{\text{control}}(t) = \gamma S_x \sum_{k=1}^{2S} \cos(2\pi f_k t + \phi_k) B_{1,k}(t), \tag{52}$$

其中 γ 是旋磁比；我们明确考虑了控制哈密顿量可能由多个（可能同时施加的）频率分量组成，其频率为 f_k ，对应于 $\mathcal{H}_0$的本征态之间的跃迁。

存在 $2S = d-1$光谱分辨跃迁频率，是由于 $\mathcal{H}_0$中的非线性项 βS_z^2；这是实现通用控制以及在量子位系统中制备非经典态的根本性质 [74, 75]。过去十年中，经典控制电子学取得了显著进展，使得高效地产生类似方程52中的哈密顿量成为可能，也进一步推动了量子位平台的实验开发。

C. SNAP 门与量子多能级系统的通用性

下文中，我们将用 $d = 2S + 1$ 表示希尔伯特空间维数。由于我们研究的是固定的总自旋 S，因此将 $|S, m\rangle$ 量子态称为 $|m\rangle$。采用这种记号，SNAP 门就是一个对角幺正算符，其每个对角元都具有任意相位（灵感来自腔量子电动力学系统中的类似量 [76]），

$$S(\vec{\theta}) = \sum_{m=1}^{d} e^{i\theta_m} |m\rangle\langle m|, \tag{53}$$

其中 $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_d)$ 是相位向量。有时我们需要使用“线性SNAP”，$S(\phi) = \sum^{d} e^{im\phi}|m\rangle\langle m|_{m=1}$之所以称其为线性SNAP，是因为对角元上的相位之间存在线性关系，$\phi_m = m\phi \quad \forall m \in \{1, 2, \cdots, d\}$。我们首先指出以下简单的单位元，

$$D(\theta, \phi) = S(\phi) D(\theta, 0) S^{\dagger}(\phi), \tag{54}$$

其中 $S(\phi)$ 是上文定义的线性SNAP 门。此外，请注意，由于 $D(\theta, 0) = \exp\left[\frac{\theta}{2}(S_- - S_+)\right]$ 且 $S_- - S_+ = -2iS_y$，因此我们有 $D(\theta, 0) = e^{-i\theta S_y}$。也就是说，沿 θ 方向的位移操作只对应于具有相同角度的 S_y 旋转（相差一个负号）。此外，我们有，

$$D(\theta, \phi) = S(\phi) \exp\left[-i\theta S_y\right] S^{\dagger}(\phi). \tag{55}$$

也就是说，(θ, ϕ) 的位移操作可以由数量为 ϕ 的线性SNAP 门以及一次 S_y 旋转生成。

我们的证明策略与参考文献 [76] 中的策略非常接近。利用以下事实：$D(\theta, \phi) = S(\phi)D(\theta, 0)S^{\dagger}(\phi)$，我们将只关注由 $D(\theta, 0) = e^{-i\theta S_y}$（其中 $\theta \in [0, \pi)$）生成的旋转。设 $Q_n = \sum_{m=0}^{n} |m\rangle\langle m|$ 为投影到前 n 个能级上的投影算符。那么，很容易证明，

$$J_n := -i\left[S_y, Q_n\right] \propto (|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|). \tag{56}$$

也就是说，J_n 是 $SO(2)$在能级 $|n\rangle$ 和 $|n+1\rangle$ 之间旋转的生成元。因此，利用 J_n 和 Q_n，我们可以生成李代数 $\mathfrak{u}(d)$，进而为量子多能级系统生成任意哈密顿演化，从而证明 SNAP 门和位移操作具有通用性。

此外，与 [76], 类似，令 $R_n(\epsilon) = e^{i\epsilon}Q_n + (I - Q_n)$? 也就是说，它在量子态 $|m > n\rangle$上的作用为“1”，而在其他情况下则带有该相位。这样就得到了所需的 SNAP 门，其形式为 $S(\epsilon, \ldots\ldots, \epsilon, 0, \ldots\ldots, 0)$。那么，“群交换子”

$$\hat{D}(\epsilon)\hat{R}_n(\epsilon)\hat{D}(-\epsilon)\hat{R}_n(-\epsilon) = \exp\left(iJ_n\epsilon^2 + \mathcal{O}\left(\epsilon^3\right)\right). \tag{57}$$

也就是说，通过开启和关闭上述（无穷小）SNAP 门和位移门，可以生成能级 $|n\rangle$ 和 $|n+1\rangle$之间的（无穷小）旋转。虽然这并非最优方案，但它提供了一种协议：将非平凡的 $\theta \gg 0$ 旋转分解为无穷小旋转，再使用上述交替序列来实现。

结合我们可以将任意 $d \times d$ 酉算符编译为 $O(d^2)$ 个 SNAP 门和 $SO(2)$ 个旋转（也称为 Givens旋转）这一事实，[76]便可通过协议实现任意单量子比特酉门。

D. $SU(2)$ 协变旋转并非酉 2-设计

回顾第三节中的记号。设 $S \geq 1$ 为半整数，并考虑 $SU(2)$ 在 d维希尔伯特空间 $\mathcal{H}_S$上的表示。设 $G \subseteq U(\mathcal{H}_S) \cong U(2S+1)$为 $SU(2)$的像。我们将证明 G不是2-设计，作用于 $U(\mathcal{H}_S)$。我们将给出这一结论的三种相关证明，后一个证明比前一个更加明确。首先，回顾以下定理。

定理 5 ([39, 77])。设 $\mathcal{V} \cong \mathbb{C}^d$，且 $d \geq 2$。设 G是 $U(d) = U(\mathcal{V})$的一个无限闭子群。若 G是一个酉 2-设计，则 $SU(d) \subseteq G$。特别地，任何生成 G 的酉算子集合都是通用门集。

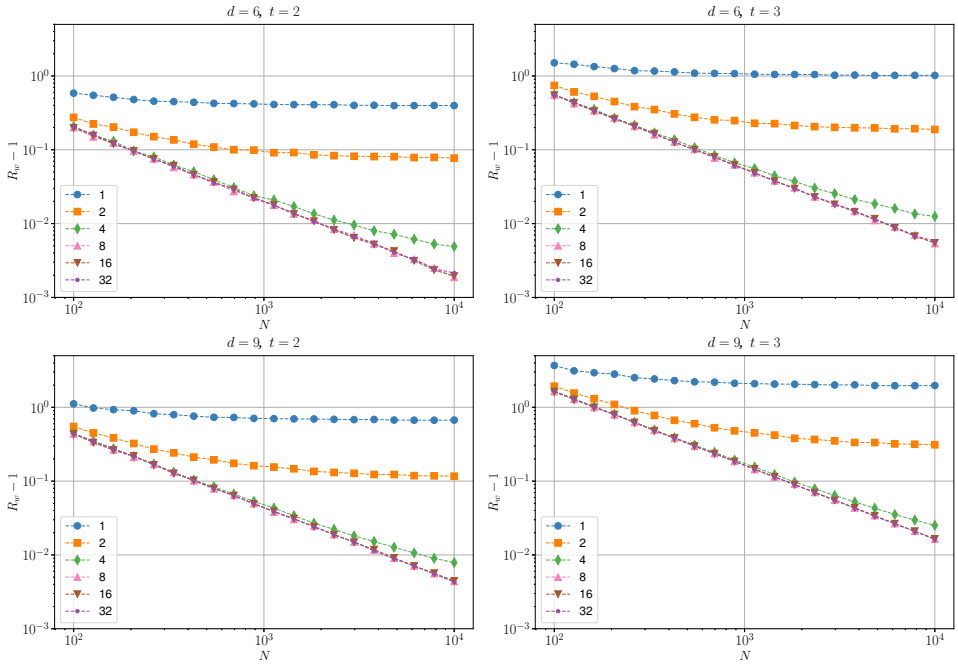


图 1： 量子态 Welch 检验比率 R_w（等式（10）中左侧与右侧之比）减一，其中 $R_w - 1 = 0$ 适用于量子态 t-设计。四个不同的面板展示了不同的量子比特维数 $d = 6$、9，以及趋近于 $t = 2$、3 设计的过程，其中使用的量子态数量为 N。图例给出了电路深度，每一层包含一个随机实位移 $D(\theta、\ \phi = 0)$（$\theta \in [0, \pi]$ 按照密度 $1\ 2 \sin\ \theta$进行选择），随后施加一个随机 SNAP 门（角度在 $[0, 2\pi$ 中均匀选取）。初始态为 $|S、\ S\rangle$。对于足够深的电路，曲线按 $R_w - 1 \sim 1/N$衰减。

对该定理的通俗 理解如下：完整酉群的连续子群只有两种形式：(i) 它们要么构成酉1-设计，要么 (ii) 是通用的，因此对任意 $t \in \mathbb{N}$，都构成酉 t-设计。后一种情况并没有特别大的实用价值，因为酉设计的主要目标是用对一个离散 集合求和，来替代对完整酉群的积分。前一种情况的用途也有限，因为只需取算子空间的一组正交归一酉基，就能得到酉1-设计。实践中，$t \geq 2$、$t \in \mathbb{N}$ 设计最有用，例如可用于随机基准测试和影子层析。这限制了连续 群作为酉设计的适用性。

现在我们回到对上述群 G 的讨论，它是 $SU(2)$ 在 $U(2S+1)$ 中的像。由于 G 在 $U(2S+1)$ 中对于 $S \geq 1$ 并非通用，根据定理，它不可能是一个 2-设计。

为了证明 G 不是一个2-设计，我们采用第二种证明方法，运用命题1，证明 $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S$ 至少有 3 G个不可约表示，对于 $S \geq 1$。在附录A4中，我们运用特征标理论证明 $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S^*$ 有 $2S+1 \geq 3$ 个不同的不可约表示，且每个的重数均为1。与[39], 中一样，可以证明 $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S^*$ 和 $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S$ 具有相同数量的不可约表示（或者运用附录A4 中使用的同一特征标理论，证明后者有类似的分解），由此得出结论：G不是一个2-设计。

最后，我们给出一个更直接的证明，仍然应用命题 1。考虑以下量子态

$$|S, S-2\rangle \otimes |S, S\rangle\,,\ |S, S-1\rangle \otimes |S, S-1\rangle\,,\ |S, S\rangle \otimes |S, S-2\rangle \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S. \tag{58}$$

在 $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S$上的 S_z 作用下，即 $S_z \mapsto S_z \otimes I + I \otimes S_z$，这些量子态线性无关，且具有相同的特征值$2S-2$。然而，在 $SU(2)$的任何不可约表示中，S_z 的特征子空间都是一维的。因此，$\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S$ 必须分解为至少 3 个不可约表示之和。由此我们得出结论：G不是 2-设计。

值得强调的是，这类协变的 $SU(2)$旋转是通过高自旋量子多能级系统 [52]实现量子计算时所使用的原生门。

E. 自旋相干态不构成态 2-设计

引理 5 ([37])。 如果群 $G \leq U(d)$ 构成酉 t-设计，那么在 G 作用下，任一归一化向量的轨道都构成复射影 t-设计（又称态 t-设计）。

请注意，这一结果与上文关于 $SU(2)$协变旋转并不构成群2-设计的证明相结合，立即

告诉我们，对自旋相干态取平均并不能生成态 2-设计。也就是说，

$$\int_{S^2} |\theta,\phi\rangle\langle\theta,\phi|^{\otimes t} d\Omega \neq \gamma(t,d) \text{ for } t \geq 2. \tag{59}$$

因此，自旋相干态不足以执行诸如经典影子层析之类的任务，而后者依赖于2-设计或3-设计。也就是说，要在这些系统中进行影子层析，必然需要“自旋压缩”，即玻色系统中光学压缩的等价物。

这里可以与海森堡-魏尔相干态作一个有趣的对比，这些相干态同样并不构成2-设计。在HW情形中，缺乏2-设计仅仅是无穷维希尔伯特空间所致。不可约表示结构分解为与 $U(d)$ 相同数量的分量，但正是相应积分缺乏收敛性，才阻止它构成2-设计；参见这篇优秀参考文献中的讨论 [25]。相比之下，自旋相干态未能构成2-设计并非由于无穷维收敛问题；相反，其后果是表示论上的。这个例子进一步凸显了这样一个事实：尽管通过霍尔斯坦-普里马科夫等映射，自旋相干态与光学相干态之间存在深刻类比，但它们并非在每一方面都相同。玻色系统的无穷维性质与高自旋系统的有限维性质表现方式不同。在本例中，这导致了两种不同的未能成为酉/态 2-设计的方式。自旋相干态与光学相干态还有其他不同之处，最简单的或许是存在两个正交的自旋相干态（对应于布洛赫球上任意一对对径点），而不存在两个彼此正交的光学相干态（只有当我们把高斯波包渐近地彼此远离时，这种情况才会近似发生）。

F. 自旋-GKP态与量子态2-设计

GKP码是利用玻色系统和高维量子多能级系统实现量子纠错的主要方案之一 [72]。文献 [78] 表明，在所有辛格上取遍所有 n 模 GKP稳定子态所构成的系综形成一个“架设2-设计”。该系综记为 $X_n := \{|\Lambda;\ \vec{\alpha}\rangle = D(\vec{\alpha})|\Lambda\rangle,\ \ \Lambda \in Y_n,\ \ \vec{\alpha} \in P(\Lambda)\}$。这里，$|\Lambda\rangle$ 是辛自对偶格中所有点处的光学相干态的等权叠加（即能够抵御位移错误的 GKP 码字）。通过取格子基本域中的所有向量组成的集合，将该态位移为 $D(\vec{\alpha})$，记作 $P(\Lambda)$。回想一下，每个格子由一个辛矩阵定义，而空间 $Y_n = Sp(2n,\ \mathbb{Z})\backslash Sp(2n,\ \mathbb{R})$。这个紧致空间赋有 Haar 测度，随后利用该测度对这一集合进行（均匀）平均。

