arXiv:2603.02674v1 [math.AT] 3 Mar 2026

关于投射与平坦持久模

Prateep Chakraborty* Giriraj Ghosh†

摘要

近年来，持久模被视为以预序集为指标集的分次模。我们给出了当指标集为格时，主理想整环上的投射模为自由模的充分判据。以格作为指标集时，我们得到了判定给定持久模非投射的判据。当指标集为预序集时，我们证明了一个著名持久模族的平坦性。文章最后给出两种算法，用于计算指标集分别为 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}^2$的自由持久模的基。

关键词： 持久模，投射模，平坦模，分次模，偏序集。

22020 数学主题分类 主要分类：55N31、13C10、13C11；次要分类：06A07、06A11。

1 引言

持久模自然产生于拓扑数据分析中，是与滤过拓扑空间相关的代数不变量。

定义 1.1. 环 R 上的持久模 M 是由 R-模构成的序列

$$M_1 \xrightarrow{f_{1,2}} M_2 \xrightarrow{f_{2,3}} M_3 \xrightarrow{f_{3,4}} \cdots \xrightarrow{f_{n-1,n}} M_n$$

并配有其间的 R模同态，使得对于每个 $i \leq j$，映射 $f_{i,j}\colon M_i \to M_j$ 定义为复合映射 $f_{i,j} = f_{j-1,j} \circ f_{j-2,j-1} \circ \cdots \circ f_{i,i+1}$，而$f_{i,i}$ 是 M_i 上的恒等映射。该序列描述了在特定区间的情况下，模如何沿着指标 i 至 j 保持持久性，具体取决于上下文。

*数学系；印度理工学院克勒格布尔分校；印度西孟加拉邦克勒格布尔，邮编 721302。*Email:* prateep@maths.iitkgp.ac.in

†数学系；Indian Institution of Technology Kharagpur；印度西孟加拉邦克勒格布尔，邮编 721302。*Email:* gghoshmaths@kgpian.iitkgp.ac.in

当指标集是 $\mathbb{R}$（[20], [10] ）的有限子集，且持久模满足逐点有限维条件（ [19], [7]）或 q-温和条件（[6]）时，该持久模可唯一分解为区间模（在同构意义下）。此后，这一理论扩展到了更一般的指标集，例如 $\mathbb{R}^n$、 $\mathbb{Z}^n$ 和偏序集。在 [4], Bubenik 和 Mili´cevi´c 进一步推广了这一框架，引入了以预序集为指标的持久模。

从代数观点来看，持久模已被作为分次模（[20], [5], [13]）、函子（[2], [3]）以及层（[8]）加以研究。Bubenik 与 Mili´cevi´c 发展了分次模方法与层论方法的若干方面。利用这两种视角，他们为持久模定义了张量积、Hom 双函子以及导出函子 Tor 与 Ext。在这一框架下，他们得到了投射性的一个判据:

以带有阿贝尔群结构的预序集 P 作为指标集时，域上的有限生成持久模是分次投射的，当且仅当它是分次自由的（见 *[4, 推论 2.20]*）。

特别地，当指标集为 $\mathbb{R}$时，他们还刻画了区间模何时为投射、平坦或单射。投射持久性模亦在 [1]中得到讨论。

由于 Bubenik 和 Mili´cevi´c 的结果适用于任意预序集，因此特别适用于格。在格上，我们将这一结果推广如下。

定理 1.2。 设 R 是一个主理想整环， P 是一个配备相容阿贝尔群结构的格。设以指标集 P为索引的 M 是 R 上的一个持久模，并且

$$M = \bigoplus_{a \in P} M_a,$$

且每个 M_a 都是有限生成的 R-模。那么， M 是分次投射的，当且仅当它是分次自由的。
（必要概念的详细讨论见第 *2* 节。）

请注意，我们的结果适用于主理想整环，而不仅限于域。当 R 是一个域时，每个 M_a 都是有限生成的 R-模这一条件，与 [15] 中引入的 q-有限模的概念一致。此外，对于 $P = \mathbb{Z}^n$ ，且 $R = \mathbb{K}$为域的情形，我们的结果给出了 Serre 猜想的分次类比的一个证明（见[12], [17]）。

证明通过引入一种适用于分次持久情形的“不可分解元素”概念来展开。通过对 P 的某些子集应用极小元的概念，我们证明了不可分解元素的存在性。通过分析不可分解元素出现的次数，并控制它们的线性无关性，我们构造出一个齐次基，从而证明其自由性。这种方法本质上是同调的，不依赖于区间分解。

在证明定理 1.2 的过程中，我们证明了任意投射持久模的齐次元素都可以“用不可分解元素表示”（见引理 4.5）；第 5 节将此结果用于推导确保某些持久模不是投射模的判据（见引理 5.1）。在 [4]„ 作者给出了一类指标集为$\mathbb{R}$的分次平坦模。本文将指标集推广到任意带有相容阿贝尔群结构的预序集，并构造了一类分次平坦模。总之，我们构造了若干大类平坦持久模，它们并非投射模（见例5.8）。这些构造表明，在主理想整环上，平坦性与投射性存在实质性差异，尤其是在格索引情形下。

我们的主要结果提供了一种构造投射（即自由）持久模之基的方法。最后，我们给出一个显式算法，用以在情形 $P = \mathbb{Z}$ 与 $P = \mathbb{Z}^2$ 下计算此类基。

本文结构如下。在第 2 节中，我们回顾必要的背景，以及将持久模解释为某个幺半群环上的分次模。在第 3 节中，我们引入’不可分解元素‘的概念，确立其存在性，并证明后文所用的辅助结果。第 4 节表明，不可分解元素的线性无关集构成投射持久性模的基。在第 5 节中，我们构造一族非投射的平坦模。最后，第 6 节给出一个算法，用以生成自由持久模的基。

2 预备知识

在本节中，我们回顾预序集、偏序集、群环、分次环、分次模、分次投射模以及分次平坦模的概念。我们还定义带有相容的阿贝尔群结构的预序集上的持久模，并按照 Bubenik 与 Mili´cevi´c [4] 的方法，将其视为某个幺半群环上的分次模。

2.1 预序集与偏序集

有关本小节的详细讨论，请参阅 [4] 。给定一个预序集（P，$\leq$），我们可以关联一个范畴 $\mathbf{P}$，其对象是 P中的元素，态射由关系 $x \leq y$给出。以 P为指标集，R 上的持久模定义为一个函子

$$M \colon \mathbf{P} \to \mathbf{A},$$

其中 $\mathbf{A}$ 表示主理想整环 R上的模范畴。持久模之间的态射是此类函子之间的自然变换。

定义 2.1. 设 $(P, \leq)$ 为一个预序集。若子集 U 满足：对于任意满足 $y \geq x$的 P 中的 $x \in U$ 和 $y \in P$，都有 $y \in U$，则称 U 为上集。类似地，若子集 V满足：对于任意满足 $y \leq x$的 P 中的 $x \in V$和 $y \in P$，都有 $y \in V$，则称 V为 P的下集。

对于任意 $a \in P$，主上集 U_a 定义为

$$U_a = \{x \in P \mid x \geq a\}.$$

类似地，主下集 V_a 定义为

$$V_a = \{x \in P \mid x \leq a\}.$$

如果子集 S *of* P 满足：对于 $a \leq c \leq b$，若 a、$b \in S$ 和 $c \in P$，则有 $c \in S$，那么称其为凸的。注意，上集和下集都是凸的。

定义 2.2。现在，我们将子集 $S \subseteq P$ 的一个极小 元（如果存在）定义为满足以下条件的元素 $m \in S$：不存在满足 $s < m$ 的 $s \in S$；也就是说，$s \leq m$ 蕴含 $s = m$。类似地，S 的一个极大 元是满足以下条件的元素 $m' \in S$：不存在满足 $s > m'$ 的 $s \in S$。

回顾一下，偏序集（或称 poset）是一种特殊的预序集。对于偏序集 $(P, \leq)$ 及其元素 $x, y \in P$，我们将 x 和 y 的**并**（或上确界）定义为最小的元素 $r \in P$，使得 $x \leq r$ 和 $y \leq r$，并记作 $x \vee y$，。对偶地，我们将 x 和 y 的**交**（或下确界）定义为最大的元素 $s \in P$，使得 $s \leq x$ 和 $s \leq y$，并记作 $x \wedge y$，。因此，对任意 $p, q \in P$，以下蕴含关系成立：$x \leq p$ 和 $y \leq p \Rightarrow x \vee y \leq p$，以及 $q \leq x$ 和 $q \leq y \Rightarrow q \leq x \wedge y$.。根据偏序的反对称性，两个元素 $x, y \in P$ 的并和交只要存在，便是唯一的。每一对元素都存在并和交的偏序集称为**格**。注意，在格中，每个有限子集都有并和交。

预序集 $(P, \leq, +, 0)$ 被称为具有**相容的阿贝尔群结构**，如果 $(P, +, 0)$ 是一个阿贝尔群，并配备有一个预序 $\leq$，使得

$$a \leq b \implies a + c \leq b + c \quad \text{for all } a, b, c \in P.$$

例 2.3. 设 $P = \mathbb{R}^n$ 配备由 $x = (x_1, \ldots, x_n) \leq y = (y_1, \ldots, y_n)$ 当且仅当 $x_i \leq y_i$ 对所有 $i = 1, \ldots, n$. 成立所定义的乘积（逐坐标）偏序。那么$(\mathbb{R}^n, \leq)$ 是一个格，其中并和交按坐标逐分量定义为 $(x \vee y)_i = \max(x_i, y_i)$, $(x \wedge y)_i = \min(x_i, y_i)$。

例 2.4. 设 $P = \mathbb{Z}^{i_1} \times \mathbb{Q}^{i_2} \times \mathbb{R}^{i_3}$，其中 i_1、i_2、$i_3 \geq 0$ 和 $i_1 + i_2 + i_3 \geq 1$。配备乘积序和逐分量加法后，P 是一个具有相容的阿贝尔群结构的预序集。

2.2 分次投射模与分次平坦模

关于分次环和分次模的理论，请参阅 [16] 。关于持久性背景下分次模的简明介绍，请参阅附录 B

[4]。特别是，这些参考资料涵盖了分次自由模、分次投射模和平坦模。下面，我们回顾分次投射模和分次平坦模的定义。

定义 2.5。 设 G 为一个群， $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ 为一个分次环。若分次R-模 $P = \bigoplus_{g\in G} P_g$ 满足以下任一等价条件，则称其为分次投射：

1. 对每个分次满同态 $f:\ M \twoheadrightarrow N$，分次同态 $g: P \to N$ 都可以通过 f提升；也就是说，存在一个分次同态$h:\ P \to M$，使得 $f \circ h = g$。 *2.* 函子 $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ 从分次 R-模范畴到其自身是正合的。 *3.* 存在一个分次自由 R-模 F，使得 P 是 F的分次直和因子；也就是说，存在一个分次子模 $Q \subseteq F$，使得 $F = P \oplus Q$.

