arXiv:2603.02698v1 [math.CO] 3 Mar 2026

子空间加权斜 Bollob´as 定理的变体 *

Yongjiang Wu[1], Yongtao Li[2], LuLu[1], Lihua Feng[1]1中南大学数学与统计学院，HNP-LAMA，中国湖南省长沙市，410083 2清华大学丘成桐数学科学中心，中国北京市，100084

摘要

设 V 是一个有限维实向量空间。若由 V 的子空间对组成的集合 $\mathcal{P}=\{(A_i,B_i)\}_{i=1}^m$ 满足：对每个 $i\in[m]$，$\dim(A_i\cap B_i)=0$，且对所有，$\dim(A_i\cap B_j)>0$ $1\le i<j\le m$ $V=V^1\oplus\cdots\oplus V^r$ $\mathcal{P}=$），则称其为斜 $\{A_i\ B_i\}_{i=1}^m$ V $A_i=\bigoplus_{k=1}^r A_i\cap V^k$ Bollob´as 系统。假设 ( ) ( )，且 (,) 是满足 (( )) 和对每个 $i\in[m]$ 均有 $B_i=\bigoplus_{k=1}^r(B_i\cap V(k))$ 的 V 的子空间斜 Bollobas 系统。记 $a_{i,k}=\dim(A_i\cap V(k))$ 和 $b_{i,k}=\dim(B_i\cap V(k))$。假设对每个 $k\in[r]$，均有 $a_{1,k}\le\cdots\le a_{m,k}$ 和 $b_{1,k}\ge\cdots\ge b_{m,k}$。利用 Lov´asz 和 Scott–Wilmer 提出的外代数方法，我们证明了

$$\sum_{i=1}^m\frac{1}{\prod_{k=1}^r\binom{a_{i,k}+b_{i,k}}{a_{i,k}}}\le 1.$$

这将 Alon（JCTA，1985）和 Scott–Wilmer（JLMS，2021）的结果推广到了多部加权情形。其次，我们解决了 Heged¨us（AJC，2015）关于射影子空间的一个猜想，证明在一个 n 维射影空间中，任意由射影子空间构成的斜 Bollob´as 系统至多包含 $2^{n+1}-2$ 对。第三，我们证明，若 $\mathcal{P}=\{(A_i,B_i)\}_{i=1}^m$ 是由 V 中维数分别为 $a_i=\dim(A_i)$ 和 $b_i=\dim(B_i)$ 的子空间构成的斜 Bollob´as 系统，那么

$$\sum_{i=1}^m\frac{1}{(a_i+b_i+1)\binom{a_i+b_i}{a_i}}\le 1.$$

这将 Heged¨us–Frankl（EUJC，2024）和 Yue（DM，2026）的结果推广到了子空间情形。最后，我们将上述不等式推广到由 d 元组子空间构成的系统，得到一个统一的界，并由此推出相应的 d 元组子集结果。

AMS 分类：05C65；05D05
K关键词：Skew Bollob´as 系统；加权不等式；外代数方法 d.

1 引言

对于两个整数 $a\le n$，我们记 $[a,n]=\{a,a+1,\dots,n\}$ 和 $[n]=[1,n]$。对于 $r\in[0,n]$，令 $\binom{[n]}{r}=\{A\subseteq[n]\colon|A|=r\}$。由 $[n]$ 的子集构成的对集合 $\mathcal{P}=\{(A_i,\ B_i)\}_{i=1}^m$ 称为*Bollob´as* 系统，如果它满足 $A_i\cap B_i=\emptyset$ 对每个 $i\in[m]$ 都成立，并且 $A_i\cap B_j\neq\emptyset$ 对所有 $1\le i\neq j\le m.$ 都成立。1965 年，Bollob´as [4] 证明了以下著名结果，即两族定理。

*电子邮箱地址：wuyjmath@163.com（Y. Wu），ytli0921@hnu.edu.cn（Y. Li），lulugdmath@163.com（L. Lu），fenglh@163.com（L. Feng）。

定理 1.1 (Bollob´as [4])。 设 $\mathcal{P}=\{(A_i,B_i)\}_{i=1}^m$ 是由 $[n]$ 的子集构成的 ***Bollob´as*** 系统。假设 $|A_i|=a$ 且对每个 $i\in[m]$ 都有 $|B_i|=b$ 。那么 $m\le\binom{a+b}{a}$。

证明定理 1.1 的第一种标准方法采用组合技巧：归纳论证 [4], 、计数论证 [14] 和概率方法 [2, 页 11]。原始证明 [4]揭示了非均匀族的对的一个加权版本；见 [5, 页 66]。

定理 1.2 （加权版本）。 设 $\mathcal{P}=\{(A_i,B_i)\}_{i=1}^m$ 是 $[n]$ 的一个 ***Bollob´as*** 子集系统。假设 $|A_i|=a_i$ 且对每个 $i\in[m]$都有 $|B_i|=b_i$ 。那么

$$\sum_{i=1}^m\frac{1}{\binom{a_i+b_i}{a_i}}\le 1.$$

证明定理 1.1 的第二种方法由 Lov´asz [16], 提出，他采用了基于外代数的反对称张量积方法。这种优雅的代数方法在较弱的假设下同样成立，即对所有 $i<j$都有 $A_i\cap B_j\neq\emptyset$ ，而非对所有 $i\neq j$；详细论证见 [3, 定理 5.6 和 6.12] 。在集合论背景下，满足这一弱假设且对所有 $i\in[m]$ 都有 $A_i\cap B_i=\emptyset$ 的系统$\mathcal{P}=\{(A_i、B_i)\}_{i=1}^m$ 称为偏斜 ***Bollob´as*** 系统。此外，这种代数方法还自然地扩展到有限维向量空间的子空间系统。Frankl [7] 也利用对称张量积阐述了这一观察。参见 [8,页 167]。

设 V 是一个维数为 n 的实向量空间。若一组 $\mathcal{P}=\{(A_i,B_i)\}_{i=1}^m$ 子空间对 V 满足：对每个 $i\in[m]$, $\dim(A_i\cap B_i)=0$；并且对所有 $1\le i<j\le m.$, $\dim(A_i\cap B_j)>0$ ，则称其为一个斜交 ***Bollob´as*** 系统。事实上，Lov´asz [16] 和 Frankl [7] 的代数方法直接推出了定理 1.1 的以下子空间扩展。

定理 1.3 （斜交版本，Lov´asz [16]）。 设 $\mathcal{P}=\{(A_i,B_i)\}_{i=1}^m$ 是 $V\cong\mathbb{R}^n$ 的子空间的一个斜交 ***Bollob´as*** 系统。假设 $\dim(A_i)=a$ 且 $\dim(B_i)=b$ 对每个 $i\in[m]$ 都成立。那么

$$m\le\binom{a+b}{a}.$$

利用将集合映射到子空间的标准构造，我们可以看出，上述空间系统版本蕴含了定理 1.1 中的集合系统版本。事实上，设 $\mathcal{P}=\{(A_i,B_i)\}_{i=1}^m$ 是 $[n]$ 的子集的一个 Bollob´as 系统，其中 $|A_i|=a$，且对每个 $i\in[m]$, $|B_i|=b$。设 $\{e_1,\dots,e_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基。将每个集合 A_i 映射到子空间 $A_i'=\operatorname{span}\{e_p:p\in A_i\}\subseteq\mathbb{R}^n$，并将每个 B_i 映射到子空间 $B_i'=\operatorname{span}\{e_q:q\in B_i\}\subseteq\mathbb{R}^n$，我们看到 $\mathcal{P}'=\{(A_i',B_i')\}_{i=1}^m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间的一个斜交 Bollob´as 系统，其中 $\dim(A_i')=a$ 且 $\dim(B_i')=b$。因此，定理 1.3 的不等式对 $\mathcal{P}'$ 成立，并且它与定理 1.1 对 $\mathcal{P}$ 给出的界一致。

受定理 1.3 的启发，自然希望将定理 1.2 中的加权版本推广到向量子空间对的斜交版本。遗憾的是，Babai 和 Frankl [3, 习题 5.1.1]表明，定理 1.2 的斜交版本在一般情况下并不成立。通过发展外代数方法，Scott 和 Wilmer [18] 在适当条件下、于更一般的向量空间设定中建立了定理 1.2 的斜交版本，从而取得了首次突破。

定理 1.4 （加权斜交版本，Scott 和 Wilmer [18]）。 设 $\mathcal{P}=\{(A_i,B_i)\}_{i=1}^m$ 是 $V\cong\mathbb{R}^n$ 的一个斜交 ***Bollob´as*** 子空间系统。假设对每个$i\in[m]$, 都有$\dim(A_i)=a_i$ 和$\dim(B_i)=b_i$ ，且这些序列满足 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_m$和 $b_1\ge b_2\ge\cdots\ge b_m$。那么

$$\sum_{i=1}^m\frac{1}{\binom{a_i+b_i}{a_i}}\le 1.$$

有关更多相关变体，请参阅 $[1,9,10,12,13,15,19,20]$ 及其中的参考文献。在 $[18,$ 第 $6]$，节的最后一段中，Scott 和 Wilmer 提出：“这些变体能否进一步通过外代数方法加以研究？”本文通过为向量空间系统建立若干新的加权斜交 Bollob´as 型不等式，为肯定 Scott–Wilmer 的问题提供了有力依据。利用外代数方法，我们首先给出 Alon $[1]$ 和 Scott–Wilmer $[18]$结果的统一扩展；详见即将介绍的第 1.1 节。此外，我们还将采用不同方法证明一些关于加权斜交版本的其他相关结果。

1.1 多部分结构的加权不等式

经典的两族定理及其变体通常将底集或向量空间视为一个整体。Alon $[1]$, 迈出了走向更具结构化情形的重要一步，他研究了底集被划分为若干个不相交块的情况。

定理 1.5 (Alon $[1]$)。设 $[n]$ 是若干集合 X_1、……、X_r 的不交并。设 $\mathcal{P}=\{(A_i,B_i)\}_{i=1}^m$ 是 $[n]$ 的子集构成的一个偏斜 *Bollob´as* 系统。假设对于每个 $i\in[m]$ 和 $k\in[r]$，都有 $|A_i\cap X_k|=a_k$ 和 $|B_i\cap X_k|=b_k$。那么

$$m\le\prod_{k=1}^{r}\binom{a_k+b_k}{a_k}.$$

Alon 的结果要求交集大小 a_k，b_k 在所有对中保持恒定。一个自然的问题是，能否放宽这一一致性条件，允许大小有所变化，同时仍获得有意义的界。我们通过在更一般的向量空间情形下证明一个加权推广，回答了这个问题。本文的第一个主要结果推广了定理 1.4 和 1.5。