自旋 GKP 码字也构成态 2-设计，这一事实可由以下几点推导得出：玻色 GKP 码字构成架设2-设计，以及另外两个思路。首先，我们使用 定理 3 将玻色格态投影到有限维希尔伯特空间中，这与此前加权态 2-设计的构造类似。然后，我们使用 Holstein-Primakoff 变换，将这些截断的“玻色”自由度映射到高维自旋上 [79]。

投影这一步很直接，只需令 $|\widetilde{\Lambda;\ \vec{\alpha}\rangle} = \frac{P|\Lambda;\ \vec{\alpha}\rangle}{\|P|\Lambda;\ \vec{\alpha}\rangle\|}$，~~并按照~~ 定理 3 中的方式定义权函数 $t = 2$（因为我们关注的是 2-设计情形）。随后很容易证明，对这些投影后的量子态取平均，等价于用投影算符 P夹住对称投影算符，从而得到一个投影到 d维子空间上的对称投影算符。

霍尔斯坦-普里马科夫变换就是以下映射：

$$\hat{S}_+ \mapsto \sqrt{2S}\hat{a}^\dagger, \quad \hat{S}_- \mapsto \sqrt{2S}\hat{a}, \quad \hat{S}_z \mapsto \hat{N} - S \tag{60}$$

其中 N 满足

$$\left[\hat{N}, \hat{a}^\dagger\right] = \hat{a}^\dagger, \quad [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1 - \hat{N}/S, \quad \hat{N} \to \hat{a}^\dagger\hat{a}. \tag{61}$$

由此可见，在极限 $S \gg 1$ 下，该代数收敛于海森堡-外尔代数，即可以恢复正则对易关系 $[a, a^\dagger] \approx 1$。综合起来，这足以说明：对所有格态取平均，且每个格子都被其基本域中的所有向量平移时，自旋 GKP 码字构成一个态 2-设计。

G. 基于原生qudit门的近似设计

在多量子比特系统上构造酉设计，通常要从“较少”的随机性出发生成。这一思路体现在随机电路的砖墙架构中，该架构源自 [23] 的开创性工作。在这里，我们关注一个稍有不同的问题：如何在单个高维量子多能级系统上使用原生

量子门，例如 SNAP 门和位移操作？首先要注意的是，由通用门集（例如 $SU(4)$ 门或 SNAP-位移操作）生成的随机电路，可以生成任意阶的 任意 阶 t-设计 [80]。真正的问题是，所需的最小深度是多少？对于单个量子多能级系统的情况，这类电路所需的最小长度又是多少？

值得庆幸的是，Nakata等人 [22] 的工作已经给出了相应的构造。其思路是在两个不同的*互 unbiased*基中生成随机酉算子。这样可以随机化任意系统的量子态，并由此生成任意阶的 t-设计（阶数取决于电路长度）。给定两个互 unbiased 基，记为 $\mathbb{B}$ 和 $\mathbb{B}'$，例如连续变量系统中$\hat{}x$，$\hat{}p$ 的本征基，或量子比特中 Z， X 的本征基（这对量子多能级系统也适用吗？），我们想要弄清楚获得 t-设计所需的电路长度。根据 [22] 的推论 3，如果 $d = \Omega(t^2(t!)^2)$（即 $d \geq ct^2(t!)^2$,，其中 c可以任意大），且 $\ell \geq \quad {}^{1}\overline{\log d - 2\log(t!)}\lceil t\log d + \log(1/\epsilon)\rceil$，则随机酉算子，

$$D[\ell] := D_\ell^E D_\ell^F D_{\ell-1}^E D_{\ell-1}^F \dots D_1^E D_1^F D_0^E, \tag{62}$$

生成一个 ϵ近似酉 t设计。这里， D^E 是固定基（例如计算基）中的随机酉算子，如 SNAP 门；而 D^F 是 MUB 中的随机酉算子。请注意， $d = \Omega(t^2(t!)^2)$ 是证明所需的技术条件，目前尚不清楚能否放宽这一条件。不过，我们在 [...] 中讨论的数值计算表明，对于较小的 d，这种方法同样有效。利用原生门生成此类设计的一种方法是施加随机 SNAP 门，并使用量子傅里叶变换（QFT）变换到一个 MUB。

具体来说，设 $U = \sum_{j=1}^d e^{i\phi_j}|j\rangle\langle j|$ 是福克基中的随机对角幺正算符。那么，若 U_Q 是量子傅里叶变换，我们有 $U_Q U U_Q^\dagger = \sum_{j=1}^d e^{i\phi_j}|\widetilde{j}\rangle\langle\widetilde{j}|$ 是 MUB 中的随机对角酉算子。因此，可以改为按如下方式构造 t设计： $D[\ell]:=D_\ell^E($ $U_Q D_\ell^E U_Q^\dagger) D_{\ell-1}^E (U_Q D_{\ell-1}^E U_Q^\dagger)$ $\dots D_1^E (U_Q D_1^E U_Q^\dagger) D_0^E$。由此可见，在固定基中施加 $2\ell+1$随机酉算子并使用 2ℓ次量子傅里叶变换，就足以生成单个量子比特的 ϵ近似 t设计。

[81] 的数值结果告诉我们， $2\ell+1$ 个随机 SNAP 门与 $2\ell \times O(d)$ 个 SNAP + 位移门足以实现这一点。因此，我们可以得出， $O(\ell d)$ 个 SNAP-位移门足以生成酉 t-设计。举例来说，如果我们想为 $d = O(1)$ 构造一个 2-设计，这将给出 $\ell \gtrapprox 2 + \log_d(1/\epsilon)$。对于 $\epsilon = 1/d^k$，我们有 $\ell \gtrapprox 2 + k$。因此，只需 $O(d)$ 个 SNAP-位移门即可生成酉 2-设计。请注意，大部分量子门开销都来自生成量子傅里叶变换。虽然这些界限显然还可以改进，但我们认为，它们有助于理解如何利用原生门集生成设计。

H. 腔量子电动力学量子位

超导射频（SRF）腔为承载量子位提供了一个颇有吸引力的平台：腔具有较长的相干时间（通常为毫秒级），并且可以轻松集成非线性元件以实现通用控制 [82–84]。量子多能级系统通常编码在玻色模式的前 d 个能级中，控制则通过选择性数目依赖任意相位（SNAP）门 [76], 位移操作、两能级旋转（Givens旋转）、回波条件位移（ECD）门 [83], 边带相互作用 [85, 86]，等 “ 自然发生 ” 的相互作用来实现。

在下面的讨论中，我们聚焦于较为简单的情形：将 SNAP 与位移门，或将 SNAP 与 Givens旋转，作为我们的通用门集（这两组门集都分别具有通用性）。由于它们是通用门集，因此可以在 d 维计算子空间中构成任意阶的酉 t-设计。需要注意的是，这仅适用于 $d < \infty$，因为在无限维情形下，完整酉群上的收敛问题较为微妙；有关 rigged t-设计，请参见相关工作 [26]。如何利用这类随机酉算子评估含噪量子位的性能，已在文献 [87] 中讨论。

IV. 特征随机基准测试

现在我们讨论特征随机基准测试（RB）[88–90]。设 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$ 是一个态空间，其对应的酉算子为 $U(d)$。设 $G \subseteq U(d)$ 是一个有限群或紧子群。我们考虑这样的问题：仅使用 G 中的量子门，来近似 $U(d)$ 中量子门的平均保真度。我们需要考察 G 和 $U(d)$ 的表示，它们通过共轭作用于 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$。为方便起见，我们经常使用典范同构 $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \cong \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$，其中 $U \in U(d)$ 通过 $U \otimes U^*$ 作用。

回顾一下，我们有一个分解

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \sum_i V_i^{\oplus m_i}, \tag{63}$$

其中， V_i 是互不等价的 G-不可约表示，而 $m_i > 0$ 是它们的重数。（一般而言，也可以考虑相对于 G [89]的子群的不可约表示；为简化说明，这里不作讨论。）早期关于随机基准测试的研究假设 G 是一个 2-设计，

这尤其意味着 $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \cong \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^* \cong \mathfrak{sl}(\mathcal{H}) \oplus \mathbb{C}I$（证明见 [39]中的定理 B.1）。特别地，当 G 是一个 2-设计时，有两个不可约表示，每个的重数均为 1，其中一个是平凡表示。在更一般的特征标随机基准测试情形下，我们需要考虑同型分量 $W_i = V_i^{\oplus m_i}$及其投影算符 P_i。对于每个同型分量 W_i，我们需要一个量子态 ρ_i 和测量投影算子 M_i，使得 $|\mathrm{Tr}(M_i P_i \rho_i)| \neq 0$，且该值最好尽可能大。在下面讨论的示例中，实际上我们会选择一个适用于所有同型分量的单一量子态 ρ，并且同样只测量一个可观测量（不同结果可能与不同的同型分量相关）。因此，针对每个 i，随机基准实验包括以下步骤：制备量子态 ρ_i，随机选择一个序列 $U_0, U_1, \ldots, U_N \in G$（按照均匀测度或 Haar 测度），依次施加量子门 $U_1 U_0, U_2, U_3, \ldots, U_N, U_1^\dagger \cdots U_N^\dagger$（将第一个和最后一个编译为单个量子门），并测量适当的可观测量，以投影到 M_i上。随后，对这些数据进行适当解读即可得到随机基准测试参数。这里不再详述，读者可参阅 [88–90], ; 不过，我们会简要说明这些方法为何有效。

在随机基准测试过程中，相关量子信道对应于 G 中的量子门以及一个固定的量子门误差通道 Λ（此外还包括态制备与测量误差）。通过对 U_1、……、U_N 的随机选择进行平均，我们可以将 Λ 的大多数出现替换为其 G-扭转 $\Lambda_G = \frac{1}{|G|}\sum_{U\in G} U\Lambda U^\dagger$，而后者尤其与 $\overline{G}$的作用对易。特别地，G 和 G-扭转的两个元素都会保持同型分量 W_i。于是，特征标随机基准测试基本上可归结为分别研究每个同型分量：如果从量子态 $\rho_i \in W_i$ 出发，仅应用 G 中的量子门和 G-扭转的量子信道，然后投影到 W_i 中的可观测量上，那么整个计算都会保持在该同型分量内。在实践中，态制备与测量误差可能会使我们离开该同型分量；此外，如上文所述，我们不需要在 W_i 中选择 ρ_i 和 M_i。这正是上文讨论的“额外”随机量子门 U_0 所发挥的作用：如 [88, 89], 所示，可以对 $U_0 \in G$ 进行精心加权的平均（权来自 V_i 的特征标，并且可以取复值），从而将投影算符 P_i 插入相关表达式中，迫使计算回到 W_i。随后，可以将各个不可约表示的结果结合起来，以近似总体平均保真度。

当所有重数 $m_i = 1$时，情况尤其简单，因为舒尔引理意味着 G-旋量作用为一个标量，因此我们可以通过为每个不可约表示拟合一个单指数衰减来进行随机基准测试。这是参考文献 [88] 中讨论的特殊情形。更一般地，[89, 90] 讨论了具有非平凡重数的情形，其中需要拟合多个指数衰减之和。

在命题 5的设定中，我们发现所有不可约表示的重数均为 1，因此可以如参考文献 [88] 所示，采用单指数衰减进行特征随机基准测试。我们将在第 $G \cong SU(2)$ 节 IV A中讨论特殊情形 $G \cong SU(2)$，并在第 IVB节讨论另一种无重数情形。为了在这些设定下实现特征标随机基准测试，我们将：(1) 给出 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 的不可约表示分解；(2) 给出一个与所有不可约表示均有非零重叠的有用初始态 ρ；以及 (3) 给出适当的可观测量，其测量投影算子与各个 $P_i\rho$ 均有非零重叠。

A. SU的特征标随机基准测试(2)

现在我们将讨论特征随机基准测试在 $SU(2)$ 上的应用。关于 $SU(2)$ 情形下“合成随机基准测试”的系统讨论，也请读者参阅文献 [91]。具体而言，承接上一节，我们将讨论 $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S^*$ 分解为（无重数的）$SU(2)$ 不可约表示的方式，然后给出所需的初始态和测量。事实上，为便于实现，我们将给出一个单一的量子态和一次测量，它们足以对所有不可约表示进行基准测试。

注意，$SU(2)$ 表示 $\mathcal{H}_S^* \to \mathcal{H}_S$ 之间存在等价关系，由 $\langle S,\ m| \mapsto |S,\ -m\rangle$ 给出。于是我们有

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}_S) \cong \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S^* \cong \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S, \tag{64}$$

后两者之间的同构由下式给出

$$|S, m_1\rangle\, |S, m_2\rangle \mapsto |S, m_1\rangle\, \langle S, -m_2|\,. \tag{65}$$

我们将在 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_S)$ 的这些描述之间自由切换。

注意，$\mathcal{H}_S$ 的权为 $2(S-m)$，其中 $0 \le m \le 2S$ 是整数。（回想一下，权 是自旋的两倍，并对应于 $Z \in \mathfrak{su}(2)$ 的本征值。）于是张量积的权为

$$2(S-m_1) + 2(S-m_2) = 2(2S - (m_1+m_2)).$$

特别是，$\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S \cong \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S^*$ 中只会出现偶整数权。