定义 2.6。 *[4]* 若 $-\otimes_{\mathrm{gr}} M$ 是一个正合函子，则分次模 M 是 $\otimes_{\mathrm{gr}}$-平坦的 .

2.3 持久模作为分次模

现在我们回顾如何将持久模视为分次模。关于这种对应关系的详细讨论，请参见 [4]。

幺半群环： 设 $(P, \leq, +, 0)$ 是一个带有相容的阿贝尔群结构的预序集，并令 $U_0 \subseteq P$ 表示非负元素组成的上集。那么 $(U_0, +, 0)$ 是一个交换幺半群。对于主理想整环 R，令 $R[U_0]$表示相应的幺半群环（参见 [4]）；这一构造类似于群环的构造。

$R[U_0]$ 中的任意元素都可以写成有限形式和 $\sum_{s\in U_0} c_s t^s$,其中 $c_s \in R$，且只有有限多个系数 c_s 非零。由于 R 和U_0 均为交换的，环 $R[U_0]$是交换环。

通过规定 $\deg(c_s t^s) = s$，可在 $R[U_0]$ 上定义分次。因此，

$$R[U_0] = \bigoplus_{s\in P} (R[U_0])_s,$$

其中，当 $s \geq 0$ 时 $(R[U_0])_s \cong R$，否则为 $(R[U_0])_s = 0$。

持久模的分次模结构： 令 $M\colon \mathbf{P} \to \mathbf{A}$ 为一个持久模，将其视为前文所定义的函子。我们定义 M 上的左 $R[U_0]$–作用如下。对于 $m \in M_i$ 和 $s \in U_0$，令

$$t^s \cdot m := M_{i\leq i+s}(m),$$

其中 t^s 表示 $R[U_0]$中次数为 s的生成元。此作用按 R–线性延拓，并赋予 M 分次左 $R[U_0]$–模结构。进一步，相同的

作用在 M上诱导出右 $R[U_0]$-模结构。反过来，给定 M上的分次左$R[U_0]$–模结构，乘以 t^s 会诱导出自然映射 $M_i \xrightarrow{t^s} M_{i+s}$，这些映射在 M上定义了持久模结构。

此外，持久模（视为函子）之间的自然变换恰好对应于一个分次 $R[U_0]$–模同态。因此，这一对应诱导了函子范畴 $\mathbf{P} \to \mathbf{A}$ 与分次 $R[U_0]$–模范畴之间的范畴等价。若干作者已指出这一对应：在 $P = \mathbb{R}^n$ 的情形下于 [14], ，对于 $P = \mathbb{Z}^n$ 于 [20], ，对于偏序阿贝尔群于 [15], ，以及对于一般预序集于 [4]。Bubenik 与 Mili´cevi´c 证明了，在适当条件下，分次 $R[U_0]$–模 M 只要是投射的便是自由的；见 [4] 的推论 2.20。我们通过给出两个持久模（视为 P–分次 $R[U_0]$-模）的张量积的另一种定义来结束本小节。

另一种定义： 设 M 与 N 为 P-分次 $R[U_0]$-模。 P-分次阿贝尔群 $M \otimes_{\mathrm{gr}} N$ 通过如下设定

$$(M \otimes_{\mathrm{gr}} N)_r := \mathrm{colim}_{s+t \le r}(M_s \otimes_R N_t).$$

对于第 ***3*** 节和第 ***4*** 节，我们假设 M 是一个指标集为 P的持久模，其中 P 是一个具有相容的阿贝尔群结构的格。对于第 ***3*** 节和第 ***4*** 节（不包括第 ***4.1*** 小节），我们假设 M 是分次投射的，且对 $a \in P$， M_a是有限生成的 R-模。在此假设下，存在一个分次自由$R[U_0]$-模 F 和一个分次 $R[U_0]$-模 N，使得 $F \cong M \oplus N$. 由于 F 是一个分次自由 $R[U_0]$-模，令 $\{u_\eta\}_{\eta \in \Lambda}$ 为 F的一组齐次元素基。

3 一些必要结果

本节中，我们定义“不可分解元素”这一自然概念。不可分解元素集构成分次 $R[U_0]$-模 M 的一组基（见命题 4.7），由此可证明 M 是一个自由模。本节中，我们将证明不可分解元素的存在性（见推论 3.12），并得出次数低于某个特定次数的线性无关不可分解元素的基数是有限的（见命题 3.18）。

作为一个 P分次自由 $R[U_0]$模 F，我们有

$$F_i = M_i \oplus N_i \quad \text{for all } i \in P.$$

由于每个 M_i 都是有限生成的投射 R模，因此根据主理想整环上有限生成模的结构定理， M_i 是一个具有有限个基元素的自由 R模。

因此，对于某个满足 $M_i \neq 0$ 的 $i \in P$，令 x_1^i， x_2^i，…， x_n^i 为 M_i 的一个 R-基。

引理 3.1。对于 $k \le i$，映射 $f_{k,\,i}$： $M_k \to M_i$ 是单射。

证明。令 $z \in F_k$ 并记为 $z = \sum_{\eta \in I_z} c_\eta u_\eta$, $c_\eta \in R[U_0]$。这里 I_z 表示一个指标集，它是 Λ的子集，由所有满足以下条件的指标 η 组成：在 z 表示为 $R[U_0]$-线性组合（以 $\{u_\eta\}$为基）时， $c_\eta \neq 0$ 。

若 $f_{k,\,i}(z) = 0$，则 $\sum c_\eta t^{\,i-k} u_\eta = 0$， 这意味着每个 $c_\eta t^{\,i-k} = 0$。将每个 $c_\eta = \sum r_p t^p$ 写成 $R[U_0]$中的元素，可得 $\sum r_p t^{\,p+(i-k)} = 0.$。由于 t^p彼此不同，因此 $t^{p+(i-k)}$ 也彼此不同。由上式可知，对于所有 p，都有 $r_p = 0$ ，因而对于所有 η，都有 $c_\eta = 0$ 。因此 $z = 0$，所以 $f_{k,\,i}$ 的核是平凡的。因此，映射 $F_k \to F_i$ 是一对一的。

令 w 为 M_k 中满足 $f_{k,\,i}|_{M_k}(w) = 0$ 的任意元素。由于 $w \in F_k$ 和 $F_k = M_k \oplus N_k$ 都是分次的，我们可以写成

$$f_{k,i}(w) = f_{k,i}(w+0) = f_{k,i}|_{M_k}(w) + f_{k,i}|_{N_k}(0) = 0 + 0 = 0.$$

但 $F_k \to F_i$ 是一对一的，因此 $w = 0$。这意味着 $f_{k,\,i}|_{M_k}$ 的核也是平凡的，所以映射 $M_k \to M_i$ 是单射的。

□

类似于持久模中元素诞生的概念（见第 3 节.2, [9]），我们分别定义 R 上持久模中元素 x 在 M 和 F 中的诞生集。

定义 3.2。令 $x \in M_i$。 x 的诞生集 定义为

$$S_x^M = \{\ell \le i : M_\ell \ has\ a\ preimage\ of\ x\}.$$

类似地，定义

$$S_x^F = \{\ell \le i : F_\ell \ has\ a\ preimage\ of\ x\}.$$

注意到， S_x^M 和 S_x^F 都是 P 的非空子集，因为 i 属于它们中的每一个。首先，我们证明这两个集合相等。

命题 3.3. P、 S_x^M和 S_x^F的两个子集相等；也就是说， $S_x^M = S_x^F$。

证明。设 $l \in S_x^M$。那么存在 $y \in M_l$ ，使得 $f_{l,\,i}(y) = x$。由于对于所有 $a \in P$，都有 $F_a = M_a \oplus N_a$，我们得到 $M_l \subseteq F_l$；在同一个映射下， y从 F_l 映到 F_i中的 x。因此 $l \in S_x^F$，也就是说， $S_x^M \subseteq S_x^F$。 (1)

另一方面，设 $l' \in S_x^F$。那么存在 $y' \in F_{l'}$ ，使得 $f_{l',\,i}(y') = x$。我们可以将 $y' = z' + w'$写成 $z' \in M_{l'}$和 $w' \in N_{l'}$。现在， $f_{l',\,i}(z'+w') = x$蕴含 $f_{l',\,i}(w') = x - f_{l',\,i}(z')$，它属于 N_i （来自左端）且属于 M_i （来自右端）。这意味着 $f_{l',\,i}(w') \in M_i \cap N_i = \{0\}$。因此 $x - f_{l',\,i}(z') = 0$，并且我们得到一个元素 $z' \in M_{l'}$ ，在同一个映射下映到 M_i 中的 x 。因此 $l' \in S_x^M$，即 $S_x^F \subseteq S_x^M$。 (2)

由 (1) 和 (2) 可得 $S_x^M = S_x^F$。

□

由于 $0 \neq x \in M_i \subseteq M \subseteq F$，我们可以写成

$$x = \sum_{\eta \in I_x} c_\eta t^{i-|u_\eta|} u_\eta,$$

其中 I_x 是 Λ的子集，使得对于所有 $\eta \in I_x$， $c_\eta \neq 0 (\in R)$，且 $|u_\eta|$ 是 u_η的次数。令 m 为 $\{\deg(u_\eta) : \eta \in I_x\}$的并。

我们记下以下显然的观察。

注 3.4. 对于所有 $\eta \in I_x$， $|x| \geq |u_\eta|$.