定理 1.6. 设 $V=V(1)\oplus V(2)\oplus\cdots\oplus V(r)$ 是一个有限维实向量空间，并设$\mathcal{P}=\{(A_i,B_i)\}_{i=1}^m$ 是 V的一个斜 *Bollob´as* 子空间系统，满足 $A_i=\bigoplus_{k=1}^r(A_i\cap V(k))$ 和 $B_i=\bigoplus_{k=1}^r(B_i\cap V(k))$，对每个 $i\in[m]$ 均成立。记 $a_{i,k}=\dim(A_i\cap V(k))$ 和 $b_{i,k}=\dim(B_i\cap V(k))$。假设对每个 $k\in[r]$，均有 $a_{1,k}\le a_{2,k}\le\cdots\le a_{m,k}$ 和 $b_{1,k}\ge b_{2,k}\ge\cdots\ge b_{m,k}$。那么

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\prod_{k=1}^{r}\binom{a_{i,k}+b_{i,k}}{a_{i,k}}}\le 1.$$

令 $r=1$，定理 1.6 即可推出定理 1.4。此外，定理 1.6 蕴含以下一致情形，它推广了定理 1.3 和定理 1.5。

推论 *1.7.* 设 $V=V(1)\oplus V(2)\oplus\cdots\oplus V(r)$ 是一个有限维实向量空间，并设$\mathcal{P}=\{(A_i,B_i)\}_{i=1}^m$ 是 V的一个斜 *Bollob´as* 子空间系统，满足 $A_i=\bigoplus_{k=1}^r(A_i\cap V(k))$ 和 $B_i=\bigoplus_{k=1}^r(B_i\cap V(k))$，对每个 $i\in[m]$ 均成立。假设对于每个 $i\in[m]$ 和 $k\in[r]$，$\dim(A_i\cap V(k))=a_k$ 且 $\dim(B_i\cap V(k))=b_k$。那么

$$m\le\prod_{k=1}^{r}\binom{a_k+b_k}{a_k}.$$

通过标准构造，定理 1.6 可推出集合系统的以下结果。

推论 1.8。设 $[n]$ 是若干集合 X_1、……、X_r 的不交并。设 $\mathcal{P}=\{(A_i,B_i)\}_{i=1}^m$ 是 $[n]$ 的子集组成的一个偏斜 *Bollob´as* 系统。假设 $|A_i\cap X_k|=a_{i,k}$ 且 $|B_i\cap X_k|=b_{i,k}$ 对每个 $i\in[m]$ 和 $k\in[r]$ 都成立，并且对每个 $k\in[r]$，$a_{1,k}\le a_{2,k}\le\cdots\le a_{m,k}$ 以及 $b_{1,k}\ge b_{2,k}\ge\cdots\ge b_{m,k}$。那么

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\prod_{k=1}^{r}\binom{a_{i,k}+b_{i,k}}{a_{i,k}}}\le 1.$$

1.2 射影子空间与 Heged¨us 猜想

设 $\mathbb{F}$ 是任意域，V 是 $\mathbb{F}$ 上一个 $n+1$ 维向量空间，且 $n \geq 0$。维数为 n 的射影空间 定义为 $\mathbb{P}(V) = \big(V \setminus \{0\}\big)/\sim$，其中等价关系$u \sim v$ 当且仅当存在 $\exists\, \lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ 使得 $u = \lambda v.$。元素 $[v] \in \mathbb{P}(V)$ 称为一个射影点，它对应于一维子空间 span$\{v\}$。子集 $A \subseteq \mathbb{P}(V)$ 称为射影子空间，如果存在子空间 $U \subseteq V$、$U \neq \{0\}$，使得 $A = \mathbb{P}(U) = \{[u] : u \in U \setminus \{0\}\}.$。2015 年，Heged¨us [11] 针对射影子空间提出了以下猜想。

猜想1.9 (Heged¨us [11])。设 W 是任意域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维射影空间，且 $\mathcal{P} = \{(A_i, B_i)\}_{i=1}^m$ 是 W的一个斜 *Bollob´as* 射影子空间系统，即，$A_i \cap B_i = \emptyset$ 对每个 $i \in [m]$均成立；并且 $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ 对所有 $1 \leq i < j \leq m$ 均成立。那么

$$m \leq 2^{n+1} - 2.$$

斜 Bollob´as 系统一词与经典集合对定理相同。这里的对象是射影子空间，交条件是在射影意义下施加的。本文的第二个主要结果是肯定地解决了 Heged¨us 猜想。

定理 1.10。设 W 是任意域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维射影空间，且$\mathcal{P} = \{(A_i, B_i)\}_{i=1}^m$ 是 W的一个斜 *Bollob´as* 射影子空间系统。那么

$$m \leq 2^{n+1} - 2.$$

1.3 子空间对的加权不等式

定理 1.2 中的加权版本在较弱的偏交条件下并不成立，因为 Babai 和 Frankl [3, 习题 5.1.1] 给出了一个例子：考虑所有对 $(A, [n] \setminus A)$，其中 A $A_i\}_{i=1}^{2^n}$ $[n]$ $\mathcal{P} = \{ A_i\ [n] \setminus$ 遍历 $[n]$ $\sum_{i=1}^{2^n} 1/\binom{a_i+b_i}{a_i} = n+1$ 按大小递减排列的所有子集。此时，(,) 构成一个子集的偏 Bollobás 系统，且。

最近，Heged¨us 和 Frankl [12]通过证明：若 $\mathcal{P} = \{(A_i, B_i)\}_{i=1}^m$ 是 $[n]$ 的一个子集偏 Bollob´ás 系统，则

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{a_i+b_i}{a_i}} \leq n+1. \tag{1}$$

Yue [20]利用概率方法消除了对 n的显式依赖。

定理1.11 (Yue [20])。设 $\mathcal{P} = \{(A_i, B_i)\}_{i=1}^m$ 是 $[n]$ 的子集的一个偏斜 *Bollob´as* 系统。假设 $|A_i| = a_i$ 并且对每个 $i \in [m]$都有 $|B_i| = b_i$。则

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(a_i+b_i+1)\binom{a_i+b_i}{a_i}} \leq 1.$$

作为本文的第三个结果，我们将定理1.11推广到以下子空间情形，从而大幅弱化了定理 1.4 的单调性条件。

定理 1.12. 设 $\mathcal{P} = \{(A_i, B_i)\}_{i=1}^m$ 是 $V \cong \mathbb{R}^n$ 的一个偏斜 *Bollob´as* 子空间系统。假设对于每个 $i \in [m]$, 都有 $\dim(A_i) = a_i$ 且 $\dim(B_i) = b_i$。那么

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(a_i+b_i+1)\binom{a_i+b_i}{a_i}} \leq 1.$$

根据将集合映射为子空间的标准构造，定理 1.12 蕴含定理1.11。我们对子空间版本的证明受到 Heged¨us 和 Frankl [12], 集合版本的启发：我们通过一个关于极大性假设的巧妙论证，将当前问题归约为先前的 Lov´asz 定理。这不同于定理1.11的概率证明。

1984年，F¨uredi [9] 采用所谓的一般位置论证，将定理 1.3 推广到 t-相交情形。设 $\mathcal{P}=\{(A_i,B_i)\}_{i=1}^m$ 是实数集 V上的子空间对的集合。对于非负整数 t，若对任意 $i\in[m]$都有 $\dim(A_i\cap B_i)\le t$，且对任意 $1\le i<j\le m$ 都有 $\dim(A_i\cap B_j)>t$，则称 $\mathcal{P}$ 为斜 ***Bollob´as*** t- 系统。当 $t=0$ 时，这就退化为通常的斜 Bollob´as 系统。相关结果参见 [18, 19] 。利用 F¨uredi 的一般位置论证 [9], ，我们将定理 1.12 推广到这一 t-相交情形。

推论 1.13。设 $\mathcal{P}=\{(A_i,B_i)\}_{i=1}^m$ 是实数集 $V\cong\mathbb{R}^n$上的子空间斜 ***Bollob´as*** t-系统。假设对每个 $i\in[m]$, 都有$\dim(A_i)=a_i$ 且$\dim(B_i)=b_i$，并且 $a_m,b_1\ge t$。那么

$$\sum_{i=1}^m\frac{1}{(a_i+b_i-2t+1)\binom{a_i+b_i-2t}{a_i-t}}\le 1.$$

在推论 1.13 中令 $t=0$，即可化为定理 1.12。此外，在此情形下，条件 a_m, $b_1\ge t$ 是自然的，因为它确保二项式系数有定义。

1.4 d元组子空间的加权不等式

Bollob´as 两族定理有一个自然的扩展。设 $d\ge 2$和 $\mathcal{P}=\{(A_i^{(1)},\ \ldots\ldots,\ A_i^{(d)})\}_{i=1}^m$是 $[n]$的一个 d元组子集的集合。若满足以下条件，则称 $\mathcal{P}$ 为*Bollob´as* 系统:

(i) 对任意 $i\in[m]$ 和 $1\le p<q\le d$, $A_i^{(p)}\cap A_i^{(q)}=\emptyset$；并且

(ii) 对任意 $1\le i\ne j\le m$, 存在 $1\le p<q\le d$ 使得 $A_i^{(p)}\cap A_j^{(q)}\ne\emptyset$.

此外， $\mathcal{P}$ 若上述条件 $i\ne j$ 替换为 $i<j$, 则称其为斜交 ***Bollob´as*** 系统。当$d=2$时，这些定义就化为经典集合对系统。对于非负整数 $a_1,\ldots,a_d$和 $n\ge a_1+\cdots+a_d$, 多项式系数记作$\binom{n}{a_1\ldots,a_d}$:
$=$ $\frac{n!}{a_1!\cdots a_d!(n-a_1-\cdots-a_d)!}$。Heged¨us 和 Frankl [12]将式 (1) 推广，证明了以下紧确界

$$\sum_{i=1}^m\frac{1}{\binom{a_i^{(1)}+\cdots+a_i^{(d)}}{a_i^{(1)},\ldots,a_i^{(d)}}}\le\binom{n+d-1}{d-1}.$$

以下定 理将定理 1.11 推广到由子集构成的 d元组斜交 Bollob´as 系统。

定理 1.14 (Yue [21]). 设 $\mathcal{P}=\{(A_i^{(1)},\ldots,A_i^{(d)})\}_{i=1}^m$ 是由实数集 $[n]$的子集构成的 d元组斜交 ***Bollob´as*** 系统。假设对于每个 $i\in[m]$ 和 $k\in[d]$, 都有 $|A_i^{(k)}|=a_i^{(k)}$ 。那么

$$\sum_{i=1}^m\frac{1}{\binom{a_i^{(1)}+\cdots+a_i^{(d)}}{a_i^{(1)},\ldots,a_i^{(d)}}\binom{a_i^{(1)}+\cdots+a_i^{(d)}+d-1}{d-1}}\le 1.$$

Bollob´as 系统的概念可以从集合自然地推广到向量空间。设 V是维数为 n 的实向量空间，且 $\mathcal{P}=\{(A_i^{(1)}、\ \ldots\ldots、\ A_i^{(d)})\}_{i=1}^m$是由 V 的子空间组成的 d 元组的集合。若满足以下条件，则称 $\mathcal{P}$ 为 *Bollob´as* 系统:

(i) 对任意 $i \in [m]$，，$\dim(A_i^{(1)} + \cdots + A_i^{(d)}) = \dim(A_i^{(1)}) + \cdots + \dim(A_i^{(d)})$，且

(ii) 对任意 $1 \le i \ne j \le m$，存在 $1 \le p < q \le d$ 使得 $\dim(A_i^{(p)} \cap A_j^{(q)}) > 0$.

