arXiv:2603.02699v1 [math.RT] 3 Mar 2026

族中的 Asai 伽马因子与区分性

SABYASACHI DHAR 和 HARIOM SHARMA

Abstract. 设 F 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张， E 是 F的二次扩张。若存在一个非零线性泛函 ϕ 定义在 V 上，使得对所有 $h \in \mathrm{GL}_n(F)$ 和 $v \in V$，均有 $\phi(\pi(h)v) = \phi(v)$，则称 $\mathrm{GL}_n(F)$ 上的表示 (π, V) 为 $\mathrm{GL}_n(F)$- 可区分。在本文中，我们研究 $R[\mathrm{GL}_n(E)]$ 上 Whittaker 型模的 $\mathrm{GL}_n(F)$- 区分表示这一概念，其中 R 是定义在 $\mathbb{F}_\ell$ 的 Witt 向量环上的诺特代数，并且 $\ell \neq p$。我们首先推导一个函数方程，由此得到与 Whittaker 型的 $R[\mathrm{GL}_n(E)]$ 模相关联的 Asai γ因子的存在性。随后，我们给出尖点 $R[\mathrm{GL}_n(E)]$ 模成为 Whittaker $\mathrm{GL}_n(F)$-可区分的必要条件，并以其 Asai γ因子来表述。

1. Introduction

设 G 是一个群， H 是 G的一个子群。若存在非零线性形式 $\lambda: V \to \mathbb{C}$ ，满足 H-等变性，即对于 $h \in H$ 和 $v \in V$，有 $\lambda(\pi(h))v = \lambda(v)$，则称 G 的复表示 (π, V) 是 H-可区分的。表示论中的一个基本问题，是根据附属于这些表示的某些数据，对 G的可区分不可约表示进行分类。通常，当 H 是 G的某个对合的不动点子群时，人们会考虑这一问题。本文将重点讨论这样的情形： $G = \mathrm{GL}_n(E)$ 且 $H = \mathrm{GL}_n(F)$，其中 E是 F的一个二次扩张；这一情形曾由 [Fli91, Pra 01]考察。关于 $\mathrm{GL}_n(E)$ 的离散系列表示何时是 $\mathrm{GL}_n(F)$-可区分的， [Kab04, 定理 4] 以及 [AKT04, 定理 1.4]根据附属于这些表示的 Asai L-因子的极点给出了刻画。关于可区分表示的各个方面，尤其是与 Asai L-函数和 Asai γ-因子相关的内容，请参阅 [Fli88, Fli93, Kab04, AKT04, AR05, Ana08, Mat11]。

近年来，受自守表示之间同余研究的推动，域 $\mathbb{C}$ 上的表示论已扩展至系数取自其他域的表示（参见 [Vig96]），随后又进一步推广到更一般的环（参见 [EH14]），其中 p 可逆。近年来，许多研究致力于在一般环上建立若干已知于 $\mathbb{C}$上的表示论方面的结果；综述可参见 [Hel16a, Hel16b, HM18, DHKM24]。对于带有$\ell \neq p$的 ℓ-模 $\mathrm{GL}_n(E)$ 尖点表示，$_n\mathrm{GL}F$)-可区分性已由 [KM20, KMS25]研究。然而，一般环上的区分表示尚未得到任何探索。本文旨在研究诺特 $W(\mathbb{F}_\ell)$-代数 R上的 $\mathrm{GL}_n(F)$-可区分的 $\mathrm{GL}_n(E)$ 表示，其中$W(\mathbb{F}_\ell)$是具有 $\ell \neq p$的 $\mathbb{F}_\ell$ 的 Witt 向量环。我们聚焦于某些 $R[\mathrm{GL}_n(E)]$ 模，即 Whittaker 型模；这类模由 Emerton 和 Helm（[EH14]）引入，是域上泛型表示的推广。

为了陈述本文的主要结果，我们先介绍一些记号。设 Λ 是 $\mathbb{F}_\ell$ 的 Witt 向量环，其中 ℓ 是一个不同于 p 的奇素数。设 R 是一个诺特 Λ-代数。设 V 是一个光滑的 $R[\mathrm{GL}_n(E)]$ 模，其中光滑是指 V 中每个元素的稳定子都是 $\mathrm{GL}_n(E)$ 的开子群。假设 V 是 Whittaker 型（定义见 §2.1）。与 V 相关联的 Whittaker 模型记为 $\mathbb{W}(V, \psi_E)$，它是 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_n(E)}_{N_n(E)}(\psi_E)$ 的一个子-$R[\mathrm{GL}_n(E)]$ 模，其中 $N_n(E)$ 是 $\mathrm{GL}_n(E)$ 中幂零上三角矩阵构成的群，而 ψ_E 是 $N_n(E)$ 的一个非退化特征，在 $N_n(F)$ 上平凡。我们有一个

Date: 2026年3月4日。

$\mathrm{GL}_n(E)$-等变满射 $V \to \mathbb{W}(V,\ \psi_E)$，但它不一定是同构，这与经典情形不同。

在 [Kab04, AKT04]，的著作中，他们根据 Asai L-函数的极点，对 $\mathrm{GL}_n(E)$ 的离散系列复表示何时为 $\mathrm{GL}_n(F)$-可区分给出了刻画。这些函数由 Flicker（[Fli93]）和 Kable（[Kab04]）分别独立构造，方法是为某些类似于 Rankin–Selberg 理论中的 Zeta积分建立函数方程。一般而言，对于一族 Whittaker 型的 $\mathrm{GL}_n(F)$-表示，L-函数这一概念并未得到良好定义（见 [Mos16b, 第 1 节，第 1790] 页）。然而，对于 Whittaker 型的 $R[\mathrm{GL}_n(F)]$ 模，有一种与之相关的 γ-因子，由 [Mos16a, Mos16b, MM22] 引入；它们在系数环的基变换下具有良好的性质。本文首先为 Whittaker 型的 $R[\mathrm{GL}_n(E)]$ 模推导出一个类似于 [Fli93, 附录，定理 (iii)] 的函数方程，从而得到族中的 Asai γ-因子的存在性。下面更精确地陈述这一结果。

对于 $W \in \mathbb{W}(V,\psi_E)$ 和 $\varphi \in C_c^\infty(F^n,R)$，我们定义一个以不定元 X 为变量的洛朗级数，即 $I(X,W,\varphi)$（定义见第 3 节）。它属于分式环$S^{-1}(R[X,X^{-1}])$，其中 S是 $R[X,X^{-1}]$ 的乘性子集，由首项系数和末项系数均为 R中单位元的洛朗多项式构成。类似地，我们有 $I(X,W,\widehat{\varphi})$，其中对于 $g\in\mathrm{GL}_n(E)$，$\widetilde{\ }W(g) = W(w_n\,{}^t g^{-1})$，而 $\widehat{\varphi}$是关于 F^n上的自对偶Haar测度的傅里叶变换。本文的首个主要结果如下。

定理 1.0.1。设 E 是 p-进域 F的二次扩张。设 R 是一个诺特Λ-代数，并设 S 是 $R[X,X^{-1}]$ 的乘性子集，由首项系数和末项系数均为 R中单位元的洛朗多项式构成。设 V 是一个 *Whittaker* 型 $R[\mathrm{GL}_n(E)]$模。则存在唯一的元素 $\gamma_{As}(X,V,\psi_E)\in S^{-1}(R[X,X^{-1}])$ 使得

$$I(q^{-1}X^{-1},\widetilde{W},\widehat{\varphi}) = \omega_V(-1)^{n-1}\,\gamma_{As}(X,V,\psi_E)\,I(X,W,\varphi),$$

对所有 $W\in\mathbb{W}(V,\psi_E)$ 与 $\varphi\in C_c^\infty(F^n,R)$。此处，$\omega_V$是 V 的中心特征标。

元素 $\gamma_{As}(X,V,\psi_E)$ 称为与 V 相关联的 Asai γ-因子，并且在 [Mos16b，命题 4.7] 的意义下与系数环的基变换相容。对于上述定理的证明，我们紧密遵循 [Fli93] 与 [Mos16a, MM22] 的思想。当$E = F\times F$与 $R = A\otimes_\Lambda B$时，其中 A与 B 是两个诺特 Λ-代数，则定理 1.0.1 给出一对 $A[\mathrm{GL}_n(F)]$ 与 $B[\mathrm{GL}_n(F)]$ Whittaker 型模的函数方程，从而完成 [MM22 中定理 5.3] 对 $m=n$ 的 Rankin–Selberg 理论。

对于 $R=\mathbb{F}_\ell$，关于 Whittaker 型表示的 Asai L-函数的概念已在 [KM20]，中得到研究，并且它们通过 Asai ℓ-函数的极点，对 $\mathrm{GL}_n(F)$-模意义下可区分的（在某种意义上）$\mathrm{GL}_n(E)$ 不可约尖点表示给出了刻画。本文的第二个主要目标是证明，对于 Whittaker 型 $R[\mathrm{GL}_n(E)]$模，Asai γ-因子的零点与 $\mathrm{GL}_n(F)$-判别之间存在联系；事实上，这种联系对于一种更强的判别概念也成立，我们称之为 Whittaker 可区分。

若一个 $R[\mathrm{GL}_n(E)]$ 模 V 具有 Whittaker 型，则称其为 Whittaker $\mathrm{GL}_n(F)$-可区分，如果存在非零的 $\mathrm{GL}_n(F)$-等变线性形式 $\phi\colon \mathbb{W}(V,\psi_E)\to R$。将典范映射 $V\to\mathbb{W}(V,\psi_E)$ 与 ϕ复合后，该模 V便成为 $\mathrm{GL}_n(F)$-可区分。当 R是一个域，且 V 是 $\mathrm{GL}_n(F)$-可区分的 $\mathrm{GL}_n(E)$ 不可约泛型表示时，它也必定是 Whittaker $\mathrm{GL}_n(F)$-可区分的，因为在这种情况下，典范满射 $V\to\mathbb{W}(V,\psi_E)$是一个同构。一般而言，无法保证一个具有 Whittaker 型的 $\mathrm{GL}_n(F)$-可区分$R[\mathrm{GL}_n(E)]$ 模也一定是 Whittaker $\mathrm{GL}_n(F)$-可区分的。因此，对于族中的 Whittaker 型表示，Whittaker 可区分这一概念比通常的判别概念更强。现在我们陈述本文的第二个主要结果如下。

