arXiv:2603.02718v1 [math.NT] 3 Mar 2026

A 对数棱柱-晶体比较定理

HENG DU、YONG SUK MOON 和 KOJI SHIMIZU

摘要。我们证明了具有半稳定约化的 p-进形式概形的对数棱柱上同调与对数晶体上同调之间的比较定理。结合 Tian[Tia25], 最近证明的棱柱-étale 比较定理，这意味着在系数为半稳定局部系统的半稳定情形下， C_{st}-猜想成立。

目录

1. 引言 1 2. 对数棱柱位点 9 3. 对数棱柱位点的函子性 11 4. 完美复形中的棱柱 F-晶体 14 5. 相应层的棱柱-晶体比较 20 6. 半稳定形式概形上的棱柱-晶体比较 23 6.1. 记号与概述 24 6.2. Breuil–Kisin 对数棱柱 28 6.3. 解析棱柱 F-晶体与完美复形 32 6.4. Breuil–Kisin 与 Breuil 上同调 33 6.5. 晶体的棱柱-晶体比较 36 6.6. 晶体上同调与 Breuil 上同调的 Frobenius 同源性质 39 6.7. Hyodo–Kato 理论 43 6.8. Hyodo–Kato 上同调 48 7. 对 C_{st}-猜想的应用 53 7.1. 半稳定 $\mathbf{Z}_p$-局部系统与解析棱柱 F-晶体 53 7.2. C_{st}-猜想 55 7.3. Étale-de Rham 比较 58 附录 A. 对数形式概形的补充 66 附录 B. 晶体位点的变体 67 B.1. 晶体位点 67 B.2. $\delta_{\log}$-晶体位点 72 参考文献 73

1. 引言

固定一个素数 p，并设 K 是$\mathbf{Q}_p$ 上的完备离散赋值域，其剩余域 k 是完美的。设 $K_0 := W(k)[p^{-1}]$。理解 K 上的簇所涉及的各种 p-进上同调理论之间的关系，一直备受关注。

Fontaine–Jannsen 的 C_{st}猜想比较了真半稳定概形 X 在 $\mathcal{O}_K$上的 p-进 étale 上同调与 Hyodo–Kato 上同调：

$$H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_p) \otimes_{\mathbf{Z}_p} B_{\mathrm{st}} \cong H^i_{\mathrm{HK}}(X_0) \otimes_{K_0} B_{\mathrm{st}}. \tag{1.1}$$

这里， $X_0 \coloneqq X \otimes_{\mathcal{O}_K} k$，而 B_{st} 是由 Fontaine 构造的半稳定周期环；上述同构与伽罗瓦作用、Frobenius、单值算子相容，并且在基变换至 de Rham 周期环 B_{dR} 后也与滤过相容（详情见下文）。这一猜想及其变体已在多项研究中得到证明，包括 [Tsu99、Fal02、Niz08、AI12、Bha12、Bei13、CN17、ČK19]。

在研究几何族的 p-进伽罗瓦表示时，自然会想到将 C_{st} 猜想（1.1）推广，使其允许某些系数。本文旨在给出一个针对系数的 C_{st} 型比较定理，具体表述如下。

定理1.1 (定理 7.9，基于 [Tia25, 定理 0.4]以及定理1.5、1.7)。 设(X, M_X)是定义在 $\mathcal{O}_K$ 上的真半稳定 p-进形式概形。设 $\mathbb{L}$ 是一般纤维 X_K 上的半稳定$\mathbf{Z}_p$-局部系统，且 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}$ 是 X_0 上相应的带滤过F-等晶体。那么存在一个同构

$$\alpha_{\mathrm{st}} \colon R\Gamma(X_{C,\text{ét}}, \mathbb{L}) \otimes^L_{\mathbf{Z}_p} B_{\mathrm{st}} \xrightarrow{\cong} R\Gamma_{\mathrm{HK}}((X_0, M_{X_0}), \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \otimes^L_{K_0} B_{\mathrm{st}}$$

与伽罗瓦作用、*Frobenius* 和单值作用相容，并且在基变换到 B_{dR}后与滤过相容。

在上述陈述中， M_X 表示对数结构 $\mathcal{O}_X \cap (\mathcal{O}_X[p^{-1}])^\times$， C 是 K的代数闭包K 的完备化，而 $X_C \coloneqq X_K \times_K C$。