如果条件 (ii) 仅对有序对 $i < j$ 要求，那么 $\mathcal{P}$ 就称为 偏斜 *Bollobás* 系统。我们指出，上述条件 (i) 与先前关于子集的 d-元组的条件略有不同。该记号最初由 Oum 和 Wee [17] 引入。作为本文的第四个结果，我们给出定理 1.14 的以下向量空间扩展。

定理 1.15. 设 $\mathcal{P} = \{(A_i^{(1)}, \ldots, A_i^{(d)})\}_{i=1}^m$ 是实数集 $V \cong \mathbb{R}^n$ 的子空间 d-元组的偏斜 *Bollobás* 系统。假设对于每个 $i \in [m]$ 和 $k \in [d]$，都有 $\dim(A_i^{(k)}) = a_i^{(k)}$。那么

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{a_i^{(1)} + \cdots + a_i^{(d)}}{a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(d)}} \binom{a_i^{(1)} + \cdots + a_i^{(d)} + d - 1}{d-1}} \le 1.$$

定理 1.14 可通过标准构造由定理 1.15 推出。

我们的方法。对于定理 1.6 和 1.10，我们采用 Lovász[16], Scott 和 Wilmer [18]的外代数方法。定理 1.6 中的多部分结构要求进行更精细的分析，因为必须同时控制不同分量中的投影维数。我们通过逐分量归纳克服这一困难，谨慎地交错运用投影和外积，分别追踪各个部分中的维数，并通过乘积公式将它们结合起来。定理 1.10 的证明方法是将每个射影子空间与一个对应的非平凡向量子空间关联起来，然后在任意域上的外代数中运用线性无关论证。

定理 1.12 和 1.15 的证明发展了 Hegedüs 和 Frankl[12], 提出的方法，并在两个关键方面对其进行了修改。首先，我们将问题转化到向量空间的框架中，通过使用适当构造的有限族，克服所有子空间的集合是无限的这一困难。其次，我们考虑更一般的加权和，并设计一种不会增大该加权和的扩展操作。我们引入一个经过精心选择的有界势函数，该函数会随着每次操作严格递增。由于势函数有界，这一过程必定会在有限步后终止。最终构形满足一个已知界，从而得到所需的不等式。我们的方法不同于 Yue [20, 21] 针对集合系统所用的概率技巧，并且可直接应用于向量空间构形。

本文其余部分安排如下。第 2 节汇总外代数中所需的预备结果。第 3 节给出定理 1.6 和 1.10 的证明。第 4 节给出定理 1.12 和 1.15 以及推论 1.13 的证明。

2 预备结果

本节回顾一些外代数的基本定义和性质，这些内容将在全文的证明中用到；例如，参见 [18]。设 V 为一个 n 维实向量空间，并令

$$\bigwedge V = \bigoplus_{r=0}^{n} \bigwedge^r V$$

表示其外代数的标准分次。对于 V的一个固定有序基 $F = (f_1, \ldots\ldots, f_n)$以及一个子集 $A \in \binom{[n]}{r}$，我们记$f_A := \bigwedge_{a \in A} f_a \in \bigwedge^r V$，其中 A的元素

按递增顺序列出。集合 $\{f_A\colon A\in\binom{[n]}{r}\}$ 构成 $\bigwedge^r V$的一个基。特别地，$\dim(\bigwedge^r V)=\binom{n}{r}$ 且 $\dim(\bigwedge V)=2^n$。此外，一个关键性质指出，对于 $A,\ B\subseteq[n]$,

$$f_A\wedge f_B=\begin{cases}0 & \text{if } A\cap B\neq\emptyset,\\ (-1)^{\rho(A,B)}f_{A\cup B} & \text{otherwise,}\end{cases}\tag{2}$$

其中 $\rho(A,B)=|\{(a,b)\colon a\in A,b\in B,a>b\}|$。对于具有基 $\{a_1,\dots,a_r\}$ 的子空间 $A\subseteq V$，我们定义 $v_A=a_1\wedge\cdots\wedge a_r\in\bigwedge^r V$。我们指出，当选择 A 的不同基时，v_A 仅确定到相差一个非零常数。这不会在我们的论证中造成任何歧义。对于两个子空间 $B,C\subseteq V$，方程 (2) 表明 $v_B\wedge v_C=0$ 当且仅当 $\dim(B\cap C)>0$。

对于两个子空间 $U,W\subseteq\bigwedge V$，我们定义 $U\wedge W=$张成$\{u\wedge w\colon\ u\in U,w\in W\}$。通过建立超图与子空间之间的对应关系，Scott 和 Wilmer [18] 证明了外代数中局部LYM不等式的如下类似结果。

引理 2.1。 *[18]* 设 $V\cong\mathbb{R}^n$，且 W 是 $\bigwedge^r V$的一个子空间。那么对于 $c\in[0,n-r]$,

$$\frac{\dim(W\wedge\bigwedge^c V)}{\binom{n}{r+c}}\geq\frac{\dim(W)}{\binom{n}{r}}.$$

记 $\mathcal{B}(V)$ 为 $=\{(f_1,\ \dots\dots,\ f_n)\colon\{f_1,\dots,f_n\}$ 是 $V\}$ 的一组基的所有有序基的集合。当 $V=\mathbb{R}^n$时，我们自然地将 $\mathcal{B}(V)$ 与 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 等同。给定 $F=(f_1,\ \dots\dots,\ f_n)\in\mathcal{B}(V)$ 以及 $J\subseteq[n]$，定义 $V_J=\mathrm{span}\{f_j\colon j\in J\}$，并定义线性投影 $\pi_J^F\colon V\to V_J$ 为

$$\pi_J^F\left(\sum_{j=1}^n\alpha_j f_j\right)=\sum_{j\in J}\alpha_j f_j.$$

容易看出，对于 V的任意子空间 C，$\dim\ \pi_J^F(C)\leq\min\{\dim\ C,\ |J|\}$。受 F¨uredi [9] 的秩论证启发（见 [8,第 171]页），Scott 和 Wilmer [18]证明了以下结果。

引理 *2.2*。*[18]*设 $V=\mathbb{R}^n$，并设 $C_1,\ \dots\dots,\ C_m$为 V 的真子空间。则存在一个含有 n^2 个变量 $f_{ij}(1\leq i,j\leq n)$ 的非零多项式 G，使得 $G(F)\neq 0$ 蕴含 $F=(f_{ij})\in GL_n(\mathbb{R})$，且对所有 $i\in[m]$ 和 $J\subseteq[n]$，$\dim\ \pi_J^F(C_i)=\min\{\dim\ C_i,|J|\}$。

我们将投影 π_J^F从 V线性延拓到 $\bigwedge^r V$，如下：对任意 $r\geq 0$ 和 $A\in\binom{[n]}{r}$，我们定义 $\pi_J^F(f_A)=\bigwedge_{a\in A}\pi_J^F(f_a)$，并线性延拓到整个 $\bigwedge V$。显式地，由此可得

$$\pi_J^F(f_A)=\begin{cases}f_A & \text{if } A\subseteq J,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Scott 和 Wilmer [18]证明了以下性质。

引理 2.3. *[18]* 设 $V=\mathbb{R}^n$ 且 $W\subseteq\bigwedge^r V$ 为一个线性子空间。那么存在一个非零多项式 H，它关于 n^2 个变量 $f_{ij},1\leq i,j\leq n$，使得 $H(F)\neq 0$ 蕴含$F=(f_{ij})\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$，并且对于每个 $m\in[n-1]$ 以及所有 $J\in\binom{[n]}{m}$,

$$\dim\big(\pi_J^F(W)\big)=\max_{J^*\in\binom{[n]}{m},F^*\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}\dim\big(\pi_{J^*}^{F^*}(W)\big).$$

引理 2.4. *[18]*假设 $0<r\leq n-d$。令 $V\cong\mathbb{R}^n$，并设 $W\subseteq\bigwedge^r V$为线性子空间，且 $F\in\mathcal{B}(V)$。那么

$$\max_{J\in\binom{[n]}{n-d}}\frac{\dim\big(\pi_J^F(W)\big)}{\binom{n-d}{r}}\geq\frac{\dim(W)}{\binom{n}{r}}.$$

引理 2.5. *[18]*假设 $0 < r \le n-d$。令 $V \cong \mathbb{R}^n$，并设 $W \subseteq \bigwedge^r V$为线性子空间，且 $F \in \mathcal{B}(V)$。那么

$$\frac{\dim(W \wedge \bigwedge^d V)}{\binom{n}{r+d}} \ge \frac{1}{\binom{n}{n-d}} \sum_{J \in \binom{[n]}{n-d}} \frac{\dim\big(\pi_J^F(W)\big)}{\binom{n-d}{r}}.$$

为了证明定理 1.6，我们需要引入以下关于直和中外积维数的引理。它对于处理多部分结构至关重要。

引理 2.6. 设 $V \cong \mathbb{R}^n$ 和 $V = V_{(1)} \oplus \cdots \oplus V_{(r)}$。对于每个 $k \in [r]$，设 $d_k \ge 0$，且设 $U_k \subseteq \bigwedge^{d_k} V^{(k)}$ 为一个子空间。则

$$\dim\left(\bigwedge_{k=1}^{r} U_k\right) = \prod_{k=1}^{r} \dim(U_k).$$

证明. $d_k = 0$ 或 $d_k > \dim(V_{(k)})$ 的情形显然成立。下面假设 $\dim(V^{(k)}) = n_k$ 且 $1 \le d_k \le n_k$。令 $m_k = \dim(U_k)$，并为每个 U_k固定一个基。集合

$$G = \big\{u_{j_1,1} \wedge u_{j_2,2} \wedge \cdots \wedge u_{j_r,r} : 1 \le j_k \le m_k\big\}$$

张成 $\bigwedge_{k=1}^r U_k$，并包含 $\prod_{k=1}^r m_k$ 个向量。只需证明 G 线性无关。

对每个 k，选取 $V_{(k)}$ 的一组基 $\{e_1^{(k)}, \dots, e_{n_k}^{(k)}\}$。对于满足 $|A| = d_k$ 的子集 $A \subseteq [n_k]$，记作 $e_A^{(k)} = \bigwedge_{t \in A} e_t^{(k)}$，其中 A 的元素按递增顺序排列。集合 $\big\{e_{A_k}^{(k)} \colon A_k \in \binom{[n_k]}{d_k}\big\}$ 是 $\bigwedge^{d_k} V_{(k)}$ 的一组基。由于 $V = \bigoplus_{k=1}^r V_{(k)}$，集合 $\big\{e_{A_1}^{(1)} \wedge e_{A_2}^{(2)} \wedge \cdots \wedge e_{A_r}^{(r)} \colon A_k \in \binom{[n_k]}{d_k}\big\}$ 在线性空间 $\bigwedge^{d_1+\cdots+d_r} V$ 中线性无关。对于每个 $u_{j_k,\ k} \in U_k$，记作

$$u_{j_k,k} = \sum_{A_k \in \binom{[n_k]}{d_k}} \lambda_{j_k,k}^{A_k} e_{A_k}^{(k)}, \qquad \lambda_{j_k,k}^{A} \in \mathbb{R}.$$