现在我们准备求出 $S_x^F = S_x^M$的极小元（它是唯一的）。首先，我们证明关于 S_x^F.的以下结果

命题 3.5. 对于任意 $l \in P, l \in S_x^F$，可推出 $i \geq l \geq m$。

证明。令 $l \in S_x^F$。则存在 $y \in F_l$，使得 $f_{l,\, i}(y) = x$。记 $y = \sum_{\eta \in I_y} d_\eta t^{l-|u_\eta|} u_\eta$, $d_\eta \in R.$。由注 3.4 应用于 y，可得对于所有 $\eta \in I_y$, $\deg(u_\eta) \leq \deg(y) = l$。此外 $t^{i-l} \sum_{\eta \in I_y} d_\eta t^{l-|u_\eta|} u_\eta = \sum_{\eta \in I_x} c_\eta t^{i-|u_\eta|} u_\eta.$。两个和相等意味着 $I_x = I_y$，进而意味着对于所有 $\eta \in I_x$, $\deg(u_\eta) \leq l$。因此， $m =$是 $\{\deg(u_\eta) : \eta \in I_x\}$的并，即 $\leq l$。

□

现在我们得到集合 S_x^F. 的极小元

引理 3.6. S_x^F 的极小元是 m.

证明. 设 $x \in M_i.$。由于 $i \geq m \geq |u_\eta| \; \forall \eta$，我们可以改写为

$$x = \sum_{\eta \in I_x} c_\eta t^{i-|u_\eta|} u_\eta = \sum_{\eta \in I_x} c_\eta t^{i-m+m-|u_\eta|} u_\eta = t^{i-m} \cdot \sum_{\eta \in I_x} c_\eta t^{m-|u_\eta|} u_\eta,$$

所以 $m \in S_x^F$。

我们将证明 m 是 S_x^F 的最小元。若存在某个 $m' \in S_x^F$（满足 $m' \leq m$），则由命题 3.5 可得 $m \leq m'$；由格的反对称性 P 可知 $m = m'$。因此结论成立。

□

结合命题 3.3 和引理 3.6，我们得到关于集合 S_x^M. 的极小元的以下推论

推论 3.7. S_x^M的极小元是 m.

现在我们得到并集 $\bigcup_{0 \neq x \in M_i} S_x^M$. 的一个极小元。首先，我们固定一些定义。

定义 3.8。设 $x \in M_i$。那么我们可以写成 $x = \sum_{\eta \in I_x} c_\eta t^{i-|u_\eta|} u_\eta$. 我们称这个表达式为 x 关于基元素 u_η的表示。

定义

$$\mathcal{U}^a = \{\, u_\eta : u_\eta \text{ appears in the representation of } x_a^i \,\},$$

其中 $\{x_a^i\}_{a=1}^n$ 是 M 的 R 基，且 $\mathcal{U} = \bigcup_{a=1}^n \mathcal{U}^a$. 。令 T 为 $\mathcal{U}$的幂集中所有元素的次数的并所成的集合。定义

$$T_1 = T \cap S, \text{ where } S = \bigcup_{x \in M_i,\, x \neq 0} S_x^M.$$

注意，任意非零的 $x \in M_i$ 都可以写成有限和 $x = \sum \gamma_a x_a^i = \sum \gamma_a \sum c_\eta t^{i-|u_\eta|} u_\eta$，且集合 T_1 非空（因为 $\mathcal{U}^a \in T \cap S$对所有 $a \in \{1, 2, \ldots, n\}$的次数的并）且有限。令 μ 为其中一个极小元。以下结果给出 S的一个极小元。

命题3.9. 元素 μ 是 S的一个极小元。

证明. 由于 $T_1 \subseteq S$，我们有 $\mu \in S$。假设存在 $\mu' \in S$ 使得 $\mu' \leq \mu$。 (1)

于是存在某个 $0 \neq x' \in M_i$，使得 $\mu' \in S_{x'}^M$。由推论 3.7，存在 $\{|u_\eta|$ 的 $\mu'' = \min S_{x'}^M =$ 并: $\eta \in I_{x'}\}$. 因此 $\mu'' \leq \mu'$。 (2)

此外，$\mu'' \in T$，因为集合 $\{u_\eta \colon \eta \in I_{x'}\}$属于 $\mathcal{U}$ 的幂集。而且，它是 $S_{x'}^M$ 的极小元，所以 $\mu'' \in S$。因此 $\mu'' \in S \cap T = T_1$。但我们假设 μ 是 T_1 的极小元，所以 $\mu \leq \mu''$。由不等式 2 以及 P 的传递性，我们得到 $\mu \leq \mu'$。 (3)

由不等式 1 和 3，以及 P 的反对称性，可得 $\mu = \mu'$。因此 μ 是 S 的极小元。

□

利用前面的命题，我们现在证明，定理 1.2 的假设要求某个 M_s 为零，只要 P 没有最小元素。

命题3.10。若 $s < \mu$，则 $M_s = 0$。

证明。若 $s < \mu$，则 $s < i$。假设存在 $k \neq 0$ 属于 M_s。k 在映射 $M_s \to M_i$ 下的像非零（由引理 3.1 可知），这意味着 $s \in S$，与 μ在 S中的极小性矛盾。

□

对于 $r \in P$，定义

$$D_r = \sum_{q<r} \mathrm{Im}(M_q \to M_r),$$

即对 $q < r$而言，所有从 M_q 到 M_r 的像之和。注意，由命题3.10，$D_\mu = 0$。类似地，可以为 F_r定义 D_r'。

定义 3.11。设 $x \in M_i$，其中某个 $i \in P$。若$x \in D_i$，则称 x 为可分解的；若 $x \in M_i \setminus D_i$，则称其为不可分解。

作为上一命题的直接推论，我们证明 M 中存在一个不可分解元素。

推论 3.12. 存在 $w \leq i$ 使得 $D_w \subsetneq M_w$。

证明。取 $w = \mu$。要么 μ 是 P 的极小元，要么存在 $s < \mu.$。在这两种情况下，$D_\mu = 0 \subsetneq M_\mu$，证毕。 □

在本节余下部分，我们将固定不可分解元中的一个基，并证明当次数小于某个固定次数 i 且它们的像在 M_i中线性无关时，这类基的总数有限。

我们知道，对于任意 $r \in P$， F_r 和 M_r 都是 R-模。由于像空间构成子模，像空间的直和 D'_r 和 D_r 也分别是 F_r 和 M_r 的子模。因此，可以定义商 R-模 F_r/D'_r和 M_r/D_r。根据推论 3.12，至少存在某个 r 使得这些商模非平凡。

命题 3.13. 若 F_r和 M_r 都作为 R-模有限生成，则 F_r/D'_r 和 M_r/D_r 都是自由 R-模。

证明. 取一个非零元素，例如 $\bar{0} \neq \bar{\alpha} \in F_r/D'_r$。于是 $\alpha \notin D'_r$。若可能，假设存在 $g \neq 0$ 属于 R，使得 $g\bar{\alpha} = \bar{0}$；也就是说， $g\alpha \in D'_r$。那么，作为 F中的一个元素，我们可以写成 $g\alpha = \sum_{\eta \in I_{g\alpha}} c_\eta t^{r-|u_\eta|} u_\eta$， $c_\eta \in R$, 使得对于所有 η，都有 $|u_\eta| < r$。

再者，作为 F, $\alpha = \sum_{\eta \in I_\alpha} d_\eta t^{r-|u_\eta|} u_\eta$， $d_\eta \in R$, 并且由于 $\alpha \notin D'_r$，可知至少存在某个 η，使得 $|u_\eta| = r$。现在， $g\alpha = \sum_{\eta \in I_{g\alpha}} g d_\eta t^{r-|u_\eta|} u_\eta$. 由于$g \neq 0$, $d_\eta \neq 0$，可知 $gd_\eta \neq 0$，因为 R 是主理想整环，所以对于与 α的表示中相同的那些指标， $|u_\eta| = r$ 的次数满足相应关系。这与对于 $g\alpha \in D'_r$，所有 $|u_\eta| < r$ 的条件矛盾。因此，这样的 g 不存在。故 F_r/D'_r 是无挠的。

根据主理想整环上有限生成模的结构定理， F_r/D'_r 是一个自由的 R-模。

我们现在考虑 M_r/D_r。设 $\bar{0} \neq \bar{\beta} \in M_r/D_r$，使得 $\beta \in M_r$ 但 $\beta \notin D_r$。作为 F 的元素， $\beta = \sum_\eta k_\eta t^{r-|u_\eta|} u_\eta$， $k_\eta \in R$. 我们断言，至少对某些η， $|u_\eta| = r$。若可能，假设对所有 η都有 $|u_\eta| < r$。我们可以写成 $u_\eta = m_\eta + n_\eta$，其中 $m_\eta \in M_{|u_\eta|}$ 且 $n_\eta \in N_{|u_\eta|}$。于是，

$$\beta = \sum_\eta k_\eta t^{r-|u_\eta|}(m_\eta + n_\eta) = \sum_\eta k_\eta t^{r-|u_\eta|} m_\eta + \sum_\eta t^{r-|u_\eta|} k_\eta n_\eta.$$

因此$\beta - \sum_\eta k_\eta t^{r-|u_\eta|} m_\eta = \sum_\eta k_\eta t^{r-|u_\eta|} n_\eta$属于 $M \cap N = \{0\}$。故 $\beta = \sum_\eta k_\eta t^{r-|u_\eta|} m_\eta$, 其中对所有 η有 $|m_\eta| = |u_\eta| < r$，这蕴含 $\beta \in D_r$，矛盾。因此，我们的断言成立。

其余论证与 F_r/D'_r的情形类似，因此M_r/D_r 也是一个自由 R-模。

□

由于我们已假设对所有 $i \in P$， M_i 都是有限生成的 R-模，我们可以应用命题 3.13 给出如下定义。

定义 3.14。

$$b_r = dim\ (M_r/D_r) = dim\ M_r - dim\ D_r.$$

我们从 $M_r - D_r$ 中选取次数为 r 的 e_j^r $j = 1$，2，.....，b_r，使得相应的 $\{e_j^r\colon\ j = 1,\ 2,\ .....,\ b_r\}$ 构成 M_r/D_r 的一组基。

命题 3.15。集合 $\{e_j^r\colon\ j = 1,.....,b_r\}$ 在 F_r/D_r' 中线性无关 .