半稳定半稳定 $\mathbf{Z}_p$-局部系统 X_K 的概念描述了由 X_K 参数化的半稳定p-进伽罗瓦表示族，其定义借助于与一个(滤过的) F-等晶体的关联（参见 [DLMS26，定义3.39] 或§ 7.1）。

定理1.1的关键是*Hyodo–Kato* 复形 $R\Gamma_{\mathrm{HK}}((X_0,M_{X_0})\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})$。考虑晶体上同调 $D = R\Gamma(((X_0, M_{X_0})/(W(k)\ M_0))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})$，其中 $W(k)$上的对数结构 M_0 由$\mathbf{N} \to W(k)$给出， $1 \mapsto 0$。我们证明

(HK1) D 是带有 Frobenius ϕ_D 的 K_0-向量空间的完美复形；**(HK2)** ϕ_D 诱导同构 $D \otimes^L_{K_0,\phi} K_0 \xrightarrow{\cong} D$；**(HK3)** D 容许满足 $p\phi_D N_D = N_D \phi_D$ 的单值算子 N_D；**(HK4)** 给定一致化元 π，存在同构 $\rho_\pi \colon\ D \otimes^L_{K_0} K \cong R\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K, \mathbf{E})$，其中$\mathbf{E}$是与 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}$ 相关联的、在 X_K 上带整连接的带滤过的向量丛；对于另一个 π'，我们有 $\rho_{\pi'} = \rho_\pi \circ \exp(\log(\pi'/\pi)[K : K_0]N)$。

Hyodo–Kato 复形由四元组 $(D, \phi_D, N_D, \rho_\pi)$ 构成。这样一种形式体系已出现在经典的 C_{st}-猜想中，我们在上文将其称为 $H^i_{\mathrm{HK}}(X_0)$（参见 [Jan89，§ 5], [Fon94b，猜想 6.2.7], [HK94，引言.], [Kat94，猜想 1.1]）。

注记 1.2。 我们获悉，在 Inoue–Koshikawa 即将发表的一项工作中，他们证明了比定理1.1更一般设定下的 C_{st} 猜想。例如，定理 5.5 中对数棱柱上同调与对数晶体上同调之间的比较结果，他们早已知晓。

本文中，我们利用对数棱柱上同调理论证明定理1.1。Bhatt–Morrow–Scholze 的 A_{inf}-上同调 [BMS18] 以及

Bhatt–Scholze 的 [BS22] 是整 p-进 Hodge 理论中的重大突破。当 X 是 $\mathcal{O}_K$上的真光滑 p-进形式概形时，这些上同调理论架起了 étale、晶体和德拉姆上同调理论之间的桥梁。特别是，这些工作都在常系数情形下证明了 C_{cris}-猜想。当 X 是 $\mathcal{O}_K$上的真半稳定 p-进形式概形时，Česnavičius–Koshikawa [ČK19]利用 A_{inf}-上同调在常系数情形下得到了 C_{st}-猜想。关于这些方向的进一步进展，参见 [DY24]和 [KY25] 。

为了超越常系数的情形，Faltings [Fal02] 和 Andreatta–Iovita [AI13, AI12] 利用 Faltings 位点研究了带系数的 C_{st}猜想。Guo– Reinecke [GR24] 在良约化情形下，将 [BS22] 中的棱柱-étale 比较和棱柱-晶体比较推广到系数由 X_K上的晶体局部系统给出的情形，从而证明了带系数的 C_{cris}猜想。

本文研究 Koshikawa [Kos22]的对数棱柱理论与半稳定情形下对数晶体理论之间的相互作用；我们的主要目标是证明一个带系数的对数棱柱-晶体比较定理，并研究 Hyodo– Kato 复形。Tian [Tia25] 最近建立了系数由半稳定局部系统给出的棱柱-étale 比较。结合这些结果即可得到定理1.1。现在让我们详细说明这些结果。