定理 1.0.2. 设 E 是 p-进域 F的一个二次扩张。设 V 是一个尖点$R[\mathrm{GL}_n(E)]$ 模，具有惠特克型，且 V 是 *Whittaker* $\mathrm{GL}_n(F)$可区分的。那么，*Asai* γ-因子 $\gamma_{As}(X,V,\psi_E)$ 在 $X=1$处消失。

定理 1.0.2 的证明的关键思路与 [AKT04，定理 14], 类似，即使用定理1.0.1的函数方程。注意，定理 1.0.2 的证明依赖于某些惠特克函数的积分（见 § 6.1）；当 V 是尖点时，这些积分是良定义的。

本文结构安排如下。第 2 节讨论本文所用的一些预备知识。第 3 节讨论 Zeta 积分并给出一些初步结果。第 4 节证明某些以 Zeta 积分为系数的洛朗级数的有理性。第 5 节证明定理 1.0.1。第 6 节讨论惠特克型族中的区分表示，并证明定理 1.0.2。

2. Preliminaries

本节介绍一些记号，并回顾全文中用到的定义和标准结果。本部分主要参照 [BZ77、KM17、Hel16b、Mos16b]的论述。

设 F 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张，$\mathfrak{o}_F$ 是 F 的整数环，$\mathfrak{p}_F$ 表示 $\mathfrak{o}_F$ 的唯一极大理想。固定 F 的一个赋值参数 ϖ_F。令 $\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F$ 为有限剩余域，k_F 的基数记为 q。记群 $\mathrm{GL}_n(F)$ 为 G_n。令 Λ 为 $\mathbb{F}_\ell$ 的 Witt 向量环，其中 ℓ 和 p 是两个不同的素数。我们还假设 ℓ 为奇数，因此环 Λ 含有 q 的一个平方根（当 $\ell = 2$ 时，本文给出的所有论证仍然成立，只需将 q 的一个平方根添入 Λ 即可）。令 R 为含幺交换环。本文中，所有 $R[G_n]$ 模都假设为光滑的，即模中每个元素的稳定子都是 G_n 的一个开子群。若对 G_n 的每个紧开子群 K，其 K-不动点空间 V^K 都是有限生成的 R 模，则称光滑 $R[G_n]$ 模 V 为容许的。给定 R 的一个素理想 $\mathfrak{P}$，纤维 $V \otimes_R \kappa(\mathfrak{P})$ 记为 $V_{\mathfrak{P}}$，其中 $\kappa(\mathfrak{P})$ 是 $R/\mathfrak{P}$ 的分式域。本文关注一类特殊的光滑 $R[G_n]$ 模，其中 R 是诺特 Λ-代数；在这种情况下，各纤维都有唯一的绝对不可约泛型商。这些是在此语境下对域上 G_n 的泛型表示的自然推广。

若 V 是局部仿射有限群 H的光滑 $R[H]$ 模，且 $\theta : H \to R^\times$ 是光滑特征，我们定义$V_{H,\theta} = V/V(H,\theta)$,其中 $V(H,\theta)$是由形如 $hv - \theta(h)v$ 的元素（对 $h \in H$ 与 $v \in V$）生成的子R模。对于闭子群 $K \subseteq H$ 与光滑 $R[K]$ 模 W，诱导表示$\mathrm{Ind}_K^H W$ 由满足如下关系的所有函数 f: $H \to W$组成

$$f(kh) = k \cdot f(h)$$

对每个 $k \in K$ 与 $h \in H$成立，并且在 H的某个紧开子群的右平移下不变。紧致诱导$\mathrm{ind}_K^H W$ 是此类函数中模 K紧支撑的子空间。我们用 I_H^G（相应地，ι_H^G）表示归一化诱导（相应地，紧致诱导）函子。

对 G_n的任意标准抛物子群 P，我们有分解 $P = MU$，其中 M是标准 Levi 子群（分块对角矩阵），U 是幺幂根基（严格分块上三角矩阵）。与 M相关联的Jacquet函子记为 J_M，它在将 V 限制到 P之后，把光滑 $R[G_n]$ 模 V 映到商$V_{M,1}$。此外，若光滑$R[G_n]$ 模 V对 G_n的每个真Levi子群 M，其雅克模块 $J_M(V)$均为零，则称其为尖点的。Jacquet函子 J_L 有一个右伴随，即抛物诱导。从Levi子群 M的光滑 $R[M]$模 W出发，先让幺幂部分 U 在 W 上平凡作用，从而将 V膨胀为 $R[P]$模，然后取紧致诱导$\mathrm{ind}_P^{G_n} W$。

2.1. 惠特克模。 设 $\psi : F \to \Lambda^\times$ 是一个非平凡的加性特征。令 N_n 为 G_n 中的幂零上三角矩阵群。于是，特征 ψ 诱导出 N_n 的一个非退化特征，仍记为 ψ，其定义为

$$\psi\big((x_{ij})_{i,j=1}^n\big) := \psi(x_{12} + x_{23} + \cdots + x_{(n-1)n}). \tag{2.1}$$

设 R 是一个诺特 Λ-代数。为简化记号，复合映射 $F \xrightarrow{\psi} \Lambda^\times \to R^\times$ 也记为 ψ。

定义 2.1.1. ([MM22, 定义2.4]) 光滑的 $R[G_n]$ 模 V 称为 ***Whittaker*** 型，若 V 是容许的、作为 $R[G_n]$模有限生成，且扭 ***Jacquet*** 模$V_{N_n,\ \psi}$ 是秩一自由 R模。

若 V 是光滑的 $R[G_n]$ Whittaker 型模，则有一个同构（[MM22, 命题 3.1]）

$$\mathrm{End}_{R[G_n]}(V) \xrightarrow{\sim} R.$$

特别地， G_n 的中心 V 通过一个特征标作用，记作 $\varpi_V\colon\ F^\times \to R^\times$。换言之，每个 $R[G_n]$ Whittaker 型模都具有一个中心特征标。由于 $V_{N_n,\ \psi} \simeq R$，由 [Vig96，第三章，第 1 节8] 可得

$$\mathrm{Hom}_{N_n}(V, \psi) \simeq \mathrm{Hom}_{G_n}(V, \mathrm{Ind}_{N_n}^{G_n}\psi).$$

设 φ 是 Hom 空间 $\mathrm{Hom}_{N_n}(V, \psi)$ 的一个生成元。那么，在上述同构下， φ的像是 G_n-等变的 R-线性映射 $v \mapsto W_v$，其中 $W_v\colon\ G_n \to R$ 定义为$W_v(g) := \varphi(gv)$，对任意 $g \in G_n$成立。集合 $\{W_v\colon\ v \in V\}$ 称为 V的 Whittaker 空间，记作 $\mathbb{W}(V, \psi)$。因此，我们有一个 G_n 等变满射 $V \to \mathbb{W}(V, \psi)$，但它不一定是同构。因此，不同的 Whittaker 型 $R[G_n]$模可能具有相同的 Whittaker 空间（参见 [Mos16b，第 2.2]节）。

对于一个 $R[G_n]$ Whittaker 型的 V 模，我们将 $V^\vee$ 记为与 V底集相同的光滑 $R[G_n]$ 模，但其中 g 在 $V^\vee$ 上的作用与 $w_n\,{}^t g^{-1} w_n$ 在 V上的作用一致；这里 w_n 是 $G_n(\mathbb{Z})$ 中一个反对角线元素为 1、其余元素均为 0 的矩阵。注意， $V^\vee$ 是容许的、 $R[G_n]$有限生成的，并且 $V^\vee_{N_n,\psi^{-1}}$ 是一个自由 R模

秩为 1。因此， $V^\vee$ 也是一个 $R[G_n]$ Whittaker 型模。对于 $W \in \mathbb{W}(V, \psi)$，令 $\widetilde{W}$ 为 上定义的函数，定义为对任意 $g \in G_n$， $\widetilde{W}(g) = W(w_n\,{}^t g^{-1})$。那么，映射 $W \mapsto \widetilde{W}$是一个 R模同构，将 $\mathbb{W}(V, \psi)$ 映到 $\mathbb{W}(V^\vee, \psi^{-1})$（详情参见 HM18，第 2 节，第 1005] 页）。

2.2. 导数。本小节中，我们回顾伯恩斯坦–泽列文斯基导数的概念，该概念见 [BZ77，第 3]，节，并且也适用于这里的情形（[EH14，定义 3.1.1]）。设 $P_n(F)$ 为 $G_n(F)$ 的米拉博利克子群。我们通过映射$g \mapsto \mathrm{diag}(g, 1)$将群 $G_{n-1}(F)$ 嵌入 $P_n(F)$。设 $U_n(F)$ 为 $P_n(F)$ 的子群，定义如下:

$$U_n(F) := \left\{ \begin{pmatrix} I_{n-1} & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in F^{n-1} \right\}.$$

那么 $P_n(F)$ 是 $G_{n-1}(F)$ 与 $U_n(F)$ 的半直积。对于局部仿射有限群 G 和诺特 Λ-代数 R，我们用 $\mathcal{M}(G)$ 表示光滑 $A[G]$ 模的范畴。我们有以下正合函子

$$\Phi^+ : \mathcal{M}(P_{n-1}(F)) \longrightarrow \mathcal{M}(P_n(F)),\quad \Phi^- : \mathcal{M}(P_n(F)) \longrightarrow \mathcal{M}(P_{n-1}(F)),$$
$$\Psi^+ : \mathcal{M}(G_{n-1}(F)) \longrightarrow \mathcal{M}_A(P_n(F)),\quad \Psi^- : \mathcal{M}(P_n(F)) \longrightarrow \mathcal{M}(G_{n-1}(F)),$$

