arXiv:2603.02677v1 [math.AP] 3 Mar 2026

可逆化学反应所产生的耦合非局部抛物型系统的整体解

Redouane Douaifia[a]、Salem Abdelmalek[b]、Mokhtar Kirane[c]

(a) 阿卜杜勒哈菲德·布苏夫国家电信与信息通信技术高等学院，阿尔及利亚奥兰 *(b)* 数学系，*LAMIS*实验室，烈士谢赫拉尔比·泰贝西大学，阿尔及利亚泰贝萨 *(c)* 数学系，哈利法大学计算与数学科学学院，邮政信箱：*127788*，阿联酋阿布扎比 电子邮箱：*redouane.douaifia@ensttic.dz; salem.abdelmalek@univ-tebessa.dz; mokhtar.kirane@ku.ac.ae*

摘要

本文研究有界区域上由可逆化学反应导出的一类耦合时空分数阶反应扩散系统。主要通过采用适当的 Lyapunov 泛函和改进的最大值原理，我们证明了在对系统参数作出若干假设的条件下，强解具有全局存在性。

关键词：整体存在性，反应扩散，分数阶拉普拉斯算子，时间分数阶卡普托导数。*2010*年数学主题分类：35K58,35B50,26A33, 60G22.

1. 引言

本文研究一类耦合时空分数阶抛物型反应扩散系统非负强解的全局存在性

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{\rho}_{0|t}u + d_u(-\Delta)^{\sigma_1}u = (\alpha_2-\alpha_1)(k_f u^{\alpha_1}v^{\beta_1} - k_b u^{\alpha_2}v^{\beta_2}) & \text{in } \Omega\times(0,\infty),\\ \mathcal{D}^{\rho}_{0|t}v + d_v(-\Delta)^{\sigma_2}v = (\beta_2-\beta_1)(k_f u^{\alpha_1}v^{\beta_1} - k_b u^{\alpha_2}v^{\beta_2}) & \text{in } \Omega\times(0,\infty),\\ \lambda u + (1-\lambda)\nabla u\cdot\nu = \lambda v + (1-\lambda)\nabla v\cdot\nu = 0 & \text{on } \Gamma\times(0,\infty),\\ u(\cdot,0)=u_0,\ v(\cdot,0)=v_0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

该系统源于可逆化学反应

$$\alpha_1 U + \beta_1 V \underset{k_b}{\overset{k_f}{\rightleftharpoons}} \alpha_2 U + \beta_2 V, \tag{1.2}$$

其中 $u := u(x,t)$ 与 $v := v(x,t)$ 分别表示物种 U和 V 的浓度。这里， α_i、 $\beta_i \geq 0$ 为化学计量系数， k_f、 $k_b > 0$ 为反应速率， d_u、 $d_v > 0$ 表示扩散系数。区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个有界光滑开集，且对 $1 \leq N \in \mathbb{N}$ 有 $\Gamma := \partial\Omega$ 或 $\Gamma := (\mathbb{R}^N \setminus \Omega)$。时间导数算子 $\mathrm{D}^{\rho}_{0|t}$ 是阶数为 $0 < \rho \leq 1$ 的卡普托分数阶导数（见 [1, 定义 2.1.1 与注记 2.1.2]）

$$\mathcal{D}^{\rho}_{0|t}u(x,t) := \frac{1}{\Gamma(1-\rho)}\int_0^t (t-\tau)^{-\rho}\partial_\tau u(x,\tau)\,d\tau, \quad x\in\Omega, \quad t>0. \tag{1.3}$$

此外，空间算子 $(-\Delta)^{\sigma}$ （其中 $\sigma = \sigma_1$ 或 $\sigma = \sigma_2$）表示与齐次狄利克雷边界条件 ($\lambda = 1$) 或诺伊曼边界条件 ($\lambda = 0$) 相对应的谱分数阶拉普拉斯算子，其定义通过经典拉普拉斯算子 $-\Delta$ 的谱给出（见 [1, 例 2.3.8]）。设 $\{\mu_k, e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为经典狄利克雷或诺伊曼拉普拉斯算子的特征对。我们还引入以下分数阶索伯列夫空间：

$$H^{\sigma}(\Omega) := \left\{ w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n e_n \in L^2(\Omega) \ : \ \|w\|_{H^{\sigma}(\Omega)} := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{\sigma} w_n^2 < +\infty \right\}, \tag{1.4}$$