对数棱柱理论。设 X 是一个有界 p-进形式概形。绝对棱柱位点 $X_{\mathbb{\Delta}}$ 由配备映射 $\mathrm{Spf}(A/I) \to X$的有界棱柱（A， I）组成。Koshikawa [Kos22] 发展了对数棱柱理论，将其推广到对数形式概形。一个对数棱柱 由一个有界棱柱（A， I）以及 Spf A 上的一个对数结构 $M_{\mathrm{Spf}\,A}$ 给出，并配备一个 $\delta_{\log}$-结构。对于一个有界整p-进对数形式概形（X， M_X），可以定义绝对（严格）棱柱位点（X， M_X）$\mathbb{\Delta}$，其由（X， M_X）上的对数棱柱组成，且带有严格对数结构；也可以定义其相对类似物（见定义2.1和2.2）。

Exam例1.3 （Breuil–Kisin 对数棱柱；例6.8）。 假设 $X = \mathrm{Spf}\, R^0$ ， 其中

$$R^0 = \mathcal{O}_K\langle T_1, \dots, T_m, T_{m+1}^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\rangle/(T_1 \cdots T_m - \pi),$$

其中 $\pi \in \mathcal{O}_K$ 是一致化元，其首一不可约多项式为 $E(u) \in W(k)[u]$。设 M_X 为 X 上由$\mathbf{N}^d \to R^0$, $e_i \mapsto T_i$ $(1 \le i \le d)$给出的对数结构。考虑

$$\mathfrak{S} := W(k)\langle T_1, \dots, T_m, T_{m+1}^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\rangle[\![u]\!]/(T_1 \cdots T_m - u)$$

其所配备的 Frobenius 由 $\phi(T_i) = T_i^p$ 给出。于是我们有 $(\mathfrak{S},\ (E(u))) \in X_{\mathbb{\Delta}}$，其结构映射为 $\mathfrak{S}/(E(u)) \cong R^0$。预对数结构 $\mathbf{N}^d \to \mathfrak{S}$, $e_i \mapsto T_i$ 进一步导出 $(X,\ M_X)_{\mathbb{\Delta}}$ 中的一个对数棱柱，称为 ***Breuil–Kisin*** 对数棱柱。当 X 为 小仿射 时，同样的构造也成立；也就是说，当 X 是仿射的且存在一个到形式谱 W R_0 的 étale 映射时。Breuil–Kisin 对数棱柱将在我们的局部研究中发挥关键作用。

棱柱 F晶体与半稳定局部系统。对数棱柱位点 $(X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$ 带有一个环的结构层 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$，以及一个 Frobenius 自同态 ϕ和一个理想层 $\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}$；它们分别将 A、 ϕ_A和 I 赋给每个对数棱柱 $(A, I, M_{\mathrm{Spf}\,A})$。基于这些结构，我们可以在 $X_{\mathbb{\Delta}}$ 上定义各种 F-晶体，并将其与一般纤维 X_K上的 étale $\mathbf{Z}_p$-局部系统联系起来。

从现在起，假设 (X, M_X) 是 $\mathcal{O}_K$上的半稳定 p-进形式概形。为了研究 X_K上的半稳定局部系统，本文作者与刘同[DLMS26] 考虑解析棱柱 F-晶体的范畴 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{an},\phi}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}})$（光滑情形下沿用 [GR24]的定义）。它由一对 $(\mathcal{E}, \phi_{\mathcal{E}})$ 构成，其中 $\mathcal{E}$将一个向量丛 $\mathcal{E}_A$ 赋给每个 $(A, I, M_{\mathrm{Spf}\, A}) \in (X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$，该向量丛位于 $\mathrm{Spec}\ A \smallsetminus V(p, I)$ 上；而 $\phi_{\mathcal{E}}$是一个同构 $(\phi_A^* \mathcal{E}_A)[I^{-1}] \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}_A[I^{-1}]$。令 $(X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}$ 表示 (X_1, M_{X_1}) 的绝对对数晶体位：$= (X, M_X) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p/p$（见附录 B.1）。对于 $(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}, \phi_{\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}}) \in \mathrm{Vect}^{\mathrm{an},\phi}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}})$，可以关联一个 X_K 上的 $\mathbf{Z}_p$-局部系统（étale 实现）以及一个 $(X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}$上的 F-等晶体 $(\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}, \phi_{\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}})$（晶体实现）；参见 [DLMS26, § 3.3, 3.5] 或 § 7.1。记 $\mathrm{Loc}^{\mathrm{st}}_{\mathbf{Z}_p}(X_K)$ 为 X_K上半稳定 $\mathbf{Z}_p$-局部系统的范畴。以下是 [DLMS26]的一个主要结果。