证明。对于线性无关集 $\{e_j^r \mid j = 1,\ldots,b_r\} \subset M_r/D_r$，考虑 F_r/D_r' 中的一个关系：$\sum_j d_j\, e_j^r = 0$，其中 $d_j \in R$.

这意味着 $\sum_j d_j e_j^r \in D_r'$。根据 D_r' 的定义，存在元素 $x_i \in F_{s_i}$，满足 $s_i = |x_i| < r$，使得

$$\sum_{i=1}^{h} t^{r-s_i} x_i = \sum_j d_j e_j^r. \tag{1}$$

将 $x_i = m_i + n_i$ 写成 $m_i \in M_{s_i}$ 和 $n_i \in N_{s_i}$ 的形式。代入 (1) 得到

$$\sum_{i=1}^{h} t^{r-s_i} n_i \ = \ \sum_j d_j e_j^r \ - \ \sum_{i=1}^{h} t^{r-s_i} m_i.$$

我们有 $\sum_j d_j e_j^r = \sum_{i=1}^{h} t^{r-s_i} m_i \in D_r$，因此 $\sum_j d_j\, e_j^r \equiv 0$ 属于 M_r/D_r。由于 $\{e_j^r\}$ 在 M_r/D_r 中线性无关，我们得出对所有 j，$d_j = 0$ 成立。因此，$\{e_j^r \mid j = 1,\ \ldots,\ b_r\}$ 在 F_r/D_r' 中也线性无关。

□

注意，由于 $\{e_j^r\}$ 在 M_r/D_r 中线性无关，由 $\bigcup_{r<i}\bigcup_{j=1}^{b_r} e_j^r$ 的并集构成的集合在直和 $\bigoplus_{r<i} M_r/D_r$ 中线性无关。我们将该集合记为

$$\bigcup_{r<i}\bigcup_{j=1}^{b_r} e_j^r$$

记作 $\mathcal{B}^i$。定义

$$\mathcal{B} = \bigcup_{k\in P}\bigcup_{j=1}^{b_r}\{e_j^r\}.$$

命题 3.15 直接推出以下结论。

推论 3.16。集合 $\bigcup_{r<i}\bigcup_{j=1}^{b_r} e_j^r$ 在直和 $\bigoplus_{r<i} F_r/D_r'$ 中线性无关

现在我们来考虑 M_i 中 $\mathcal{B}^i$ 集合的像

命题 3.17. M_i中 $\mathcal{B}^i$ 的像集，即

$$\left\{ t^{i-r} e_j^r \;\middle|\; r < i,\ 1 \le j \le b_r \right\}$$

在 M_i 中线性无关。

证明。我们固定 r 和 j。现在我们表示

$$e_j^r = \sum_l c_{jl}^r \, u_l^r + d_j^r, \tag{1}$$

其中，u_l^r 是 F 的次数为 r、$c_{jl}^r \in R$和 $d_j^r \in D_r'$的齐次基元素。假设（如果可能的话），$\{t^{i-r}e_j^r :\ r < i,\ 1 \le j \le b_r\}$ 不是线性无关的。那么存在有限多个 r, j 和 $\lambda_j^r \in R$，使得 $\sum_{r<i}\sum_j \lambda_j^r \, t^{i-r} e_j^r = 0$ 属于 F_i。将 (1) 中的表达式代入，得到

$$\sum_{r<i} \sum_j \lambda_j^r \, t^{i-r} \left(\sum_l c_{jl}^r u_l^r + d_j^r \right) = 0.$$

在上述表达式中，我们还将 d_j^r 用基元素 $\{u_\eta\}$ 表示为 $d_j^r = \sum c_{jl}^r u_{jr}^k$，其中 $|u_{jr}^k| < |d_j^r|$, $c_{jl}^r \in R[U_0]$。定义

$$S = \left\{ \deg(u_l^r),\ \deg(u_{jr}^k) \;\middle|\; r, l, j \text{ appear in the above sum} \right\}.$$

这个集合是有限的。令 σ 为 S的一个极大元。注意，在对应的每个 e_j^r的 d_j^r 的表示中出现的 u_η，其中 $r < \sigma$，都不能对次数 σ有所贡献。

由此可知，对于所有 l，$t^{i-\sigma}(\sum_j \lambda_j^\sigma \, c_{jl}^\sigma) = 0$，在 $R[U_0]$ 中，因此 $\sum_j \lambda_j^\sigma \, c_{jl}^\sigma = 0$。所以 $\sum_l \sum_j \lambda_j^\sigma \, c_{jl}^\sigma \, u_l^\sigma = 0$. 等价地，$\sum_j \lambda_j^\sigma \left(\sum_l c_{jl}^\sigma u_l^\sigma \right) = 0$，因此 $\sum_j \lambda_j^\sigma \left(e_j^\sigma - d_j^\sigma \right) = 0$（由 1）。于是 $\sum_j \lambda_j^\sigma \, e_j^\sigma = 0$ 在 $\bigoplus_{r<i} F_r/D_r'$. 中。根据推论 3.16，这意味着对于所有此类 j。

现在我们从 S 中移除 σ，并对 $S - \{\sigma\}$ 的一个极大元使用以下表达式，重复相同的论证

$$\sum_{r \ne \sigma, r<i} \sum_j \lambda_j^r \, t^{i-r} \left(\sum_l c_{jl}^r u_l^r + d_j^r \right) = 0.$$

由于 S 是有限的，经过有限步后，我们得到对所有 $r < i$ 和所有 j 都成立的 $\lambda_j^r = 0$。这表明 $\mathcal{B}^i$ 的像在 F_i 中线性无关。由于 M_i 是 F_i 的子模，证明完成。

□

现在证明 $\mathcal{B}^i$ 中元素的基数有限。这个结果将用于将任意元素 $x \in M_i$ “用 $\{e_j^r\}$ 表示”。

定理 3.18。和 $\sum_{r<i} b_r$ 是有限的。

证明。 反设 $\sum_{r<i} b_r = \infty.$ 。那么在 $\bigoplus_{r<i} M_r/D_r$ 中存在一个无限线性无关族 $\{e_j^r\}_{r<i,\ j\geq 1}$ 。根据推论 3.16,一这个族在 $\bigoplus_{r<i} F_r/D_r'$ 中也线性无关；根据命题 3.17，它的像 $\{t^{i-r}e_j^r\}_{r<i,\ j\geq 1}$ 在 M_i 中线性无关。因此，$\{t^{i-r}e_j^r \otimes 1\}_{r<i,\ j\geq 1}$ 在 $M_i \otimes_R F$ 中线性无关，其中 F 是 R 的分式域。这与假设 $\dim_F(M_i \otimes F) = \dim_R M_i < \infty.$ 矛盾。因此 $\sum_{r<i} b_r < \infty$。

□

在本文余下部分中，当我们提到两个分次 $R[U_0]$-模（即持久模）之间的 $R[U_0]$-同态时，始终指分次 $R[U_0]$-模同态。

4 投射模的基

本节中，我们证明 $\mathcal{B} = \cup_{r\in P} \cup_{j=1}^{b_r} e_j^r$ 为 $M.$ 提供了一个 $R[U_0]$-基。第一步是证明投射模中的每个元素“都可以用不可分解元表示”。下一节将应用这一结果，证明某个模族不是投射的。对于任意 $i \in P$，定义

$$M_{\langle i\rangle} = R[U_0] \cdot M_i$$

使其成为一个自由 $R[U_0]$-模，其基（次数为 i）为 $\widetilde{m}_j$，其中 $\widetilde{m}_j$ 对应于一个基元素 $m_j \in M_i$。

如下定义一个 $R[U_0]$-模同态 $\phi : M_{\langle i\rangle} \longrightarrow M$

$$\phi\left(t^{r-i}\sum_j c_j\widetilde{m}_j\right) = t^{r-i}\sum_j c_j m_j,$$

其中 $c_j \in R$。

这诱导出一个 $R[U_0]$-模同态 $q:\ \bigoplus_{i\in P} M_{\langle i\rangle} \longrightarrow M$ ，由逐坐标求和给出。于是 q 是满射，因为每个 $x \in M$ 都是如下元素的像

$$0 + \cdots + 0 + x + 0 + \cdots \in \bigoplus_{i\in P} M_{\langle i\rangle}$$

其中 x 出现在 $M_{\langle i\rangle}$坐标处。

由于 M 是投射的，存在一个提升 p: $M \longrightarrow \bigoplus_{i\in P} M_{\langle i\rangle}$ ，使得

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{i\in P} M_{\langle i\rangle} & \xrightarrow{q} & M & \longrightarrow & 0 \\ & \nwarrow^{p} & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}_M} & & \\ & & M & & \end{array}$$

根据定义 2.5。我们对从 M 到 $M_{\langle k\rangle}$的一个 $R[U_0]$-模同态作如下两点观察

注 4.1。如果对于任意 $R[U_0]$-模同态，$f:\ M \longrightarrow M_{\langle k\rangle}$ 我们有$f(x) = t^{k-|y_\ell|}y_\ell \neq 0$，$|y_\ell| = k$，那么 $|x| = |f(x)| \geq k$，因为 f是分次的。

注 4.2. 若 x 是可分解的，设为 $x \in D_k$，则任意 $R[U_0]$-模同态 $f:\ M \longrightarrow M_{\langle k\rangle}$ 都满足 $f(x) = 0$。

证明。令 $x = \sum_r t^{k-|d_r|}d_r$，$|d_r| < k$对所有 $r.$成立。于是对所有 r，有 $f(d_r) = 0$，因为 f保持次数，且对所有 $r.$，$(M_{\langle k\rangle})_{|d_r|} = \{0\}$。因此 $f(x) = 0$。 □

结合注 4.1 和注 4.2，我们得到一个元素可分解的充要判据。

引理 4.3. 元素 $x \in M$ 可分解，当且仅当 $p(x) = \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_r$满足 $0 \neq \ell_j \in M_{\langle s_j\rangle}$，$s_j < |x|$对所有 $j.$成立