其中 $\sigma \in (0,1)$ 且 $w_n = \int_\Omega w(x) e_n(x)\,dx$。那么，谱分数阶拉普拉斯算子定义在空间 $H^\sigma(\Omega)$ 上如下：

$$(-\Delta)^\sigma w(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^\sigma w_n e_n(x), \tag{1.5}$$

其定义域（对于 $\lambda \in \{0, 1\}$）为

$$\mathcal{D}\left((-\Delta)^\sigma\right) = \{w \in H^\sigma(\Omega) \ : \ \lambda w + (1-\lambda)\nabla w \cdot \nu = 0\}. \tag{1.6}$$

经典反应–扩散系统已广泛应用于物理学、生物学、生态学和化学等多个领域（参见 [2, 3, 4]）。然而，随着研究的深入，人们逐渐认识到，这些模型不足以充分刻画某些系统的复杂性。

值得一提的是，过去35年来，众多作者广泛关注了系统（1.1）所描述类型的经典反应扩散模型（即$\rho = \sigma_1 = \sigma_2 = 1$）的整体存在性。重要贡献包括 Kirane [9], Kouachi [14, 16], Pierre [15], Craciun 等人 [17], 的研究，另请参见其中的参考文献。

另一方面，扩散过程源于分子随机运动，而随机游走模型是描述微观尺度扩散现象的基础框架。基于这些模型，可以推导出能够准确刻画反常扩散行为的确定性分数阶扩散方程。此外，由于系统的过去历史可能影响其动态行为，因此适宜通过关于时间的分数阶导数将这些记忆效应纳入模型（参见 [8]；更多详情请参见 [1, 附录 C]）。

因此，研究关于时间和空间均包含分数阶导数的反应–扩散系统颇有意义，这类系统可用非局部算子表示（即函数的支撑集不保持不变）。

据我们所知，只有少数研究探讨了有界区域上分数阶时空反应–扩散系统的整体存在性（例如，Gal 等 [1], Ahmad 等 [10], Alsaedi 等 [11], Kirane 等 [12], 及其中的参考文献）。最近，Daoud 等 [22, 21] 在这一领域取得了显著进展，研究了情形 $\rho = 1$（经典时间导数），以及谱形式和Riesz形式下的分数阶拉普拉斯算子。然而，他们的结果并未涵盖系统（1.1）所描述的情形。

相比之下，系统（1.1）解的全局存在性尚未得到证明。本文基于解的局部存在性与正性，并在对系统参数作出若干假设的条件下，利用适当的 Lyapunov 泛函和改进的最大值原理推导先验 L^∞估计。这些估计给出了系统（1.1）的整体存在性结论。

1.1. 主要结果

定理 1. 设 $0 < \rho \le 1$, $\sigma_1, \sigma_2 \in (0,1)$，且 $u_0, v_0 \in C(\bar{\Omega})$，其中 $0 \le u_0, v_0 \le \Lambda < +\infty$ 对几乎处处的 $x \in \Omega$ 成立，并满足 $u_0, v_0 \not\equiv 0$。此外，设 $\lambda \in \{0,1\}$，$(d_u, d_v, k_f, k_b) \in (0,+\infty)^4$,，且 $(\alpha_i, \beta_i) \in [0,+\infty)^2$ 对 $i = 1, 2$ 成立。那么，只要满足以下假设之一，系统 *(1.1)* 就存在唯一的非负整体强解：

(i) $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, $0 < \beta_2 < \beta_1$, $\alpha_1 + \beta_1 > \alpha_2 + \beta_2$，且 $k_f = k_b$。*(ii)* $0 < \alpha_2 < \alpha_1$, $0 < \beta_1 < \beta_2$, $\alpha_1 + \beta_1 < \alpha_2 + \beta_2$，且 $k_f = k_b$。*(iii)* 无论 $\alpha_1 = \alpha_2$ 是什么，β_1 和 β_2 均成立。*(iv)* 无论 $\beta_1 = \beta_2$ 是什么，α_1 和 α_2 均成立。*(v)* $\rho = 1$, $\sigma_1 \le \sigma_2$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, $0 < \beta_1 < \beta_2$，且 $\alpha_1 + \beta_1 \le 1$。*(vi)* $\rho = 1$, $\sigma_1 \le \sigma_2$, $0 < \alpha_2 < \alpha_1$, $0 < \beta_2 < \beta_1$，且 $\alpha_2 + \beta_2 \le 1$。