定理 *1.4*（[*DLMS*26]；见定理 *7.8*）。*étale* 实现诱导了 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{an},\phi}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}})$ 与 $\mathrm{Loc}^{\mathrm{st}}_{\mathbf{Z}_p}(X_K)$ 之间的等价。此外，若 $\mathbb{L} \in \mathrm{Loc}^{\mathrm{st}}_{\mathbf{Z}_p}(X_K)$ 是一个半稳定 $\mathbf{Z}_p$-局部系统，且 $(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}, \phi_{\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}}) \in \mathrm{Vect}^{\mathrm{an},\phi}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}})$ 是相应的解析棱柱 F-晶体，那么 $\mathbb{L}$ 与 $(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}, \phi_{\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}})$ 的晶体实现 $(\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}, \phi_{\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}})$ 在 [*DLMS26*，定义 *3.*39] 的意义下相关联。

因此，需要比较 $\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 的棱柱上同调、$\mathbb{L}$ 的 étale 上同调以及 $(\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\ \mathbf{Q}},\ \phi_{\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\ \mathbf{Q}}})$ 的晶体上同调。此时，考虑解析棱柱 F- 晶体的两种变体会比较方便。

完备棱柱 F-晶体是一个 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模层 $\mathcal{G}$，并在 $\mathcal{G}[\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^{-1}]$ 上附带一个 Frobenius 结构，使得对于每个 $(A, I, M_{\mathrm{Spf}\, A})$，$\mathcal{G}_A := \mathcal{G}(A, I, M_{\mathrm{Spf}\, A})$ 都是有限生成的经典 (p, I)-完备 A-模，并且限制到 $\mathrm{Spec}(A) \smallsetminus V(p, I)$ 上时是一个向量丛；此外，对于每个映射 $(A, I, M_{\mathrm{Spf}\, A}) \to (B, IB, M_{\mathrm{Spf}\, B})$，从 (p, I)-完备张量积得到的诱导映射 $\mathcal{G}_A \widehat{\otimes}_A B \to \mathcal{G}_B$ 是一个同构。这个概念最早由 [DLMS24]，引入，并在 [Tia25] 中使用（参见 [Tia25，定义 1.13]；相关概念亦见 [Tsu24，定义 11.1] ）。利用 Breuil–Kisin 棱柱及其自余积，可以为 $\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 关联一个完备棱柱 F-晶体 $j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$，使得 $(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})_A = (j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})_A|_{\mathrm{Spec}\, A \smallsetminus V(p,I)}$。此外，利用每个 Breuil–Kisin 棱柱都底层于一个正则诺特环这一事实，可以为 $j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 关联一个完美复形中的棱柱 F-晶体 $i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})$，以及一个态射 $i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}) \to j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$（见第 4 节，6.3）。我们研究 $j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 和 $i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})$ 的棱柱上同调。

令（$\mathfrak{S}_K$，（E） $M_{\mathrm{Spf}\, \mathfrak{S}_K}$）为（形式谱 $\mathcal{O}_K$，$M_{\mathrm{Spf}\, \mathcal{O}_K}$）$_{\mathbb{\Delta}}$中的 Breuil–Kisin 对数棱柱。关于（$E$）的 p-完备 PD 包络 S_K of $\mathfrak{S}_K$ 定义了 ***Breuil*** 对数棱柱（S_K，（p） $M_{\mathrm{Spf}\, S_K}$）：=（S_K，（p） $\phi_*\mathbf{N}$）[a]，且 ϕ：$\mathfrak{S}_K \to S_K$在（形式谱 $\mathcal{O}_K$，$M_{\mathrm{Spf}\, \mathcal{O}_K}$）$_{\mathbb{\Delta}}$中诱导了对数棱柱映射（$\mathfrak{S}_K$，（$E$） $M_{\mathrm{Spf}\, \mathfrak{S}_K}$）$\to$（$S_K$，（$p$） $M_{\mathrm{Spf}\, S_K}$）（参见例 6.1）。

对于任意 p-进完备的 $\mathcal{O}_K$-代数 B，令 X_B：$= X \times_{\mathrm{Spf}\, \mathcal{O}_K}$形式谱 B，其带有拉回对数结构 M_{X_B}。对于 $\mathcal{K} = j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$，$i$（$\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$），考虑其 ***Breuil–Kisin*** 上同调和***Breuil*** 上同调：