更准确地说，根据附录A4，我们有

$$\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S^* \cong \bigoplus_{\ell=0}^{2S} V_{(2S-\ell,\ell-2S)} \cong \bigoplus_{\ell=0}^{2S} \mathcal{H}_{2S-\ell}. \tag{66}$$

那么，相关不可约表示的最高权具有形式 $2J$，其中 J 是满足 $0 \le J \le 2S$ 的整数。特别地，每个不可约表示的重数均为 1。

接下来，我们要找出一个密度矩阵 ρ，使其与每个不可约表示都有非零重叠。结果发现，只需取 $\rho = |S,S\rangle\langle S,S|$，即对应于最高权向量的密度矩阵即可。回想一下，根据等价关系 (65)，我们可以将 $|S,S\rangle\langle S,S|$ 视为张量 $|S,S\rangle|S,-S\rangle$。然后，可以利用克莱布施-戈登系数计算不可约表示 V_i 中基向量与 $|S,S\rangle|S,-S\rangle$ 的重叠。由第 172 页公式 (2.41) 中给出的 [92]，的显式表达式，我们可以直接看出，相关的克莱布施-戈登系数非零。（事实上，该公式通常包含一大串求和项，但这里只有一项非零。）我们可以明确算出，对于最高权为 $2J$ 的不可约表示 $\mathcal{H}_J$（其中 J 是满足 $0 \le J \le 2S$ 的整数），其权为 0 的唯一单位向量与 $|S,S\rangle|S,-S\rangle$ 的内积如下：

$$\left(\frac{(2J+1)(2S)!^2}{(2S+J+1)!(2S-J)!}\right)^{1/2}. \tag{67}$$

我们得出结论：$|S,S\rangle|S,-S\rangle$ 与每个不可约表示都有非平凡重叠，因此对 $\rho = |S,S\rangle\langle S,S|$同样成立。我们也可以取测量投影算子 $M = \rho$，从而对于 P_J 到 $\mathcal{H}_J$的副本上的投影算符，

$$\mathrm{Tr}(MP_J\rho) = \langle S,S|\, P_J\, |S,S\rangle \neq 0$$

如所期望。

类似的论证使我们能够取 $M = \rho = |S,-S\rangle\langle S,-S|$，即对应于最低权向量的密度矩阵。事实上，我们也可以改用 $M = |S,S\rangle\langle S,S| + |S,-S\rangle\langle S,-S|$, 它与每个不可约表示都有非平凡重叠。该可观测量对应于在标准基 $|S,m\rangle$ 中进行测量，并仅保留投影到 $|S,S\rangle$ 和 $|S,-S\rangle$上的那些项。于是，我们可以仅使用标准基量子态和测量，对 $SU(2)$执行特征标随机基准测试。

命题 3. 对于 $\mathcal{H}_S$，对应于 $SU(2)$ 的门群可进行无重数特征标随机基准测试，只需使用单个量子态 $\rho = |S,S\rangle\langle S,S|$ 和单个测量投影算子 $M = |S,S\rangle\langle S,S| + |S,-S\rangle\langle S,-S|$。随机基准测试通过拟合 $2S+1$ 个单指数衰减来完成，每个不可约表示对应一个衰减。

B. 任意维度下单量子多能级系统 Clifford 群的 CharacterRB

现在我们考虑针对 Cl_d 的特征随机基准测试，即任意维度 d 下单个 d 维量子多能级系统的 Clifford 群。回顾一下，这涉及将空间 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 分解为不可约表示，其中 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$。我们明确给出这一分解：

定理6. 在 Cl_d 的共轭表示下，有

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}^d) \cong \bigoplus_{1\le r\le d,\ r|d} W_r,$$

其中

$$W_r = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{X^a Z^b : \gcd(a,b,d) = r\}$$

是 Cl_d 的重数为 1 的不可约表示，而 W_r 的维数等于满足条件 $0 \le a,b < d$ 且满足 $\gcd(a,b,d) = r$ 的整数对 (a,b) 的数量。特别地，Cl_d 是一个 2- 设计，当且仅当 d 是素数。

证明。 回顾第II 节的引言可知，我们可以将 Cl_d 在 $\mathcal{P}_d$ 上的共轭作用等同于 $Sp_2(\mathbb{Z}_d)$ 对向量$(a,b) \in \mathbb{Z}_d^2$ 的乘法作用（为方便起见，写成有序对而非列向量）。我们将首先确定轨道 V_r（辛作用的轨道）。然后证明相应的子表示 W_r 是不可约且不等价的，因此它们的重数为1。

注意，

$$\mathbb{Z}_d^2 = \bigcup_{\substack{r|d\\ 1\le r\le d}} V_r, \text{ where } V_r = \{(a,b) : 0 \le a,b < d, \gcd(a,b,d) = r\}, \tag{68}$$

且 V_r 两两不相交。提出最大公因数后，我们可以写成

$$V_r = \{(ra', rb') : 0 \le a', b' < d/r, \gcd(a', b', d/r) = 1\}. \tag{69}$$

由线性性和可逆性可知，V_r 显然在 Cl_d 的作用下保持不变；此外，我们可以证明其在每个 V_r 上的作用都是传递的，因为可以通过某个第一列为 $(a',\ b')^T$的辛矩阵，将 $(r,\ 0)$ 映射到任意的 $(ra',\ rb')$。于是，V_r就是 Cl_d 作用下的全部轨道。

当然，V_r 中的元素为 W_r 的泡利基编索引（在定理陈述中定义），其中 $(a,\ b) \mapsto X^a Z^b$。因此我们已经证明，忽略相位后，Cl_d 会传递地置换 W_r的泡利基。此外，泡利子群 $\mathcal{P}_d \subset Cl_d$ 通过适当的相位（本原 d次单位根 ω的幂）作用。我们可以利用这两个事实明确证明 W_r是不可约的。可以从任意线性组合 $v = \sum_{(a,\ b)\in V_r} c_{a,\ b} X^a Z^b$ 开始，归纳地施加 Clifford 群元素以减少非零项的数量，最终将任意 $v \in V_r$ 变为一个固定的基元素，例如 X^r。

现在我们证明 W_r 是不等价的，并分别考虑 d为奇数和偶数的情况。证明的思路是举出一个 Clifford 群元素 L，用它来区分不同的 W_r。具体而言，我们将利用这样一个事实：等价的不可约表示必须保持 L的阶不变。

首先，如果 d 为奇数，我们考虑对角酉算子 $L = (\delta_{ij}\omega^{j(j+1)/2})_{ij}$。显然，$L$ 与 Z 对易，进一步可以验证 $LXL^\dagger = \omega XZ$，因此 $L \in Cl_d$。（这与量子比特的 $S = \sqrt{Z}$ 门类似。）这一共轭作用关系意味着，L 在对不可约表示 W_r 施加共轭作用时的阶为 d/r。这排除了这些不可约表示之间存在任何等价的可能性。

如果 d 为偶数，我们令 $\zeta = \exp(\pi i/d)$，使得 $\zeta^2 = \omega$，并令 $L = (\delta_{ij}\zeta^{j^2})_{ij}$。类似地，我们有 $L \in Cl_d$，其中 $LXL^\dagger = \zeta XZ$。在这种情况下，相位更为复杂。我们可以计算出，在 V_r 上，若 r 为偶数，则 L 的阶为 d/r；若 r 为奇数，则其阶为 $2d/r$。与上文一样，这排除了所有可能的等价关系。为清楚起见，反设存在等价关系 $V_{r'} \to V_r$，其中 $r' < r$。由于 $d/r < d/r'$，且等价关系必须保持 L 的阶不变，因此这要求 L 在 V_r 上的阶为 $2d/r$（这迫使 r 为奇数），在 $V_{r'}$ 上的阶为 d/r'（这迫使 r' 为偶数），并且还要求 $2d/r = d/r'$。这个等式可改写为 $r = 2r'$。但这意味着奇数 r 能被 2 整除，矛盾。因此，我们得出结论：所有不可约表示 W_r 都彼此不等价。

关于 2-设计的表述可由命题 1推出。 ■

由此结果可知，单量子多能级系统的特征标随机基准测试非常容易处理：不可约表示的重数均为 1，因此只有单指数衰减。此外，需要拟合的衰减项数等于 d 的因数个数，这显然是 $O(\sqrt{d})$。（已知更紧的界，参见 [93]。）

要充分实现特征标随机基准测试，我们还必须指定要采用的初始态和测量。幸运的是，对于任意 s，我们总可以取 $M = \rho = |s\rangle\langle s|$，因为 $Z^r \in W_r$ 和

$$\mathrm{Tr}(MZ^r\rho) = \langle s|Z^r|s\rangle = \omega^{rs}. \tag{70}$$

特别是，我们可以制备一个固定的计算基态，例如 $\rho = |0\rangle\langle 0|$，进行计算基测量，并使用投影算符 $M = |0\rangle\langle 0|$。

命题 4。 任意维度 d 下的单*qudit Clifford*群允许进行无重数特征标随机基准测试，使用单个量子态 $\rho = |0\rangle\langle 0|$ 和单个测量投影算子 $M = |0\rangle\langle 0|$。随机基准测试通过拟合 $\phi(d)$ 个单指数衰减来进行，每个不可约表示对应一个，其中 $\phi(d)$是 d 的因数个数。

V. 分数设计

本节将引入“分数 t-设计”的概念，它是整数阶 t-设计的自然推广。这一概念的灵感来自分数阶微积分 [94]理论。回顾一下，一组 N 纯态构成一个（均匀）t-设计，当且仅当 [11]（另见式（10））,

$$\frac{1}{N^2}\sum_{j,k=1}^{N} |\langle\psi_j|\psi_k\rangle|^{2t} = \frac{1}{\binom{d+t-1}{t}}. \tag{71}$$

等式右边通过代入 Haar 随机态，并在 $\mathcal{H}^{\otimes t}$ 上使用对称投影算符（以及舒尔引理）得到。我们的目标是将此公式推广到非整数 t。请注意，从张量积的角度来看，这样的推广并没有意义（至少无法以任何直接的方式进行）；也就是说，我们不会去考虑这个量，

$$\mathbb{E}_{\psi\sim\mathrm{Haar}} \quad |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes t}. \tag{72}$$

相反，我们注意到，对于任意 $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，都可以计算等式左边的内积。这将成为我们推广 t-设计定义的方式。请注意，等式右边可以通过使用伽马函数来推广，

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \mathfrak{Re}(z) > 0. \tag{73}$$

此外，对于正整数 n，我们有 $\Gamma(n) = (n-1)!$。重要的是，伽马函数使我们能够将等式右边的阶乘概念推广到任意 $t \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\binom{d+t-1}{t}} = \frac{\Gamma(t+1)\Gamma(d)}{\Gamma(t+d)}. \tag{74}$$

这将成为我们提出分数阶 t-设计概念的起点。

定义 4 (分数阶态设 计)。 希尔伯特空间 $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^d$ 中的一组量子态构成分数阶 t-设计，当且仅当 ，

$$\frac{1}{N^2} \sum_{j,k=1}^{N} |\langle \psi_j | \psi_k \rangle|^{2t} = \frac{\Gamma(t+1)\Gamma(d)}{\Gamma(t+d)} = tB(t,d). \tag{75}$$

为了说明这是一个有意义的推广，我们首先证明，对于 Haar 随机态，等式右边对 $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 成立（$t = 0$的情形显然，因此我们只关注 $t \in \mathbb{R}_{>0}$）。也就是说，我们要计算：

$$\int_{\psi,\phi \sim \text{Haar}} |\langle \psi | \phi \rangle|^{2t} = \int |\langle \psi | \phi \rangle|^{2t} \, d\mu(\psi) d\mu(\phi). \tag{76}$$

这里， $d\mu(\psi)$表示复射影希尔伯特空间上唯一的酉不变测度。利用酉不变性，我们可以对其中一个量子态 $|\phi\rangle \mapsto |0\rangle$ 进行变换，而不改变上述积分的结果。因此，我们只需估算：

$$\int |\langle 0 | \psi \rangle|^{2t} \, d\mu(\psi). \tag{77}$$

顺便一提，请注意，对于 $t = 1$，这类似于估算在d测量哈尔随机量子态时，观测到对应于 $|0\rangle$ 的比特串的概率。为计算积分，我们将纯量子态参数化为 $|\psi\rangle = \sum \psi_j |j\rangle$，其中，$_{j=1}\psi_j = x_j + iy_j$。然后，归一化纯态上的哈尔测度可用球坐标参数化为 [95]

$$d\mu(\psi) = \frac{\Gamma(d)}{(2\pi)^d} \, \delta\left(1 - \sum_{j=1}^{d} r_j\right) \prod_{j=1}^{d} dr_j d\theta_j, \tag{78}$$

其中 $x_j = \sqrt{r_j}\sin(\theta_j)$，且 $y_j = \sqrt{r_j}\cos(\theta_j)$，其中 $r_j \in [0,1]$ 且 $\theta_j \in [0, 2\pi]$。 δ 函数确保这些纯态的归一化。因此，

$$\int |\langle 0 | \psi \rangle|^{2t} \, d\mu(\psi) = \int |r_1|^t \, d\mu(\psi), \tag{79}$$