注 1. 与定理 *1* ($\lambda = 1$, $\Gamma = (\mathbb{R}^N \setminus \Omega)$，以及 $\sigma_1 = \sigma_2$ 在情形 *(v)-(vi)* 中的系统 (1.1) 中相同的结果，可以通过采用算子 $(-\Delta)^\sigma$ 得到。该算子表示 *M. Riesz* 引入的分数阶拉普拉斯算子，其定义见 *[5]*；对任意 $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$，其定义为（见 *[6]*）：

$$(-\Delta)^\sigma \phi(x) := a_{N,\sigma}\, \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi(x) - \phi(y)}{\|x-y\|^{N+2\sigma}}\,dy, \qquad \sigma \in (0,1), \tag{1.7}$$

其中 P.V. 表示柯西主值，$\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 中的欧几里得范数，$a_{N,\sigma}$ 是一个归一化常数，选取它使得以下恒等式成立：

$$\lim_{\sigma \to 0^+} (-\Delta)^\sigma \phi = \phi \quad \textit{and} \quad \lim_{\sigma \to 1^-} (-\Delta)^\sigma \phi = -\Delta \phi.$$

2. 预备知识

2.1. 定义

首先，我们回顾分数阶微积分中的一些基本定义（例如参见 [1, 7]）。在下文中，我们考虑 $T > 0$。

定义 1. 设 $f \in L^1([0,T])$。阶数为 $\rho > 0$ 的左侧黎曼-刘维尔分数阶积分定义为

$$(I^{\rho}_{0|t} f)(t) := \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\rho}}\, d\tau, \tag{2.1}$$

定义 2. 双参数米塔格-莱夫勒函数 $E_{z_1,z_2}(z)$定义为

$$E_{z_1,z_2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(z_1 k + z_2)}, \quad z, z_1, z_2 \in \mathbb{C};\ Re(z_1), Re(z_2) > 0. \tag{2.2}$$

定义 3. 设 $\rho \in (0,1)$。算子 $P\rho(t) : H^{\sigma}(\Omega) \to H^{\sigma}(\Omega)$ 定义为

$$\mathcal{P}_{\rho}(t) w := \alpha t^{\rho-1} \int_0^{\infty} \tau \Phi_{\rho}(\tau) \mathcal{S}\left(\tau t^{\rho}\right) w\ d\tau, \tag{2.3}$$

其中，$S(t)$ 是由算子 $(-\Delta)^{\sigma}$ 生成的强连续半群，而 $\Phi_{\rho}(z)$是赖特型函数

$$\Phi_{\rho}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma(-\rho n + 1 - \rho)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

2.2. 辅助结果

本小节中，我们给出若干引理，它们对于建立主要结果至关重要。

引理 1. *[7,* 引理 *2.22]* 对于连续可微函数 f，分数阶积分与卡普托分数阶导数之间满足以下关系

$$I^{\alpha}_{0|t} \mathcal{D}^{\alpha}_{0|t} f(t) = f(t) - f(0). \tag{2.4}$$

引理 2。 *[12,* 引理 *3]* 若 $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ 是凸函数，且 $x \in C([0,T]) \cap C^1((0,T])$，则

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{0|t} \varphi(x)(t) \le \varphi'(x(t)) \mathcal{D}^{\alpha}_{0|t} x(t), \qquad 0 < \alpha \le 1.$$

我们需要以下关于弱奇异 Gronwall 不等式的结果。

Lemma 3. *[18,* 引理 *6.19]* 设 $\alpha, C \in \mathbb{R}_+$。若 $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}$ 是满足条件的非负连续函数 *es*

$$\psi(t) \le \psi(0) + \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \psi(s)\, ds,$$