对于每个固定的 k，向量 $u_{1,k}, \dots, u_{m_k,k}$ 线性无关。因此，$m_k \times \binom{n_k}{d_k}$ 矩阵 $\big(\lambda_{j_k,k}^{A_k}\big)_{j_k,A_k}$ 满行秩 m_k。于是，我们可以选取 m_k 个互不相同的列指标 $A_k^{(1)}, \dots, A^{(m_k)}{}_k$，使得方阵 $M_k := \left(\lambda_{j_k}^{A_k^{(t_k)}\ ,k}\right)_{j_k,\ t_k \in [m_k]}$ 可逆。

假设存在标量 $c_{j_1,\dots,j_r}$，使得

$$\sum_{j_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{j_r=1}^{m_r} c_{j_1,\dots,j_r}\ u_{j_1,1} \wedge \cdots \wedge u_{j_r,r} = 0. \tag{3}$$

展开每个楔积可得

$$u_{j_1,1} \wedge \cdots \wedge u_{j_r,r} = \sum_{A_1 \in \binom{[n_1]}{d_1}} \cdots \sum_{A_r \in \binom{[n_r]}{d_r}} \Big(\prod_{k=1}^{r} \lambda_{j_k,k}^{A_k}\Big)\, e_{A_1}^{(1)} \wedge \cdots \wedge e_{A_r}^{(r)}.$$

代入 (3)，并利用向量 $e_{A_1}^{(1)} \wedge \cdots \wedge e_{A_r}^{(r)}$ 的线性无关性，得到

$$\sum_{j_1 \in [m_1], \dots, j_r \in [m_r]} c_{j_1,\dots,j_r} \prod_{k=1}^{r} \lambda_{j_k,k}^{A_k} = 0 \qquad \text{for all } A_1 \in \binom{[n_1]}{d_1}, \dots, A_r \in \binom{[n_r]}{d_r}. \tag{4}$$

对于每个 $t_k \in [m_k]$，令 (4) 中的 $A_k = A^{(t_k)}{}_k$，可得

$$\sum_{j_1\in[m_1],\ldots,j_r\in[m_r]} c_{j_1,\ldots,j_r} \prod_{k=1}^{r} \lambda_{j_k,k}^{A_k^{(t_k)}} = 0 \qquad \text{for all } t_1 \in [m_1], \ldots, t_r \in [m_r].$$

该系统的系数矩阵恰好是克罗内克积 $M := M_1^\top \otimes M_2^\top \otimes \cdots \otimes M_r^\top$.其中 $M_k = \left(\lambda_{j_k}^{A_k^{(t_k)}}{}_{,\ k}\right)_{j_k,\ t_k\in[m_k]}$. 由于每个 M_k 都可逆， M 也可逆。因此，对于所有 $j_1 \in [m_1]$, ..., $j_r \in [m_r]$.，都有 $c_{j_1,\ \ldots\ldots,\ j_r} = 0$。由此，集合 G 线性无关。 □

3 定理 1.6 和 1.10 的证明

3.1 定理 1.6 的证明

定理 1.6 的证明。设 $V = V(1) \oplus V(2) \oplus \cdots \oplus V(r)$，其中 $\dim(V(k)) = n_k$。对于每一对 (A_i, B_i)，令 $A_{i,k} = A_i \cap V(k)$ 以及 $B_{i,k} = B_i \cap V(k)$。于是 $a_{i,k} = \dim(A_{i,k})$ 且 $b_{i,k} = \dim(B_{i,k})$。对于每个整数 $k \in [r]$，我们递归地定义子空间 $W(k)_{\ i} \subseteq \bigwedge^{a_{i,k}} V(k)$，令 $W_0^{(k)} = \{0\}$ 并

$$W_{i+1}^{(k)} = \operatorname{span}\left\{ W_i^{(k)} \wedge \bigwedge^{a_{i+1,k}-a_{i,k}} V^{(k)},\ v_{A_{i+1,k}} \right\}. \tag{5}$$

固定 $k \in [r]$，我们完全在 $V(k) \cong \mathbb{R}^{n_k}$ 内进行。选取一个线性同构 $\phi_k :\ V(k) \to \mathbb{R}^{n_k}$。将此同构自然延拓到外代数 $\phi_k :\ \bigwedge V(k) \to \bigwedge \mathbb{R}^{n_k}$. 首先，对有限族 $\mathcal{C}_k = \{\phi_k(A_{i,k})\ \ \phi_k(B_{i,k})\ \ \phi_k(A_{i,k} + B_{i,k}) \text{ 应用引理 2.2:}\ \ i \in [m]\}$. 由此得到一个关于 $n_k \times n_k$ 矩阵 F_k 各元素的 $\hat{}$ 非零多项式 G_k。其次，对子空间 $\phi_k(W(k)_{\ i}) \subseteq \bigwedge^{a_{i,k}} \mathbb{R}^{n_k}$ 应用引理 2.3。由此得到一个非零多项式 $H_{i,k}(\hat{}F_k)$。定义

$$P_k(\hat{F}_k) = G_k(\hat{F}_k) \prod_{i=1}^{m} H_{i,k}(\hat{F}_k).$$

$\hat{}$ 由于每个因子都是非零多项式， P_k 非零。因此，存在 $\mathbb{R}^{n_k}$ 的一个基 $F_k = (\hat{}f_{(k)1}, \ldots, \hat{}f_{n_k}^{(k)})$，使得 $P_k(\hat{}F_k) \neq 0$。现在经由 ϕ_k^{-1} 将此基拉回到 $V_{(k)}$。定义

$$F_k = (f_1^{(k)}, \ldots, f_{n_k}^{(k)}), \quad \text{where } f_j^{(k)} = \phi_k^{-1}(\hat{f}_j^{(k)}) \in V^{(k)}.$$

$\hat{}$ 由于 ϕ_k 是一个同构，基 F_k 继承了 F_k所具有的期望性质。特别地，对于每个 $J \subseteq [n_k]$ 以及所有 $i \in [m]$，由引理 2.2 和 2.3 可得

$$\dim(\pi_J^{F_k}(A_{i,k})) = \min\{a_{i,k}, |J|\},\ \dim(\pi_J^{F_k}(B_{i,k})) = \min\{b_{i,k}, |J|\}, \tag{6}$$

$$\text{维数}(\pi_J^{F_k}(A_{i,k} + B_{i,k})) = \text{最小值}\{a_{i,k} + b_{i,k}, |J|\}, \tag{7}$$

$$\dim\left(\pi_J^{F_k}(W_i^{(k)})\right) = \max_{J^*\in\binom{[n_k]}{|J|},F^*\in\mathcal{B}(V^{(k)})} \dim\left(\pi_{J^*}^{F^*}(W_i^{(k)})\right). \tag{8}$$

对每个 $V_{(k)}$，选择这样的 F_k。于是我们得到 V 的一个基:

$$F = (f_1^{(1)}, \ldots, f_{n_1}^{(1)}, f_1^{(2)}, \ldots, f_{n_2}^{(2)}, \ldots, f_1^{(r)}, \ldots, f_{n_r}^{(r)}).$$

对每个 $i \in [m]$ 和 $k \in [r]$，令 $n_{i,\,k} = a_{i,\,k} + b_{i,\,k}$ 和 $a_i = \sum_{k=1}^{r} a_{i,\,k}$。我们记作 $V_{n_{i,\,k}} = \pi^{F_k}_{[n_{i,k}]}(V_{(k)}) \subseteq V^{(k)}$。此外，我们定义投影空间：

$$
\begin{aligned}
Z_i^{(k)} &= \pi^{F_k}_{[n_{i,k}]}(W_i^{(k)}) \subseteq \bigwedge^{a_{i,k}} V_{n_{i,k}}, \\
X_i^{(k)} &= \pi^{F_k}_{[n_{i+1,k}]}(W_i^{(k)}) \subseteq \bigwedge^{a_{i,k}} V_{n_{i+1,k}}, \\
Y_i^{(k)} &= X_i^{(k)} \wedge \bigwedge^{a_{i+1,k}-a_{i,k}} V_{n_{i+1,k}} \subseteq \bigwedge^{a_{i+1,k}} V_{n_{i+1,k}}.
\end{aligned}
$$

我们证明中的一个关键观察是按如下方式构造空间 Z_i 和 Y_i s:

$$
Z_i = \bigwedge_{k=1}^{r} Z_i^{(k)} \quad \text{and} \quad Y_i = \bigwedge_{k=1}^{r} Y_i^{(k)}.
$$

根据引理 2.6，我们有

$$
\dim(Z_i) = \prod_{k=1}^{r} \dim(Z_i^{(k)}) \quad \text{and} \quad \dim(Y_i) = \prod_{k=1}^{r} \dim(Y_i^{(k)}). \tag{9}
$$

命题 3.1. 对于任意 $i \in [0, m-1]$，我们有 $\dim(Z_{i+1}) \geq \dim(Y_i) + 1$。

命题 *3.1* 的证明。首先，我们在 V 上定义投影。对于每个 $i \in [m]$，我们定义 $\pi_i : V \to V_i := \bigoplus_{k=1}^{r} V_{n_{i,k}}$，将投影作直和，并规定对每个 $v = \sum_{k=1}^{r} v^{(k)} \in V$，

$$
\pi_i(v) := \sum_{k=1}^{r} \pi^{F_k}_{[n_{i,k}]}(v^{(k)})
$$

接下来，我们需要通过设定$\pi_i : \bigwedge V \to \bigwedge V_i$，将该投影自然地扩展到外代数 $\bigwedge V$ 上；例如，对于 $w = v \wedge u$，则 $\pi_i(w) = \pi_i(v) \wedge \pi_i(u)$。

由于 $A_{i+1} = \bigoplus_{k=1}^{r} A_{i+1,\,k}$，我们可以写成 $v_{A_{i+1}} = \bigwedge_{k=1}^{r} v_{A_{i+1,\,k}} \in \bigwedge^{a_{i+1}} V$。考虑其投影 $\pi_{i+1}(v_{A_{i+1}}) = \bigwedge_{k=1}^{r} \pi^{F_k}_{[n_{i+1,k}]}(v_{A_{i+1,\,k}})$。根据定义，我们有

$$
\begin{aligned}
Z_{i+1}^{(k)} &= \operatorname{span}\left\{ \pi^{F_k}_{[n_{i+1,k}]}\Big(W_i^{(k)} \wedge \bigwedge^{a_{i+1,k}-a_{i,k}} V^{(k)}\Big),\ \pi^{F_k}_{[n_{i+1,k}]}(v_{A_{i+1,k}}) \right\} \\
&= \operatorname{span}\left\{ Y_i^{(k)},\ \pi^{F_k}_{[n_{i+1,k}]}(v_{A_{i+1,k}}) \right\}.
\end{aligned}
$$