其中，我们令 $|0\rangle$为上文展开所用的基的第一个元素，因此得到项 r_1。代入上文的测度，并利用 $|r_1| = r_1$ 这一事实，可得，

$$\text{LHS} = \Gamma(d) \int (r_1)^t \, \delta\left(1 - \sum_{j=1}^{d} r_j\right) \prod_{j=1}^{d} dr_j, \tag{80}$$

其中我们已经积分 对 θ_j 求和后得到因子 $(2\pi)^d$，它抵消了上述测度中的前置因子。 n,

$$\text{LHS} = \Gamma(d) \int_0^1 dr_1 \, (r_1)^t \int_0^\infty \delta\left((1 - r_1) - \sum_{j=2}^{d} r_j\right) \prod_{j=2}^{d} dr_j \tag{81}$$

$$= \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(d-1)} \int_0^1 dr_1 \, (r_1)^t \, (1 - r_1)^{d-2}. \tag{82}$$

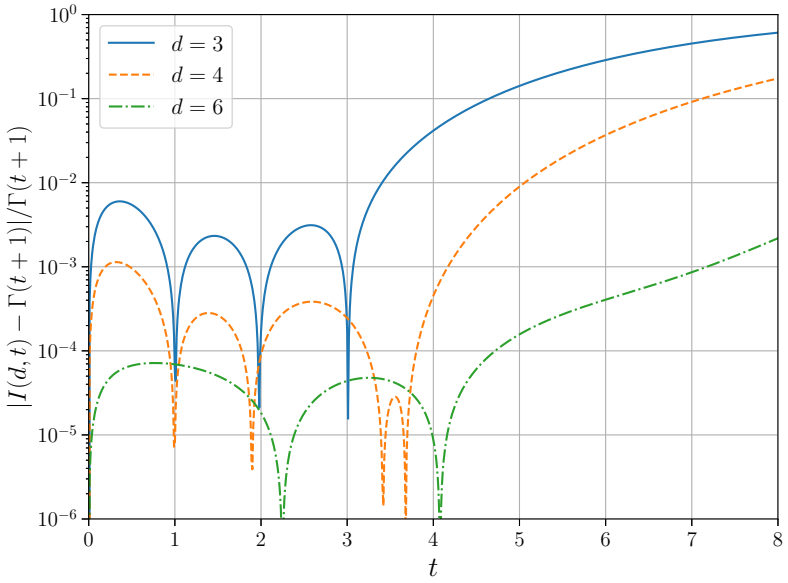


图2： 对Haar积分 $I(d,t) := \int_{\mathcal{U}(d)} |\mathrm{tr}(U)|^{2t} d\mu_U$ 与伽马函数 $\Gamma(t+1)$之间相对误差的数值求值，针对 $d = 3, 4, 6$。该结果通过对 10^8 个Haar随机酉算子样本（使用scipy）取迹并数值估计该积分而得到。这些曲线看似随机的形态很可能由有限采样效应解释，但其总体特征相当清晰：我们看到在 $t \leq d$区间内，近似相当准确（所有情形下相对误差均小于1%）。同时注意到误差通常随 d增大而减小，这与如下预期一致：在渐近极限下， I 确实收敛到 $\Gamma(t+1)$。我们观察到误差并不随样本数趋于零，这表明，如正文所述，即使对于 $t \leq d$，积分值也并不恰好等于 $\Gamma(t+1)$。

现在只需回顾一下贝塔函数，

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 r^{\alpha-1}(1-r)^{\beta-1} dr = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{83}$$

Ther因此，上面的积分等于 $B(t+1,\ d-1)$，用 Γ 函数表示为：

$$B(t+1, d-1) = \frac{\Gamma(t+1)\Gamma(d-1)}{\Gamma(t+d)}. \tag{84}$$

加上上面的前因子后（约去 $\Gamma(d-1)$），我们得到：

$$\mathrm{LHS} = \frac{\Gamma(t+1)\Gamma(d)}{\Gamma(t+d)}. \tag{85}$$

因此，我们证明了对于任意 $t > 0$，Haar 随机态构成分数阶 t-设计。回想一下，伽马函数的定义要求 $\Re\mathfrak{e}(z) > 0$，这意味着 $t \in \mathbb{R}_{>0}$。这一结果可以从量子态推广到酉算子，如下所示。

定义5 （分数阶酉设计）。 酉群的有限子群 $\{U_i\}_i$ 构成分数阶 t-设计，当且仅当广义框架势满足

$$\frac{1}{N^2} \sum_{j,k=1}^{N} \left|\mathrm{tr}(U_j^\dagger U_k)\right|^{2t} = \int |\mathrm{tr}(U)|^{2t} d\mu_U. \tag{86}$$

若 $d = 2$，则有

$$\int |\mathrm{tr}(U)|^{2t} d\mu_U = \frac{\Gamma(2t+1)}{\Gamma(t+1)\Gamma(t+2)}. \tag{87}$$

为了对 $d > 2$ 进行近似，我们还注意到

$$\lim_{d\to\infty} \int |\mathrm{tr}(U)|^{2t} d\mu_U = \Gamma(t+1). \tag{88}$$

对于 $d = 2$ 情形的证明，我们首先注意到，Haar 随机酉算子的本征值间距统计由以下密度给出$p(\Delta) = \frac{1}{\pi}(1 - \cos\Delta)(1 - \Delta/2\pi)$，其中 $\Delta \in [0, 2\pi)$ 表示两个本征值之间的角度差（这一点在附录 A1 中证明）。因此，所关注的积分可写为：

$$\int |\mathrm{tr}(U)|^{2t} d\mu_U = \int_0^{2\pi} |1 + e^{i\Delta}|^{2t} p(\Delta) d\Delta = \frac{2^t}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos\Delta)^t (1 - \cos\Delta) \left(1 - \frac{\Delta}{2\pi}\right) d\Delta. \tag{89}$$

在附录 A2 中，我们证明可以对其求值，从而得到所需结果，该结果对 $\mathrm{Re}(t) > -1/2$成立。

当 $d > 2$ 时，情况更为复杂，详见下文；我们没有式（86）中积分求值的一般形式。不过，可以对极限情形求值。注意，在渐近极限下，$\mathrm{tr}(U)$ 服从均值为零、方差为 $1/2$ 的高斯分布，实轴和虚轴上的协方差为零 [96]:

$$\int |\mathrm{tr}(U)|^{2t} d\mu_U = \frac{1}{\pi} \int |z|^{2t} e^{-|z|^2} dz = 2 \int_0^\infty r^{2t} e^{-r^2} r dr = \int_0^\infty q^t e^{-q} dq = \Gamma(t + 1). \tag{90}$$

数值计算中，我们观察到 $\Gamma(t + 1)$ 在 $t \leq d$ 范围内可以合理近似该积分（见图 2），因此下文的数值计算中，我们用这一数值代替精确表达式。

这里我们要对 $d > 2$ 情形作一重要说明。在整数情形下，框架势等于 $\{1, \ldots, t\}$ 的置换数，其中递增子序列的长度不超过 d [37]。当 $t \leq d$时，这显然是 $t!$ ；而当 $t > d$时，则严格小于 $t!$ 。对于非整数 t的推广，一种直观猜测或许是：当 $d \geq t$时，广义框架势取值为 $\Gamma(t + 1)$。然而，根据复分析的恒等定理，若两个全纯函数在某个子区域上相等，则它们在整个解析区域内都相等（此处感兴趣的区域为 $\mathrm{Re}(t) > 0$）。这将意味着对所有 $t > 0$，Haar积分都等于 $\Gamma(t + 1)$，这与 $t > d$时的整数情形矛盾。因此，这些函数不可能相等。我们认为，正确的推广应直接基于 $\{1, \ldots, t\}$ 的置换定义，并使用 t的所有整数值；对于 $t > d$而言，这极具挑战性（例如，关于 $d = 3$情形，见 [97]第281页）。不过，如上所述，根据数值观察， $\Gamma(t + 1)$对 $t \leq d$ 的近似相当准确，而且 d越大，近似效果越好。

A. 分数阶 t设计的数值计算/讨论

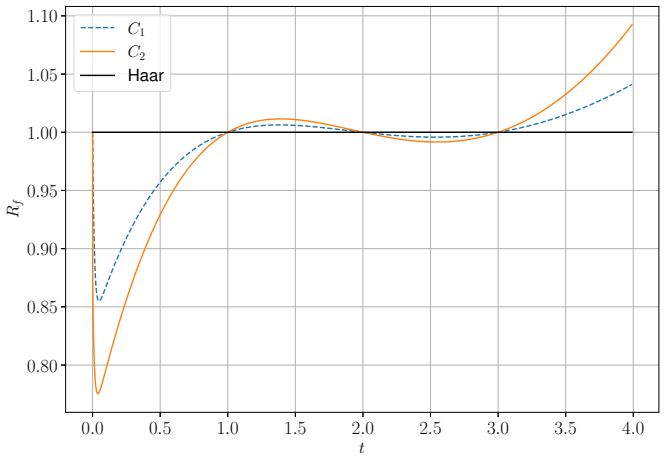


图 3： 单量子比特和双量子比特 Clifford 群的分数帧势比。

虽然我们尚未找到非整数 t设计在群论上的操作性含义，但正如数值计算所显示的，它们确实存在。首先，为了获得一些直观认识，我们在图 3 中绘制了框架势比 R_f，其定义为非整数值 t处的框架势除以式（86）中的哈尔随机结果，所考虑的是作用于 1 个和 2 个量子比特的 Clifford 群。我们看到，它仅在 $t = 0$、1、2、3 时才是整数设计。从整数推广到实数也能为我们提供更多关于群的信息。请注意图 3 中，当 $t = 2$时，框架势的梯度为负。由于我们知道对于整数 $R_f \geq 1$，由连续性可知，Clifford 群必定在某个（可能非整数的） $t > 2$下构成设计。

另一个值得关注的群是 $SL(2, \mathbb{F}_5)$ 的量子比特表示，它是一个 5-设计。 $SL(2, \mathbb{F}_5)$ 是行列式为 1 的 $\mathbb{F}_5$ 上的酉 2×2 矩阵群。该群与 二元二十面体群同构，其生成元为 $\langle r, s, t\rangle$，其中

$r^2 = s^3 = t^5 = rst = -I$，其阶为 120。可以直接根据这些约束轻松构造一个酉二维表示。例如，以下是酉生成元：

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ix & -y \\ y & -ix \end{pmatrix}, \quad s = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ix\,\omega^{-1} & -y\,\omega \\ y\,\omega^{-1} & -ix\,\omega \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \tag{91}$$

其中 $x = \sqrt{1 + 1/\sqrt{5}}$，$y = \sqrt{1 - 1/\sqrt{5}}$以及 $\omega = e^{2\pi i/10}$。我们在图4中绘制了该表示的广义框架势。该表示也曾在[3, 98]中被描述；然而，我们认为各参考文献所给出的生成元存在排版错误，我们已在附录A3中予以更正。

我们注意到，$G = SL(2, \mathbb{F}_5)$实际上具有两个不等价二维不可约表示。我们将证明，这两个不等价不可约表示都可以用上述生成元来描述。设 $\rho_1 : G \to U(2)$为上文构造的 G 的不可约表示。我们注意到，对 G的任意自同构 ϕ，$\rho_1 \circ \phi : G \to U(2)$也是 G 的一个具有相同像的二维不可约表示。若 ϕ 是 G的外自同构，即它不保持共轭类，则 $\rho_1 \circ \phi$ 可能与 ρ_1不等价。我们构造这样一个外自同构：对于 $A \in SL(2, \mathbb{F}_5)$（现在按字面将其视为 $\mathbb{F}_5$上的 2×2 矩阵，而非任何表示中的矩阵），考虑

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \phi(A) = MAM^{-1}. \tag{92}$$

自同构 ϕ 交换共轭类

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{93}$$

同时保持其他共轭类不变，因此它是一个外自同构。可以使用 GAP [99] 验证，ρ_1 的特征标在 G的 9 个共轭类上取 9 个不同的值。由于 ϕ 非平凡地置换共轭类，不可约表示 ρ_1 和$\rho_2 = \rho_1 \circ \phi$ 的特征标必然不同。因此，ρ_1 和 ρ_2 是不等价的二维不可约表示。

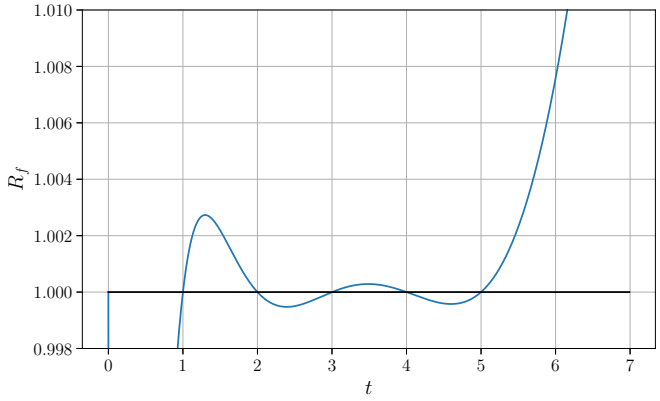


图 4： $SL(2, \mathbb{F}_5)$ 的量子比特（二维）表示的框架势比，该表示构成一个 5-设计。

1. 循环群框架势

相较之下，在图 5 中，我们绘制了小阶循环群 C_n的框架势比，并发现它们相对于 $U(n)$构成一个 $t < 0.5$设计。这里，循环群由广义泡利 X 矩阵（移位矩阵）生成，这些矩阵将基元素 $|i\rangle \to |(i + s)$按模 $d\rangle$置换。容易验证，该群的分数阶框架势为：$F(t, d) = d^{2t-1}$。注意到 $\Gamma(1/2 + 1) = \sqrt{\pi}/2 < 1 = F(1/2, d)$，使得 $\Gamma(t^* + 1) = F(t^*, d)$的值 t^* 随着 $d \to \infty$累积至 $1/2$。