对所有 $t \in [0,T]$，则

$$\psi(t) \le \psi(0) E_{\alpha,1}(C t^{\alpha}), \quad for \quad 0 \le t \le T.$$

我们回顾算子 $\mathcal{P}_{\rho}$ （见定义 3）在 $\rho \in (0,1)$上的有界性。

引理 4。 *[1,* 命题 *2.1.3]* 存在 $C > 0$，使得对于所有 $t > 0$ 和 $w \in H^{\sigma}(\Omega)$，均有

$$\| t^{1-\rho} P_{\rho}(t) w \|_{H^{\sigma}(\Omega)} \le C \| w \|_{H^{\sigma}(\Omega)}. \tag{2.5}$$

以下不等式将在后续内容中发挥作用 el.

引理 5. *[19,* 引理 *6.2]* 设 $\sigma \in (0,1)$ 且 $p > 1$。对于 (1.5) 以及非负的 $u \in L^p(\Omega)$ 满足 $(-\Delta)^{\sigma} u \in L^p(\Omega)$，有

$$\int_{\Omega} u^{p-1} (-\Delta)^{\sigma} u\ dx \ge \frac{4(p-1)}{p^2} \int_{\Omega} \left| (-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} u^{\frac{p}{2}} \right|^2 dx. \tag{2.6}$$

注 2. 对于算子 (1.7)，*Stroock–Varopoulos* 不等式 (2.6) 成立（见 *[20,* 公式（*B7*）*]*）。**引理 6.** 设 x, $y \ge 0$, $r > 0$ 且 $s > t > 0$。那么

$$(x^s - y^t)(x^{\frac{rs}{t}} - y^r) \ge 0.$$

证明。 通过令 $a := x^{s/t}$ 和 $b := y$，即可直接得证。 □

对于时间与空间分数阶热方程，我们还有以下最大值原理。

引理 7. 设 $\rho \in (0,1]$, $\sigma \in (0,1)$, $d>0$, $\psi_0 \in L^\infty(\Omega)$ 满足 $\psi_0 \geq 0$，并令 ψ 为下列问题的解

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{\rho}_{0|t}\psi + d(-\Delta)^{\sigma}\psi \leq 0 & in\ \Omega\times(0,T), \\ \lambda\psi + (1-\lambda)\nabla\psi\cdot\nu = 0 & on\ \Gamma\times(0,T), \\ \psi(\cdot,0) = \psi_0 & in\ \Omega, \end{cases} \tag{2.7}$$

其中，算子 $(-\Delta)^{\sigma}$ 表示以下两者之一：(1.5) (其中 $\lambda\in\{0,1\}$ 且 $\Gamma=\partial\Omega$)，或 (1.7) (其中 $\lambda=1$ 且 $\Gamma=(\mathbb{R}^N\setminus\Omega)$)。于是，我们有

$$\|\psi(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\psi_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad for\ 0<t<T. \tag{2.8}$$

证明。我们沿用 [13, 定理 3], 中的思路，并作相应调整以处理不等式情形，以及使用卡普托分数阶导数而非 Riemann–Liouville 分数阶导数所带来的初始条件处理方式的变化。 □

由于系统 (1.1) 的非线性项局部 Lipschitz 连续且拟正，强解的局部存在性和非负性（见 [1, 定义 3.2。1]）众所周知（例如参见 [1, 定理 3.2.2、第 3.6 小节、定理 4.1。3] 以及 [12, 第 3 节和 4]）；为完整起见，我们在下文重述其结论。

命题 1. 假设 u_0, $v_0\geq 0$，且 u_0, $v_0\not\equiv 0$，以及 u_0, $v_0\in C(\bar{\Omega})$。则系统 (1.1) 在最大区间 $[0,T_{\max})$上具有局部非负强解。此外，

$$if\quad T_{\max}<+\infty, \quad then \lim_{t\nearrow T_{\max}} \left(\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\right) = +\infty \tag{2.9}$$

注 3. 根据陈述 (2.9)的逆否命题，为建立系统 (1.1)的强解的整体存在性，只需推导如下形式的先验估计

$$\forall t\in[0,T_{\max}), \quad \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \mathcal{F}(t), \tag{2.10}$$