对于每个 $k \in [r]$，我们记 $d_k = \dim(Z_{i+1}^{(k)})$ 和 $y_k = \dim(Y_i^{(k)})$。于是

$$
d_k = \begin{cases} y_k & \text{if } \pi^{F_k}_{[n_{i+1,k}]}(v_{A_{i+1,k}}) \in Y_i^{(k)}, \\ y_k + 1 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{10}
$$

设 $S = \{k \in [r] : \pi^{F_k}_{[n_{i+1,k}]}(v_{A_{i+1,\,k}}) \notin Y_{(k)\,i}\}$。我们断言 $S \neq \emptyset$。否则，若 $S = \emptyset$，则

$$
\pi_{i+1}(v_{A_{i+1}}) = \bigwedge_{k=1}^{r} \pi^{F_k}_{[n_{i+1,k}]}(v_{A_{i+1,k}}) \in \bigwedge_{k=1}^{r} Y_i^{(k)} = Y_i. \tag{11}
$$

记 $W_i = \bigwedge_{k=1}^{r} W_{(k)i}$。则 $Y_{(i}^{k} = \pi_{[n_{i+1,k}]}^{F_k}\left(W^{(k)}_{i} \wedge \bigwedge^{a_{i+1,k}-a_{i,k}} V^{(k)}\right) \subseteq \pi_{[n_{i+1,k}]}^{F_k}($ $W_i^{(k)}) \wedge \bigwedge^{a_{i+1,k}-a_{i,k}} \pi_{i+1}(V)$ 蕴含 $Y_i \subseteq \pi_{i+1}(W_i) \wedge \bigwedge^{a_{i+1}-a_i} \pi_{i+1}(V)$。根据定义（5），我们得到

$$W_i^{(k)} = \operatorname{span}\left\{ v_{A_{1,k}} \wedge \bigwedge^{a_{i,k}-a_{1,k}} V^{(k)},\ v_{A_{2,k}} \wedge \bigwedge^{a_{i,k}-a_{2,k}} V^{(k)},\ \dots,\ v_{A_{i,k}} \right\},$$

这意味着，$W_i \wedge \bigwedge^{a_{i+1}-a_i} V$ 中的任意元素都是 $\{v_{A_h} \wedge \bigwedge^{a_{i+1}-a_h} V$ 中元素的线性组合：$h \le i\}$。结合方程（11）和 $Y_i \subseteq \pi_{i+1}(W_i) \wedge \bigwedge^{a_{i+1}-a_i} \pi_{i+1}(V)$，可得 $\pi_{i+1}(v_{A_{i+1}})$ 是 $\{\pi_{i+1}(v_{A_h}) \wedge \bigwedge^{a_{i+1}-a_h} \pi_{i+1}(V)$ 中元素的线性组合：$h \le i\}$。斜 Bollob´as 假设指出，对所有 $h \le i$，$\dim(A_h \cap B_{i+1}) > 0$。由此可得 $v_{A_h} \wedge v_{B_{i+1}} = 0$，且对所有 $h \le i$，$\pi_{i+1}(v_{A_h}) \wedge \pi_{i+1}(v_{B_{i+1}}) = 0$。这就得到 $\pi_{i+1}(v_{A_{i+1}}) \wedge \pi_{i+1}(v_{B_{i+1}}) = 0$。

另一方面，根据方程 (6) 和 (7)，我们知道对于每个 $k \in [r]$,

$$\pi_{[n_{i+1,k}]}^{F_k}(A_{i+1,k}) \cap \pi_{[n_{i+1,k}]}^{F_k}(B_{i+1,k}) = \{0\}.$$

根据性质 (2) 和 π_{i+1} 的定义，可得 $\pi_{i+1}(v_{A_{i+1}}) \wedge \pi_{i+1}(v_{B_{i+1}}) \neq 0$，这与前面的论证相矛盾。因此，我们必须有 $S \neq \emptyset$。

如果存在某个 $k \in [r]$ 使得 $y_k = 0$，那么由于对所有 $k \in [r]$ 都有 $d_k \ge 1$，$\dim(Z_{i+1}) \ge 1 = \dim(Y_i) + 1$ 成立。现在假设对所有 $k \in [r]$ 都有 $y_k \ge 1$。由于 $S \neq \emptyset$，将方程 (9) 和 (10) 应用于计算维数差，得到

$$\dim(Z_{i+1}) - \dim(Y_i) = \prod_{k=1}^{r} d_k - \prod_{k=1}^{r} y_k = \left(\prod_{k \notin S} y_k\right)\left(\prod_{k \in S}(y_k+1) - \prod_{k \in S} y_k\right) \ge 1. \qquad \square$$

断言 3.2。对于任意 $i \in [m-1]$ 和 $k \in [r]$，记 $n_{i,k} = a_{i,k} + b_{i,k}$，有

$$\frac{\dim(Y_i^{(k)})}{\binom{n_{i+1,k}}{a_{i+1,k}}} \ge \frac{\dim(Z_i^{(k)})}{\binom{n_{i,k}}{a_{i,k}}}.$$

断言 *3.2* 的证明。首先，回顾一下假设：对于每个 $k \in [r]$，$a_{1,k} \le a_{2,k} \le \cdots \le a_{m,k}$和$b_{1,k} \ge b_{2,k} \ge \cdots \ge b_{m,k}$。接下来，我们根据 $n_{i,k}$ 与 $n_{i+1,k}$之间的关系，将证明分为三种情况，其中 $n_{i,k} = a_{i,k} + b_{i,k}$。

情况 1。若 $n_{i,k} = n_{i+1,k}$，即 $b_{i,k} - b_{i+1,k} = a_{i+1,k} - a_{i,k} \ge 0$，则 $X_i^{(k)} = Z_i^{(k)} \subseteq \bigwedge^{a_{i,k}} V_{n_{i,k}}$和$Y_{(i}^{k} = Z_i^{(k)} \wedge \bigwedge^{a_{i+1),k}-a_{i,k}} V_{n_{i,k}}$。由于 $V_{n_{i,k}} \cong \mathbb{R}^{n_{i,k}}$，由引理 2.1 可得

$$\frac{\dim(Y_i^{(k)})}{\binom{n_{i+1,k}}{a_{i+1,k}}} = \frac{\dim\left(Z_i^{(k)} \wedge \bigwedge^{a_{i+1,k}-a_{i,k}} V_{n_{i,k}}\right)}{\binom{n_{i,k}}{a_{i+1,k}}} \ge \frac{\dim(Z_i^{(k)})}{\binom{n_{i,k}}{a_{i,k}}}.$$

情况 2。若 $n_{i,k} > n_{i+1,k}$，即 $b_{i,k} - b_{i+1,k} > a_{i+1,k} - a_{i,k} \ge 0$，则对任意 $J \in \binom{[n_{i,k}]}{n_{i+1,k}}$，有$\pi_J^{F_k}($ $W_{(k)i}) = \pi_J^{F_k}\left(\pi_{[n_{i,k}]}^{F_k}(W_i^{(k)})\right) = \pi_J^{F_k}(Z_i^{(k)})$。根据方程 (8)，对于每个 $J \in \binom{[n_{i,k}]}{n_{i+1,k}}$,

$$\dim\left(\pi_J^{F_k}(W_i^{(k)})\right) = \dim\left(\pi_{[n_{i+1,k}]}^{F_k}(W_i^{(k)})\right) = \dim\left(\pi_{[n_{i+1,k}]}^{F_k}(Z_i^{(k)})\right).$$

令 $F_k^i = (f_{(k)1}, \dots, f_{(k)n_{i,k}})$ 为基 F_k 在前 $n_{i,k}$ 个向量上的限制。因此,

$$\dim\left(\pi_{[n_{i+1,k}]}^{F_k}(Z_i^{(k)})\right) = \max_{J \in \binom{[n_{i,k}]}{n_{i+1,k}}} \dim\left(\pi_J^{F_k}(W_i^{(k)})\right) = \max_{J \in \binom{[n_{i,k}]}{n_{i+1,k}}} \dim\left(\pi_J^{F_k}(Z_i^{(k)})\right)$$

$$= \max_{J\in\binom{[n_{i,k}]}{n_{i+1,k}}} \dim\Big(\pi_J^{F_k^i}(Z_i^{(k)})\Big). \tag{12}$$

注意到 $Z^{(}{}_{i}^{k)} \subseteq \bigwedge^{a_{i,}{}^{k}} V_{n_{i,k}}$ 以及 $F_k^i \in \mathcal{B}(V_{n_{i,k}})$。现在我们应用引理 2.1 和 2.4，得到

$$\begin{aligned}\frac{\dim(Y_i^{(k)})}{\binom{n_{i+1,k}}{a_{i+1,k}}} &= \frac{\dim\Big(X_i^{(k)} \wedge \bigwedge^{a_{i+1,k}-a_{i,k}} V_{n_{i+1,k}}\Big)}{\binom{n_{i+1,k}}{a_{i,k}+(a_{i+1,k}-a_{i,k})}} \overset{\text{Lemma 2.1}}{\geq} \frac{\dim(X_i^{(k)})}{\binom{n_{i+1,k}}{a_{i,k}}} \\ &= \frac{\dim\Big(\pi^{F_k}_{[n_{i+1,k}]}(Z_i^{(k)})\Big)}{\binom{n_{i+1,k}}{a_{i,k}}} \overset{(12)}{=} \max_{J\in\binom{[n_{i,k}]}{n_{i+1,k}}} \frac{\dim\Big(\pi_J^{F_k^i}(Z_i^{(k)})\Big)}{\binom{n_{i,k}-(n_{i,k}-n_{i+1,k})}{a_{i,k}}} \overset{\text{Lemma 2.4}}{\geq} \frac{\dim(Z_i^{(k)})}{\binom{n_{i,k}}{a_{i,k}}}.\end{aligned}$$

情形 3。若 $n_{i、\ k} < n_{i+1、\ k}$，即 $a_{i+1、\ k} - a_{i、\ k} > b_{i、\ k} - b_{i+1、\ k} \geq 0$，则对于任意 $J \in \binom{[n_{i+1,k}]}{n_{i\ k}}$，有 $\pi_J^{F_k}(W_{(k)\ i}) = \pi_J^{F_k}\Big(\pi^{F_k}_{[n_{i+1,k}]}(W_{(k)\ i})\Big) = \pi_J^{F_k}(X_i^{(k)})$。令 $c = b_{i、\ k} - b_{i+1、\ k} \geq 0$ 以及 $d = a_{i+1、\ k} - a_{i、\ k} - c \geq 0$。则 $n_{i+1、\ k} = n_{i、\ k} + d$。方程 (8) 表明，对于每个 $J \in \binom{[n_{i+1,k}]}{n_{i\ k}}$，

$$\dim\Big(\pi_J^{F_k}(W_i^{(k)})\Big) = \dim\Big(\pi^{F_k}_{[n_{i,k}]}(W_i^{(k)})\Big) = \dim(Z_i^{(k)}). \tag{13}$$