- $R\Gamma_{\mathrm{BK}}(X, \mathcal{K}) := R\Gamma(((X, M_X)/(\mathfrak{S}_K, M_{\mathrm{Spf}\, \mathfrak{S}_K}))_{\mathbb{\Delta}}, \mathcal{K})$;
- $R\Gamma_{\mathrm{Br}}(X, \mathcal{K}) := R\Gamma(((X_{S_K/p}, M_{X_{S_K/p}})/(S_K, M_{\mathrm{Spf}\, S_k}))_{\mathbb{\Delta}}, \mathcal{K})$.

根据 Čech–Alexander 方法，我们看到它们满足以下性质：

(1) ([Tia25，定理 6.18]) 如果 X 在 $\mathcal{O}_K$ 上是真，则 $R\Gamma_{\mathrm{BK}}(X, j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})$ 是一个 $\mathfrak{S}_K$-模上的完美复形。(2) (命题 6.20) $R\Gamma_{\mathrm{BK}}(X, i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})) \to R\Gamma_{\mathrm{BK}}(X, j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})$ 是一个同构。(3) (定理 6.21) 如果 X 在 $\mathcal{O}_K$ 上是真，则映射

$$R\Gamma_{\mathrm{BK}}(X, i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})) \otimes^L_{\mathfrak{S}_K} S_K \to R\Gamma_{\mathrm{Br}}(X, i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}))$$

and

$$R\Gamma_{\mathrm{BK}}(X, j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}) \otimes^L_{\mathfrak{S}_K,\phi} S_K[p^{-1}] \to R\Gamma_{\mathrm{Br}}(X, j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}) \otimes^L_{S_K} S_K[p^{-1}]$$

是同构。

这里，完美性利用了 $j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 是一个 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模这一事实；对于 $i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})$，我们有更强的基变换性质，因为它在 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模范畴中是一个完美复形，而 $j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 的基变换性质可由 $i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})$ 的基变换性质推出。

棱柱-晶体比较与 Frobenius 等源性质。 $j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 的 Breuil 上同调可与 $\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 的晶体实现 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}$ 的晶体上同调等同；后者是定义在 $(X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}$ 上的一个 F-等晶体。

定理 1.5 (定理 6.26 和 6.27). 沿用上述记号，并假设 X 在 $\mathcal{O}_K$ 上是真态射。我们有一个同构

$$R\Gamma_{\mathrm{Br}}(X, j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}) \otimes^L_{S_K} S_K[p^{-1}] \cong R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(S_K, M_{S_K}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})$$

它是 $D(S_K[p^{-1}])$ 中的完美复形之间的同构，且与 *Frobenius* 映射相容。此外，它们满足 *Frobenius* 等源性质：若将上述复形记为 $\mathcal{M}$，则诱导映射 $1 \otimes \phi\colon L\phi^*\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是一个同构。

这确实是我们工作的核心结果之一，需要结合若干不同的思想。定理 1.5 的第一部分是从更一般形式的棱柱-晶体比较（定理 5.5）推导出来的；在该定理中，我们研究某个相对框架上的完备棱柱晶体。沿用 [Kos22，第 6] 节，在常系数情形下，定理 5.5 通过基于 Čech–Alexander 方法的显式局部计算得以证明。对于 Frobenius 等源性质，我们采用了一种略显特别的方法；在 [DMS26，定理 11.3] 中，对于晶体位点上的有限局部自由 F-晶体，这一性质在更一般的框架下得到了证明。由于作为 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}$ 底层对象的 F-晶体不一定是有限局部自由的，我们还在构造 6.28 中引入了 $i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})$ 的晶体实现。我们利用 Breuil 上同调的基变换性质，以及 $i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})$ 和 $j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 的比较结果，作为额外输入来修改 [DMS26] 的证明。