其中 $F:\ [0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是一个连续函数。

3. 主要结果的证明

定理 *1*的证明。设 p, $q>1$ 以及 δ_1, $\delta_2>0$。考虑如下 Lyapunov 泛函

$$\mathcal{L}(t) = \int_\Omega (\delta_1 u^p + \delta_2 v^q)\,dx. \tag{3.1}$$

然后，利用引理 2，可得

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\rho}_{0|t}\mathcal{L}(t) \quad &\leq \quad -\int_\Omega \left(\delta_1 d_u p u^{p-1}(-\Delta)^{\sigma_1}u + \delta_2 d_v q v^{q-1}(-\Delta)^{\sigma_2}v\right)\,dx \\ &\quad + \int_\Omega \left[\left(\delta_1 p(\alpha_2-\alpha_1)u^{p-1} + \delta_2 q(\beta_2-\beta_1)v^{q-1}\right)\left(k_f u^{\alpha_1}v^{\beta_1} - k_b u^{\alpha_2}v^{\beta_2}\right)\right]\,dx \\ &=: \quad \mathcal{I}+\mathcal{J}. \end{aligned}$$

基于 Stroock-Varopoulos 不等式，引理5，我们得到

$$\mathcal{I} \leq -\int_\Omega \left(\frac{4\delta_1 d_u(p-1)}{p}\left|(-\Delta)^{\frac{\sigma_1}{2}}u^{\frac{p}{2}}\right|^2 + \frac{4\delta_2 d_v(q-1)}{q}\left|(-\Delta)^{\frac{\sigma_2}{2}}v^{\frac{q}{2}}\right|^2\right)\,dx \leq 0. \tag{3.2}$$

另一方面，我们将考虑这两种假设情形。

(*i*) 若 $0<\alpha_1<\alpha_2$, $0<\beta_2<\beta_1$以及 $\alpha_1+\beta_1>\alpha_2+\beta_2$。令 $\widehat{\alpha}=\alpha_2-\alpha_1$, $\widehat{\beta}=\beta_1-\beta_2$, $k_f=k_b=k$，我们进而考虑 $\delta_1=(p\widehat{\alpha})^{-1}$ 与 $\delta_2=(q\widehat{\beta})^{-1}$。因此，我们可以取 $p>1$ 充分大，使得 $q=\frac{(p-1)\widehat{\alpha}}{\beta}+1>1$，并且由于引理 6，我们得到

$$\mathcal{J} = -\int_\Omega \left[k\left(v^{q-1}-u^{p-1}\right)\left(v^{\widehat{\beta}}-u^{\widehat{\alpha}}\right)u^{\alpha_1}v^{\beta_2}\right]\,dx \leq 0. \tag{3.3}$$

(*ii*) 若 $0<\alpha_2<\alpha_1$、$0<\beta_1<\beta_2$ 和 $\alpha_1+\beta_1<\alpha_2+\beta_2$。令 $\widetilde{\alpha}=\alpha_1-\alpha_2$、$\widetilde{\beta}=\beta_2-\beta_1$、$k_f=k_b=k$，我们进一步考虑 $\delta_1=(p\widetilde{\alpha})^{-1}$ 和 $\delta_2=(q\widetilde{\beta})^{-1}$。因此，我们可以令 $p>1$ 充分大，使得 $q=\frac{(p-1)\widetilde{\alpha}}{\beta}+1>1$，并且由于

引理 6，我们得到

$$\mathcal{J} = -\int_{\Omega} \left[k \left(v^{q-1} - u^{p-1} \right) (v^{\widetilde{\beta}} - u^{\widetilde{\alpha}}) u^{\alpha_2} v^{\beta_1} \right] dx \leq 0. \tag{3.4}$$

因此，无论是情形 (*i*) 还是情形 (*ii*)，我们都有

$$\mathcal{D}^{\rho}_{0|t} \mathcal{L}(t) \leq 0, \quad \text{for all} \quad t \in (0, T_{max}). \tag{3.5}$$

因此，利用引理 1，我们可推得

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) \leq |\Omega| \left(\delta_1 \Lambda^p + \delta_2 \Lambda^q \right), \quad \text{for all} \quad t \in (0, T_{max}). \tag{3.6}$$