理解这一结果的另一种方式是，循环群的生成元与量子比特组泡利算符 Z_d 在酉意义下等价。由此生成的群是一个阿贝尔群，其元素为 $\langle \mathbb{I}, Z_d, Z_d^2, \cdots, Z_d^{d-1} \rangle$（模去相位）。很容易看出，唯一具有非零特征标的元素是单位元，即 $\chi(\mathbb{I}) = d$，$\chi(g) = 0\ \forall g \neq \mathbb{I}$。特征标版本的

分数 t-设计测试随后给出，

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\chi(g)|^{2t} = d^{2t-1}, \tag{94}$$

在任意维度 $d \in \mathbb{N}$和 $t \in \mathbb{R}$。

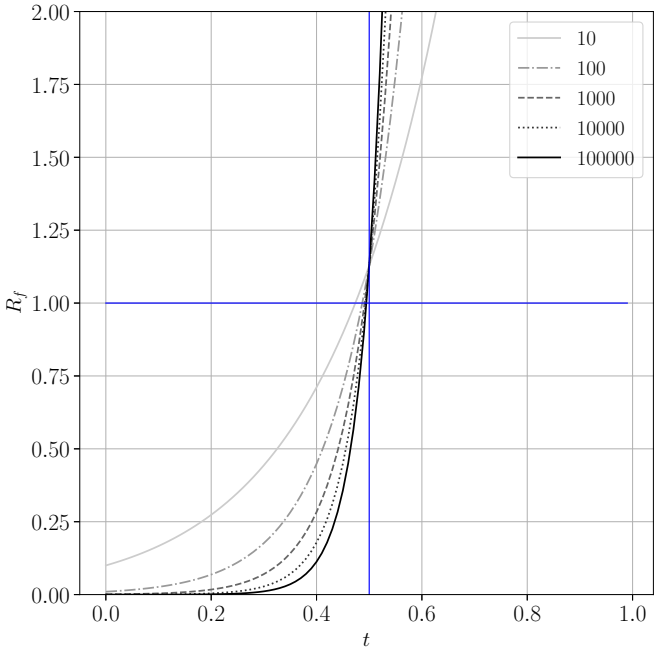


图 5： 循环群的分数帧势比，阶数为 d（见图例），相对于 $U(d)$。可以计算 $R_f(d,\ t) = d^{2t-1}/\Gamma(t+1)$。对于 $d \to \infty$，收敛点为 $t^* \to 1/2$（见正文）。

VI. 结语

A. 应用

量子多能级系统的经典影子层析。— 学习量子系统是一个计算上颇具挑战的问题。在最坏情况下，这需要指数级资源，例如通过量子态层析和过程层析来实现。然而，在许多物理情境中，人们感兴趣的并非学习完整的量子态，而是该量子态在一组可观测量（k-局域算子、序参量、保真度等）上的期望值。这促使人们提出了经典影子层析的概念[13, 100]。其核心思想是，如果我们只想学习一类可观测量，就可以绕过完整层析的指数级瓶颈。具体而言，两种影子层析协议尤为有用：(i) 泡利影子和 (ii) 克利福德影子。之所以这样命名，是因为它们分别需要对泡利群和 Clifford 酉算子群取平均。泡利影子适用于预测低权重可观测量（支撑范围有限的算子），而克利福德影子则适用于预测低秩可观测量，例如与某个纯量子态的保真度。在多量子比特情形下，这些协议有充分的理论依据，因为泡利群和 Clifford 群分别构成 1-设计和 3-设计。然而，对于量子多能级系统情形，我们需要重新审视这一点。

请注意，如果我们想对量子位进行经典影子层析，那么只需要态设计，我们可以利用本文工作中引入的加权 2-设计和 3-设计。这里的关键观察是，加权复射影 2-设计构成信息完备POVM，并且是经典影子层析的最优方案 [101]。量子位系统的快照态如何实现高效经典模拟，仍是一个悬而未决的问题。对于素数维量子多能级系统，这需要利用魔性（参见文献 [102, 103]，中的一些近期结果）；或者采用随机电路方法，参见 [104] 中的讨论。

量子多能级系统中的信息扰乱。— 强相互作用量子系统能够通过系统的非局域自由度迅速传播局部信息。这种性质被称为信息扰乱，通常通过时序外关联函数（OTOC） [14, 105–115]来量化。量化一个酉算子系综混沌性程度的常见方法是

询问它能否模拟哈尔随机酉算子的四点 OTOC。事实证明，酉 2-设计足以通过 OTOC 伪装成哈尔随机酉算子。然而，在量子多能级系统的情形下，由于不存在酉 2-群，无法伪装出这种动力学。当然，使用随机量子电路，只要电路深度足够，就能生成任意阶的近似酉设计。不过，我们在此感兴趣的是研究精确群设计。

对于量子比特，OTOC 无法区分例如由 Clifford 群生成的酉 2-设计与真正的 Haar 随机酉算子。这启发人们利用 OTOC 的方差来检测魔性。方差对酉 4-设计敏感，而酉 4-设计必然需要魔性。事实上，在量子比特系统中，任何构成酉 4-设计的酉算子群都必须是通用的。然而，在非素数幂维系统中，OTOC 已经能够区分 Haar 随机酉算子与 2-设计。了解 OTOC 在探测酉群子群的设计结构方面有何用途，将会很有意义。

量子多能级系统的随机基准测试。— 如果维数不是素数幂，标准的 Clifford 随机基准测试方案就无法再生成酉 2-设计。因此，随机基准测试衰减信号将是多个指数函数的线性组合，从可靠拟合数据的角度来看，这并不理想。不过，特征标随机基准测试框架 [89] 和滤波随机基准测试 [10] 仍可用于对酉算子群进行基准测试。特别是，参考文献 [10] 的结果表明，对于滤波随机基准测试，如果用于随机基准测试数据后处理的测量正算子值测度构成复射影 3-设计，那么整个随机基准测试方法（收集实验数据并对其进行后处理以提取指数函数）的样本复杂度可以通过与底层希尔伯特空间维数无关的样本数量实现。该结果适用于任意基准测试群 G，且这是一个充分条件（但非必要条件）。因此，即使对于非素数幂维量子多能级系统的随机基准测试，我们的加权量子态 3-设计也能保证随机基准实验具有可扩展性，这对其适用性至关重要。

此外，鉴于群设计在量子多能级系统方面存在诸多限制，从这一角度来看，参考文献 [10] 中介绍的基于随机电路的设计或许最为有用。将其与我们所介绍的 Clifford 特征随机基准测试进行比较，将会很有意思。

面向量子多能级系统的量子机器学习—— 量子机器学习中的一个重要结果指出，如果训练中使用的参数化量子电路是从酉 2-设计中采样得到的，那么代价函数必然会遭遇贫瘠高原[116]。这是由集中测度思想的简单应用，以及以下观察共同得出的：代价函数的方差是二次多项式，因此酉 2-设计足以模拟这种行为。然而，对于维数不是素数幂的量子多能级系统，Clifford 群并不构成酉 2-设计。我们能否据此对量子电路的学习能力和可训练性作出一些判断？

B. 开放问题

这里有许多尚未解决的问题，我们列举如下，供读者参考。

1. 我们能否以高效的方式将加权态 t-设计构造推广到多量子比特系统？ 2. 我们能否将加权酉设计用于量子纠错，例如使用源自扭曲酉 t-设计 [40] 的构造？一般而言，寻找扭曲酉 t-群构造与加权 t-设计之间的关系将会很有价值。3. 我们能否形式化分数设计与分数阶微积分之间的联系，例如参见文献 [94]？ 4. 我们能否使用投影技巧来定义加权酉设计（而不是态设计）？ 直接采用这种方法会得到生成对称投影算符的等距映射。由于等距映射具有量子信道完备化，也许可以借此建立与量子信道设计的联系？ 5. 如果带有 $1 < t < 2$ 的分数阶 t-设计相比态 2-设计具有任何优势（例如在采样方面），那将会很有意思。6. 我们能否从自旋系统的角度形式化最小态 2-设计的元素，即 $SU(2)$ 协变旋转和自旋压缩？ 这些是否足以生成态 2-设计，还是必须引入高阶自旋相互作用？

C. 讨论

过去二十年来，酉设计已成为量子信息论中用途最广泛的工具之一。它们在许多任务中发挥着关键作用，例如噪声扭转，使我们能够轻松估算量子纠错阈值；随机基准测试，使我们能够以低成本、可扩展的方式估算平均门保真度；以及经典影子层析，使我们能够

仅通过少量测量来了解规模呈指数级增长的量子态的许多物理性质。在完全不同的背景下，它们也可用作信息扰乱的极简模型，以及证明量子计算与经典计算之间在预言机复杂度上存在指数级分离。相关研究很大一部分致力于高效构造近似酉设计。与此不同，我们在此选择聚焦于单个量子比特系统中的精确酉设计，以凸显超越量子比特图景时面临的直接挑战。

为了克服素数幂维数之外缺乏酉 t-群的问题，我们提出了一种系统方法来构造加权量子位 2-设计和 3-设计。这使我们能够以极低甚至零开销，将标准的基于量子比特的原语推广到量子位架构中。这也凸显了量子位设备带来的“额外空间”并非没有自身的挑战。随着高自旋原子核、腔量子电动力学系统以及基于光子学的平台等量子位平台不断发展，这一问题正逢其时。

我们的工作还凸显了自旋量子位中的态 2-设计必须具备自旋压缩，这与多量子比特态 2-设计必须具备纠缠相类似。这进一步加强了高维自旋物理与连续变量光学系统之间的联系。具体而言，众所周知，（无限维）光学相干态无法构成 2-设计；我们则证明，自旋相干态也同样如此。然而，这两种情形失败的原因截然不同：对于自旋相干态而言，这并非源于“质心消失”或积分发散，而仅仅是由于 $SU(2)$ 的表示论。自旋相干态与光学相干态之间的类比，对量子纠错尤为有用，例如推动了自旋-GKP 码的发展；我们相信，我们的工作将进一步拓展这一方向。具体而言，证明自旋 GKP 码字构成态 2-设计（正如光学 GKP 态一样），为这一框架增添了新的成果。

我们还证明了生成 t-设计所需电路长度的界限，适用于自旋量子多能级系统和腔量子电动力学系统；我们使用了 SNAP 门和位移操作的随机序列，这些是这两种架构中的原生门集。最后，我们引入了“分数阶 t-设计”的概念，其灵感源自分数阶微积分，为量化 ϵ-近似设计提供了另一种方式。我们的一个关键贡献是提出了一种克利福德特征随机基准测试方案，可用于任意量子比特维数。这是少数能够在非素数幂维数的量子多能级系统中发挥作用的量子信息原语方案之一。未来，利用这些思路启发量子多能级系统的新型量子纠错与实际应用，并揭示其丰富的数学结构，将会十分有趣。

致谢

N.A. 是 KBR 的雇员，在 NASA 艾姆斯研究中心的主合同编号 80ARC020D0010 项下工作。J.M. 感谢 NASA 学术任务服务通过合同编号 NNA16BD14C 提供的支持。本文工作部分得到美国能源部科学办公室国家量子信息科学研究中心超导量子材料与系统中心（SQMS）的支持，合同编号 DE-AC02-07CH11359，支持依据为 NASA-DOE 跨机构协议 SAA2-403602。A.M. 感谢澳大利亚研究理事会桂冠学者奖学金（项目编号 FL240100181）提供的支持。作者感谢 NASA 与 CQC2T 之间的合作协议。美国政府保留本作品的非独占、已付清、不可撤销、全球范围的出版或复制已发表形式的许可，或允许他人出于美国政府目的进行上述行为；出版商接受本文发表，即承认美国政府保留此项许可。

---

[1] B. Hayes, 《计算科学：随机性作为一种资源》, 《美国科学家》89，300（2001）。[2] W. Kretschmer, 《量子伪随机性与经典复杂性》（Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik，2021），arXiv:2103.09320。[3] D. Gross、K. Audenaert 和 J. Eisert, 《均匀分布的酉算子：关于酉设计的结构》, 《数学物理学杂志》48，052104（2007）。[4] G. Kuperberg, 《由阿基米德帽盒定理得到的数值求积》, 《SIAM 数值分析杂志》44，908–935（2006），math/0405366。[5] J. Emerson、R. Alicki 和 K. ˙Zyczkowski, 《利用随机酉算子实现可扩展的噪声估计》, 《B辑光学杂志：量子与半经典光学》7，S347–S352（2005）。[6] J. Emerson、M. Silva、O. Moussa、C. Ryan、M. Laforest、J. Baugh、D. G. Cory 和 R. Laflamme, 《含噪量子过程的对称化表征》, 《科学》317，1893–1896（2007）。[7] E. Knill、D. Leibfried、R. Reichle、J. Britton、R. B. Blakestad、J. D. Jost、C. Langer、R. Ozeri、S. Seidelin 和 D. J. Wineland, 《量子门的随机基准测试》, 《物理评论A》77，10.1103/physreva.77.012307（2008）。[8] C. Dankert、R. Cleve、J. Emerson 和 E. Livine, 《精确与近似酉 2-设计及其在保真度估计中的应用》, 《物理评论A》80，10.1103/physreva.80.012304（2009）。[9] E. Magesan、J. M. Gambetta 和 J. Emerson, 《量子过程的可扩展且稳健的随机基准测试》, 《物理评论快报》106，10.1103/physrevlett.106.180504（2011）。