证明。令

$$p(x) = \sum_{i=1}^{r} \ell_i, \qquad \ell_i = t^{k-s_i}z_i \text{ with } |z_i| = s_i < k.$$

由于 $x = q(p(x))$，其中 q 是求和映射，因此可得 $x \in D_k$。

反过来，令 $x \in D_k$。接着定义 $f_i = \pi_i \circ p : M \longrightarrow M_{\langle i\rangle}$，对于那些满足 $\ell_i \neq 0.$ 的 i。如果 $f_i(x) \neq 0$，那么根据上述论述，我们必有 $i < k$。

□

定义 4.4。我们称可分解元素 $x \in M_k$ 可表示为不可分解元素的形式，如果 $x = \sum_{i=1}^{m} t^{k-\ell_i}x_i$，其中每个 x_i 都是 M_{ℓ_i} 中的不可分解元素，且 $\ell_i < k$。

现在我们得到投射模的可分解元素的一个必要条件。

引理 4.5。任何可分解元素都可以表示为不可分解元素的形式。

证明。令 $x \in D_k.$ 令 $P:\ M \to \oplus_{i\in P}M_{<i>}$ 为本节开头定义的映射。令 $p(x) = 0 + \cdots + 0 + \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_r + 0 + \cdots \in \bigoplus_{i\in P} M_{\langle i\rangle}$,其中 $0 \neq \ell_j \in M_{\langle s_j\rangle}$且 $\ell_j = t^{k-s_j}z_j$，由引理 4.3 得 $|z_j| = s_j < k$。因此$x = q(p(x)) = \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_r.$

令 s_i为 $\{s_1, \ldots, s_r\}$ 中的一个极大元。我们断言 z_i 是不可分解的。反设 z_i 可分解。那么

$$p(z_i) = \sum_{\alpha} h_\alpha, \tag{A}$$

其中 $0 \neq h_\alpha \in M_{\langle\bar{\alpha}\rangle}$ 且 $\bar{\alpha} < s_i$ 对所有 α均成立。现在 $x = \sum_j \ell_j = \sum_j t^{k-s_j}z_j$，推出 $p(x) = \sum_j t^{k-s_j}p(z_j)$，因为 p是一个 $R[U_0]$-模同态。对于 $j \neq i$，写作 $p(z_j) = \sum_\beta a_\beta$，其中 $0 \neq a_\beta \in M_{\langle\bar{\beta}\rangle}$ 且 $\beta \leq s_j$。

(B) $\left\{\right.$ 如果对某个 $j \neq i$， $M_{\langle s_i\rangle}$ 在 $p(z_j)$中的分量非零，那么就会有 $s_i \leq s_j$,

这与 s_i的极大性矛盾。因此，在每个 $p(z_j)$中， $M_{\langle s_i\rangle}$ 对应的分量均为零。

结合 (A) 和 (B)，我们观察到 $M_{\langle s_i\rangle}$ 在 $p(x)$ 中的分量为零，这与我们最初假设 z_i 是可分解的相矛盾。

现在我们可以写成 $\ell_i + \sum_{s_j<s_i} \ell_j = t^{k-s_i} z_i + \sum_{s_j<s_i} t^{k-s_j} z_j = t^{k-s_i} z_i + \sum_{s_j<s_i} t^{k-s_i} t^{s_i-s_j} z_j = t^{k-s_i}\left(z_i + \sum_{s_j<s_i} t^{s_i-s_j} z_j\right)$.。这里 $z_i + \sum_{s_j<s_i} t^{s_i-s_j} z_j$ 也是不可分解的，因为 z_i 是不可分解的，而 $\sum_{s_j<s_i} t^{s_i-s_j} z_j$ 是可分解的。

对每个极大 s_i 重复这一论证，我们得出结论：任何 $x \in D_k$ 都可以表示为不可分解元素的线性组合。

□

注 4.6. 注意，注 *4.1*、*4.2*、引理 *4.3* 和 *4.5* 在 P 是具有相容阿贝尔群结构的预序集时仍然成立。

下面的结果给出了 $R[U_0]$-模 $M.$ 的一组基

命题 4.7. 并集 $\mathcal{B} = \bigcup_{k\in P} \bigcup_{j=1}^{b_r} \{e_j^r\}$ 构成 $M.$ 的一组基

证明. **任意元素 x 都可以写成 $\mathcal{B}$ 中元素的 $R[U_0]$-线性组合：**

若 $x \in M_k$ 但 $x \notin D_k$，则 $0 \neq x = \sum_j c_j\, e_j^k$.。这意味着

$x - \sum_j c_j e_j^k \in D_k$，设 $y = x - \sum_j c_j e_j^k \in D_k.$，则 $x = y + \sum_j c_j e_j^k$，其中$c_j \in R$。根据引理 4.5，元素 y 可以表示为不可分解元素的线性组合，即 $y = \sum_i t^{k-|y_i|}\, y_i, \quad |y_i| < k$，其中每个 $y_i \in M_{|y_i|}$ 都是不可分解的。

每个 y_i 都与 x 处于相同情形，但次数严格更小。重复这一过程，根据定理 3.18，经过有限步后该过程终止。在 $x \in D_k$ 这一显然情形下，我们可以将 x 本身视为 y，论证相同。

因此，在这两种情形下， x 都可以表示为基元素 e_j^r 的线性组合，其系数来自 $R[U_0]$。

表达式的唯一性： 设 $x \in M_k$。设 $x = y + z = y' + z'$，其中y， $y' \in D_k$ 以及 z， $z' \in M_k \setminus D_k$。写作 $z = \sum_\ell d_\ell\, e_\ell^k$ 和 $z' = \sum_j c_j\, e_j^k$.

则 $y - y' = z' - z$，由于 $y - y' \in D_k$，我们有

$$z' - z = \sum_j c_j e_j^k - \sum_\ell d_\ell e_\ell^k = \sum_i a_i e_i^k \text{ [say] } \in D_k.$$

因此 $\sum_i a_i e_i^k = \sum_i a_i e_i^k = 0.$，这意味着所有 $a_i = 0$，因为$\{e_i^k\}$ 在 M_k/D_k 中是线性无关的。因此 $z - z' = 0.$。于是， $z = z'$ 和 $y = y'$。

假设 y 有两种表示

$$\sum_\alpha c_\alpha t^{k-|e_\alpha|} e_\alpha = \sum_\beta d_\beta t^{k-|e_\beta|} e_\beta.$$

因此 $\sum_{\delta\in\alpha\cup\beta}(c_\delta - d_\delta)\ t^{k-|e_\delta|}e_\delta = 0$，其中 $|e_\delta| < k$. 根据命题 3.17，我们得到 $c_\delta = d_\delta$ 对所有 δ均成立，因此该表示是唯一的。

□

4.1 定理 1.2 的证明：

如果 M 是分次自由的，那么它是一个分次自由模（即 $M \oplus 0$）的直和项，因此是分次投射的。

反过来，根据命题 4.7，我们得到 M 的一个齐次基，由此可知 M 是一个分次自由 $R[U_0]$-模。

5 一族非投射的平坦持久模

在本节中，我们给出一族平坦模。我们得到一个判据（引理 5.1），用于判断一个持久模不是投射的。本节最后给出一个持久模的例子（5.8），它是平坦的但不是投射的。这些结果是 [4] 中命题 6.1 和推论 6.4 的推广。除非另有说明，本节假设指标集（$P, \leq$）是一个具有相容的阿贝尔群结构的预序集（根据注 4.6）。

引理 5.1。设 P 是一个格，且 $O \subset P$。假设存在 $a \in O$，使得 $V_a \cap O$ 中的任何元素都不是 O的极小元，其中 $V_a = \{x \in P : \ x \leq a\}$。

设 R 是一个主理想整环，且 M 是一个 $R[U_0]$-模，使得

$$\begin{cases} M_i \neq 0, \textit{ is a finite dimensional free } R \textit{ module}, & i \in O, \\ M_i = 0, & i \notin O. \end{cases}$$

那么 M 不是投射的。

证明。反设，为了导出矛盾，M 是投射的。由于 a 不是 O的极小元，存在 $b < a$ 使得 $b \in O$。由引理 3.1，结构映射$M_b \to M_a$ 是单射。因此，存在一个可分解元素 $z \in M_a$。

由引理 4.5，我们可以写成 $z = \sum_i t^{n_i} z_i$，其中 $\deg(z_i) < \deg(z) = a$，且每个z_i 都不可分解。

现在 $\deg(z_i) \in V_a \cap O$，并且根据假设，$V_a \cap O$ 中的每个元素都不是 O的极小元。因此，对于每个 z_i，都存在一个可分解元素$y \in M_{\deg(z_i)}$。于是我们可以写成 $y = \sum_j t^{m_j} y_j$，其中 $\deg(y_j) < \deg(z_i) < a$，且每个 y_j 都不可分解。

继续这一过程，我们便能得到次数两两不同的无穷多个不可分解元素。因此，我们得到无穷多个线性无关的不可分解元素。

这与定理 3.18 矛盾，也就是说 $\sum_{r<i} b_r < \infty$. 因此，M 不是投射的。

□

定义 5.2. 设 R 是一个主理想整环， $A \subset P$ 是一个凸子集。 A 上的示性持久模是持久模 R_A： $P \to$ 模$_R$，定义为 $(R_A)_a = R$，若 $a \in A$ 则取该值，否则取0；所有映射 $(R_A)^{a \le b}$，其中 a、$b \in A$，均为恒等映射。

定义 5.3. 设 U_i 为一个主上集， R_{U_i} 为由生成元 x_i生成的自由 $R[U_0]$-模，其中 $\deg(x_i) = i$。考虑族 $\{R_{U_i}\}_{i \in U}$ 及由包含映射 $U_j \subseteq U_i$ （$i \le j$）诱导的 $R[U_0]$-模同态 $f_{ji}: R_{U_j} \to R_{U_i}$，定义如下:

$$f_{ji}(x_j) = t^{j-i} x_i.$$

定义

$$\operatorname{colim}_{i \in U} R_{U_i} := \left(\bigoplus_{i \in U} R_{U_i} \right) / N,$$