类似地，我们证明在 $W(k)$ 和 A_{cris} 上的棱柱-晶体比较：三元组 $(W(k), (p)\ M_0)$ 给出 (Spf $\mathcal{O}_K$，$M_{\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}_K})_{\mathbb{\Delta}}$ 通过 $\mathcal{O}_K \to k \cong W(k)/(p)$ 得到的一个对数棱柱。考虑映射 $\theta\colon A_{\mathrm{inf}} := W(\mathcal{O}_C^\flat) \to \mathcal{O}_C$，它提升了 $\mathcal{O}_C^\flat \to \mathcal{O}_C/p$。选取 π_n 的一个相容的 p- 次方根系统 $(\pi_n)_{n\geq 0}$，使其属于 C，且满足 $\pi_0 = \pi$ 和 $\pi_{n+1}^p = \pi_n$，并令 $\pi^\flat := (\pi_n)_{n\geq 0}$ 为 $\mathcal{O}_C^\flat$ 中对应的元素。令 A_{cris} 为关于 $(\mathrm{Ker}(\theta)\ p)$ 的 p-完备 PD 包络，其中得到一个对数棱柱

$$(A_{\mathrm{cris}}, (p), M_{\mathrm{Spf}\,A_{\mathrm{cris}}}) := (A_{\mathrm{cris}}, (p), (\mathbf{N} \to A_{\mathrm{cris}}, 1 \mapsto [\pi^\flat]^p)^a) \in (\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}_K, M_{\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}_K})_{\mathbb{\Delta}}$$

与 $\mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_K/p \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_C/p \to A_{\mathrm{cris}}/p$（参见例 6.1）。令 $B^+{}_{\mathrm{cris}} := A_{\mathrm{cris}}[p^{-1}]$。

定理 1.6（参见定理 6.26 和 6.27）。 继续假设 X 在$\mathcal{O}_K$上是真。于是存在完美复形的同构

$$R\Gamma(((X_0,M_{X_0})/(W(k),M_0))_{\mathbb{\Delta}},j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})\otimes^L_{W(k)}K_0\cong R\Gamma(((X_0,M_{X_0})/(W(k),M_0))_{\mathrm{CRIS}},\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})$$

在 $D(K_0)$中以及

$$R\Gamma(((X_0,M_{X_0})/(A_{\mathrm{cris}},M_{\mathrm{Spf}\,A_{\mathrm{cris}}}))_{\mathbb{\Delta}},j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})\otimes^L_{A_{\mathrm{cris}}}B^+_{\mathrm{cris}}\cong R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p},M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(A_{\mathrm{cris}},M_{A_{\mathrm{cris}}}))_{\mathrm{CRIS}},\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})$$

在 $D(B^+\ \mathrm{cris})$ 中与 ***Frobenius*** 相容。除此之外，这些完美复形满足 ***Frobenius*** 等源性质。

Hyodo–Kato 复形。 现在我们可以陈述 Hyodo–Kato 复形的性质。

定理1.7 (定理 6.42)。 复形 $R\Gamma(((X_0,M_{X_0})/(W(k)\ M_0))_{\mathrm{CRIS}},\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})$构成一个复形 $R\Gamma_{\mathrm{HK}}((X_0,M_{X_0})\ \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})$，它是 K_0 上的 (ϕ,N)-模，并满足性质 ***(HK1)-(HK4)***（在定理*1.1*之后解释）。此外，

(HK5) 存在一个完美复形的同构

$$\rho_{\mathrm{st}}\colon R\Gamma(((X_0,M_{X_0})/(W(k),M_0))_{\mathrm{CRIS}},\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})\otimes^L_{K_0}B^+_{\mathrm{st}}\cong R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p},M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(A_{\mathrm{cris}},M_{A_{\mathrm{cris}}}))_{\mathrm{CRIS}},\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})\otimes^L_{B^+_{\mathrm{cris}}}B^+_{\mathrm{st}}$$

在 $D(B^+_{\mathrm{st}})$ 中，且与 ϕ、 N 及 $\mathrm{Gal}(K/K)$ 作用相容。

我们采用 Beilinson 框架中的导出范畴 $D_{\phi,N}(K_0)$，它是关于 ϕ,N 模的范畴；并利用 K_0 上的 Hyodo–Kato 理论以及 [Bei11] 来表述并证明定理 1.7。事实上，Beilinson 的 Hyodo–Kato 理论将定义在 $(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K/p,M_{\mathrm{can}})_{\mathrm{CRIS}}$[1] 上完美复形中的一个 F-等晶体关联到 $D_{\phi,N}(K_0)$ 中的一个对象（见 § 6.7）。我们利用 $R\Gamma_{\mathrm{Br}}(X,i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}))$ 来定义完美复形中的此类 F-等晶体，并应用上文提到的关于 $i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})$ 和 $j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 的各种比较与基变换结果，从而推出定理 1.7。