定义为

$$\Phi^+(V) = \mathrm{ind}_{P_{n-1}U_n(F)}^{P_n(F)}(V \otimes \psi),\quad \Phi^-(M) = M_{U_n(F),\psi},$$
$$\Psi^+(N) = \delta_{U_n(F)}^{1/2} N \otimes \psi,\quad \Psi^-(M) = M_{U_n(F),\mathbb{1}}$$

其中 $V \in \mathcal{M}(P_{n-1}(F))$、 $M \in \mathcal{M}(P_n(F))$ 和 $N \in \mathcal{M}(G_{n-1}(F))$。第 i 个伯恩斯坦–泽列文斯基导数函子 $(-)^{(i)}\colon\ \mathcal{M}(P_n(F)) \to \mathcal{M}(G_{n-i}(F))$ 定义为

$$M^{(i)} = \Psi^-(\Phi^-)^{i-1} M$$

对于 $M \in \mathcal{M}(P_n(F))$。对于一个光滑的 $R[G_n(F)]$ 模 V，第 i 阶导数 $V^{(i)}$ 定义为$V^{(i)} = (V|_{P_n(F)})^{(i)}$。与 V 相关联的 $R[P_n(F)]$ 子模有一个滤过，即

$$V = V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots \supseteq V_n \supseteq \{0\}$$

其中 $V_i \simeq (\Phi^+)^{i-1}(\Phi^-)^{i-1}(V)$，且 $V_i/V_{i+1} \simeq (\Phi^+)^{i-1}\Psi^+(V_{(i)})$。如果 V 是 Whittaker 型，那么 $V_n \simeq (\Phi^+)^{n-1}\Psi^+(1)$，它等于紧致诱导 $\mathrm{ind}^{P_n(F)\ N_n(F)}\psi$。

3. Asai zeta integrals and formal series

本节将介绍一些关于 Asai ζ 积分的补充记号，并建立证明定理 1.0.1 的初步结果。我们紧密沿用 [Mos16a、Mos16b] 中关于族的类似 Rankin–Selberg 理论。

设 F 是 $\mathbb{Q}_p$的有限扩张，且 E 是 F的二次扩张。固定一个元素$\delta \in E \setminus F$，使得 $\delta^2 \in F$，因此 $E = F(\delta)$。令 σ为非平凡的伽罗瓦自同构。我们用记号 $G_n(F)$ 和 $G_n(E)$ 表示一般线性群 G_n，以明确指出底域。令 ψ_E 为 E 上的非平凡加性特征，且在 F上平凡；它具有如下形式：$x \mapsto \psi(\mathrm{Tr}^{E/F}(\delta x))$，其中 ψ是 F上的某个非平凡加性特征，$\mathrm{Tr}^{E/F}$为迹函数。我们还用 ψ（分别用 ψ_E）表示 $N_n(F)$（分别为 $N_n(E)$）上的非退化特征，其定义见 (2.1)。令 R为诺特 Λ-代数。令 $C_c^\infty(F^n, R)$ 表示 F^n上取值于 R的局部常值紧支撑函数空间。对于 $\varphi \in C_c^\infty(F^n, R)$，我们用 $\widehat{\varphi}$ 表示 φ 关于 ψ-自对偶 R-Haar 测度 dx 的傅里叶变换，其中测度定义在 F^n上，并满足 $dx(\mathfrak{o}_F) = q^{-m/2}$；这里 m 是使 $\psi|_{\mathfrak{p}_F^m}$平凡的最小整数。

对于每个 $r \in \mathbb{Z}$，我们设 $G_n(F)^r = \{g \in G_n(F) : v(\det g) = r\}$。更一般地，对于任意 $X \subseteq G_n(F)$，有 $X^r := X \cap G_n(F)^r$。令 $\eta = (0, \dots, 0, 1) \in F^n$。设 V为一个 Whittaker 型 $R[G_n(E)]$模。对于 $W \in \mathbb{W}(V, \psi_E)$ 和 $\varphi \in C_c^\infty(F^n, R)$，考虑以下积分

$$c_r(W, \varphi) := \int_{N_n(F)\backslash G_n(F)^r} W(g)\,\varphi(\eta g)\,dg, \quad r \in \mathbb{Z},$$

其中 dg 是陪集空间 $N_n(F)\backslash G_n(F)$ 上右 $G_n(F)$-不变的 Haar 测度。

引理 3.0.1。设 $\varphi \in \mathrm{Ind}^{G_n(E)\ N_n(E)}\psi_E$。那么，对每个 $m \in \mathbb{Z}$，限制 $\varphi|_{G_n(E)^m}$ 模 $N_n(E)$ 紧支撑。

证明。根据岩泽分解，只需证明 $\varphi|_{T_n(E)^m}$ 是紧支撑的。然而，由于 $T_n(E)^m$ 中对行列式的限制，只需证明存在 $r \in \mathbb{Z}$，使得当 $v(a_i) - v(a_{i+1}) \le r$ 对于 $i = 1, 2, \dots, n-1$ 时，$W(\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)) = 0$。对于 $x \in E$，考虑矩阵

$$u_i(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & x & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in G_n(E).$$

当 x 充分小时，φ 在右侧由 $u_i(x)$ 固定。于是

$$(u_i(x).\varphi - \varphi)(\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)) = \left(\psi_E\left(\frac{a_i x}{a_{i+1}}\right) - 1\right)\varphi(\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)).$$

现在，当 $v(a_i) - v(a_{i+1})$ 足够小时，元素 $\psi_E\left(\frac{a_i x}{a_{i+1}}\right) - 1$ 在 Λ 中可逆，因此在 R 中也可逆。于是，我们得到 $\varphi(\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)) = 0$，结论得证。□

因此，积分 $c_r(W, \varphi)$、$r \in \mathbb{Z}$ 是定义良好的。现在，我们定义形式幂级数

$$I(X, W, \varphi) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} c_r(W, \varphi) X^r \in R[[X, X^{-1}]].$$

引理3.0.2. 级数 $I(X, W, \varphi)$ 只含有限多个 X^{-1}的非零正幂，因此是 $R[[X]][X^{-1}]$的一个元素。

证明. 由岩泽分解 $G_n(F) = B_n(F)K_0(F)$，其中 $B_n(F)$是 $G_n(F)$中的上三角矩阵群，而 $K_0(F)$是 $G_n(F)$的极大紧开子群，从而归结为考虑该积分

$$\int_{N_n(F)\backslash T_n(F)^r} W(a)\,\varphi(\eta a)\,da,$$

其中 $T_n(F)$ 是 $G_n(F)$ 中的对角环面。现在我们证明，存在一个整数 $N > 0$，使得对于所有满足 $v(\det(a)) < N$ 的 $a \in T_n(F)$， $W(a)\,\varphi(\eta a)$ 均为零。取一个整数 j，使得 W 在紧开子群下保持不变

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{p}_F^j & & & \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

令 $x \in \mathfrak{p}_F^j$。则有

$$(1-\psi(a_1x))\,W(a)\,\varphi(\eta a) = 0,$$

其中 a_1 是对角矩阵 a 的第一个元素。当 $v(\det(a))$ 足够负，以致 a_1x 位于 $\ker(\psi)$ 之外时，我们得到 $\psi(a_1x)$ 是 Λ 中非平凡的 p 次单位根。于是 $1-\psi(a_1x)$ 是 $\mathbb{F}_\ell$ 中某个非零元素的一个提升，因此是 Λ 中的单位元。因此，对于这样的 $a \in T_n(F)$，我们得到

$$W(a)\,\varphi(\eta a) = 0.$$

引理得证。 □

4. Rationality of Asai Formal Series

本节旨在证明形式级数 $I(X, W, \varphi)$ 的一个有理性结果，该形式级数在第 3 节中引入。我们首先证明一些关键引理。设 V 是一个光滑 $R[G_n(E)]$模，且属于 Whittaker 型，其中 R 是一个诺特 Λ-代数。为简化记号，令 $\mathcal{W}$ 表示 Whittaker 空间 $\mathbb{W}(V, \psi_E)$。限制到 $T_n(F)$ 的映射

$$\mathcal{W} \longrightarrow C^\infty(T_n(F), R),$$

给出了一个 R-模的满射。我们将这个限制映射的像记为 $\mathcal{V}$。令 $v\colon F \longrightarrow \mathbb{Z}$ 表示与 F相关的赋值。对于定义在 $T_n(F)$ 上的函数 φ，若存在常数 $N > 0$，使得当 $v(a_i) \geq N$ 时，函数在 a 处为零，即 $\varphi(a) = 0$，则称 $\varphi(a)$ 当 $v(a_i) \to \infty$ 时一致地 $\to 0$。遵循 Mos16a 第 3 节第 4912], 页，我们定义集合

$$\mathcal{V}_i := \{\varphi \in \mathcal{V} \mid \varphi(a) \to 0 \text{ uniformly as } v(a_i) \to \infty\}.$$

对于每个 $1 \leq i \leq n$，令 $M_n(i)$ 为标准 Levi 子群 $G_i(E) \times G_{n-i}(E)$，并将其幺幂根基记为$N_n(i)$。下面的引理采用与 [Mos16a，引理 3.3] 中类似的思路证明。

引理 4.0.1. 对于每个 i，令 θ_i 为复合映射 $\mathcal{W} \to \mathcal{V} \to \mathcal{V}/\mathcal{V}_i$。那么， $\mathcal{W}$ 的子模 $\mathcal{W}(N_n(i),\mathbb{1})$ 包含于 $\ker(\theta_i)$ 中。

证明。 根据定义，子模 $\mathcal{W}(N_n(i),1)$ 由形如 $u.\varphi - \varphi$ 的元素生成，其中 $u \in N_n(i)$ 且 $\varphi \in \mathcal{W}$。对于任意 $g \in G_n(E)$ 和 $x \in N_n(E)$，有 $\varphi(xg) = \psi_E(x)\,\varphi(g)$。现在取

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n & & & & \\ & & & a_2 & \cdots & a_n & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & a_n \end{pmatrix} \in T_n(F) \quad \text{and} \quad u = \begin{pmatrix} I_i & Y \\ 0 & I_{n-i} \end{pmatrix} \in N_n(i)$$