其中 N 是由 $\{x - f_{ji}(x) : x \in R_{U_j},\ i \le j\}$ 生成的子模（见引理 *10.8.2, [18]*）。

以下结果将上集 U 上的指示模 R_U 表示为若干指示模的余极限。

命题 5.4. 设 $U \subset P$ 为一个上集，则 余极限$_{i \in U} R_{U_i} = R_U$

证明. 记 $C =$余极限$_{i \in U} R_{U_i}$. 我们写作

$$C = \bigoplus_{s \in P} C_s, \text{ so } C_s = \left(\bigoplus_{i \in U} (R_{U_i})_s \right) / N_s,$$

其中 $N_s = N \cap \bigoplus_{i \in U} (R_{U_i})_s$. **情形 1**。若 $s \notin U$，则对所有 $i \in U$，都有 $(R_{U_i})_s = 0$，因此 $C_s = 0$。

情形 2。若 $s \in U$，则

$$(R_{U_i})_s = \begin{cases} R, & i \le s, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此 $\bigoplus_{i \in U} (R_{U_i})_s = \bigoplus_{\substack{i \in U \\ i \le s}} R$，而定义 N_s 的关系将所有直和项视为相同，因此 $C_s \cong R$。

现在我们将恒等元 $1 \in (R_U)_s = R$ 记为 y_s。我们定义一个从 R_{U_i} 到 R_U 的 $R[U_0]$-模同态，将 x_i 映到 y_i。这诱导出一个从 C 到 R_U 的 $R[U_0]$-模同构。

□

我们回顾一个构造平坦模的充分条件（见引理 6.3, [4]）。

引理 5.5。分次投射模的余极限是 $\otimes_{\mathrm{gr}}$-平坦的。

结合命题 5.4 和引理 5.5，我们证明了上集 U 的指示模 R_U 的平坦性。

推论5.6。 对于 P 的任意上集 U， R_U 是一个关于 $R[U_0]$ 的分次平坦持久模。

证明。 由于任意主上集对应的指示模都是分次自由的，故证明显然。

□

由于平坦模的直和仍是平坦的，我们将推论5.6推广为一个更一般的结果。

推论5.7。 若 $\{U_l\}_{l\in L}$ 是 P 中的上集，则 $\oplus_{l\in L}R_{U_l}$ 是一个平坦模。

下面给出一幅图（图：1），展示不是投射模的平坦模。

例5.8。 沿用推论*5.7*中的记号，我们考虑如下定义的一族 U_ℓ 和 U_ℓ，其中每个都是一个上集。令 $\mathcal{L}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中负x轴与负 y 轴的并集。对每个 $\ell \geq 0$，令 $\mathcal{L}_\ell$ 表示将 $\mathcal{L}$ 平移 (ℓ, ℓ) 所得的集合。

定义 $\overline{U_\ell}$ 为上集

$$\overline{U}_\ell = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \geq (x_0,y_0) \text{ for some } (x_0,y_0) \in \mathcal{L}_\ell\big\},$$

它是一个上集。令 $U_\ell := U_\ell \setminus \overline{\mathcal{L}}_\ell$. 则 R_{U_ℓ} 与R_{U_ℓ} 均为平坦的（由推论*5.6*），且 R_{U_ℓ} 不是投射的（利用引理 *5.1*），其中取 a 为$(\ell{+}1, \ell{+}1)$。现在我们令 L_1、$L_2 \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ 满足 $L_1 \cap L_2 = \varnothing$ 与 $0 \in L_1$。在下图中，我们考虑直和

$$\left(\bigoplus_{\ell\in L_1} R_{U_\ell}\right) \oplus \left(\bigoplus_{\ell\in L_2} R_{\overline{U}_\ell}\right).$$

根据推论*5.7*，这得到一个平坦模；由于存在 R_{U_0}，它并非投射模。

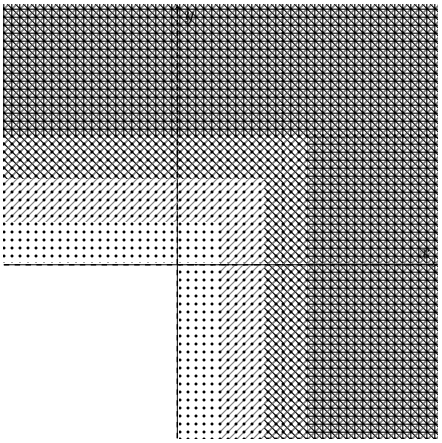


图1：平坦但非投射模

6 算法

本节给出两种算法，用于判断给定的、定义在实数域 $\mathbb{R}$ 上且指标集为 $\mathbb{Z}$或 $\mathbb{Z}^2$ 的持久模是否为分次自由模，并计算其基。基的构造与定理 1.2 中的类似。不过，本节用两组充分判据取代了投射性这一假设。满足这些判据时，我们先证明分次自由性，然后介绍相应的算法及其复杂度。

6.1 当指标集为 $\mathbb{Z}$ 时

若 M 是一个以 $\mathbb{R}$ 为底域、以 $\mathbb{Z}$ 为指标集的持久模，那么按照 § 2.3 的术语，M 是一个 $\mathbb{R}[t]$–模，其中 $U_0 = \mathbb{Z}_{\geq 0}$。

命题 6.1. 设 $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ 是一个以 $\mathbb{R}$ 为底域、以 $\mathbb{Z}$ 为指标集的持久模，并且对所有 i，维数$_{\mathbb{R}} M_i = d_i < \infty$ 。假设：

1. 对于 $i < \alpha, \quad M_i = 0$;
2. 对任意 $i, \quad f_{i,\ i+1}$ ： $M_i \to M_{i+1}$ 是单射；
3. 存在 $\beta \in \mathbb{Z}$ ，使得对于 $i > \beta$, $f_{i,\ i+1}$ 是一个同构。

那么 M 是分次自由的。

证明。持久模 M 是一个 $\mathbb{R}[t]$上的模。对于任意 $r \in \mathbb{Z}$ ，定义$D_r = \sum_{k<r}$Im$(M_k \to M_r)$ = Im$(M_{r-1} \to M_r)$。存在一个子空间 C_r ，使得 $M_r = D_r \oplus C_r$。令 $\{e_1^r, e_2^r, \ldots, e_{b_r}^r\}$为定义 3.11 中的不可分解元素，它们构成 C_r的一组基。由 (1) 和 (3)，集合 $\mathcal{B} = \{e_j^r : 1 \leq j \leq b_r,\ r \in \mathbb{Z}\}$ 是有限的。令 $x \in M_k \setminus D_k$。那么存在系数 c_j^k ，使得$x - \sum_{j=1}^{b_k} c_j^k e_j^k = y \in D_k$. 若 $y \neq 0$，则存在 $x' \in M_\ell$ ，满足 $\ell < k$ ，使得$t^{k-\ell}x' = y,\ x' \notin D_\ell$. 。我们对 x'重复相同的过程。由于对所有 $i < \alpha, \quad M_i = 0$ ，这一过程会在有限步后终止。若 $x \in D_k$，则应用相同的论证。因此， M_k 中的任意元素都可以用 $\mathcal{B}$中的元素表示。因此，M 是一个在 $\mathbb{R}[t]$ 上有限生成的模。由于每个$f_{i,i+1}$ 都是单射，可知$f_{i,j}$ 对 $i < j$是单射。这说明 M 是无挠的。因此，根据主理想整环上有限生成模的基本定理， M 是自由的。剩下要证明的是 $\mathcal{B}$ 是一组基。

只需证明

$$\sum_{j=1}^{m} c_j^r\, t^{\,i-r} e_j^r = 0 \qquad (*)$$

推出所有 $c_j^r = 0$。我们对 m 进行归纳证明。假设该命题对所有小于 m的自然数都成立。将元素 e_j^r 按次数升序排列，并

令最后几个元素 e^{σ}_{m-s+1}、……、e^{σ}_{m} 具有最高次数 σ。由（$*$）可得 $t^{i-\sigma}\Big(\sum_{j=1}^{m} c_j^r\, t^{\sigma-r} e_j^r\Big) = 0$，因此由单射性可得 $\sum_{j=1}^{m} c_j^r\, t^{\sigma-r} e_j^r = 0$。于是

$$\sum_{j=m-s+1}^{m} c_j^{\sigma} e_j^{\sigma} = -\sum_{j=1}^{m-s} c_j^r\, t^{\sigma-r} e_j^r \in D_{\sigma}.$$

转到 M_σ/D_σ 得到 $\sum_{j=m-s+1}^{m} c_j^{\sigma}\, e_j^{\sigma} = \overline{0}$，因此对于 $j = m-s+1$，…，m，有 $c_j^{\sigma} = 0$。由此 $\sum_{j=1}^{m-s} c_j^r\, t^{\sigma-r} e_j^r = 0$，根据归纳假设，所有 $c_j^r = 0$。因此，$\mathcal{B}$ 是 M 的基，且 M 是分次自由的。 □

现在我们根据命题 6.1 中给出的构造，陈述一种求基的算法。

算法 1： 求 M 的 $\mathbb{R}[t]$-基

输入： 矩阵（A_i）$_{d_{i+1}\times d_i}$ 对于 $\alpha \le i \le \beta$。

输出： M 的 $\mathbb{R}[t]$-基 B

初始化 $B \leftarrow$ 列 I_{d_α};
对于 $i = \alpha, \alpha+1, \ldots, \beta$ **执行**
    $R_i|E_i \leftarrow$简化行阶梯形$\big(A_i|I_{d_{i+1}}\big)$;
    $r_i \leftarrow$ R_i 的非零行数;
    如果 $r_i < d_i$ **则**
        停止算法;
    else
        $P_i \leftarrow$ 从 I_d左侧截去前 r_i 列 $_{i+1}$;
        $B \leftarrow B \cup \big(E_i^{-1} \times P_i\big)$的列;
返回 B

算法2： 简化行阶梯形(A)

输入： $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

输出： A 为简化行阶梯形

对于 $i = 1$ **到** m **执行**
    如果 行 $i \neq 0$ **则**
        缩放行 i 以创建主元;
        清除所有其他行中的主元列;
交换行以获得阶梯排序;
返回 A

现在我们来计算上述算法的复杂度。

命题 6.2. 令 $N = \beta - \alpha + 1$ 表示分次指标的数量，并令$D =$ 最大值$_{\alpha\le i\le\beta}\, d_i$. 那么，算法 *1* 至多经过 $O(ND^3)$ 次算术运算后终止，运算均在 $\mathbb{R}$ 上进行。