Tia 中的棱柱-étale 比较 [Tia25]。 近期，Tian [Tia25] 建立了棱柱上同调与 étale 上同调之间的比较：设 $\mu:=[\epsilon]-1\in A_{\mathrm{inf}}$，其中 $\epsilon=(\epsilon_n)_{n\geq 0}\in\mathcal{O}^\flat_C$ 是一个非平凡的、相容的 p-次单位根系，使得 $\epsilon_0=1$ 且 $\epsilon^p_{n+1}=\epsilon_n$。

定理 1.8 ([Tia25, 定理 0.4(2), 5.6(2)]). 设 X 为 $\mathcal{O}_K$ 上的真半稳定 p-进形式概形。设 $\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 为 $(X,M_X)_{\mathbb{\Delta}}$ 上的解析棱柱 F- 晶体，并设 $\mathbb{L}$ 为其 ***étale*** 实现。则在 $D(A_{\mathrm{inf}}[\mu^{-1}])$ 中存在一个同构

$$R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C},M_{X_{\mathcal{O}_C}})/(A_{\mathrm{inf}},M_{\mathrm{Spf}\,A_{\mathrm{inf}}}))_{\mathbb{\Delta}},j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})\otimes^L_{A_{\mathrm{inf}}}A_{\mathrm{inf}}[\mu^{-1}]\cong R\Gamma(X_{C,\text{ét}},\mathbb{L})\otimes^L_{\mathbf{Z}_p}A_{\mathrm{inf}}[\mu^{-1}]$$

与$\mathrm{Gal}(K/K)$-作用和 ***Frobenius*** 兼容。

[1]这里， M_{can} 表示 $\mathcal{O}_K$ 上典范对数结构的拉回

C_{st}**猜想**。让我们回到定理1.1。沿用其中的记号和假设，我们将同构 α_{st} 定义为以下复合

$$R\Gamma(X_{C,\text{ét}},\mathbb{L})\otimes^{L}_{\mathbf{Z}_p}B_{\mathrm{st}}\xrightarrow[\cong]{}R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p},M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(A_{\mathrm{cris}},M_{A_{\mathrm{cris}}}))_{\mathrm{CRIS}},\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})\otimes^{L}_{A_{\mathrm{cris}}}B_{\mathrm{st}}$$
$$\xleftarrow[\cong]{\rho_{\mathrm{st}}\otimes B_{\mathrm{st}}}R\Gamma_{\mathrm{HK}}((X_0,M_{X_0}),\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})\otimes^{L}_{K_0}B_{\mathrm{st}},$$

其中，第一个同构由定理 1.8 以及沿 $A_{\mathrm{inf}}\to A_{\mathrm{cris}}$ 的基变换性质（定理 6.21）推出，第二个同构则是定理 1.7 中的 **(HK5)**。前述结果表明， α_{st} 是一个与伽罗瓦作用、Frobenius 和单值算子相容的同构。

最后，我们需要证明基变换到 B_{dR} 后的滤过相容性。定理 7.9 给出了精确表述，其中用到了 Scholze [Sch13, Thm. 8.4] 的 étale-de Rham 比较。按照 [GR24, § 10], ，我们研究 B^+ 德拉姆 上的无穷小上同调，并证明滤过相容性。值得注意的是，一个嵌入 $B_{\mathrm{st}}\hookrightarrow B_{\mathrm{dR}}$ （或 B_{st} 的定义）取决于一致化元 π 的选择。我们在注7.14中说明，α_{st} 与该选择无关 π。