我们得到

$$\begin{aligned}(u.\varphi)(a) &= \varphi\big(aua^{-1}a\big)\\ &= \psi_E\big(aua^{-1}\big)\,\varphi(a)\\ &= \psi_E\begin{pmatrix} I_i & z\\ 0 & I_{n-i}\end{pmatrix}\varphi(a),\end{aligned}$$

其中 z 是一个 $i\times(n-i)$矩阵，其左下角元素为$a_iY_{i,1}$。于是该表达式等于$\psi_E(a_iY_{i,1})\,\varphi(a)$。由于$\ker(\psi_E)$是开的，当 $v(a_i)$充分大时，我们有 $\psi_E(a_iY_{i,1}) = 1$，这表明当 $v(a_i)$充分大时，$(u.\varphi)(a)-\varphi(a) = 0$。因此，引理得证。□

由此可得

推论 4.0.2. 映射 $\theta_i : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{V}/\mathcal{V}_i$，其定义如引理*4.0.1*之前的构造中所给出，经由雅克模块$J_{M_n(i)}\mathcal{W}$分解。

证明。 由引理4.0.1，映射 θ_i 在 $\mathcal{W}$的 R-子模 $\mathcal{W}(N_n(i),1)$上为零。因此，它经由商$J_{M_n(i)}\mathcal{W}$分解。□

4.1. 注意，环面 $T_n(F)$ 可由 $(a_1,\dots,a_n)\in(F^\times)^n$ 通过该映射进行参数化

$$(a_1,\dots,a_n)\ \longmapsto\ a=\begin{pmatrix} a_1\cdots a_n & & & \\ & a_2\cdots a_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{pmatrix}\in T_n(F),$$

现在我们将算子 $\rho_i(\varpi_F)$ 定义为由对角矩阵给出的右平移

$$D_i(\varpi_F) := \operatorname{diag}(\underbrace{\varpi_F,\dots,\varpi_F}_{i\text{ times}},\underbrace{1,\dots,1}_{n-i\text{ times}}).$$

换言之， $\rho_i(\varpi_F)$ 通过与该映射作前复合，作用于 $T_n(F)$ 上的函数

$$a\ \longmapsto\ aD_i(\varpi_F).$$

由于 a 与 $D_i(\varpi_F)$ 均为对角矩阵，它们的乘积也是对角矩阵，且各元按坐标逐项相乘。将 a 的对角线写为

$$(a_1\cdots a_n,\ a_2\cdots a_n,\ \dots,\ a_i\cdots a_n,\ a_{i+1}\cdots a_n,\ \dots,\ a_n),$$

$aD_i(\varpi_F)$ 的对角线为

$$(\varpi_F(a_1\cdots a_n),\ \varpi_F(a_2\cdots a_n),\ \dots,\ \varpi_F(a_i\cdots a_n),\ a_{i+1}\cdots a_n,\ \dots,\ a_n).$$

就参数 $(a_1,\dots,a_n)$ 而言，这恰好对应于将第 i 个参数乘以 ϖ_F，而使其余所有 a_j 保持不变：

$$(a_1,\dots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\dots,a_n)\ \longmapsto\ (a_1,\dots,a_{i-1},a_i\varpi_F,a_{i+1},\dots,a_n).$$

因此， $D_i(\varpi_F)$ 的右平移作用于 $T_n(F)$ 上的函数 φ，其作用形式如下

$$(\rho_i(\varpi_F)\varphi)(a)=\varphi(aD_i(\varpi_F))=\varphi(a_1,\dots,a_{i-1},a_i\varpi_F,a_{i+1},\dots,a_n).$$

注意，子模 $\mathcal{V}_i$ 包含于 $\ker(\rho_i(\varpi_F))$ 中。因此，我们考虑商空间 $\mathcal{V}/\mathcal{V}_i$ 上的算子 $\rho_i(\varpi_F)$，它由对角矩阵 $D_i(\varpi_F$ 的右平移定义。现在给出以下引理，其证明采用了 [Mos16a 中使用的技巧。引理 3.5]。

引理 4.1.1. 令 B_i 为由 $\rho_i(\varpi_F)$生成的 $\operatorname{End}_R(\mathcal{V}/\mathcal{V}_i)$ 的 R-子代数。则 B_i 是一个有限生成的 R-模。

证明。对每个指标 i，令 $\rho_i(\varpi_F)$ 表示由对角元素 $D_i(\varpi_F)$ 在惠特克函数上的作用所诱导的右平移算子。由于 $D_i(\varpi_F)$ 规范化幺幂子群 $N_n(i)$，算子 $\rho_i(\varpi_F)$ 保持定义 $(N_n(i),1)$-余不变元的子空间。因此，$\rho_i(\varpi_F)$ 在雅克模块上诱导出一个 $R[M_n(i)]$-线性自同态

$$\rho_i(\varpi_F) : J_{M_n(i)}\mathcal{W} \longrightarrow J_{M_n(i)}\mathcal{W},$$

考虑自然满射

$$\pi : J_{M_n(i)}\mathcal{W} \twoheadrightarrow \mathcal{V}/\mathcal{V}_i$$

它源于 θ_i 的分解。由于 $\rho_i(\varpi_F)$ 对应于由 g_i 给出的右平移，且 g_i 规范化幺幂根基，因此有

$$\rho_i(\varpi_F)\big(\ker\pi\big) \subseteq \ker\pi.$$

因此，$\rho_i(\varpi_F)$ 下降为 $\mathcal{V}/\mathcal{V}_i$ 上定义良好的自同态。由此可知，由 $\rho_i(\varpi_F)$ 生成的 $\mathrm{End}_R(\mathcal{V}/\mathcal{V}_i)$ 的 R-子代数，恰好等于由以下子代数的像

$$\mathrm{End}_R\big(J_{M_n(i)}\mathcal{W}\big)$$

由同一个算子生成。利用 [Hel16a，命题 9.12、命题 9.15] 以及 [Bus01，引理 1]，，我们得到：对于任意具有列维分量 M 的 G_n 的抛物子群 $P = MN$，Jacquet函子 J_M 作用于本原容许的 $R[G_n]$ 模块时保持容许性。由于 V 既是容许的，又是有限生成的 $R[G_n]$ 模块，因此它只属于有限多个伯恩斯坦分支。等价地，在伯恩斯坦中心中，满足 $eV \neq 0$ 的本原正交幂等元 e 只有有限多个。特别地，将 $J_{M_n}(i)$ 应用于 Whittaker 空间 $\mathcal{W}$，我们得到 $J_{M_n}(i)\mathcal{W}$ 也是一个容许的 $R[M_n(i)]$ 模块。根据 Bernstein–Zelevinsky 的经典结果（[BZ77，命题 3.13(e)]），该雅克模块在 $R[M_n(i)]$ 上也是有限型的。关键的几何论据是，对于抛物子群$P_n(i) = M_n(i)N_n(i)$，商 $P_n(i)\backslash G$ 是紧的，这保证了雅克模块$J_{M_n}(i)\mathcal{W}$ 作为 $R[M_n(i)]$ 模块可以由有限多个元素生成。

我们选取 $J_{M_n(i)}\mathcal{W}$ 的一个有限生成集 $\{w_\alpha\}$。由 V 的光滑性可知，每个 w_j 都被 $M_n(i)$ 中的某个紧开子群稳定，记作 U_α。令 $U = \bigcap_\alpha U_\alpha$。因此，我们得到 $M_n(i)$ 中的一个紧开子群 U，它同时固定每个生成元 w_α。现在，雅克模块 $J_{M_n(i)}\mathcal{W}$ 的任意 $R[M_n(i)]$ 等变自同态都完全由其在这些有限多个生成元上的作用决定。由于这些自同态是 $M_n(i)$-等变的，且 U 固定每个 w_α，这些生成元的像必定属于 U-不变子空间

$$(J_{M_n(i)}\mathcal{W})^U.$$

由于 V 是容许的，这个 U-不变子空间是一个有限生成的 R-模。因此，每个自同态都对应于这个有限 R-模中的有限多个元素，故自同态环

$$\mathrm{End}_{R[M_n(i)]}\left(J_{M_n(i)}\mathcal{W}\right)$$

自身是有限生成的 R-模。由于由算子 $\rho_i(\varpi_F)$ 生成的子代数 B_i 嵌入此自同态环，且 R 是诺特的，因此 R-子代数 B_i 也是有限生成的 R-模。□

4.2. 对每个 $1 \le j \le n$，令 $\mathcal{V}^j$（分别 $\mathcal{V}_i^j$）表示 R 的子模 $C^\infty(T_j(F)\ R)$（参见[Mos16a，第 3 节，第 4914]），定义如下：

$$\big\{\varphi|_{T_j(F)} : \varphi \in \mathcal{V} \text{ (resp. } \varphi \in \mathcal{V}_i)\big\}.$$

现在陈述以下引理，它在定理 4.2.2 的证明中起着关键作用。

引理 4.2.1。存在首一多项式 $f_1, \ldots, f_n$，属于 $R[X]$ 且具有单位常数项，使得对于任意的 $j = 1, \ldots, n$，乘积 $f_1(\rho_1(\varpi_F)) \cdots f_j(\rho_j(\varpi_F))$ 将 $\mathcal{V}^j$ 映射到 $\bigcap_{i\le j}\mathcal{V}_i^j$。

证明。为证明该引理，我们遵循 [Mos16a引理 4.3 的思路。1]。令 $W \in \mathcal{V}$。我们需要证明存在充分大的整数 $t_1, \ldots, t_j$（取决于 W），使得

$$f_1\big(\rho_1(\varpi_F)\big) \cdots f_j\big(\rho_j(\varpi_F)\big)\, W(a_1, \ldots, a_j) \;=\; 0$$

w当 $v(a_i) > t_i$ 对某个 $i \le j$ 成立时。这些常数 t_i 完全由 W 确定 .