现在，我们只讨论情形 (*i*)（情形 (*ii*) 的论证类似）。由 (3.6)，可得

$$\int_{\Omega} \delta_1 u^p \, dx \leq \mathcal{L}(0) \leq |\Omega| \left(\delta_1 \Lambda^p + \delta_2 \Lambda^q \right), \quad \text{for all} \quad t \in (0, T_{max}). \tag{3.7}$$

然后，由于 $q - 1 = \underbrace{(p-1)}_{\widehat{\alpha}} \widehat{\beta}$蕴含 $\frac{q}{p} < \frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\alpha}}$，我们得到

$$\|u(.,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}} \left(\Lambda^p + \frac{p\widehat{\alpha}}{q\widehat{\beta}} \Lambda^q \right)^{\frac{1}{p}} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}} \max(2, 2\Lambda^{\frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\alpha}}}), \quad \text{for all} \quad t \in (0, T_{max}). \tag{3.8}$$

因此，令 $p \to \infty$，可得

$$\|u(.,t)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \Lambda_u := \max(2, 2\Lambda^{\frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\alpha}}}), \quad \text{for all} \quad t \in (0, T_{max}). \tag{3.9}$$

类似地，令 $q \to \infty$，可得

$$\|v(.,t)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \Lambda_v := \left(2 \left(\frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\alpha}} \right)^2 + 1 \right) \max(1, \Lambda), \quad \text{for all} \quad t \in (0, T_{max}). \tag{3.10}$$

因此，由（3.9）和（3.10），可得（1.1）的整体存在性。（*iii*）如果 $\alpha_1 = \alpha_2$，则无论 β_1 和 β_2取何值。令 $T \in$ （0，T_{max}）。而（1.1）的第一个方程给出

$$\|u(.,t)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^{\infty}(\Omega)}, \quad \text{for all} \quad t \in (0, T).$$

On 另一方面，不失一般性，假设 $\beta_2 > \beta_1$。因此，（1.1）的第二个方程给出

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{0|t} v + d_v (-\Delta)^{\sigma_2} v \leq C_v (1 + v) \quad \text{in } \Omega \times (0, T). \tag{3.11}$$

其中 $C_v := C_v(\Gamma, \ \beta_1, \ \beta_2, \ k_f, \ k_b) > 0$。令 v 为下列问题的解

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{\alpha}_{0|t} \overline{v} + d_v (-\Delta)^{\sigma_2} \overline{v} = C_v (1 + v) & \text{in } \Omega \times (0, T). \\ \lambda \overline{v} + (1 - \lambda) \nabla \overline{v} \cdot \nu = 0 & \text{on } \Gamma \times (0, T). \\ \overline{v}(\cdot, 0) = 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{3.12}$$

那么，解 v 满足（3.12）

$$\overline{v}(x,t) = C_v \int_0^t \mathcal{P}_{\alpha}(t-s) \left[1 + v(x,s) \right] ds \tag{3.13}$$

将（3.12）的第一个方程从（3.11）中减去，得到

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{0|t} (v - \overline{v}) + d_v (-\Delta)^{\sigma_2} (v - \overline{v}) \leq 0, \quad \text{in } \Omega \times (0, T). \tag{3.14}$$

利用引理 7、第二个三角不等式以及引理 4，我们推导出

$$\|v(.,t)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \|v_0\|_{L^{\infty}(\Omega)} + C_v \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[1 + \|v(.,s)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \right] ds, \quad \text{for all} \quad t \in (0, T). \tag{3.15}$$

应用引理 3中的弱奇异 Gronwall 不等式，可得

$$\|v(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \widetilde{\mathcal{F}}(t), \quad \text{for all} \quad t \in (0,T),$$

其中 $\widetilde{\mathcal{F}}$: $[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 是一个连续函数。这意味着 $T_{\max} = +\infty$。
(*iv*) 此情形可类似于 (*iii*) 处理。(*v*) 此情形直接由 [21, 定理 3。2](对于备注 1中提到的情形，请参见 [22,定理 4。2])，通过应用杨氏不等式并取