令 $F_k^{i+1} = (f_{(k)1}, \ldots, f_{(k)n_{i+1,k}}) \in \mathcal{B}(V_{n_{i+1,k}})$。注意到 $X_i^{(k)} \subseteq \bigwedge^{a_{i}{}^{k}_{,}} V_{n_{i+1,k}}$。应用引理 2.1 和引理 2.5，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\dim(Y_i^{(k)})}{\binom{n_{i+1,k}}{a_{i+1,k}}} &= \frac{\dim\Big(X_i^{(k)} \wedge \bigwedge^{c+d} V_{n_{i+1,k}}\Big)}{\binom{n_{i+1,k}}{a_{i,k}+c+d}} \overset{\text{Lemma 2.1}}{\geq} \frac{\dim\Big(X_i^{(k)} \wedge \bigwedge^{d} V_{n_{i+1,k}}\Big)}{\binom{n_{i+1,k}}{a_{i,k}+d}} \\ &\overset{\text{Lemma 2.5}}{\geq} \frac{1}{\binom{n_{i+1,k}}{n_{i+1,k}-d}} \sum_{J\in\binom{[n_{i+1,k}]}{n_{i+1,k}-d}} \frac{\dim\Big(\pi_J^{F_k^{i+1}}(X_i^{(k)})\Big)}{\binom{n_{i+1,k}-d}{a_{i,k}}} = \frac{1}{\binom{n_{i+1,k}}{n_{i,k}}} \sum_{J\in\binom{[n_{i+1,k}]}{n_{i,k}}} \frac{\dim\Big(\pi_J^{F_k}(X_i^{(k)})\Big)}{\binom{n_{i,k}}{a_{i,k}}} \\ &= \frac{1}{\binom{n_{i+1,k}}{n_{i,k}}} \sum_{J\in\binom{[n_{i+1,k}]}{n_{i,k}}} \frac{\dim\Big(\pi_J^{F_k}(W_i^{(k)})\Big)}{\binom{n_{i,k}}{a_{i,k}}} \overset{(13)}{=} \frac{\dim(Z_i^{(k)})}{\binom{n_{i,k}}{a_{i,k}}}.\end{aligned}$$

□

现在我们回过头来证明定理 1.6。由断言 3.2 和方程 (9)，可得对任意 $i \in [m-1]$，

$$\frac{\dim(Y_i)}{\prod_{k=1}^r \binom{n_{i+1,k}}{a_{i+1,k}}} \geq \frac{\dim(Z_i)}{\prod_{k=1}^r \binom{n_{i,k}}{a_{i,k}}}.$$

结合命题 3.1，可得

$$\begin{aligned}1 &\geq \frac{\dim(Z_m)}{\prod_{k=1}^r \binom{n_{m,k}}{a_{m,k}}} \geq \frac{1}{\prod_{k=1}^r \binom{n_{m,k}}{a_{m,k}}} + \frac{\dim(Y_{m-1})}{\prod_{k=1}^r \binom{n_{m,k}}{a_{m,k}}} \geq \frac{1}{\prod_{k=1}^r \binom{n_{m,k}}{a_{m,k}}} + \frac{\dim(Z_{m-1})}{\prod_{k=1}^r \binom{n_{m-1,k}}{a_{m-1,k}}} \geq \cdots \\ &\geq \sum_{i=1}^m \frac{1}{\prod_{k=1}^r \binom{n_{i,k}}{a_{i,k}}} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\prod_{k=1}^r \binom{a_{i,k}+b_{i,k}}{a_{i,k}}}.\end{aligned}$$

因此，所需的加权界得以满足，从而完成定理 1.6 的证明。 □

3.2 定理 1.10 的证明

第 3.1 小节中给出的外代数定义可直接推广到任意域$\mathbb{F}$，仅底层标量发生变化。设 V 是 $\mathbb{F}$上的一个 n维向量空间。其外代数为 $\bigwedge V = \bigoplus_{r=0}^{n} \bigwedge^r V$. 对于 V的任意有序基 $F = (f_1, \ldots, f_n)$ 以及一个子集 $A \in \binom{[n]}{r}$，记作 $f_A = \bigwedge_{a\in A} f_a \in \bigwedge^r V$, 其中楔积按指标递增的顺序进行。集合 $\{f_A : A \in \binom{[n]}{r}\}$ 是 $\bigwedge^r V$的一个基。因此，$\dim_{\mathbb{F}}\left(\bigwedge^r V\right) = \binom{n}{r}$. 设 C 是 V的一个d维子空间，其基为 $\{c_1, \ldots, c_d\}$，并令 $v_C = c_1 \wedge \cdots \wedge c_d \in \bigwedge^d V$. 注意，$v_C$ 取决于基的选择，且任意两个这样的表达式仅相差一个非零标量因子。以下关于子空间中向量的外积的基本性质将发挥关键作用。

引理 3.1 (参见 [3, 引理 6.11 和习题 6.16] 或 [12])。设 $\mathbb{F}$ 是任意域，V 是 n 维向量空间，其上的域为 $\mathbb{F}$。设 B 和 C 是 V 的子空间。那么，当且仅当 $v_B \wedge v_C = 0$，才有 $B \cap C \neq \{0\}$。

我们还需 要一个简单的线性无关判别法，通常称为三角判别法 .

引理 3.2 (参见 [3, 命题 2.9]或 [12])。设 $\mathbb{F}$ 是任意域。设 V 和 T 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，且Ω 是任意集合。设 $g : V \times \Omega \to T$ 是一个对第一个变量呈线性的函数。对于 $i \in [m]$，设 $v_i \in V$ 和 $a_i \in \Omega$ 满足

$$g(v_i, a_j) \begin{cases} \neq 0 & \text{if } i = j, \\ = 0 & \text{if } i < j. \end{cases}$$

那么，v_1、…、v_m 线性无关。

定理 1.10 的证明。设 $\mathcal{P} = \{(A_i, B_i)\}_{i=1}^{m}$ 是实数集 W上的一个射影子空间斜 Bollob´as 系统。设 V是实数集 $\mathbb{F}$ 上的一个 $(n+1)$ 维向量空间，满足 $W = \mathbb{P}(V)$。对于任意 $i \in [m]$，每个射影子空间 A_i （分别为 B_i）唯一对应于一个向量子空间 $U_i \subseteq V$ （分别为$V_i \subseteq V$），且满足 $U_i \neq \{0\}, V_i \neq \{0\}$。斜 Bollob´as 条件可转化为

$$U_i \cap V_i = \{0\}, \quad U_i \cap V_j \neq \{0\} \ (i < j).$$

由引理 3.1，得

$$v_{U_i} \wedge v_{V_i} \neq 0, \quad v_{U_j} \wedge v_{V_j} = 0 \ (i < j).$$

由引理 3.2 可知，$v_{U_1}, \ldots, v_{U_m}$在 $\bigwedge V$ 中线性无关。由于 $U_i \neq \{0\}, V_i \neq \{0\}$ 和 $U_i \cap V_i = \{0\}$，我们有 $U_i \neq V$和 $V_i \neq V$。结合 $U_i \neq \{0\}$ 和 $U_i \neq V$，得到 $1 \leq \dim_{\mathbb{F}}(U_i) \leq n$。因此，每个 v_{U_i}都包含在子空间 S 中: $= \bigoplus_{k=1}^{n} \bigwedge^k V \subsetneq \bigwedge V$. 由 $\dim_{\mathbb{F}}(V) = n+1$，可知

$$\dim_{\mathbb{F}}(S) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1} - 2.$$

由于 $v_{U_1}, \ldots, v_{U_m}$ 是 S 中线性无关的元素，我们得到 $m \leq \dim_{\mathbb{F}}(S) = 2^{n+1} - 2$. □

4 定理 1.12 和 1.15 的证明

4.1 定理 1.12 和推论 1.13 的证明

为进行证明，我们首先回顾一个简单的引理。

引理 4.1。 *[12]* 设 $\mathcal{P}=\{(A_i, B_i)\}_{i=1}^m$ 是 *´as* 实数集上子空间对的一个斜 *Bollob´as* 系统，则

$$m \leq 2^n.$$

现在我们可以证明定理 1.12 了。我们对定理 1.12 的证明源自 [12]。这不同于定理1.11 所用的概率方法。

定理 1.12 的证明。 论证分为三个步骤。

步骤 1. 最大权系统的存在性。 设 $D=\{(a,b): a,b\in[0,n]$ 和 $a+b\leq n\}$。对于一个偏斜 Bollob´as 系统 $\mathcal{P}=\{(A_i,B_i)\}_{i=1}^m$，其中 $\dim(A_i)=a_i$ 且 $\dim(B_i)=b_i$，定义其类型 $\tau(\mathcal{P})=\big(m;(a_1,b_1),(a_2,b_2)\ldots,(a_m,b_m)\big)$，以及其权

$$\omega(\mathcal{P})=\sum_{i=1}^m \frac{1}{(1+a_i+b_i)\binom{a_i+b_i}{a_i}}.$$

列表 $(a_1,b_1)\ldots,(a_m,b_m)$ 是有序的，且允许重复。由引理 4.1，得 $m\leq 2^n$。由于 $m\leq 2^n$ 且每个 $(a_i,b_i)\in D$，不同类型的数量至多为 $\sum_{m=0}^{2^n}|D|^m$，将这个有限集合记为 T。对于类型 $\tau=\big(m;(a_1,b_1)\ldots,(a_m,b_m)\big)$，定义

$$\omega(\tau)=\sum_{i=1}^m \frac{1}{(1+a_i+b_i)\binom{a_i+b_i}{a_i}}.$$

如果 τ 可实现（即某个系统 $\mathcal{P}$ 具有类型 τ），那么所有具有该类型的系统都具有相同的权 $\omega(\tau)$。可实现类型的集合是有限集 T 的子集，因此 $\{\omega(\tau): \tau$ 可实现$\}$ 是一个有限的实数集。因此，它能取到最大值。选择一个可实现类型 τ^*，使得 $\omega(\tau^*)=\max\omega(\tau)$。我们可以假设 $\mathcal{P}=\{(A_i,B_i)\}_{i=1}^m$ 具有类型 τ^*。那么 $\omega(\mathcal{P})=\max\omega(\tau)$。

步骤2。保持权不变的扩展操作。假设对于某个指标 i，$A_i+B_i\neq V$。那么存在一个向量 $x\in V\setminus(A_i+B_i)$。由于 $(A_i,B_i)\in\mathcal{P}$，且 $\mathcal{P}$ 是一个 skew Bollob´as 系统，我们推得 $\big(A_i\oplus\langle x\rangle,B_i\big),\big(A_i,B_i\oplus\langle x\rangle\big)\notin\mathcal{P}$。将 $\mathcal{P}$ 中的对 (A_i,B_i) 按照以下顺序替换为两对：$\big(A_i\oplus\langle x\rangle,B_i\big),\big(A_i,B_i\oplus\langle x\rangle\big)$，由此得到一个新系统 $\mathcal{P}'$。注意，$\mathcal{P}'$ 是一个 skew Bollob´as 系统。令 $s_i=a_i+b_i$。(A_i,B_i) 对 $\omega(\mathcal{P})$ 的贡献为 $\frac{1}{(s_i+1)\binom{s_i}{a_i}}$。对于新对 $\big(A_i\oplus\langle x\rangle,B_i\big)$ 和 $\big(A_i,B_i\oplus\langle x\rangle\big)$，它们对 $\omega(\mathcal{P}')$ 的贡献为

$$\frac{1}{(s_i+2)\binom{s_i+1}{a_i+1}}+\frac{1}{(s_i+2)\binom{s_i+1}{a_i}}=\frac{1}{(s_i+1)\binom{s_i}{a_i}}.$$