我们通过对 n 归纳来证明该结果。对于 $n = 1$，我们有 $\bigcap \mathcal{V}_i = \mathcal{V}_1$，因此该结论$_i$可由引理 4.1.1 立即得出。此外，湮灭多项式的常数项是一个单位元，因为 $\rho_1(\varpi_F)$ 是可逆的。

假设该引理对 $n-1$ 成立。固定一个元素 $W \in \mathcal{V}$。由于算子 $\rho_n(\varpi_F)$ 可逆作用，且在 $\mathrm{End}(\mathcal{V}/\mathcal{V}_n)$ 上整，因此它满足一个首一多项式 $f_n(X)$，其常数项等于一个单位元。因此，存在一个整数 t_n ，使得将 $f_n(\rho_n(\varpi_F))$ 应用于 W 会迫使

$$\big(f_n(\rho_n(\varpi))W\big)(a_1,\dots,a_n) = 0,$$

只要 $v(a_n) > t_n$。

现在固定 $b \in F^\times$，并定义一个映射 $\varphi_b\colon \prod_{i=1}^{n-1} F^\times \longrightarrow R$，其定义如下

$$\varphi_b(a_1,\dots,a_{n-1}) = \big(f_n(\rho_n(\varpi_F))W\big)(a_1,\dots,a_{n-1},b).$$

注意到 $\varphi_b \equiv 0$ 只要 $v(b) > t_n$。将归纳假设应用于 $\mathcal{V}^{n-1}$，我们得到具有所需性质的多项式 $f_1,\dots,f_{n-1} \in R[X]$：对于任意 $\varphi \in \mathcal{V}^{n-1}$，都存在充分大的整数 $t_1(\varphi)\dots,t_{n-1}(\varphi)$，它们取决于 φ，使得

$$\big(f_1(\rho_1(\varpi_F))\cdots f_{n-1}(\rho_{n-1}(\varpi_F))\,\varphi\big)(a_1,\dots,a_{n-1}) = 0$$

只要至少有一个 $v(a_i) > N_i(\varphi)$ 满足 $1 \le i \le n-1$。由于映射 φ_b 按构造是惠特克函数乘积在 $T_{n-1}(F)$ 上的限制，我们可以直接对 φ_b应用归纳法。这说明存在充分大的整数 $t_1(b)\dots,t_{n-1}(b)$，它们取决于 b，使得

$$\big(f_1(\rho_1(\varpi_F))\cdots f_{n-1}(\rho_{n-1}(\varpi_F))\,f_n(\rho_n(\varpi_F))\,W\big)(a_1,\dots,a_{n-1},b) = 0$$

只要存在某个 $1 \le i \le n-1$，使得 $v(a_i) > t_i(b)$。

我们旨在证明整数 t_i 的选取可以不依赖于 b。由于 $\varphi_b \equiv 0$ 对$v(b) > t_n$成立，并且根据引理3.0.2，当 $v(b) \ll 0$ 时也为零，因此映射 φ_b 仅当 b 位于 $F^\times$的某个紧子集内时才非零。此外，由于 $f_n(\rho_n(\varpi_F))W$关于每个变量都是局部常值的，尤其是关于最后一个变量局部常值，因此当 b 在该紧集内变化时，只有有限个不同函数 φ_b 。由此可知，对于每个 i，集合 $\{t_i(b) : b \in F^\times\}$ 都是有限的。因此我们可以取 $t_i = \max\{t_i(b) : b \in F^\times\}$. 于是，

$$\big(f_1(\rho_1(\varpi_F))\cdots f_n(\rho_n(\varpi_F))W\big)(a_1,\dots,a_n) = 0$$

每当 $v(a_i) > t_i$ 对于 $i = 1,\dots,n$ 时，正如所要求的。 □

现在我们可以推出有理性结果，证明采用了 [Mos16a，定理 3.2] 中的方法。

定理4.2.2。设 R 是一个诺特 Λ-代数，且 V 是一个光滑的 $R[G_n(E)]$*Whittaker* 型模。设 S 是由 $R[X,X^{-1}]$ 中首项系数和末项系数均为可逆元的多项式组成的乘性子集。则 $I(X,W,\varphi) \in S^{-1}(R[X,X^{-1}])$。

证明。设 $W \in \mathbb{W}(V,\psi_E)$ 和 $\varphi \in C_c^\infty(F^n,R)$。将 W视为 $\mathcal{V}$的一个元素。回顾一下，$I(X,W,\varphi)$ 是 $R[[X]][X^{-1}]$的一个元素。对于任意整数 $m_1,\dots,m_n$，有如下恒等式

$$I(X,\rho_1(\varpi_F)^{m_1}\rho_2(\varpi_F)^{m_2}\cdots\rho_n(\varpi_F)^{m_n}(W),\varphi) = X^{m_1+2m_2+\cdots+nm_n} I(X,W,\varphi) \tag{4.1}$$

利用引理 4.2.1，存在首一多项式 $f_i \in R[X_i]$，$1 \le i \le n$，其常数项为单位元，使得算子 $f_1(\rho_1(\varpi_F))\cdots f_n(\rho_n(\varpi_F))$ 将 $\mathcal{V}$映射到 $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{V}_i$。令 $W_0 = f_1(\rho_1(\varpi_F))\cdots f_n(\rho_n(\varpi_F))(W)$。于是

$$I\big(X,f_1(\rho_1(\varpi_F))\cdots f_n(\rho_n(\varpi_F))(W),\varphi\big) = I(X,W_0,\varphi).$$

由于 $W_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{V}_i$，存在一个整数 $N > 0$，使得对所有满足 $v(\det(a)) > N$ 的 $a \in T_n(F)$，都有 $W_0(a) = 0$。这表明 $I(X, W_0, \varphi) \in R[X, X^{-1}]$。现在，考虑多变量多项式 $f(X_1, \ldots, x_n) \in R[X_1, \ldots, X_n]$，其定义如下：

$$f(X_1, \ldots, X_n) = f_1(X_1) \cdots f_n(X_n).$$

~令 f 为 f 在映射下的像

$$R[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow R[X]$$
$$X_i \longmapsto X^i.$$

~ ~利用恒等式（4.1），可得 $f(X)\ I(X, W, \varphi) \in R[X, X^{-1}]$。由于 f是首一多项式，且常数项为单位元~，因此有 $f \in S$。证毕。□

5. Functional equation

本节证明定理 1.0.1。证明思路与 [Fli93，附录，定理 (iii)]类似。我们沿用第 4 节中的记号。设 F 是一个 p-进域，且设 E是 F的一个二次扩张。设 V 是一个 $R[G_n(E)]$ Whittaker 型模，其中 R 是一个诺特 Λ-代数。

5.1. 令 $R_0 = S^{-1}(R[X, X^{-1}])$。对于 $r \in R_0^{\times}$，令 $\chi_r \colon G_n(F) \to R_0^{\times}$为由 $\chi_r(g) = r^{-v(\det g)}$定义的特征，其中 $g \in G_n(F)$。我们用 $\mathcal{B}\big(\mathbb{W}(V, \psi_E)\ C_c^{\infty}(F^n, R)$ 表示；$\chi_X\big)$ 双线性映射 $B \colon \mathbb{W}(V, \psi_E) \times C_c^{\infty}(F^n, R) \to R$所构成的空间，使得

$$B(g.W, g.\varphi) = X^{-v(\det g)} B(W, \varphi)$$

对所有 $g \in G_n(F)$、$W \in \mathbb{W}(V, \psi_E)$ 和 $\varphi \in C_c^{\infty}(F^n, R)$。注意，在第 3 节中定义的形式级数 $I(X, W, \varphi)$ 显然属于 $\mathcal{B}\big(\mathbb{W}(V, \psi_E)\ C_c^{\infty}(F^n, R)$；$\chi_X\big)$。我们证明以下定理。

定理 5.1.1. 设 R 是一个诺特 Λ-代数。设 V 是一个 *Whittaker* 型 $R[G_n(E)]$ 模。则 $\mathcal{B}\big(\mathbb{W}(V, \psi_E)\ C_c^{\infty}(F^n, R); \chi_X\big)$ 是一个秩为一的自由 R-模。

为证明上述定理，我们回顾一些标准观察。设 G 是一个局部仿射有限群，$R[G]$ 和 V_1, V_2是两个光滑模。令 $\mathcal{B}_G(V_1, V_2)$ 表示 R上的双线性形式B 构成的空间，其中对所有 $g \in G$ 和 $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$，均有 $B(gv_1, gv_2) = B(v_1, v_2)$。注意，所有满足 $\varphi(0) = 0$的函数 $\varphi \in C_c^{\infty}(F^n, R)$ 构成的空间与 $C_c^{\infty}(F^n \setminus \{0\})$ 同构。令 $P_n(F)$ 为 $G_n(F)$ 的米拉博利克子群。$G_n(F)$ 在 $F^n \setminus \{0\}$上的作用定义为$g.\xi = \xi g$，其中 $g \in G_n(F)$ 且 $\xi \in F^n \setminus \{0\}$，由此诱导出 $F^n \setminus \{0\}$ 与陪集空间 $P_n(F) \backslash G_n(F)$ 的一个同一化。于是

$$C_c^{\infty}(F^n \setminus \{0\}) = C_c^{\infty}(P_n(F) \backslash G_n(F)) = \iota_{P_n(F)}^{G_n(F)} \delta_{P_n(F)}^{-1/2},$$

其中 $\iota^{G_n(F)}\ P_n(F)$ 是归一化紧诱导函子。这里，$\delta_{P_n(F)}$ 表示 $P_n(F)$ 的模特征，其定义为

$$\delta_{P_n(F)} \begin{pmatrix} g & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = q^{-v(\det g)},$$

对于 $g \in G_{n-1}(F)$ 和 $x \in F^{n-1}$。利用弗罗贝尼乌斯互反律以及 $\iota^{G_n(F)}{}_{P_n(F)}\ \delta_{P_n}^{-1/2}{}_F() \simeq I^{G_n(F)}{}_{P_n(F)}\ \delta_{P_n}^{1/2}{}_{(F)}$这一事实，我们得到