[10] J. Helsen、I. Roth、E. Onorati、A. Werner 和 J. Eisert，《随机基准测试的一般框架》，《PRX量子》3，10 1103 3 020357 2022。/prxquantum. 。( )。[11] A. J. Scott，《利用酉 2-设计优化量子过程层析》，《物理学杂志 A：数学与理论》41，055308 2008（），出版商：IOP 出版社。[12] A. Roy 和 A. J. Scott，《酉设计与码》，《设计、编码与密码学》53，13（2009）。[13] H.-Y. Huang、R. Kueng 和 J. Preskill，《仅凭极少量测量预测量子系统的诸多性质》，《自然·物理》16，1050（2020）。[14] D. A. Roberts 和 B. Yoshida，《以设计构建混沌与复杂性》，《高能物理学杂志》2017，10.1007/JHEP04(2017)121（2017）。[15] L. Leone、S. F. E. Oliviero 和 A. Hamma，《等谱扭转平均与量子混沌》，arXiv:2011。06011 [quant-ph]（2020），arXiv：2011.06011。[16] O. Szehr、F. Dupuis、M. Tomamichel 和 R. Renner，《利用酉近似二阶设计实现解耦》，《新物理学杂志》15，053022 2013（）。[17] F. G. S. L. Brandao 和 M. Horodecki，《指数级量子加速具有普遍性》（2013），arXiv:1010。3654 [quant-ph] 版本：2。[18] A. A. Mele，《量子信息中的哈尔测度工具导论：初学者教程》，《Quantum》8，1340（2024）。[19] T. Metger、A. Poremba、M. Sinha 和 H. Yuen，《线性深度 t-设计与伪随机酉算子的简单构造》（2024），arXiv:2404。12647 [quant-ph]。[20] Z. Webb，《Clifford 群构成酉 3-设计》（2016），编号：arXiv:1510.02769 arXiv:1510。02769 [quant-ph]。[21] J. Watrous，《量子信息理论》，第 1 版（剑桥大学出版社，2018）。[22] Y. Nakata、C. Hirche、M. Koashi 和 A. Winter，《利用近似时间无关的哈密顿动力学实现高效量子伪随机性》，《物理评论 X》7，021006（2017），出版商：美国物理学会。[23] F. G. S. L. Brandão、A. W. Harrow 和 M. Horodecki，《局域随机量子电路是近似多项式设计》，《数学物理通讯》346，397（2016）。[24] M. Heinrich，《稳定子技术及其在量子器件模拟与认证中的应用》，博士论文，科隆大学（2021）。[25] R. Blume-Kohout 和 P. S. Turner，《高斯 2-设计为何不存在》，《数学物理通讯》326，755 2014（）。[26] J. T. Iosue、K. Sharma、M. J. Gullans 和 V. V. Albert，《连续变量量子态设计：理论与应用》，《物理评论 X》14，011013（2024），出版商：美国物理学会。[27] E. Bannai、G. Navarro、N. Rizo 和 P. H. Tiep，《酉 t-群》（2018），arXiv:1810。02507 [math]。[28] M. West、A. A. Mele、M. Larocca 和 M. Cerezo，《随机辛态系综与随机酉态系综无法区分》，arXiv 预印本 arXiv:2409.16500（2024）。[29] T. Schuster、J. Haferkamp 和 H.-Y. Huang，《极低深度下的随机酉算子》（2024），arXiv:2407。07754 [quant-ph]。[30] N. Hunter-Jones，《随机量子电路中统计力学产生的酉设计》（2019），arXiv:1905。12053 [cond-mat、physics:hep-th、physics:quant-ph]。[31] A. Roy 和 A. J. Scott，《由基构造加权复射影 2-设计：通过正交测量实现最优态确定》，《数学物理学杂志》48，072110（2007）。[32] A. Klappenecker 和 M. Roetteler，《互为无偏基是复射影 2-设计》（2005），arXiv:quant-ph/0502031。[33] J. Haferkamp、F. Montealegre-Mora、M. Heinrich、J. Eisert、D. Gross 和 I. Roth，《只需与系统规模无关数量的非 Clifford 门即可高效构造酉设计》，《数学物理通讯》397，995（2023）。[34] M. P. Fisher、V. Khemani、A. Nahum 和 S. Vijay，《随机量子电路》，《凝聚态物理年度评论》14，335（2023），_电子版：https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031720-030658。[35] I. Fernández de Fuentes、T. Botzem、M. A. I. Johnson、A. Vaartjes、S. Asaad、V. Mourik、F. E. Hudson、K. M. Itoh、B. C. Johnson、A. M. Jakob、J. C. McCallum、D. N. Jamieson、A. S. Dzurak 和 A. Morello，《利用电场和磁场探索高自旋施主量子多能级系统的 16 维希尔伯特空间》，《自然·通讯》15，10.1038/s41467-024-45368-y（2024）。[36] Y. Nakata 和 M. Murao，《对角酉 2-设计及其量子电路实现》，《国际量子信息杂志》11，1350062（2013）。[37] H. Zhu、R. Kueng、M. Grassl 和 D. Gross，《Clifford 群未能构成酉 4 2016 1609 08172 -设[ ]计，但偏差有限》（），arXiv：。quant-ph。[38] A. A. Mele，《量子信息中的哈尔测度工具导论：初学者教程》（2023），arXiv:2307。08956 [quant-ph]。[39] J. Saied、J. Marshall、N. Anand、S. Grabbe 和 E. G. Rieffel，《推进量子网络：适用于理想与含噪光子系统的一些工具和协议》，载于《量子计算、通信与模拟 IV》，P. R. Hemmer 和 A. L. Migdall 编（SPIE，2024），第 121 页，arXiv:2403.02515。[40] E. Kubischta 和 I. Teixeira，《由扭曲酉 t-群构造量子码》，《物理评论快报》133，030602（2024）。[41] A. Kaposi、Z. Kolarovszki、A. Solymos 和 Z. Zimborás，《广义群设计：突破 4-设计障碍并在任意维度构造新型酉 2-设计》（2024）。[42] Y. Wang、Z. Hu、B. C. Sanders 和 S. Kais，《量子多能级系统与高维量子计算》，《物理学前沿》8，589504（2020）。[43] M. A. Nielsen、M. J. Bremner、J. L. Dodd、A. M. Childs 和 C. M. Dawson，《对具有有限维态空间的量子系统进行哈密顿动力学的通用模拟》，《物理评论A》66，022317（2002）。[44] M. A. Graydon、J. Skanes-Norman 和 J. J. Wallman，《Clifford 群并非总是 2-设计》（2021），arXiv:2108。04200 [quant-ph]。[45] M. Jafarzadeh、Y.-D. Wu、Y. R. Sanders 和 B. C. Sanders，《针对量子多能级系统 Clifford 门的随机基准测试》，《新物理学杂志》22，063014（2020）。[46] A. Goswami、M. Mhalla 和 V. Savin，《量子多能级系统信道的量子极化》，载于《2021 年 IEEE 信息论国际研讨会（ISIT）》（IEEE，2021），第 1487–1492 页。[47] W. K. Wootters 和 B. D. Fields，《利用互为无偏测量实现最优态确定》，《物理学年鉴》191，363（1989）。

[48] R. Kueng 和 D. Gross, 《量子比特稳定子态是复射影 3-设计》（2015）, arXiv:1510.02767 [quant-ph]。[49] D. Gross, 《有限维量子系统的 Hudson 定理》, 《数学物理学杂志》47，122107（2006）。[50] H. J. Garcia、I. L. Markov 和 A. W. Cross, 《用于稳定子态的高效内积算法》（2012）。[51] A. Z. Goldberg、A. B. Klimov、M. Grassl、G. Leuchs 和 L. L. Sánchez-Soto, 《极值量子态》, AVS Quantum Science 2，044701（2020）。[52] X. Yu、B. Wilhelm、D. Holmes、A. Vaartjes、D. Schwienbacher、M. Nurizzo、A. Kringhøj、M. R. v. Blankenstein、A. M. Jakob、P. Gupta、F. E. Hudson、K. M. Itoh、R. J. Murray、R. Blume-Kohout、T. D. Ladd、N. Anand、A. S. Dzurak、B. C. Sanders、D. N. Jamieson 和 A. Morello, 《硅中核自旋量子位的薛定谔猫态》, 《自然·物理》21，362–367（2025）, arXiv:2405.15494。[53] V. Mourik、S. Asaad、H. Firgau、J. J. Pla、C. Holmes、G. J. Milburn、J. C. McCallum 和 A. Morello, 《利用单核自旋探索量子混沌》, Physical Review E 98，042206（2018）。[54] E. O. Kiktenko、A. S. Nikolaeva 和 A. K. Fedorov, 《专题综述：用于分解多量子比特门和实现量子算法的量子多能级系统》, Reviews of Modern Physics 97，021003（2025）。[55] M. S. Blok、V. V. Ramasesh、T. Schuster、K. O'Brien、J. M. Kreikebaum、D. Dahlen、A. Morvan、B. Yoshida、N. Y. Yao 和 I. Siddiqi, 《超导量子三能级系统处理器上的量子信息扰乱》, Phys. Rev. X 11，021010（2021）。[56] T. Chalopin、C. Bouazza、A. Evrard、V. Makhalov、D. Dreon、J. Dalibard、L. A. Sidorenkov 和 S. Nascimbene, 《利用高磁性原子的非经典自旋态实现量子增强传感》, 《自然·通讯》9，10.1038/s41467-018-07433-1（2018）。[57] P. Hrmo、B. Wilhelm、L. Gerster、M. W. van Mourik、M. Huber、R. Blatt、P. Schindler、T. Monz 和 M. Ringbauer, 《囚禁离子量子处理器中的原生量子位纠缠》, 《自然·通讯》14，10.1038/s41467-023-37375-2（2023）。[58] M. Malik、M. Erhard、M. Huber、M. Krenn、R. Fickler 和 A. Zeilinger, 《高维多光子纠缠》, Nature Photonics 10，248（2016）。[59] J. Wang、S. Paesani、Y. Ding、R. Santagati、P. Skrzypczyk、A. Salavrakos、J. Tura、R. Augusiak、L. Manˇcinska、D. Bacco 等, 《利用大规模集成光学实现多维量子纠缠》, 《科学》360，285（2018）。[60] A. Martin、T. Guerreiro、A. Tiranov、S. Designolle、F. Fröwis、N. Brunner、M. Huber 和 N. Gisin, 《量化光子的高维纠缠》, Physical review letters 118，110501（2017）。[61] M. Kues、C. Reimer、P. Roztocki、L. R. Cortés、S. Sciara、B. Wetzel、Y. Zhang、A. Cino、S. T. Chu、B. E. Little 等, 《高维纠缠量子态的芯片上生成及其相干控制》, Nature 546，622（2017）。[62] S. Asaad、V. Mourik、B. Jöcker、M. A. Johnson、A. D. Baczewski、H. R. Firgau、M. T. M ̨adzik、V. Schmitt、J. J. Pla、F. E. Hudson 等, 《硅中单个高自旋原子核的相干电控》, Nature 579，205（2020）。[63] Y. Fu、W. Liu、X. Ye、Y. Wang、C. Zhang、C.-K. Duan、X. Rong 和 J. Du, 《双量子三能级自旋系统中量子关联的实验研究》, Physical Review Letters 129，100501（2022）。[64] V. Soltamov、C. Kasper、A. Poshakinskiy、A. Anisimov、E. Mokhov、A. Sperlich、S. Tarasenko、P. Baranov、G. Astakhov 和 V. Dyakonov, 《室温下碳化硅中自旋量子位模式的激发与相干控制》, Nature communications 10，1678（2019）。[65] S. Thiele、F. Balestro、R. Ballou、S. Klyatskaya、M. Ruben 和 W. Wernsdorfer, 《单分子磁体中的电驱动核磁共振》, Science 344，1135（2014）。[66] R. Bianchetti、S. Filipp、M. Baur、J. M. Fink、C. Lang、L. Steffen、M. Boissonneault、A. Blais 和 A. Wallraff, 《三能级超导人工原子的控制与层析》, Physical review letters 105，223601（2010）。[67]《超导量子三能级系统处理器上的量子信息扰乱》, Physical Review X 11，021010（2021）。[68] E. Champion、Z. Wang、R. Parker 和 M. Blok, 《transmon量子位中编码的自旋7/2系统的多频控制与测量》, arXiv预印本 arXiv:2405.15857（2024）。[69] S. L. Braunstein 和 P. Van Loock, 《连续变量量子信息》, Reviews of Modern Physics 77，513（2005）, tex.ids= braunstein_quantum_2005。[70] S. Roy、A. Senanian、C. S. Wang、O. C. Wetherbee、L. Zhang、B. Cole、C. Larson、E. Yelton、K. Arora、P. L. McMahon 等, 《微波振荡器中的合成高角动量自旋动力学》, arXiv预印本 arXiv:2405.15695（2024）。[71] B. L. Brock、S. Singh、A. Eickbusch、V. V. Sivak、A. Z. Ding、L. Frunzio、S. M. Girvin 和 M. H. Devoret, 《超越盈亏平衡点的量子多能级系统量子纠错》, Nature 641，612 （ 2025 ）, 出版方：Nature Publishing Group。[72] D. Gottesman、A. Kitaev 和 J. Preskill, 《在振子中编码一个量子比特》, Physical Review A 64，012310（2001）。[73] B. E. Anderson、H. Sosa-Martinez、C. A. Riofrío、I. H. Deutsch 和 P. S. Jessen, 《高维量子系统中精确而稳健的幺正变换》, Phys. Rev. Lett. 114，240401（2015）。[74] X. Yu、B. Wilhelm、D. Holmes、A. Vaartjes、D. Schwienbacher、M. Nurizzo、A. Kringhøj、M. R. v. Blankenstein、A. M. Jakob、P. Gupta、F. E. Hudson、K. M. Itoh、R. J. Murray、R. Blume-Kohout、T. D. Ladd、N. Anand、A. S. Dzurak、B. C. Sanders、D. N. Jamieson 和 A. Morello, 《硅中核自旋量子位的薛定谔猫态》, Nature Physics 21，362（2025）, 出版方：Nature Publishing Group。[75] A. Vaartjes, 《通过核自旋的均匀进动认证其量子性》, 开放获取（2025）。[76] S. Krastanov、V. V. Albert、C. Shen、C.-L. Zou、R. W. Heeres、B. Vlastakis、R. J. Schoelkopf 和 L. Jiang, 《色散耦合至量子比特的振子的通用控制》, Physical Review A 92，040303（2015）。[77] N. Katz, 《Larsen的替代、矩与 Lefschetz 铅笔的单值群》, 《自守形式、几何与数论论文集》, 521–560（2004）。[78] J. Conrad、J. T. Iosue、A. G. Burchards 和 V. V. Albert, 《连续变量设计及基于设计的随机晶格影子层析》, Phys. Rev. Lett. 135，060802（2025）。[79] T. Holstein 和 H. Primakoff, 《铁磁体本征畴磁化的场依赖性》, Physical Review 58，1098–1113（1940）。[80] R. A. Low, 《量子计算中的伪随机性与学习》（2010）, arXiv:1006.5227 [quant-ph]。[81] J. Job, 《将 SU(N)操作高效、直接地编译为 SNAP 与位移门》（2023）, arXiv:2307.11900 [quant-ph]。