因此，我们有 $\omega(P')=\omega(P)$。

步骤 3. 迭代该扩展，直至所有对均为满的。 对于一个对 (A_i,B_i)，定义其亏损 $d_i=n-\dim(A_i+B_i)\geq 0$。若 $d_i=0$，则称该对是满的，即 $A_i\oplus B_i=V$。将 $\mathcal{P}=\{(A_i,B_i)\}_{i=1}^m$ 的势函数定义为

$$\Phi(\mathcal{P})=\sum_{i=1}^m 2^{n-d_i}.$$

假设当前系统 $\mathcal{P}$ 中包含一个非满的对，其亏损为 $d_i\geq 1$。执行步骤2中描述的扩展操作，将该对替换为两个新的对，每个对的亏损均为 d_i-1。原对对 Φ 的贡献为 2^{n-d_i}。两个新对的贡献为 $2\cdot 2^{n-(d_i-1)}=2^{n-d_i+2}$。因此，势的变化为

$$\Delta(\Phi)=2^{n-d_i+2}-2^{n-d_i}=3\cdot 2^{n-d_i}>0.$$

由于 $m \le 2^n$，我们有 $\Phi(\mathcal{P}) \le m \cdot 2^n \le 4^n$。由于 Φ 是一个正整数，并且在每次扩展操作时都会严格增加，因此该过程必定在有限步后终止。恰当所有对均为满对时，过程终止，且权始终保持不变。将所得系统仍记为 $\mathcal{P} = \{(A_i, B_i)\}_{i=1}^m$。因此，我们得到一个偏斜 Bollob´as 系统 $\mathcal{P} = \{(A_i, B_i)\}_{i=1}^m$，其中对所有 $i \in [m]$,均有 $A_i \oplus B_i = V$，且 $\omega(\mathcal{P}) = \max\ \omega(\tau)$。

在此阶段，每一对都满足 $a_i + b_i = n$。固定一个维数 a，并令 $I_a = \{i \in [m] : a_i = a\}$。将 $\mathcal{P}$ 限制到指标集 I_a，便得到一个偏斜 Bollob´as 系统，其中所有 A_i 的维数均为 a，所有 B_i 的维数均为 $n - a$。由定理 1.3，我们得到 $|I_a| \le \binom{n}{a}$. 。因此

$$\omega(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(n+1)\binom{n}{a_i}} = \frac{1}{n+1} \sum_{a} \sum_{i \in I_a} \frac{1}{\binom{n}{a}} \le 1. \quad \square$$

引理4.2。*[9]* 令 $n \ge k$，并令 $t = n - k$。设 V为一个 n维实向量空间。设W_1、.....、W_m为 V的子空间，且 维数$(W_i) < n$对所有 i均成立。则存在一个 k维子空间 V'，使得 维数$(W_i \cap V') =$最大值{维数$(W_i) - t, 0\}$ 对所有 $1 \le i \le m$ 均成立。

由引理4.2保证存在的子空间 V' 称为相对于子空间 W_1、.....、W_m处于一般位置。注意，若某个 W_i 满足维数$(W_i) = n$，该命题仍然成立，因为此时维数$(V \cap V') = k = n - t$，且公式仍给出维数$(W_i \cap V') = n - t$。

推论 1.13 的证明。设 $\mathcal{P} = \{(A_i, B_i)\}_{i=1}^m$ 是 V 的子空间构成的 skew Bollob´as t-系统，其中对每个 $i \in [m]$, $\dim(A_i) = a_i$ 且 $\dim(B_i) = b_i$，并且 $a_m, b_1 \ge t$。根据 skew Bollob´as t-系统的定义，我们有 $a_i > t$，且对所有 $i \in [m-1]$ 和 $j \in [2, m]$均有 $b_j > t$。由引理4.2可知，存在一个 $(n-t)$ 维子空间 V'，使得

(a) 对所有 $i \in [m]$, $\dim(A_i \cap V') = a_i - t$ 且 $\dim(B_i \cap V') = b_i - t$，

(b) 对所有 $i \in [m]$, ，$\dim(A_i \cap B_i \cap V') = 0$，且对所有 $1 \le i < j \le m$, $\dim(A_i \cap B_j \cap V') > 0$。

因此，$\mathcal{P}' = \{(A_i \cap V',\ B_i \cap V')\}_{i=1}^m$ 构成了 V'的子空间 skew Bollob´as 系统。将定理 1.12 应用于 $\mathcal{P}'$ 即可得到所需结果。 $\square$

4.2 定理 1.15 的证明

首先，我们回顾一个关于子空间 d-元组的 skew Bollob´as 系统的统一界，该界将在计数论证中使用。这个界源于 Einstein [6], ，后来由 Oum 和 Wee [17] 加以修改，最近又被 Yue [21]重新发现。

定理 4.3 （见 [6,17,21]）。设 $\mathcal{P} = \{(A_i^{(1)}、...、A_i^{(d)})\}_{i=1}^m$是向量空间 $V \cong \mathbb{R}^n$的子空间 d-元组的 *skew Bollob´as* 系统。假设对于每个 $i \in [m]$ 和 $k \in [d]$, 都有$\dim(A_i^{(k)}) \le a_k$。则

$$m \le \binom{a_1 + \cdots + a_d}{a_1, \ldots, a_d}.$$

下一个引理将引理 4.1 推广到子空间的 d 元组。

引理 4.4。设 $\mathcal{P} = \{(A_i^{(1)}, .., A_i^{(d)})\}_{i=1}^m$ 是由$V \cong \mathbb{R}^n$的 d元组子空间构成的一个 *skew Bollob´as* 系统。那么 $m \le d^n$.

证明。 固定一个指标 $i \in [m]$，并记 $a_i^{(k)} = \dim(A_i^{(k)})$ $k \in [d]$. 由于 $\dim\left(\sum_{k=1}^d A_i^{(k)}\right) = \sum_{k=1}^d \dim(A_i^{(k)})$，我们有 $\sum_{k=1}^d a_i^{(k)} \le n$. 给定一个非负整数向量 $(a_1, \dots, a_{d-1})$，定义

$$\mathcal{I}(a_1, \dots, a_{d-1}) := \{\, i \in [m] : a_i^{(k)} = a_k, k \in [d-1]\}.$$

设 $s = a_1 + \cdots + a_{d-1}$ 和 $a_d = n - s \ge 0$。对于每个 $i \in \mathcal{I}$（a_1，…，a_{d-1}），我们也有 $\dim(A_i^{(d)}) \le n - s = a_d$，且 $\dim(A_i^{(k)}) = a_k$，其中 $k = 1$，…，$d-1$。

将 $\mathcal{P}$ 限制到指标集 $\mathcal{I}$（a_1，…，a_{d-1}）上，得到一个偏斜 Bollobás 系统。由定理 4.3，我们得到

$$|\mathcal{I}(a_1, \dots, a_{d-1})| \le \binom{a_1 + \cdots + a_d}{a_1, \dots, a_d} = \binom{n}{a_1, \dots, a_d}.$$

由此可得

$$\begin{aligned} m &= \sum_{\substack{a_1,\dots,a_{d-1} \ge 0 \\ a_1+\cdots+a_{d-1} \le n}} |\mathcal{I}(a_1, \dots, a_{d-1})| \le \sum_{\substack{a_1,\dots,a_{d-1} \ge 0 \\ a_1+\cdots+a_{d-1} \le n}} \binom{n}{a_1, \dots, a_{d-1}, n - \sum_{k=1}^{d-1} a_k} \\ &= \sum_{\substack{a_1,\dots,a_{d-1} \ge 0 \\ a_1+\cdots+a_d = n}} \binom{n}{a_1, \dots, a_d} = d^n. \end{aligned}$$

□

引理　　下文的证明将使我们能够为子空间的 d-元组定义扩展操作　　s.

引理 4.5。 设 $\mathcal{P} = \{(A_i^{(1)}, \dots, A_i^{(d)})\}_{i=1}^m$ 是一个由 $V \cong \mathbb{R}^n$ 的子空间 d-元组构成的偏斜 *Bollobás* 系统。假设 $(B^{(1)}, \dots, B^{(d)})$ 是 V 的一个子空间元组，且对某个 $i \in [m]$ 以及某个 $k \in [d]$，对于所有 $\ell \in [d]\backslash\{k\}$ 都有 $B^{(k)} \ne A_i^{(k)}$、$B^{(\ell)} = A_i^{(\ell)}$，并且 $\dim(B^{(1)} + \cdots + B^{(d)}) = \dim(B^{(1)}) + \cdots + \dim(B^{(d)})$。那么 $(B^{(1)}, \dots, B^{(d)}) \notin \mathcal{P}$。

证明。 对于任意 $1 \le p \ne q \le d$，我们有

$$\dim(A_i^{(p)} \cap B^{(q)}) = \begin{cases} \dim(B^{(p)} \cap B^{(q)}) = 0 & \text{if } q = k, \\ \dim(A_i^{(p)} \cap A_i^{(q)}) = 0 & \text{if } p = k, \\ \dim(A_i^{(p)} \cap A_i^{(q)}) = 0 & \text{if } p \ne k \text{ and } q \ne k. \end{cases}$$

根据斜 Bollobás 系统的定义，结论成立。 □

做好这些准备后，我们现在证明定理 1.15。

定理 1.15 的证明。 论证沿用了证明定理 1.12 时采用的三步方案。

步骤 1. 最大权系统的存在性。 对于一个斜 Bollobás 系统 $\mathcal{P} = \{(A_i^{(1)}, \dots, A_i^{(d)})\}_{i=1}^m$，其中 $\dim(A_i^{(k)}) = a_i^{(k)}$ 且 $s_i = a_i^{(1)} + \cdots + a_i^{(d)}$，定义其类型

$$\tau(\mathcal{P}) = \left(m; (a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(d)}), \dots, (a_m^{(1)}, \dots, a_m^{(d)})\right)$$

及其权

$$\omega(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\binom{s_i}{a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(d)}} \binom{s_i + d - 1}{d-1}}.$$

列表 $(a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(d)}) \dots, (a_m^{(1)}, \dots, a_m^{(d)})$ 是有序的，且允许重复。由引理 4.4，得 $m \le d^n$。令 $D = \{(a_1, \dots, a_d) : a_i \in [0, n], \sum_{i=1}^d a_i \le n\}$.。由于 $m \le d^n$ 且每个

$(a_i^{(1)},\dots,a_i^{(d)}) \in D$，不同类型的数量至多为 $\sum_{m=0}^{d^n}|D|^m$。将这个有限集记为T。对于类型 $\tau=\big(m;(a_1^{(1)},\dots,a_1^{(d)})\dots,(a_m^{(1)},\dots,a_m^{(d)})\big)$，定义

$$\omega(\tau)=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\binom{s_i}{a_i^{(1)},\dots,a_i^{(d)}}\binom{s_i+d-1}{d-1}}.$$