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{G_n(F)}\big(\mathbb{W}(V, \psi_E) \otimes \chi_{X^{-1}}, C_c^{\infty}(F^n \setminus \{0\})\big) &\simeq \mathcal{B}_{G_n(F)}\big(\mathbb{W}(V, \psi_E) \otimes \chi_{X^{-1}}, \iota_{P_n(F)}^{G_n(F)} \delta_{P_n(F)}^{-1/2}\big) \\ &\simeq \mathcal{B}_{P_n(F)}\big(\mathbb{W}(V, \psi_E) \otimes \chi_{X^{-1}}, \delta_{P_n(F)}^{-1}\big) \\ &\simeq \mathcal{B}_{P_n(F)}\big(\mathbb{W}(V, \psi_E) \otimes \chi_{q^{-1}X^{-1}}, \mathbb{1}\big) \end{aligned}$$

其中 $\mathbb{1}$ 表示平凡的 $R[P_n(F)]$ 模。定理 5.1.1 证明中的关键步骤是证明以下引理。

引理 5.1.2. 空间 $\mathcal{B}_{P_n(F)}\big(\mathbb{W}(V, \psi_E) \otimes \chi_{q^{-1}X^{-1}}, \mathbb{1}\big)$ 是一个秩一的自由 R-模。

证明。令 $\mathcal{W}=\mathbb{W}(V,\psi_E)$。考虑与 $\mathcal{W}$ 相关联的 $R[P_n(E)]$ 子模滤过 :

$$\{0\}\subseteq\mathcal{W}_n\subseteq\cdots\subseteq\mathcal{W}_2\subseteq\mathcal{W}_1=\mathcal{W}$$

其中 $\tau_i=\mathcal{W}_i/\mathcal{W}_{i+1}\simeq(\Phi^+)^{i-1}\Psi^+(\mathcal{W}^{(i)})$。沿用 [Fli93，附录，主引理], 中的证明思路，我们得到空间 $\mathcal{B}_{P_n(F)}\big(\tau_i\otimes\chi_{q^{-1}X^{-1}},\mathbb{1}\big)$ 对 $1\leq i\leq n-1$ 是平凡的。注意， $\tau_n=\mathrm{ind}^{P_n(E)}_{N_n(E)}\psi_E$。$\tau_n\otimes\chi_{q^{-1}X^{-1}}$ 在 $P_n(F)$ 上的限制有一个合成列，由 $\mathrm{ind}^{P_n(F)}_{N_n(F)}\psi_E^a$ 构成，其中 a 遍历陪集空间 $T_n(E)/T_n(F)$（回忆一下，T_n 是 G_n 中的对角环面），并且对于 $u\in N_n(F)$，有 $\psi_E^a(u)=\psi_E(a^{-1}ua)$（参见 [Fli93，附录，引理 9]）。由于 ψ_E^a 在 $N_n(F)$ 上非平凡，对于所有 $a\notin T_n(F)$，空间 $\mathrm{Hom}_{N_n(F)}(\psi_E^a,1)$ 都是平凡的。若 $a\in T_n(F)$，则 $\mathrm{Hom}_{N_n(F)}(\psi_E,1)\simeq R$，因为 ψ_E 在 $N_n(F)$ 上是平凡的。这意味着 $\mathcal{B}_{P_n(F)}(\tau_n\otimes\chi_{q^{-1}X^{-1}},1)=\mathcal{B}_{P_n(F)}(\tau_n,1)$ 是一个秩为一的自由 R-模。证毕。□

现在我们可以通过改编 5.1.1 的关键思想来证明定理 [Fli93，附录，命题]。

定理 5.1.1 的证明。为简化记号，令 $\mathcal{C}=C_c^\infty(F^n,R)$ 和 $\mathcal{C}_0=C_c^\infty(F^n\setminus\{0\},R)$。由于空间 $\mathcal{B}\big(\mathbb{W}(V,\psi_E)\ C_c^\infty(F^n,R);\ \chi_X\big)$ 非零，我们需要证明该空间中的两个元素互为倍数。令 $\phi,\phi'\in\mathcal{B}\big(\mathbb{W}(V,\psi_E)\ C_c^\infty(F^n,R);\ \chi_X\big)$。注意

$$\mathcal{B}\big(\mathbb{W}(V,\psi_E),C_c^\infty(F^n,R);\chi_X\big)=\mathcal{B}_{G_n(F)}\big(\mathbb{W}(V,\psi_E)\otimes\chi_{X^{-1}},\mathcal{C}\big)$$

and

$$\mathcal{B}_{P_n(F)}\big(\mathbb{W}(V,\psi_E)\otimes\chi_{q^{-1}X^{-1}},\mathbb{1}\big)=\mathcal{B}_{G_n(F)}\big(\mathbb{W}(V,\psi_E)\otimes\chi_{X^{-1}},\mathcal{C}_0\big)$$

根据引理 5.1.2，存在一个元素 $c\in R_0$，使得 $\phi_0=\phi-c\phi'$ 在 $\mathbb{W}(V,\psi_E)\otimes\chi_{X^{-1}}\times\mathcal{C}_0$ 上的限制为零。另请注意，映射 $\varphi\mapsto\varphi(0)$ 是从 $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ 到 R_0 的同构。因此，定义在 $G_n(F$ 上的 ϕ_0-等变双线性形式 $\mathbb{W}(V,\psi_E)\otimes\chi_{X^{-1}}\times\mathcal{C}$ 具有如下形式

$$\phi_0(W,\varphi)=\xi(W)\varphi(0).$$

其中 ξ 是定义在 $\mathbb{W}(V,\psi_E)\otimes\chi_{X^{-1}}$ 上的 $G_n(F)$-等变线性形式。对于所有 $z\in F^\times$，我们有$\xi(z.W)=\xi(W)$，这意味着 $(\omega_V(z)X^{nv(z)}-1)h(W)=0$属于 R_0。由于多项式$w_V(z)X^{nv(z)}-1$是乘法集合 S 的元素，故它是 R_0 中的单位元，因此有 $\xi(W)=0$，从而对所有 $W\in\mathbb{W}(V,\psi_E)\otimes\chi_{X^{-1}}$ 以及 $\varphi\in\mathcal{C}$，都有 $\phi_0(W,\varphi)=0$。因此，我们得到 $\phi=c\phi'$。证明完毕。□

作为定理5.1.1的推论，我们得到以下函数方程。

定理 5.1.3. 设 E 是 p-进域 F 的二次扩张。设 R 是诺特Λ-代数，且 V 是一个 *Whittaker* 型的 $R[G_n(E)]$模。存在唯一的元素$\gamma_{As}(X,V,\psi_E)\in S^{-1}(R[X,X^{-1}])$，使得

$$I(q^{-1}X^{-1},\widetilde{W},\widehat{\varphi})=\omega_V(-1)^{n-1}\,\gamma_{As}(X,V,\psi_E)\,I(X,W,\varphi),$$

对所有 $W\in\mathbb{W}(V,\psi_E)$ 和 $\varphi\in C_c^\infty(F^n,R)$。

证明。注意，两个形式级数 $I(X,W,\varphi)$ 和 $I(q^{-1}X^{-1},\widetilde{W},\widehat{\varphi})$ 属于空间$\mathcal{B}\big(\mathbb{W}(V,\psi_E)\ C_c^\infty(F^n,R);\ \chi_X\big)$，它是一个自由 R-模且秩一，由定理 5.1.1。因此定理得证。□

设 R' 是一个诺特 Λ-代数，且设 $f:R\to R'$ 是一个 Λ-代数态射。那么$V\otimes_{R,\,f}R'$ 也是一个 $R'[G_n(E)]$ Whittaker 型模。于是有如下引理，它表明形式级数 $I(X,\ W,\ \varphi)$ 的构造与系数环的基变换相容。

引理 5.1.4。令 T 表示由 f 诱导的环同态 $S^{-1}(R[X,X^{-1}]) \to S^{-1}(R'[X,X^{-1}])$。那么

$$T\big(I(X,W,\varphi)\big) = I(X, f\circ W, f\circ\varphi)$$

and

$$T\big(I(X,\widetilde{W},\widehat{\varphi})\big) = I(X,\widetilde{f\circ W},\widehat{f\circ\varphi}),$$

对所有 $W\in\mathbb{W}(V,\ \psi_E)$ 以及 $\varphi\in C_c^\infty(F^n,\ R)$。

证明。注意到 $\mathbb{W}(V\otimes_{R,\ f} R',\ \psi_E) = \mathbb{W}(V,\ \psi_E)\otimes_{R,\ f} R'$。于是由 $I(X,\ W,\ \varphi)$ 的定义可得该引理。□

由此可得以下推论。

推论 5.1.5。若 $\gamma_{As}(X,\ V,\ \psi_E)$ 满足定理 *5.1.3*中的函数方程，则$T(\gamma_{As}(X,\ V,\ \psi_E))$ 满足关于$V\otimes_{R,\ f} R'$的函数方程。此外，由定理*5.1.3*中此类元素的唯一性可知

$$T\big(\gamma_{As}(X,V,\psi_E)\big) = \gamma_{As}(X, V\otimes_{R,f} R', \psi_E).$$

元素 $\gamma_{As}(X,\ V,\ \psi_E)$ 称为与 V 相关联的*Asai* 伽马因子。上述推论表明，Asai γ-因子与系数环的基变换相容。

注 5.1.6。特别是，当 $E = F\times F$ 时，我们便得到一对 $R[G_n(F)]$ 型模（$V,\ V'$）的惠特克型族上的 Rankin–Selberg 函数方程。事实上，同样的证明也适用于 $R = A\otimes_\Lambda B$，其中 A 和 B 是诺特 Λ- 代数，从而完成了 [MM22，推论 310] 中针对 $m=n$ 的 Rankin–Selberg 理论。

6. Distinguished representations in families

本节首先介绍族中惠特克区分表示的概念。随后，我们根据其 Asai γ 因子，证明惠特克型模可区分的一个必要条件。

6.1. 设 F 是一个 p-进域，且 E 是 F 的一个二次扩张。设 R 是一个诺特Λ-代数。若光滑 $R[G_n(E)]$ 模 V 存在非零的 R-线性映射 $\lambda: V\to R$，使得对于所有 $g\in G_n(F)$ 和 $v\in V$，都有 $\lambda(gv) = \lambda(v)$，则称其为 $G_n(F)$-可区分的。为满足本文的需要，我们如下定义惠特克型族的区分表示。