[82] R. W. Heeres、B. Vlastakis、E. Holland、S. Krastanov、V. V. Albert、L. Frunzio、L. Jiang 和 R. J. Schoelkopf，《利用光子数选择性相位门操控腔态》，Physical Review Letters 115，137002（2015）。[83] A. Eickbusch、V. Sivak、A. Z. Ding、S. S. Elder、S. R. Jha、J. Venkatraman、B. Royer、S. M. Girvin、R. J. Schoelkopf 和 M. H. Devoret，《弱色散耦合至量子比特的振子的快速通用控制》，Nature Physics 18，1464–1469（2022）。[84] T. Kim、T. Roy、X. You、A. C. Y. Li、H. Lamm、O. Pronitchev、M. Bal、S. Garattoni、F. Crisa、D. Bafia、D. Kurkcuoglu、R. Pilipenko、P. Heidler、N. Bornman、D. van Zanten、S. Zorzetti、R. Harnik、A. Murthy、A. Lunin、S. Belomestnykh、S. Zhu、C. Wang、A. Vallieres、Z. Huang、J. Koch、A. Grassellino、S. Chakram、A. Romanenko 和 Y. Lu，《具有抗错误控制的超相干超导腔多量子位平台》（2025），arXiv:2506.03286 [quant-ph]。[85] Y. Liu、J. Sinanan-Singh、M. T. Kearney、G. Mintzer 和 I. L. Chuang，《通过耦合至量子比特，由无限维振子构造量子位》，Physical Review A 104，10.1103/physreva.104.032605（2021）。[86] J. Huang、T. J. DiNapoli、G. Rockwood、M. Yuan、P. Narasimhan、E. Gupta、M. Bal、F. Crisa、S. Garattoni、Y. Lu、L. Jiang 和 S. Chakram，《弱耦合多模玻色存储器的快速边带控制》（2025），arXiv:2503.10623 [quant-ph]。[87] N. Bornman、T. Roy、J. A. Job、N. Anand、G. N. Perdue、S. Zorzetti 和 M. S. Alam，《利用随机酉算子对高Q腔量子位的性能进行基准测试》，Quantum Science and Technology 10，025062（2025），arXiv:2408.13317。[88] J. Helsen、X. Xue、L. M. Vandersypen 和 S. Wehner，《一类新型高效随机基准测试协议》，npj Quantum Information 5，71（2019）。[89] J. Claes、E. Rieffel 和 Z. Wang，《面向非重数自由群的特征随机基准测试及其在子空间、泄漏和匹配门随机基准测试中的应用》，PRX Quantum 2，010351（2021），出版方：美国物理学会。[90] J. Helsen、I. Roth、E. Onorati、A. Werner 和 J. Eisert，《随机基准测试的一般框架》，PRX Quantum 3，020357（2022），出版方：美国物理学会。[91] Y. Fan、R. Murray、T. D. Ladd、K. Young 和 R. Blume-Kohout，《利用合成量子电路进行随机基准测试》（2024），arXiv:2412.18578 [quant-ph]。[92] A. Böhm，《量子力学：基础与应用》（施普林格科学与商业媒体，2013）。[93] G. H. Hardy 和 E. M. Wright，《数论导论》（牛津大学出版社，1979）。[94] K. R. W. Jones，《黎曼–刘维尔分数阶积分与超球面上的约化分布》，Journal of Physics A: Mathemat- ical and General 24，1237（1991）。[95] U. Singh、L. Zhang 和 A. K. Pati，《随机纯态的平均相干性及其典型性》，Physical Review A 93，032125（2016）。[96] P. Diaconis 和 M. Shahshahani，《随机矩阵的本征值》，《应用概率杂志》31，49（1994）。[97] I. M. Gessel，《对称函数与 P-递归性》，《组合理论杂志A辑》53，257（1990）。[98] A. Ketterer、N. Wyderka 和 O. Gühne，《利用量子设计进行纠缠表征》，Quantum 4，325（2020），arXiv:2004.08402 [quant-ph]。[99] GAP Group，《GAP——群、算法与编程》，版本 4.14.0，GAP Group（2024）。[100] S. Aaronson，《量子态的影子层析》，《SIAM计算杂志》49，STOC18（2020），arXiv:1711.01053。[101] L. Innocenti、S. Lorenzo、I. Palmisano、F. Albarelli、A. Ferraro、M. Paternostro 和 G. M. Palma，《一般测量框架上的影子层析》，PRX Quantum 4，040328（2023）。[102] D. Chen 和 H. Zhu，《非稳定子性提升经济型影子估计》（2024），arXiv:2410.23977 [quant-ph]。[103] C. Mao、C. Yi 和 H. Zhu，《基于 Clifford 群的量子位影子估计中的魔性》（2024），arXiv:2410.13572 [quant-ph]。[104] A. A. Akhtar、N. Anand、J. Marshall 和 Y.-Z. You，《双酉影子层析》（2025），arXiv:2404.01068 [quant-ph]。[105] I. A. Larkin 和 Y. N. Ovchinnikov，《超导理论中的准经典方法》，《实验与理论物理学杂志》28，2262（1969）。[106] A. Kitaev，《量子全息的一个简单模型（第一部分）》（2015）。[107] J. Maldacena、S. H. Shenker 和 D. Stanford，《混沌界限》，《高能物理学杂志》2016，10.1007/JHEP08(2016)106（2016）。[108] N. Lashkari、D. Stanford、M. Hastings、T. Osborne 和 P. Hayden，《迈向快速扰乱猜想》，《高能物理学杂志》2013，10.1007/JHEP04(2013)022（2013）。[109] D. A. Roberts 和 D. Stanford，《利用二维共形场论中的四点函数诊断混沌》，Physical Review Letters 115，131603（2015）。[110] J. Polchinski 和 V. Rosenhaus，《Sachdev–Ye–Kitaev模型中的谱》，《高能物理学杂志》2016，1（2016）。[111] M. Mezei 和 D. Stanford，《混沌系统中的纠缠扩散》，《高能物理学杂志》2017，65（2017）。[112] P. Hayden 和 J. Preskill，《黑洞作为镜子：随机子系统中的量子信息》，《高能物理学杂志》2007，120（2007）。[113] S. H. Shenker 和 D. Stanford，《黑洞与蝴蝶效应》，《高能物理学杂志》2014，67（2014）。[114] B. Swingle，《解开非时间序关联函数背后的物理》，Nature Physics 14，988（2018），tex.ids= swingle_unscrambling_2018-1。[115] S. Xu 和 B. Swingle，《量子多体系统中的扰乱动力学与非时间序关联函数：教程》（2022）。[116] J. R. McClean、S. Boixo、V. N. Smelyanskiy、R. Babbush 和 H. Neven，《量子神经网络训练景观中的贫瘠高原》，《自然·通讯》9，4812（2018），编号：1，出版方：Nature Publishing Group。[117] C. A. Tracy 和 H. Widom，《随机矩阵导论》（1992），arXiv:hep-th/9210073。[118] J. E. Humphreys，《李代数与表示论导论》，第9卷（施普林格科学与商业媒体，2012）。[119] I. G. Macdonald，《对称函数与 Hall多项式》（牛津大学出版社，1998）。

附录 A1：$d = 2$ Haar 随机酉矩阵特征值的概率密度

已知，二维 Haar随机矩阵的本征值（$e^{i\phi_0}, e^{i\phi_1}$）服从密度$p(\phi_0, \phi_1) = \frac{1}{4\pi^2}(1 - \cos(\phi_1 - \phi_0))$ [117]。不过，我们关心的是差值 $\Delta \coloneqq |\phi_1 - \phi_1|$ 的密度。可以通过沿着 Δ 恒定的直线对 $p(\phi_0, \phi_1)$ 进行积分来计算，如图 A1 所示。由于密度函数 $p(\phi_1, \phi_0) \propto (1 - \cos\Delta)$ 在这些直线上为常数，因此问题纯粹是几何问题。从图 A1 可以看出，每条直线的长度为 $\sqrt{2}(2\pi - \Delta)$，因此差值的概率密度为： $p(\Delta) \propto (2\pi - \Delta)(1 - \cos\Delta)$。归一化后得到：

$$p(\Delta) = \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{\Delta}{2\pi}\right)(1 - \cos\Delta). \tag{A1}$$

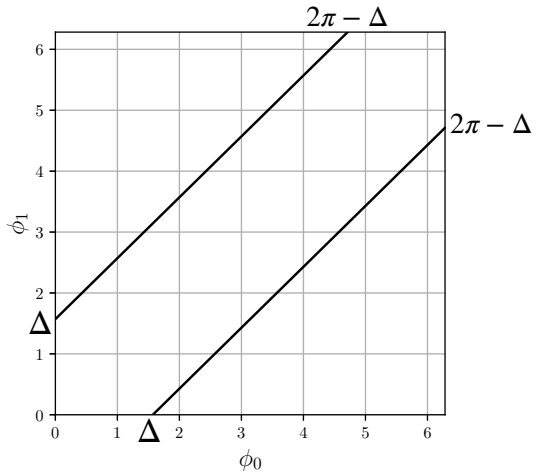


图 A1： $|\phi_1 - \phi_0| = \Delta$ 的等值线。

附录 A2：方程 (89) 的求值

我们希望对其求值

$$I := \frac{2^t}{\pi}\int_0^{2\pi}(1 + \cos\Delta)^t(1 - \cos\Delta)\left(1 - \frac{\Delta}{2\pi}\right)d\Delta. \tag{A1}$$

为此，我们将其分成两部分：

$$I_0 := \pi\int_0^{2\pi}(1 + \cos\Delta)^t(1 - \cos\Delta)d\Delta, \quad I_1 := \int_0^{2\pi}(1 + \cos\Delta)^t(1 - \cos\Delta)\Delta\, d\Delta, \tag{A2}$$

其中 $I = \frac{2^t}{\pi^2}(I_0 - I_1/2)$。

我们首先注意到 $I_0 = I_1$，这一点可由下式看出：

$$I_1 - I_0 = \int_0^{2\pi}(\Delta - \pi)(1 + \cos\Delta)^t(1 - \cos\Delta)d\Delta = \int_{-\pi}^{\pi} u(1 - \cos u)^t(1 + \cos u)du = 0. \tag{A3}$$

第一步代入 $u = \Delta - \pi$，最后一步则是注意到被积函数为奇函数，并在 $[-\pi, \pi]$ 上进行积分。因此，所关注的积分为 $I = \frac{2^t}{2\pi^2}I_0$。

现在我们关注 I_0，我们可以用 $1 + \cos\Delta = 2\cos^2(\Delta/2)$、$1 - \cos\Delta = 2\sin^2(\Delta/2)$ 将其改写：

$$I_0 = 2^{t+1}\pi\int_0^{2\pi}\left(\cos\frac{\Delta}{2}\right)^{2t}\left(\sin\frac{\Delta}{2}\right)^2 d\Delta = 2^{t+1}\pi\int_0^{\pi}(\cos u)^{2t}(\sin u)^2 du. \tag{A4}$$