如果 τ是可实现的（即存在一个斜Bollob´as系统 $\mathcal{P}$，满足 $\tau(\mathcal{P})=\tau$），则该类型的每个系统都具有相同的权 $\omega(\tau)$。可实现类型的集合是有限集 T的一个子集，因此，$\{\omega(\tau)\colon\ \tau$ 是可实现的$\}$ 是一个有限的实数集，并且其最大值可以达到。选取一个可实现类型 τ^*，使得 $\omega(\tau^*)=\max\omega(\tau)$，并选取一个类型为 τ^*的系统 $\mathcal{P}$。则$\omega(\mathcal{P})=\max\omega(\tau)$。

步骤2. 一种保持权的扩展操作。假设在所选的最大权系统 $\mathcal{P}=\{(A_i^{(1)},\ \dots\dots,\ A_i^{(d)})\}_{i=1}^m$ 中，某个元组$(A_i^{(1)},\ \dots\dots,\ A_i^{(d)})$不是满的，即$\bigoplus_{k=1}^d A_i^{(k)}\neq V$. 取一个向量 $x\in V\setminus\bigoplus_{k=1}^d A_i^{(k)}$ 并构造 d 个新元组

$$T_k=\big(A_i^{(1)},\dots,A_i^{(k)}\oplus\langle x\rangle,\dots,A_i^{(d)}\big),\quad k\in[d].$$

由引理 4.5 可知，对所有 $k\in[d]$，$T_k\notin\mathcal{P}$。按以下顺序用这些元组替换$\mathcal{P}$中的原元组 $(A_i^{(1)},\dots,A_i^{(d)})$：$T_1,\dots,T_d$，所得系统 $\mathcal{P}'$仍然是一个 skew Bollob´as 系统。回顾一下，$\dim(A_i^{(k)})=a_i^{(k)}$，且 $s_i=a_i^{(1)}+\dots+a_i^{(d)}$。元组 $(A_i^{(1)},\dots,A_i^{(d)})$ 对 $\omega(\mathcal{P})$ 的贡献为

$$\frac{1}{\binom{s_i}{a_i^{(1)},\dots,a_i^{(d)}}\binom{s_i+d-1}{d-1}}.$$

对于元组 T_k，维数向量变为 $(a_i^{(1)},\dots,a_i^{(k)}+1,\dots,a_i^{(d)})$，它对 $\omega(\mathcal{P}')$ 的贡献为

$$\frac{1}{\binom{s_i+1}{a_i^{(1)},\dots,a_i^{(k)}+1,\dots,a_i^{(d)}}\binom{s_i+d}{d-1}}.$$

由于 $\binom{s_i+1}{a_i^{(1)}\ \dots\ a_i^{(k)}+1,,,,,,a_i^{(d)}}=\underbrace{a_i^{(k)}+1}_{s_i+1}\binom{}{a_i^{(1)}\ \dots,,a_i^{(d)}}$，$d$ 个新元组 $T_1,\dots,T_d$ 对 $\omega(\mathcal{P}')$ 的总贡献等于

$$\sum_{k=1}^{d}\frac{a_i^{(k)}+1}{(s_i+1)\binom{s_i}{a_i^{(1)},\dots,a_i^{(k)},\dots,a_i^{(d)}}\binom{s_i+d}{d-1}}=\frac{s_i+d}{(s_i+1)\binom{s_i}{a_i^{(1)},\dots,a_i^{(d)}}\binom{s_i+d}{d-1}}=\frac{1}{\binom{s_i}{a_i^{(1)},\dots,a_i^{(d)}}\binom{s_i+d-1}{d-1}}.$$

因此，$\omega(\mathcal{P}')=\omega(\mathcal{P})$。

步骤 3. 反复进行扩展，直到所有元组都是满的。将第 i 个元组（$A_i^{(1)},\ \dots\dots,\ A_i^{(d)}$）的亏损定义为 $d_i=n-(a_i^{(1)}+\dots+a_i^{(d)})\geq 0$。若 $d_i=0$（即 $\bigoplus_{k=1}^d A_i^{(k)}=V$），则称该元组为满的。将 $\mathcal{P}=\{(A_i^{(1)},\ \dots\dots,\ A_i^{(d)})\}_{i=1}^m$ 的势函数定义为

$$\Phi(\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{m}2^{n-d_i}.$$

假设在所选的最大权系统中，$\mathcal{P}$某个元组 $(A_i^{(1)},\dots,A_i^{(d)})$ 不是满的，亏损为 $d_i\geq 1$。执行步骤2中描述的扩展操作，将此元组替换为

d 个新元组，每个的亏损均为 $d_i - 1$。原元组对 Φ 的贡献为 2^{n-d_i}。这 d 个新元组的总贡献为 $d \cdot 2^{n-(d_i-1)} = d \cdot 2^{n-d_i+1}$。因此，

$$\Delta\Phi = d \cdot 2^{n-d_i+1} - 2^{n-d_i} = 2^{n-d_i}(2d-1) > 0.$$

由于 $m \le d^n$，我们有 $\Phi(\mathcal{P}) \le m \cdot 2^n \le d^n \cdot 2^n$。由于 Φ 是一个正整数，且会随着每次扩展操作严格递增，因此该过程必定在有限步后终止。仅当每个元组都是满的时，过程才会终止。所有扩展操作都保持权和偏 Bollobás 性质不变。因此，最终的系统（仍记作 $\mathcal{P} = \{(A_i^{(1)}, \ldots\ldots, A_i^{(d)})\}_{i=1}^m$）满足

$$A_i^{(1)} \oplus \cdots \oplus A_i^{(d)} = V \text{ for all } i \in [m], \quad \omega(\mathcal{P}) = \max \omega(\tau).$$

At 此时，对于所有 $i \in [m]$，$a_i^{(1)} + \cdots + a_i^{(d)} = n$。因此，权可简化为

$$\omega(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(d)}} \binom{n+d-1}{d-1}}.$$

给定一个非负整数向量 $(a_1, \ldots\ldots, a_{d-1})$，定义

$$\mathcal{I}(a_1, \ldots, a_{d-1}) = \{\, i \in [m] : a_i^{(k)} = a_k, k \in [d-1]\}.$$

对于每个 $i \in I(a_1, \ldots\ldots, a_{d-1})$，我们有 $\dim(A_i^{(k)}) = a_k$，其中 $k \in [d-1]$，且 $\dim A_i^{(d)} = a_d := n - (a_1 + \cdots + a_{d-1})$。考虑将原系统 $\mathcal{P}$ 限制到指标集 $\mathcal{I}(a_1, \ldots\ldots, a_{d-1})$ 所得到的子系统，它仍然是一个偏 Bollobás 系统。由定理 4.3，我们得到

$$|I(a_1, \ldots, a_{d-1})| \le \binom{n}{a_1, \ldots, a_d}.$$

按前 $d-1$ 个维数对总和进行划分，得到

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(d)}}} = \sum_{(a_1, \ldots, a_{d-1})} \sum_{i \in I(a_1, \ldots, a_{d-1})} \frac{1}{\binom{n}{a_1, \ldots, a_d}}.$$

在每个固定的类中，

$$\sum_{i \in I(a_1, \ldots, a_{d-1})} \frac{1}{\binom{n}{a_1, \ldots, a_d}} \le \frac{|I(a_1, \ldots, a_{d-1})|}{\binom{n}{a_1, \ldots, a_d}} \le 1.$$

类的数量等于 $a_1 + \cdots + a_{d-1} \le n$ 的非负整数解的数量，即 $\binom{n+d-1}{d-1}$。因此，

$$\omega(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(d)}} \binom{n+d-1}{d-1}} \le \frac{1}{\binom{n+d-1}{d-1}} \sum_{(a_1, \ldots, a_{d-1})} 1 = 1.$$

由于扩展过程不会改变权，原最大权系统 $\mathcal{P}$ 满足 $\omega(\mathcal{P}) \le 1$。因此，每个偏斜 Bollob´as d-元组系统都满足相同的不等式。 □

致谢

Lihua Feng 得到国家自然科学基金委员会（编号 12271527 和 12471022）的资助。本工作亦得到青海省自然科学基金（编号 2025-ZJ-902T）的资助。Lu Lu 得到国家自然科学基金委员会（编号 12371362）的资助。

参考文献

[1] N. Alon，集合的极值问题及其在图论中的应用，组合理论杂志 A辑 40（1985）82–89。[2] N. Alon，J.H. Spencer，概率方法，第4版，John Wiley & Sons，2016。[3] L. Babai，P. Frankl，组合学中的线性代数方法，芝加哥大学计算机科学系，1992。[4] B. Bollob´as，论广义图，匈牙利科学院数学学报 16（1965）447–452。[5] B. Bollob´as，组合学：集合系统、超图、向量族与组合概率，剑桥大学出版社，剑桥，1986。[6] O. Einstein，有序集相交族的性质，《组合学》28（2008）37–44。[7] P. Frankl，两个集合族的极值问题，欧洲组合学杂志 3（1982）125–127。[8] P. Frankl，N. Tokushige，有限集的极值问题，第86卷，美国数学学会，2018。[9] Z. F¨uredi，两个超图交问题的几何解，欧洲组合学杂志 5（1984年）133–136。[10] D. Gerbner，B. Keszegh，A. Methuku，D. Nagy，B. Patk´os，C. Tompkins，C. Xiao，与住房分配问题相关的集合系统，《离散数学》343（2020）111886。[11] G. Heged¨us，仿射子空间的 Bollob´as 型定理，澳大拉西亚组合学杂志 63 （ 2015 ） 262–267。[12] G. Heged¨us，P. Frankl，Bollob´as 集合对定理的变体，欧洲组合学杂志 120（2024）103983。[13] R. Holzman，1-交叉相交集合对系统的一个界。欧洲组合学杂志 96（2021）103345。[14] G. Katona，A. Ehrenfeucht 与 J. Mycielski 的一个问题的解，组合理论杂志 A辑 17（1974）265–266。[15] A. Kostochka，G. McCourt，M. Nahvi，论 1-交叉相交集合对系统的规模，西伯利亚数学杂志 62（2021）842–849。[16] L. Lov´asz，拟阵中的平坦与几何图，载于：组合学综述，第6届英国组合学会议论文集，埃格姆 1977，学术出版社，伦敦 1977，45–86。[17] S.-I. Oum，S. Wee，关于 O. Einstein 论文《有序集相交族的性质》的一个注记，《组合学》38（2018）1279–1284。[18] A. Scott，E. Wilmer，外代数中的组合学与 Bollob´as 两族定理。伦敦数学学会杂志 104（2021）1812–1839。[19] W. Yu，X. Kong，Y. Xi，X. Zhang，G. Ge，半捆绑两族的 Bollob´as 型定理，欧洲组合学杂志 100（2022）103438。

[20] E. Yue, 《一些新的 Bollobás 类型不等式》, 《离散数学》349（2026）114948。[21] E. Yue, 《关于 d元组的 Bollobás 类型定理》, 《离散应用数学》381（2026）163–172。