证明。我们逐步分析该算法。初始化 B ←列 I_{d_α} 需要构造一个阶数至多为 D 的单位矩阵，其

耗费 $O(D^2)$ 次运算。循环遍历 $N = \beta - \alpha + 1$ 个索引。对于每个 i，算法计算 $\mathrm{RREF}(A_i \mid I_{d_{i+1}})$。其中 $A_i \in \mathbb{R}^{d_{i+1} \times d_i}$，因此增广矩阵的大小为 $d_{i+1} \times (d_i + d_{i+1})$。由于 $d_i,\ d_{i+1} \le D$，该矩阵至多有 D 行和 $2D$ 列。通过高斯消元计算此类矩阵的行最简阶梯形需要 $O(D^3)$ 次算术运算（参见 [11]）。每次迭代中的其他步骤包括统计非零行、截取单位矩阵的列、将 E_i^{-1} 与选定的列相乘，以及更新集合 B；每项操作均至多需要 $O(D^2)$ 次运算。这些操作的开销均不及 RREF 计算。

由于循环执行 N 次，且每次迭代需要 $O(D^3)$ 次操作，因此总体复杂度为 $O(ND^3)$。 □

6.2 当指标集为 $\mathbb{Z}^2$ 时

设 M 是一个以 $\mathbb{Z}^2$ 为指标集、取值于 $\mathbb{R}$ 的持久模。那么存在实线性映射

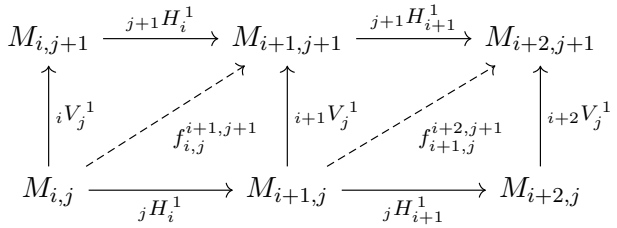
$$f_{(i,j)}^{(i+r,j+s)} : M_{i,j} \to M_{i+r,j+s},$$

它们分别是从 $M_{i,\,j}$ 到 $M_{i+1,\,j}$ 的水平映射与从 $M_{i,\,j}$ 到 $M_{i,\,j+1}$ 的垂直映射的复合。我们将从 $M_{i,\,j}$ 到 $M_{i+r,\,j}$ 的线性映射记为 ${}_jH_i^r$，将从 $M_{i,\,j}$ 到 $M_{i,\,j+s}$ 的线性映射记为 ${}_iV_j^s$。

为了确保给定持久模的自由性，我们需要加入一个判据，该判据类似于指标集为 $\mathbb{Z}$ 时的单射性。为简化问题，我们得到以下结果。

引理 6.3. 假设 $\mathrm{Im}({}_{j+1}H_i^1) \cap \mathrm{Im}({}_{i+1}V_j^1) = \mathrm{Im}\big(f_i^{(i+1,j+1)}(i,j)\big)$，其中 ${}_{i+1}V_j^1 \circ {}_jH_i^1 = {}_{j+1}H_i^1 \circ {}_iV_j^1$。那么对于任意 $r, s \in \mathbb{N}$，$\mathrm{Im}({}_{j+s}H_i^r) \cap \mathrm{Im}({}_{i+r}V_j^s) = \mathrm{Im}\big(f_i^{(i+r,j+s)}(i,j)\big)$.

证明。 只需证明 $r = 2, s = 1$ 的情形，因为一般情形可通过类似的图追踪得出。



设 $x \in \mathrm{Im}({}_{j+1}H_i^2) \cap \mathrm{Im}({}_{i+2}V_j^1)$。那么，对于某个 $y \in M_{i,\,j+1}$，有 $x = {}_{j+1}H_i^2(y)$。因此

$${}_{j+1}H_{i+1}^1\big({}_{j+1}H_i^1(y)\big) \in \mathrm{Im}({}_{j+1}H_{i+1}^1) \cap \mathrm{Im}({}_{i+2}V_j^1).$$

由假设及 ${}_{j+1}H_{i+1}^1$的单射性，${}_{j+1}H_i^1(y) \in \mathrm{Im}({}_{i+1}V_j^1)$。再次将假设应用于交换图的第一个方块，并利用

${}_{j+1}H_i^1$的单射性，存在$z \in M_{i,\ j}$使得$y = {}_iV_j^1(z)$。因此，

$$x = {}_{j+1}H_i^2(y) = {}_{j+1}H_i^2\big({}_iV_j^1(z)\big) = f_{(i,j)}^{(i+2,j+1)}(z).$$

因此 $x \in \mathrm{Im}\big(f_{i}^{(i+2,j+1)}{}_{(,\ j)}\big)$，这就证明了该断言。 □

现在我们陈述使一个持久模成为自由模的一组充分条件。由于指标集是 $\mathbb{Z}^2$，按照 § 2.3 的术语，我们有 $U_0 = \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$。因此 M 是一个分次 $\mathbb{R}[x,y]$-模。

命题 6.4. 设 $\alpha < \beta$ 和 $\gamma < \delta$。假设 $A = \{(i,j) \mid i < \alpha\}$, $B = \{(i,j) \mid i > \beta\}$, $C = \{(i,j) \mid j < \gamma\}$, $D = \{(i,j) \mid j > \delta\}$. 设 $M_{ij} = 0$ 对所有 $(i,j) \in A \cup C$ 成立，并且 $\dim_{\mathbb{R}} M_{ij} = d_{ij} < \infty$ 对所有 i,j. 成立。设映射 ${}_jH_i^1 \colon M_{i,j} \to M_{i+1,j}$, ${}_iV_j^1 \colon M_{i,j} \to M_{i,j+1}$ 定义如下

$${}_jH_i^1 = \begin{cases} 0, & (i,j) \in A \cup C, \\ \text{an isomorphism}, & (i,j) \in B \setminus C, \\ {}_\delta H_i^1, & (i,j) \in D \setminus (A \cup B), \end{cases} \qquad \text{and}$$

$${}_iV_j^1 = \begin{cases} 0, & (i,j) \in A \cup C, \\ \text{an isomorphism}, & (i,j) \in D \setminus A, \\ {}_\beta V_j^1, & (i,j) \in B \setminus (C \cup D). \end{cases}$$

令 $R = \mathbb{Z}^2 \setminus (A \cup B \cup C \cup D)$。在矩形 R 上，所有映射都是单射。进一步假设

$$\mathrm{Im}({}_{j+1}H_i^1) \cap \mathrm{Im}({}_{i+1}V_j^1) = \mathrm{Im}\big(f_{(i,j)}^{(i+1,j+1)}\big)$$

对所有 $(i,j) \in R$ 都成立。于是 M 是分次自由的。

证明。在每个 $M_{k,\ell}$ 中选取元素 $e_j^{(k,\ell)}$, $j = 1, \ldots, b_{k,\ell}$，使得 $\{e_j^{(k,\ell)}\}$ 构成 $\overline{M_k}$, $\ell/D_{k,\ell}$ 的一组基。注意，对于所有 $(k,\ell) \notin R$，都有 $M_{k,\ell}/D_{k,\ell} = 0$。设 $z \in M_{r,s}$ 满足 $r,s \geq 0$。那么 $z = \mathrm{Im}(x^i y^j(z'))$，其中某些 $z' \in M_{r',s'}$ 满足 (r',s') 位于 R 的边界上，因为从 (r',s') 到 (r,s) 可以经过同构。因此，只需考虑满足 $(r,s) \in R$ 的 $z \in M_{r,s}$。若 $z \notin D_{r,s}$，则选取 $\{e_j^{(r,s)}\}$ 使得

$$z - \sum_{j=1}^{b_{r,s}} c_j^{(r,s)} e_j^{(r,s)} = z_1 \in D_{r,s}.$$

然后 $z_1 = {}_sH_{r-1}^1(y_1) + {}_rV_{s-1}^1(y_2)$，其中 $|y_1|,\ |y_2| < |z|$。我们对 y_1 和 y_2重复相同的步骤。由于 R 中的元素个数是有限的，并且对于 $(k,\ \ell) \in A \cup C$, $M_{k,\ \ell} = 0$，该过程会在有限步之后终止。剩下的工作是证明唯一性。

只需证明

$$\sum_{j=1}^{b} c_j^{(k_j,l_j)} x^{r-k_j} y^{s-l_j} e_j^{(k_j,l_j)} = 0 \qquad (\#)$$

推出所有系数 $c^{(k_j,l_j)}{}_j = 0$。设

$$S := \{(k_j, l_j) : \text{those indices which occur as indices of } e_j^{(k_j,l_j)} \text{ in } (\#)\}.$$

写出 $\max S = (M_1, M_2)$，$\min S = (m_1, m_2)$。注意 (M_1, M_2)，$(m_1, m_2) \in R$。假设 (r, s) 位于 R 的右侧或上方。那么我们可以将 (#) 写为

$$x^{r-M_1} y^{s-M_2} \left(\sum_{j=1}^{b} c_j^{(k_j,l_j)} x^{M_1-k_j} y^{M_2-l_j} e_j^{(k_j,l_j)} \right) = 0.$$

由映射 H 和 V 的单射性可知，这意味着 $\sum_{j=1}^{b} c^{(k_j,l_j)}{}_j \; x^{M_1-k_j} y^{M_2-l_j} e^{(k_j,l_j)}{}_j = 0$。因此，只需选取 $(r, s) = (M_1, M_2)$。

情况 1。存在 $a \in \{1, 2, \ldots, b\}$，使得对于 $j = a+1, a+2, \ldots, b,$，有 $(k_j, l_j) = (M_1, M_2)$，也就是说，(#) 的求和中 (M_1, M_2) 出现于最高次数处。于是

$$\sum_{j=a+1}^{b} c_j^{(k_j,l_j)} e_j^{(k_j,l_j)} = -\sum_{j=1}^{a} c_j^{(k_j,l_j)} x^{M_1-k_j} y^{M_2-l_j} e_j^{(k_j,l_j)} \in D_{M_1,M_2}.$$