定义 6.1.1. Whittaker 型的光滑 $R[G_n(E)]$模 V 称为 Whittaker$G_n(F)$-区分的，如果存在一个非零的 $G_n(F)$-等变线性映射 $\lambda: \mathbb{W}(V,\psi_E)\to R$。这等价于说

$$\mathrm{Hom}_{R[G_n(F)]}(\mathbb{W}(V,\psi_E),\mathbb{1}) \neq \{0\}.$$

注意，$G_n(F)$ 等变映射 $\lambda: \mathbb{W}(V,\psi_E)\to R$通过与典范满射 $V\to\mathbb{W}(V,\psi_E)$ 复合，会在V上诱导一个 $G_n(F)$ 等变映射。因此，Whittaker 型的 $R[G_n(E)]$模若是 Whittaker $G_n(F)$-区分的，则也是 $G_n(F)$-区分的。但是，Whittaker 型的 $R[G_n(E)]$ 模即使是 $G_n(F)$-区分的，也未必是 Whittaker$G_n(F)$-区分的。若 R 是一个域，且 V 是 Whittaker 型的不可约 $R[G_n(E)]$ 模（此时 V 是泛型），那么满射 $V\to\mathbb{W}(V,\psi_E)$ 是同构；在这种情况下，若 V是 $G_n(F)$-区分的，则它也是 Whittaker $G_n(F)$-区分的。因此，对于惠特克型族而言，Whittaker 区分表示的概念比通常的区分表示概念更强。注意，若 V 是 Whittaker $G_n(F)$-区分的，则 $V^\vee$也是。

当 $R=\mathbb{C}$时，对于 $G_n(E)$ 的离散系列复表示，若其为 $G_n(F)$-可区分，则可通过其 Asai L-函数的极点来刻画；这一结果归功于 [Kab04，定理 4] 以及 [AKT04，推论 1。5]结果如下。

定理 6.1.2. 设 (π,V) 为 $G_n(E)$ 的离散系列表示。则 π 是 $G_n(F)$-可区分的，当且仅当 *Asai* L-函数 $L_{As}(\pi,s)$ 在 $s=0$ 处有极点。

回顾一下， L-因子在族中的概念并非良定义的，因为难以构造 L-因子，使其与系数环的基变换相容（参见 [Mos16b，第 1 节，第 1790]页）。另一方面， γ-因子对于 Whittaker 型模是良定义的，并且与系数环的基变换相容。因此，自然会寻求与定理6.1.2 类似的、关于 $R[G_n(E)]$ Whittaker 型且 Whittaker $G_n(F)$-可区分的模的结果，用 Asai γ-因子加以表述。为此，我们需要回顾并建立若干事实。

6.2. 设 V 为一个 Whittaker 型的 $R[G_n(E)]$模。假设 V 是尖点的，即雅克模块 $J_P(V)$ 对所有真抛物子群 P（ $G_n(E)$ 的）均为平凡。考虑 $R[P_n(E)]$ 子模的滤过：

$$\{0\} \subseteq V_n \subseteq \cdots \subseteq V_2 \subseteq V_1 = V$$

其中 $V_i/V_{i+1} \simeq (\Phi^+)^{i-1}\Psi^+(V^{(i)})$ 对 $1 \leq i \leq n$ 成立，且 $V_n = \mathrm{ind}^{P_n(E)}_{N_n(E)}\psi_E$。对每个 $0 \leq i \leq n$，令 $M(i)$ 为 Levi子群 $G_{n-i}(E) \times G_i(E)$。则第 i 次导数 $V(i)$ 是复合 $(J_{M(i)}(V))^{(0,i)}$ ([BZ77，命题 6.7], [Vig96，第三章，第 1 节.8])，其中 $J_{M(i)} : \mathcal{M}(G_n(E)) \to \mathcal{M}(M(i))$ 是 Jacquet函子，而 $(-)^{(0,i)}$： $\mathcal{M}_R(M(i)) \to \mathcal{M}_R(G_{n-i}(E))$ 是偏导数函子（定义见 [Mos16b，第 2 节.3] ）。由于 V 是尖点的，我们有 $V^{(i)} = 0$ （对 $1 \leq i \leq n-1$），因而由上述滤过可得 $\mathbb{W}(V,\psi_E)|_{P_n(E)} = \mathrm{ind}^{P_n(E)}_{N_n(E)}\psi_E$。我们定义一个 $P_n(F)$-等变线性形式 λ，定义在 Whittaker 空间 $\mathbb{W}(V,\psi_E)$ 上，其方式为，

$$\lambda(W) := \int_{N_n(F)\backslash P_n(F)} W(p)\,dp, \tag{6.1}$$

其中 dp是 $N_n(F)\backslash P_n(F)$ 上的一个右 $P_n(F)$-等变 Haar 测度。由于 V是尖点的，上述积分有意义。现在我们固定 $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_E)$ 的一个同余子群 K' ，并令 $\varphi \in \mathrm{ind}^{P_n(E)}_{N_n(E)}\psi_E$ 使得它支撑在 $N_n(E)(K' \cap P_n(E))$ 上，且在 $K' \cap P_n(E)$ 下右不变。于是存在 $W \in \mathbb{W}(V,\psi_E)$，使得 $W|_{P_n(E)} = \varphi$且 $\lambda(W) \neq 0$。因此，λ是 $\mathbb{W}(V,\psi_E)$ 上的一个非零 $P_n(F)$-等变 R-线性形式。我们证明如下定理，它表明由 (6.1) 定义的线性形式 λ 是 $\mathbb{W}(V,\psi_E)$ 上唯一的 $P_n(F)$-等变线性形式（至多相差一个标量）。

定理 6.2.1. 设 R 为一个诺特 Λ-代数，并设 V 为一个*Whittaker* 型的尖点 $R[G_n(E)]$模。则

$$\mathrm{Hom}_{R[P_n(F)]}\big(\mathbb{W}(V,\psi_E), \mathbb{1}\big)$$

是秩一的自由 R-模。

证明. 设 $\mathcal{K}(\psi_E)$ 表示 $R[P_n(E)]$ 模 $\mathrm{ind}^{P_n(E)}_{N_n(E)}\psi_E$。Whittaker 模型 $\mathbb{W}(V,\psi_E)$ 作为 $P_n(F)$ 的表示来看时，带有通常的伯恩斯坦–泽列文斯基滤过。该滤过的第 i 个分次层可取为同构于

$$(\Phi^+)^{i-1}\,\Psi^+\big(\mathbb{W}(V,\psi_E)^{(i)}\big), \quad 1 \leq i \leq n,$$

其中 $\Phi^\pm$ 与 $\Psi^\pm$ 为通常的米拉波利克函子，且 $\mathbb{W}(V,\psi_E)^{(i)}$ 表示第 i 个伯恩斯坦–泽列文斯基导数。为计算到平凡模的 $P_n(F)$-等变映射空间，我们将函子 $\mathrm{Hom}_{P_n(F)}(\,\cdot\,,\mathbb{1})$ 作用于该滤过的短正合列。这将问题归结为确定每个分次层上的 Hom 空间。由于 V 是尖点的，$\mathbb{W}(V,\psi_E)|_{P_n(E)} = \mathcal{K}(\psi_E)$。此外，对 $i < n$ 而言，第 i 个导数 $\mathcal{K}(\psi_E)^{(i)}$ 是平凡的，且$\mathcal{K}(\psi_E)^{(n)}$ 是秩一的自由 R-模。因此，我们有

$$\mathrm{Hom}_{R[P_n(F)]}\big(\mathbb{W}(V,\psi_E),\mathbb{1}\big) \simeq \mathrm{Hom}_{R[P_n(F)]}\big((\Phi^+)^{n-1}\Psi^+(\mathbb{1}),\mathbb{1}\big).$$

注意，$(\Phi^+)^{n-1}\Psi^+(\mathbb{1}) = \mathcal{K}(\psi_E)$，因此后一个 Hom 空间同构于 R （参见引理 5.1.2 的证明）。定理得证。 □

推论 6.2.2。 设 V 是一个 *Whittaker* 型尖点 $R[G_n(E)]$ 模，且 V 是 *Whittaker* $G_n(F)$-可区分的。那么由 (λ定义的线性形式 *6.1)*，诱导出一个非零的 $G_n(F)$-等变 R-线性形式，定义在 $\mathbb{W}(V,\psi_E)$上。

证明。 由于 $G_n(F)$-等变线性形式尤其也是 $P_n(F)$-等变的，因此该推论由定理6.2.1 得出。 □

6.3. 本小节回顾一些一般事实。设 R 是一个含幺交换环，满足 $p \in R^\times$。设 G 是一个局部仿射有限群，它含有一个 pro 阶在 R中可逆的紧开子群。根据 [Vig96，第 I 章，第 2 节，4], 对于 G 中每个 pro 阶在 R中可逆的紧开子群 K，存在唯一的左 Haar 测度 μ，使得 $\mu(K) = 1$。设 H 是 G的一个闭子群。设 $\delta_G : G \to R^\times$ （分别为 δ_H）是 G（分别为 H）的模特征，并令 $\delta = \delta_G^{-1}|_H \, \delta_H$。设 dh 是 H上的右 Haar 测度，且设 $d_{H\backslash G}g$ 是一个δ-准不变商测度，定义在 $H\backslash G$上。于是，我们可以在 G 上定义 Haar 测度 dg，使得

$$\int_G f(g)\, dg = \int_{H\backslash G} \left(\int_H f(hg)\, \delta^{-1}(h)\, dh \right) d_{H\backslash G}(g),$$