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} k_f(\alpha_2 - \alpha_1) \\ k_f\,(\alpha_2 - \alpha_1 + \beta_2 - \beta_1) \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

（*vi*）此情形的论证与（*v*）类似。

□

参考文献

[1] C. Gal 和 M. Warma，《时间分数阶半线性抛物方程及其应用》，施普林格国际出版公司，2020年。[2] P.C. Fife，《反应与扩散系统的数学方面》，施普林格出版社，柏林—纽约，1979年。[3] J.D. Murray，《数学生物学》，II：空间模型与生物医学应用，施普林格出版社，2001年，纽约。[4] S. Abdelmalek，S. Bendoukha，《Lengyel–Epstein 反应扩散系统》，载于：H. Dutta、J. Peters（编），《应用数学分析：理论、方法与应用》，《系统、决策与控制研究》，第177卷，施普林格，查姆，2020年。[5] M. Riesz，《黎曼–刘维尔积分与位势》，《Acta Sci. Math. (Szeged)》，9（1938年），1–42。[6] E. Di Nezza，G. Palatucci，E. Valdinoci，《分数阶 Sobolev 空间指南》，《Bull. Sci. Math.》136（2012年）521–573。[7] A. A. Kilbas、H. M. Srivastava 和 J. J. Trujillo，《分数阶微分方程理论与应用》，《北荷兰数学研究》，第204卷，2006年。[8] M. Caputo，《多孔介质中具有记忆效应的流体扩散》，《Geothermics》28（1999年）113–130。[9] M. Kirane，《描述自催化可逆化学反应动力学的抛物型微分方程系统解的稳定性》，《Bull. Inst. Math. Acad. Sin.》18（1990年）369–377。[10] B. Ahmad，M. Kirane，A. Alsaedi，L^∞ 强耦合时空分数阶演化方程组解的界，《Appl. Math. Lett.》103（2020年）106174。[11] A. Alsaedi，M. Kirane，B.T. Torebek，时空非局部反应扩散方程的整体存在性与爆破，《Quaest. Math.》44（2021年）747–753。[12] M. Kirane，S. Ahmad，时空分数阶扩散 Volterra 方程解的渐近行为，《Math. Comput. Simul.》240（2026年）1071–1082。[13] A. Alsaedi，B. Ahmad，M. Kirane，某些广义时空分数阶扩散方程的最大值原理，《Quart. of App. Math.》73（2015年）163–175。[14] S. Kouachi，通过 Lyapunov 泛函证明反应扩散系统整体解的存在性，《Electronic Journal of Differential Equations》，论文编号2001。[15] M. Pierre，具有质量控制的反应扩散系统的整体存在性：综述，《Milan Journal of Mathematics》78(2)，417–455（2010年）。[16] S. Kouachi，描述某些可逆化学反应的耦合反应扩散系统的整体存在性，《Dyn. Partial Differ. Equ.》8（2011年）79–88。[17] G. Craciun，J. Jin，C. Pantea，A. Tudorascu，某些具有边界平衡态的化学反应扩散系统收敛至复平衡平衡态，《Discrete Contin. Dyn. Syst. B》22（2017年）。[18] K. Diethelm，《分数阶微分方程分析：使用 Caputo 型微分算子的应用导向论述》，《数学讲义》，施普林格，柏林，海德堡，2010年。[19] M. Bonforte，P. Ibarrondo，M. Ispizua，有界区域上奇异非局部扩散的 Cauchy–Dirichlet 问题，《Discrete Contin. Dyn. Syst. A》43（2022年）1090–1142。[20] M. Bonforte，A. Figalli，X. Ros-Oton，一般区域中分数阶多孔介质方程的无限传播速度与解的正则性，《Commun. Pure Appl. Math.》70（2017年）1472–1508。[21] M. Daoud，由谱分数阶拉普拉斯算子支配的一类抛物型反应扩散系统：分析与数值模拟，arXiv 预印本，arXiv:2502.13771（2025年）。[22] M. Daoud，E.-H. Laamri，A. Baalal，具有总质量控制的一类分数阶抛物型反应扩散系统：理论与数值计算，《J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.》15（2024年）18。