这很容易推出 $c^{(k_j,l_j)}{}_j = 0$ 对于 $j = a+1, \ldots, b$。剩下需要证明的内容将在情形 2 中证明。

情形 2。假设 $a = b$。对于两个元素，基本情形为 $c^{(k_1,l_1)}{}_1 \; x^{M_1-k_1} y^{M_2-l_1} e^{(k_1,l_1)}{}_1 + c^{(k_2,l_2)}{}_2 \; x^{M_1-k_2} y^{M_2-l_2} e^{(k_2,l_2)}{}_2 = 0.$ 由映射的单射性，并对角点为 $M_{(m_1,m_2)}$、$M^2_{(k_1,l_1)}$、$M_{(k_2,l_2)}$ 和 $M_{(M_1,M_2)}$ 的交换图应用引理 6.3，可得若 $c^{(k_1,l_1)}{}_1 \neq 0$，则 $e^{(k_1,l_1)}{}_1$ 可分解，这与假设矛盾。因此 $c^{(k_1,l_1)}{}_1 = 0$。只需证明以下情形：(#) 中某些系数既不含 x 的正幂，也不含 y 的正幂。我们将含有 x 正幂的项放在左边，将不含 x 正幂的项放在右边。因此，(#) 可写为 $x^i(E) = y^j(F)$，其中 F 在相应次数下不可分解。对角点为 $M_{(M_1,M_2)}$、$M_{(M_1-i,M_2)}$、$M_{(M_1,M_2-j)}$ 和 $M_{(M_1-i,M_2-j)}$ 的交换图应用引理 6.3，并结合映射的单射性，可得 F 属于 $M_{(M_1-i,M_2-j)}$ 的像，因此可分解，这与假设矛盾。

□

首先，我们需要检验命题 6.4 的假设是否得到满足。假设 $\mathrm{Im}({}_{j+1}H_i^1) \cap \mathrm{Im}({}_{i+1}V_j^1) = \mathrm{Im}\big(f_i^{(i+1,j+1)}{}_{(,j)}\big)$ 等价于如下事实：$\dim(\mathrm{Im}({}_{j+1}H_i^1) \cap \mathrm{Im}({}_{i+1}V_j^1)) = \dim(\mathrm{Im}({}_{j+1}H_i^1)) + \dim(\mathrm{Im}({}_{i+1}V_j^1)) - \dim(\mathrm{Im}({}_{j+1}H_i^1) + \mathrm{Im}({}_{i+1}V_j^1))$ 等于 $d_{i,j}$.

算法 3： 求出 M 的 $\mathbb{R}[x,y]$-基

输入： 矩阵 $({}_jH_i^1)_{d_{i+1,j}\times d_{i,j}}$ 以及 $({}_iV_j^1)_{d_{i,\ j+1}\times d_{i,\ j}}$，对于 $\alpha\le i\le\beta$ 和 $\gamma\le j\le\delta$

输出： B 的一个 $\mathbb{R}[x,y]$-基

初始化 I_d 的 $B\leftarrow$ 列 $_{\alpha,\gamma}$;

对于 $i=\alpha,\alpha+1,\dots,\beta$ **执行**

  对于 $j=\gamma,\gamma+1,\dots,\delta$ **执行**

    如果 ${}_{i+1}V_j^1\times{}_jH_i^1\neq{}_{j+1}H_i^1\times{}_iV_j^1$ **则**

      停止算法;

    $\overline{{}_jH_i^1}\leftarrow$ 简化行阶梯形$({}_jH_i^1)$;

    $h_{i,j}\leftarrow$ ${}_jH_i^1$的非零行数;

    如果 $h_{i,j}<d_{i,j}$ **则**

      停止算法;

    $\overline{{}_iV_j^1}\leftarrow$ 简化行阶梯形$({}_iH_j^1)$;

    $v_{j,i}\leftarrow$ ${}_iV_j^1$的非零行数;

    如果 $v_{j,i}<d_{i,j}$ **那么**

      停止算法;

    $R_{i,j}\mid E_{i,j}\leftarrow$ 简化行阶梯形 $\left(({}_{j+1}H_i^1\mid{}_iV_{j+1}^1)\mid I_{d_{i+1\ j+1}}\right)$;

    $r_{i,\ j}\leftarrow$ 非零行的数量$R_{i,\ j}$;

    如果 $r_{i,\ j}<d_{i+1,\ j}+d_{i,\ j+1}-d_{i,\ j}$ **则**

      停止算法;

    else

      $P_{i,\ j}\leftarrow$从$I_{d_{i+1,\ j+1}}$左侧截去前 $r_{i,\ j}$ 列;

      $B\leftarrow B\cup\left(E_i^{-1}{}_{,\ j}\times P_i\text{ 的列}_{,\ j}\right)$;

返回 B

我们现在计算上述算法的复杂度。

命题 6.5。 设 $N=(\beta-\alpha+1)(\delta-\gamma+1)$ 表示双分次指标的数量，并令 $D=$ 最大值$_{i,\ j}\,d_{i,\ j}$. 则算法 *3* 至多执行 $O(ND^3)$ 次实数域上的算术运算。

证明。 我们估算算法每一步的开销。构造单位矩阵 $I_{d_{\alpha,\ \gamma}}$ 至多需要 $O(D^2)$ 次运算。对于双重循环，指标 $(i,\ j)$ 至多遍历 $N=(\beta-\alpha+1)(\delta-\gamma+1)$ 个数对：

(i) 交换性检验。 条件 ${}_{i+1}V_j^1\,{}_jH_i^1={}_{j+1}H_i^1\,{}_iV_j^1$ 要求对矩阵进行乘法运算，其维数至多为 D。每次乘法需要$O(D^3)$ 次运算。

（*ii*）秩验证。矩阵 ${}_jH_i^1$和 ${}_iV_j^1$的大小至多为 $D\times D$。因此，计算它们的行最简阶梯形分别需要 $O(D^3)$ 次运算（见 [11]）。

(iii) 核计算。 该算法计算 ${}_{j+1}H_i^1\mid{}_iV_{j+1}^1$ 的简化行阶梯形 $($ $\mid$

$I_{d_{i+1},\,j+1}\big)$·增广矩阵至多有 D 行和 $3D$ 列。对这样的矩阵进行高斯消元需要 $O(D^3)$ 次算术运算（见 [11]）。*(iv)* 其余运算。统计非零行、截取单位矩阵、与 E_i^{-1}, $_j$进行矩阵乘法，以及更新集合 B ，每项最多需要$O(D^2)$次运算，其复杂度均不超过上述约化步骤。

由于双重循环的每次迭代需要 $O(D^3)$ 次操作，且最多迭代 N 次，因此总运行时间为 $O(ND^3)$。 □

致谢

Giriraj Ghosh 衷心感谢印度政府大学拨款委员会（UGC）通过博士奖学金提供的资助（NTA 参考编号：231610064231）。作者感谢 Bodhayan Roy 对论文中算法部分提出的建议。

参考文献

[1] B. Blanchette、T. Br¨ustle 和 E. J. Hanson，《持久模的正合结构》，arxiv:2308.01790v3。[2] P. Bubenik 和 J. A. Scott，《持久同调的范畴化》，离散与计算几何，51(3):600–627，2014。https://link.springer.com/article/10.1007/s00454-014-9573-x[3] P. Bubenik、V. de Silva 和 J. Scott，《广义持久模的度量》，计算数学基础，15(6):1501–1531，2015。doi:10.1007/s10208-014-9229-5。[4]P. Bubenik 和 N. Mili`cevi´c，《持久模的同调代数》，计算数学基础，21(5):1233–1278，2021。doi:10.1007/s10208-020-09478-8。[5] G. Carlsson 和 A. Zomorodian，《多维持久性的理论》，离散与计算几何，42(1):71–93，2009。doi:10.1007/s00454-009-9176-0。[6] F. Chazal、V. de Silva、M. Glisse 和 S. Oudot，《持久模的结构与稳定性》，*Springer*数学简明丛书，Springer，沙姆，2016。doi:10.1007/978-3-319-42545-0。[7]W. Crawley-Boevey，《逐点有限维持久模的分解》，代数及其应用杂志，14(5):1550066，2015。doi:10.1142/S0219498815500668。[8] J. M. Curry，《层、余层及其应用》，博士论文，宾夕法尼亚大学，2014。arXiv:1303.3255。

[9]T. K. Dey 和 Y. Wang，《数据分析的计算拓扑学》，剑桥大学出版社，英国剑桥，2022。doi:10.1017/9781009099950。[10] P. Gabriel，《不可分解表示 I》，数学手稿，6(1):71– 103，1972。doi:10.1007/BF01298413。[11] E. Jacquard、V. Nanda 和 U. Tillmann，《持久模的条形码基空间》，应用与计算拓扑学杂志，7:1–30，2023。doi:10.1007/s41468-022-00094-6。[12]T. Y. Lam，《Serre 猜想》，数学讲义，第 635 卷，Springer，柏林，1978。https://link.springer.com/book/10. 1007/BFb0068340[13] M. Lesnick，《多维持久模上交错距离的理论》，计算数学基础，15(3):613–650，2015。doi:10.1007/s10208-015-9255-y。[14] M. Lesnick 和 M. Wright，《二维持久模的交互式可视化》，arXiv:1512.00180。。[15] E. Miller，《偏序集上模的同调代数》，*SIAM* 应用代数与几何杂志，4(2):399–466，2020。doi:10.1137/19M1284080。[16] C. N˘ast˘asescu 和 F. Van Oystaeyen，《分次环的方法》，数学讲义，第 1836 卷，Springer，柏林–海德堡，2004。SpringerLink。[17]J.-P. Serre，《相干代数层》，数学年刊，61(2):197–278，1955。https://www.jstor.org/stable/1969915[18]Stacks Project 作者，《*Stacks Project*》，https://stacks.math.columbia.edu。[19]C. Webb，《分次模的分解》，美国数学会会刊，94(4):565–571，1985。doi:10.1090/S0002-9939-1985- 0786058-3。[20] A. Zomorodian 和 G. Carlsson，《持久同调的计算》，离散与计算几何，33(2):249–274，2005。doi:10.1007/s00454-004-1146- y。