对所有 R-值函数 f，这些函数局部常值且具有紧支集（参见 [KM17，第 2 节。2]）。由此恒等式可得以下关键引理，它将在主定理中使用。

引理 6.3.1. 设 G 是一个局部仿射有限群。设 $H_1 \subseteq H_2$ 是 G 的两个闭子群，使得商空间 $H_1\backslash H_2$ 具有一个右 H_2-不变的 *Haar* 测度 ν_2。设 μ_1 和 μ_2 分别是商空间 $H_1\backslash G$ 和 $H_2\backslash G$ 上的右 G-不变测度。那么，适当规范化 *Haar* 测度后，有

$$\int_{H_1\backslash G} f(g)\, d\mu_1(g) = \int_{H_2\backslash G} \left(\int_{H_1\backslash H_2} f(hg)\, d\nu_2(h) \right) d\mu_2(g),$$

对于 R-值函数 f，其模 H_1 局部常值且具有紧支集。

我们证明以下定理。

定理 6.3.2. 设 R 是诺特 Λ-代数。设 V 是一个尖点 $R[G_n(E)]$模，属于 *Whittaker* 型，并且 V 是 *Whittaker* $G_n(F)$-可区分的。那么 *Asai* γ-因子 $\gamma_{As}(X, V, \psi_E)$在 $X = 1$ 处消失。

证明。 设 μ_1 与 μ_2 分别为商空间 $N_n(F)\backslash G_n(F)$ 与 $P_n(F)\backslash G_n(F)$ 上的右 $G_n(F)$-等变 Haar 测度。设 dp 为 $N_n(F)\backslash P_n(F)$ 上的右 $P_n(F)$-等变测度。回忆

$$I(q^{-1}X^{-1}, \widetilde{W}, \widehat{\varphi}) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \left(\int_{N_n(F)\backslash G_n(F)^r} \widetilde{W}(g)\, \widehat{\varphi}(\eta g)\, d\mu_1(g) \right) X^r,$$

对 $W \in \mathbb{W}$（V，ψ_E）与 $\varphi \in C_c^\infty$（F^n，R）。将 $X = 1$ 代入上述恒等式，并利用引理6.3.1，我们得到

$$\begin{aligned} I(q^{-1}, \widetilde{W}, \widehat{\varphi}) &= \int_{P_n(F)\backslash G_n(F)} \left(\int_{N_n(F)\backslash P_n(F)} \widetilde{W}(pg)\, \widehat{\varphi}(\eta p g)\, dp \right) d\mu_2(g) \\ &= \int_{P_n(F)\backslash G_n(F)} \widehat{\varphi}(\eta g) \left(\int_{N_n(F)\backslash P_n(F)} (g.\widetilde{W})(p)\, dp \right) d\mu_2(g). \end{aligned}$$

由于 $V^\vee$ 是Whittaker $G_n(F)$-可区分的，由推论6.2.2 可知， $P_n(F)$-等变映射 $\widetilde{W} \mapsto \int_{N_n(F)\backslash P_n(F)} \widetilde{W}(p)\, dp$给出了 $\mathbb{W}(V^\vee, \psi_E^{-1})$上的一个 $G_n(F)$-等变映射。

于是我们有

$$\begin{aligned} I(q^{-1},\widetilde{W},\widehat{\varphi}) &= \int_{P_n(F)\backslash G_n(F)} \widehat{\varphi}(\eta g)\left(\int_{N_n(F)\backslash P_n(F)} (g.\widetilde{W})(p)\,dp\right) d\mu_2(g) \\ &= \left(\int_{P_n(F)\backslash G_n(F)} \widehat{\varphi}(\eta g)\,d\mu_2(g)\right)\left(\int_{N_n(F)\backslash P_n(F)} \widetilde{W}(p)\,dp\right) \\ &= \varphi(0)\int_{N_n(F)\backslash P_n(F)} \widetilde{W}(p)\,dp, \end{aligned}$$

其中，第一个积分由 φ（0）根据傅里叶反演公式得到。由函数方程（定理5.1.3），可得

$$I(q^{-1},\widetilde{W},\widehat{\varphi}) = \omega_V(-1)^{n-1}\,\gamma_{As}(1,V,\psi_E)\,I(1,W,\varphi) \tag{6.2}$$

现在，可以选择 $W_0 \in \mathbb{W}$（V，ψ_E）和 $\varphi_0 \in C_c^\infty$（F^n，R），使得 φ_0（0）$= 0$ 且I（1，W_0，φ_0）$= 1$（见 [AKT04定理 1 的证明。4]）。然后由恒等式（6.2）可得

$$\gamma_{As}(1,V,\psi_E) = 0.$$

因此，定理得证。 □

注 6.3.3。理解定理6.3.2的逆向结论也很有意思，可以考虑将其作为未来的研究方向。

致谢。作者感谢 U. K. Anandavardhanan 提出这一问题，并在研究过程中进行了多次有益的讨论。作者感谢 Nadir Matringe 提供宝贵的意见和建议，也感谢 Dipendra Prasad 对本研究的鼓励与关注。作者还感谢印度孟买理工学院通过研究所博士后奖学金资助本研究。

References

[AKT04] U. K. Anandavardhanan、Anthony C. Kable 和 R. Tandon, *Distinguished representations and poles of twisted tensor L-functions* **132** 2004 10, 2875 2883 , 《美国数学会会刊》（），第 – 期。MR 2063106

[08] *Root numbers of Asai L-functions* 2008 Ana U. K. Anandavardhanan, , 《国际数学研究通知》（Int. Math. Res. Not. IMRN）（），文章编号 rnn125，25。MR 2448081[AR05] U. K. Anandavardhanan 和 C. S. Rajan, *Distinguished representations base change and reducibility* , , 《国际数学研究通知》（），第 – 期。MR *for unitary groups* 2005 14, 841 854 2146859

[01] Bus Colin J. Bushnell, *Representations of reductive p-adic groups: localization of Hecke algebras and applications* 2 **63** 2001 2, 364 386 , 《伦敦数学学会杂志》（）（），第 – 期。MR 1810135

[77] BZ I. N. Bernstein 和 A. V. Zelevinsky, *Induced representations of reductive p-adic groups. I*, 《高等师范科学研究所年刊》（Ann. Sci. ́Ecole Norm. Sup.）(4) 10 (1977)，第 4 期，441–472。MR 579172[DHKM24] Jean-Fran ̧ *Finiteness for Hecke algebras of p-adic groups* cois Dat、David Helm、Robert Kurinczuk 和 Gilbert Moss, , 《美国数学会杂志》（），第 – 期。MR **37** 2024 3, 929 949 4736530

[14] *The local Langlands correspondence for* EH Matthew Emerton 和 David Helm, GL_n *in families*, 《高等师范科学研究所年刊》（Ann. Sci. ́Ec. Norm. Sup ́ 4 **47** 2014 4, 655 722 3250061 er.）（）（），第 –

[88] *Twisted tensors and Euler products* 期。MR Fli Yuval Z. Flicker, 《法国数学通报》（Bull. Soc. Math. France）116 3, 295 1988 313 984899（），第 – 期。MR

[91] *On distinguished representations* **418** 1991 139 172 1111204 Fli , , 《纯粹与应用数学杂志》（J.

[93] *On zeroes of the twisted tensor L-function* **297** 1993 2, 199 219 Reine Angew. Math.）（），–。MR Fli , , 《数学年刊》（Math. Ann.）（），第 – 期。MR 1241802[Hel16a] David Helm, *The Bernstein center of the category of smooth $W(k)[\mathrm{GL}_n(F)]$-modules*, Forum Math. Sigma **4** 2016 11, 98 3508741（），论文编号 e。MR Hel b ,

[16] *Whittaker models and the integral Bernstein center for* $_n$ **165** 2016 9, GL, Duke Math. J.（），第 – 期。MR [HM18] 1597 1628 3513570 David Helm 和 Gilbert Moss, *Converse theorems and the local Langlands correspondence in families*, 《发明数学》（Invent. Math.） **214** 2018 2, 999 1022 3867634 （），第 – 期。MR Kab Anthony C. Kable, 《美国数学杂志》（Amer. J.

[04] *Asai L-functions and Jacquet's conjecture* Math.）126 4, 789 2004 820 2075482（），第 – 期。MR [KM17] Robert Kurinczuk 和 Nadir Matringe, *Rankin-Selberg local factors modulo ℓ*, 《精选数学》（Selecta Math.）(N.S.) 23 (2017 1, 767 811 3595906)，第 – 期。MR KM ,

[20] *Characterisation of the poles of the ℓ-modular Asai* L*-factor*, 《法国数学通报》（Bull. Soc. Math. France）148 (2020)，第 3 期，481–514。MR 4161168

[KMS25] Robert Kurinczuk、Nadir Matringe 和 Vincent S´echerre, *Cuspidal ℓ-modular representations of* $\mathrm{GL}_n(F)$ *distinguished by a Galois involution*, Forum Math. Sigma **13** （2025年），论文编号 e48，41。MR 4867166[Mat11] Nadir Matringe, *Distinguished generic representations of* $\mathrm{GL}(n)$ *over p-adic fields*, 《国际数学研究通知》（Int. Math. Res. Not. IMRN）（ 2011 1, 74 95 2755483 ），第 – 期。MR MM Nadir Matringe 和 Gilbert Moss, [22] *The Kirillov model in families* **198** 2022 2, , 《月刊数学》（ 393 410 4421915 Monatsh. Math.）（），第 – 期。MR[Mos16a] Gilbert Moss, *Gamma factors of pairs and a local converse theorem in families*, 《国际数学研究通知》（Int. Math. Res. Not. IMRN）（ 2016 16, 4903 4936 3556429 ），第 – 期。[16] *Interpolating local constants in families* MR Mos b , , Math. Res. Lett. **23** （2016年），第 6 期，1789–1817。MR 3621107[Pra01] Dipendra Prasad, *On a conjecture of Jacquet about distinguished representations of* $\mathrm{GL}(n)$，Duke Math. J. **109** （2001年），第 1 期，67–78。MR 1844204[Vig96] Marie-France Vign´eras, *Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec* $l \neq p$，数学进展（Progress in Mathematics），第 137 卷，Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1996年。MR 1395151

Sabyasachi Dhar，mathsabya93@gmail.com，sabya@math.iitb.ac.in；Hariom Sharma，hariomshrma97@gmail.com，hariom@math.iitb.ac.in。印度孟买理工学院数学系，孟买，马哈拉施特拉邦 400076，印度。