注意到被积函数关于 $\pi/2$ 对称，我们得到

$$I_0 = 2^{t+2}\pi \int_0^{\pi/2} (\cos u)^{2t} (\sin u)^2 du = 2^{t+1}\pi B\left(\frac{3}{2}, t+\frac{1}{2}\right), \tag{A5}$$

其中 B 是贝塔函数（当 Re(t) $> -1/2$ 时有效）。

利用贝塔函数和伽马函数的标准恒等式，可得：

$$I_0 = 2^{t+1}\pi^{3/2}\frac{\Gamma(t+1/2)}{\Gamma(t+2)}. \tag{A6}$$

利用勒让德倍增公式，可将其化简为最终结果：

$$I = \frac{2^t}{2\pi^2} 2^{t+1}\pi^{3/2}\frac{\Gamma(t+1/2)}{\Gamma(t+2)} = \frac{\Gamma(2t+1)}{\Gamma(t+1)\Gamma(t+2)}. \tag{A7}$$

附录 A3：量子比特酉 5-设计

在 [3]（表 III）和 [98]（附录 A）中给出了量子比特酉 5-设计的详细内容。不过，我们认为这两篇参考文献提供的生成元都有误，因此，为求完整起见，我们在此给出修正后的版本。

群 $G := SL(2,\ \mathbb{F}_5)$ 是 $\mathbb{F}_5$ 上行列式为 1 的矩阵组成的酉群。该群的阶为 $|G| = 120$，且与二元二十面体群（$2I$）同构。首先，我们给出上述论文中修正后的生成元（显然，每篇论文中都只是一个简单的笔误）。我们定义 $\omega = e^{2\pi i/15}$。

首先，很明显，[3] (表 III)中给出的生成元有误，因为其中一个矩阵的行列式绝对值不为一。正确的一组生成元是：

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -\omega^{11}-\omega^{14} & -\omega^{11}-\omega^{14} \\ \omega^{10} & -\omega-\omega^4 \end{pmatrix}, \tag{A1}$$

$$\begin{pmatrix} -\omega-\omega^2-\omega^4-\omega^8-2(\omega^{11}+\omega^{14}) & \omega^6+\omega^9 \\ \omega^{11}-\omega^{14} & -\omega^5 \end{pmatrix}. \tag{A2}$$

除了第三个矩阵左上角元素前的符号由 ω^{14} 变为相反号之外，这些矩阵与 [3], 中的完全相同。它们的行列式均为一，并且可以验证它们生成一个阶为 120 的群。我们还注意到，这些矩阵可用于定义一组 $2I$ 生成元。将上面最后两个矩阵分别记为 g_1，g_2（列出的第一个矩阵是冗余的）。那么 $s = g_1 g_2^3 g_1$和 $t = g_1^2 g_2^2$ 满足（st）$^2 = s^3 = t^5$，这些是已知的 $2I$ 生成元关系。

类似地，对于 [98] (附录 A)，一组修正后的生成元是：

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -\omega^{11}-\omega^{14} & \omega^6+\omega^9 \\ -\omega-\omega^2-\omega^4-\omega^7-\omega^8-\omega^{13} & \omega^{11}+\omega^{14} \end{pmatrix}, \tag{A3}$$

$$\begin{pmatrix} \omega^{10} & \omega^{11}+\omega^{14} \\ -\omega^2-\omega^8 & -\omega^{10} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & \omega^5 \\ -\omega^{10} & -\omega^3-\omega^{12} \end{pmatrix}. \tag{A4}$$

与 [98] 相比，最后一个生成元的最后一个元素有所不同。还要注意，这四个生成元并非都必需，例如，最后三个就足以生成该群。基于这些生成元也可以定义一组 $2I$ 生成元。将上面最后两个生成元分别记为 k_2，k_3。那么 $s = k_2^3 k_3^2$，$t = k_3^3$ 满足（st）$^2 = s^3 = t^5$，如所需。

上述生成元可通过矩阵乘法构造出大小为 120 的完整群 $\{g_k\}_{k=1}^{120}$。虽然这些矩阵不是酉矩阵，但可以采用酉化技巧来寻找相似变换，从而得到G [98]的酉表示：

$$U_k = \sqrt{P} g_k \sqrt{P}^{-1},\ P = \frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{|G|} g_k^\dagger g_k = 3\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1+i\sqrt{5/3}) \\ \frac{1}{2}(1-i\sqrt{5/3}) & 1 \end{pmatrix}. \tag{A5}$$

由以下 P生成元得到的矩阵 [3] 为:

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9+3\sqrt{5} & 6+3\sqrt{5}+i\sqrt{27+12\sqrt{5}} \\ 6+3\sqrt{5}-i\sqrt{27+12\sqrt{5}} & 9+3\sqrt{5} \end{pmatrix}. \tag{A6}$$

附录 A4：特征标理论与 Schur多项式

本节将介绍一些工具，用于将 $SU(m)$ 及相关群的表示分解为不可约表示。我们将大量运用李群-李代数对应。所需条件是，我们的群 G 的复化李代数同构于 $\mathfrak{sl}(m,\ \mathbb{C})$ 或 $\mathfrak{gl}(m,\ \mathbb{C})$，其中 $m \le d$。这涵盖了多种情况，包括自旋相干态中的 $G = SU(2)$、 $SU(1,\ 1)$ 干涉测量中的 $G = SU(1,\ 1)$，以及线性光学幺正变换中 m 个模式里的 n 个光子所对应的 $G = U(m)$。

我们先回顾李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$的一些表示论。这是域 $\mathbb{C}$上约化李代数表示论的一个特例，而这一切都可以推广到该情形。稍后我们将更详细地讨论 $m = 2$情形，即 $SU(2)$。我们省略李代数表示论的详细介绍，读者可参阅经典论述 [118]。等价、不可约性等概念与第 IH 节讨论的群情形相似。

$\mathfrak{g}$的（有限维）不可约表示（在等价意义下）与弱递减整数元组$\mu \in \mathbb{Z}^m$一一对应，称为其最高权。我们将对应于 μ 的不可约表示记作 V_μ。有限维表示 W 可为$\mathfrak{g}$ 指定一个形式特征标 $\chi(W) \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm1},\dots,x_m^{\pm1}]$，它是一个关于 $x_1^{\pm1},\dots,x_m^{\pm1}$ 的整系数多项式，并满足以下性质:

$$\chi(W_1 \oplus W_2) = \chi(W_1) + \chi(W_2),\ \ \chi(W_1 \otimes W_2) = \chi(W_1)\chi(W_2). \tag{A1}$$

我们有 $\chi(V_\mu) = s_\mu(x_1,\dots,x_m)$，这是关于 m 个变量的 Schur多项式。值得注意的是， $\{s_\mu(x_1,\dots,x_m):\ \mu_1 \ge \mu_2 \ge \cdots \ge \mu_m,\ \mu_i \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{Z}$的一个基，张成了 $\mathbb{Z}[x_1^{\pm1},\dots,x_m^{\pm1}]$ 中对称多项式构成的子空间。根据 (A1)，将 W 的表示 $\mathfrak{g}$ 分解为不可约表示的直和，等价于将 $\chi(W)$ 分解为 Schur多项式 $s_\mu(x_1,\dots,x_m)$ 的非负整数线性组合。s_μ 的系数恰好就是不可约表示 V_μ的重数。

注意，对于任意的 $c \in \mathbb{Z}$ 和弱递减的 $\mu \in \mathbb{Z}^r$，Schur多项式满足

$$s_{(\mu_1+c,\dots,\mu_m+c)}(x_1,\dots,x_m) = (x_1\cdots x_m)^c s_\mu(x_1,\dots,x_m). \tag{A2}$$

因此，除去乘上若干次幂的 $x_1\cdots x_m$所造成的差异，只需考虑 Schur多项式 s_μ，其中 μ是一个弱递减的m元组，且其元素均为非负 整数。在这种情况下，$s_\mu(x_1,\dots,x_m)$ 是关于 x_i 的真正多项式（无需使用逆元）。许多关于 Schur多项式的结果都是在这一情形下陈述的，例如 [119] 的结果。需要指出的是， $x_1\cdots x_m$ 的因子并不会实质性地影响这些结果。事实上， $\mathfrak{sl}(m,\mathbb{C})$ 的表示论只由差值 $\mu_i - \mu_{i+1}$ 决定；剩余的自由度只会影响单位矩阵 $I \in \mathfrak{g}$ 作用时对应的标量，而这对表示论影响甚微。

现在令 $G \subseteq U(d)$ 为一个紧子群，并假设 G 在 $\mathcal{V} = \mathbb{C}^d$ 上的自然表示是不可约的。进一步假设， G 的复化李代数与 $\mathfrak{sl}(m,\mathbb{C})$ 或 $\mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$ 同构，其中 $m \le d$。特别地，必要时令中心元 $I \in \mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$ 以任意整数作用，我们便得到 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$ 的一个不可约表示 $(\rho,\mathcal{V})$。令 λ 为相应的最高权，因此我们可以将 $\mathcal{V} = V_\lambda$ 视为 .....。在随机基准测试的应用中（见第 IV A 节），我们希望将表示 $V_\lambda \otimes V_\lambda^*$ 分解为不可约表示。为此，我们注意到 $V_\lambda^* \cong V_{-w_0\lambda}$，其中 w_0 是反转 λ 的指标的置换（因此 $w_0\lambda = (\lambda_m,\dots,\lambda_1)$). 根据 (A1)，我们可以通过分解来确定相关的不可约表示及其重数

$$s_\lambda(x_1,\dots,x_m)s_{-w_0\lambda}(x_1,\dots,x_m) = \sum_\nu c_\nu s_\nu(x_1,\dots,x_m). \tag{A3}$$

这些系数 c_ν 可以通过*Littlewood-Richardson* 规则精确计算。我们将考虑一个特殊情形： λ =(k、0、.....、0)，其中 k是非负整数。我们有 $s_\lambda = h_k$，即完全对称函数，此时 Littlewood-Richardson 规则可简化为*Pieri* 规则。（参见 [119], 第 I 章，(5.14)。）特别地，我们有 $-w_0\lambda$ =(0、.....、0、 $-k$),

and

$$\begin{aligned}
\chi(V_\lambda \otimes V_\lambda^*) &= \chi(V_\lambda)\chi(V_{-w_0\lambda}) && \text{(A4)}\\
&= s_\lambda(x_1,\dots,x_m)s_{-w_0\lambda}(x_1,\dots,x_m) && \text{(A5)}\\
&= (x_1\cdots x_m)^{-k}s_{(k,0,\dots,0)}(x_1,\dots,x_m)s_{(k,\dots,k,0)}(x_1,\dots,x_m) && \text{(A6)}\\
&= (x_1\cdots x_m)^{-k}\sum_{\ell=0}^{k} s_{(2k-\ell,k,\dots,k,\ell)}(x_1,\dots,x_m) && \text{(A7)}\\
&= \sum_{\ell=0}^{k} s_{(k-\ell,0,\dots,0,\ell-k)}(x_1,\dots,x_m) && \text{(A8)}\\
&= \chi\left(\bigoplus_{\ell=0}^{k} V_{(k-\ell,0,\dots,0,\ell-k)}\right). && \text{(A9)}
\end{aligned}$$

特别地，我们有：

命题 5. 设 $G \subseteq U(d)$ 是一个紧子群，其复化李代数同构于 $\mathfrak{sl}(m,\mathbb{C})$ 或$\mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$，其中 $m \le d$。假设 $\mathcal{V} = \mathbb{C}^d$ 是 G 的一个不可约表示，最高权为 $\lambda = (k, 0, .., 0)$。那么End$(\mathcal{V}) = V \otimes V^*$ 可分解为 G的 $k+1$ 个不等价不可约表示，每个表示的重数均为1。

We n现在考虑自旋相干态这一特殊情况：取 S 为非负半整数，并且 rec all

$$\mathcal{H}_S = \mathrm{span}\{|S,k\rangle \mid k = -S,\cdots,S\}. \tag{A10}$$

如第三节 A 所述， $\mathcal{H}_S$ 是 $G = SU(2)$ 的一个自旋为 S 的不可约表示。自旋与最高权之间存在对应关系；也就是说， $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ 的一个最高权为 (a,b) 的不可约表示，其自旋为 $S = (a-b)/2$，并且是 G的一个不可约表示。 $c \in \mathbb{Z}$ 的不可约表示$V_{(a+c,b+c)}$ 作为 G-表示均彼此等价，因此我们可以自由选择 c 的值，而不会影响结果。接下来，我们将把 $\mathcal{H}_S$ 视为 $\mathfrak{g}$ 的一个最高权为 $(2S,0)$ 的不可约表示。根据以上计算，我们看到

$$\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S^* \cong \bigoplus_{\ell=0}^{2S} V_{(2S-\ell,\ell-2S)} \cong \bigoplus_{\ell=0}^{2S} \mathcal{H}_{2S-\ell}. \tag{A11}$$

特别地，共有 $2S+1$ 个互不等价的不可约表示，且重数均为 1。

另请注意，作为 $SU(2)$ 的表示， $\mathcal{H}_S$ 与 $\mathcal{H}_S^*$ 等价，同构由 $|S,\ k\rangle \mapsto \langle S,\ -k|$ 给出。因此，上述内容也可以等价地视为给出了 $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S$ 的不可约表示分解。一般情况下， $m > 2$、 $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S$ 和 $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S^*$ 不一定同构，但它们分解得到的不可约表示数量（按重数计）始终相同（参见 [39] 中定理 B.1 的证明）。