提纲。第 2 节回顾（严格）对数棱柱站点的定义。第 3 节建立对数棱柱站点函子性所需的一些结果。第 4 节讨论对数棱柱站点上各种（F-）晶体的概念。

第 5 节研究对数棱柱上同调与晶体上同调之间的比较，其中系数取为满足关联条件（见定义 5.3）的 p-进完备晶体。

第 6 节专门讨论半稳定情形：我们在 § 6.1 中设定记号，并说明一种用于计算上同调的 Čech–Alexander 方法。在 § 6.2 中，我们回顾 Breuil–Kisin 对数棱柱，并利用一族 Breuil–Kisin 对数棱柱构造 Čech 神经。在 § 6.3 中，我们将解析棱柱晶体 $\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 完备棱柱晶体$j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 以及完美复形中的棱柱晶体 i（$\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$）关联起来，它们是棱柱上同调的系数。在 § 6.4 中，我们引入 Breuil–Kisin 上同调和 Breuil 上同调，并建立它们的比较结果和基变换性质。在 § 6.5 中，我们给出棱柱上同调与晶体上同调之间的比较，并在 § 6.6 中证明晶体上同调和 Breuil 上同调的 Frobenius 等源性质。我们在 § 6.7 中基于 [Bei11] 讨论 Hyodo–Kato 理论。在 § 6.8 中，我们应用这些结果来定义和研究 Hyodo–Kato 复形 $R\Gamma_{\mathrm{HK}}((X_0,\ M_{X_0})\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\ \mathbf{Q}})$。

我们在第 7 节表述并证明 C_{st}-猜想。我们在 § 7.1 回顾 [DLMS26] 关于半稳定局部系统及其与解析棱柱F-晶体之间关系的相关事实。随后，我们在以下各小节中证明定理1.1；同构 α_{st} 见 § 7.2，滤过相容性则在 § 7.3 中证明。

附录 A 讨论对数形式概形的一些一般事实。在附录 B 中，我们解释晶体位点的某些变体，并依照[Kos22，§ 6]回顾 $\delta_{\log}$-晶体位。

记号与约定。全文中，我们固定一个素数 p。

当我们在素数 p 群 $N(0,1,\dots,0)$ 作时，其中我们记第 i 个位置 $(1\le i\le d)$

令 Δ 表示这样一个范畴，其对象为 $[n] := \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geq 0)$，从 $[n]$ 到 $[m]$的态射是相应集合之间的非递减映射（例如参见 [Sta21, 0164] ）。关于∞-范畴的一般记号和术语，我们遵循 [Lur09, Lur]。

关于对数棱柱和对数棱柱位点的相关术语，请参阅 [Kos22, KY25] 。回忆一下，（有界）预对数棱柱是一个 $\delta_{\log}$-三元组（A, I, M），其中（A, I）是一个（有界）棱柱。对数棱柱（$A, I, M_{\mathrm{Spf}\, A}$）由一个有界棱柱（$A, I$）和定义在（形式谱 A）上的对数结构 $M_{\mathrm{Spf}\, A\,\text{ét}}$ 组成，并带有 $\delta_{\log}$结构，该结构来自某个形如（A, I, M）的预对数棱柱。记 $M_{\mathrm{Spf}(A/I)}$ 为由 $M_{\mathrm{Spf}\, A}$诱导的 Spf(A/I) 上的对数结构。对于有界预对数棱柱（A, I, M），令（A, I, M）^{a}:$=$（$A, I, M^a_{\mathrm{Spf}\, A}$）表示其关联对数棱柱。

我们使用 [Kos22] 和 [DLMS26, DMS26] 中出现的两个晶体位；前者记为 $((Y, M_Y)/(A, M_A))_{\mathrm{CRIS}}$，其对象通常写作 (B, J) 或 $(B, B/J)$；后者为 $((Y, M_Y)/\mathcal{S}^\sharp)_{\mathrm{CRIS}}$，其对象为 (U, T)。当 (Spf A, M_A) 是 p-进对数 PD 形式概形 $\mathcal{S}^\sharp$ 的底层时，$(B, J) \in ((Y, M_Y)/(A, M_A))_{\mathrm{CRIS}}$ 定义了 $((Y, M_Y)/\mathcal{S}^\sharp)_{\mathrm{CRIS}}$ 的一个归纳对象 (Spec B/J, Spf B) $= \varinjlim_n$(Spec B/J, Spec B/p^n)。这些位点的定义及上同调的比较见 § B.1。

对于一般的有界 p-进形式概形 X，令 X_n 表示概形 $X \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p/p^n$，并赋予其来自 M_X 的拉回对数结构 M_{X_n}。关于一般纤维和 $\mathbf{Z}_p$-局部系统的约定，我们遵循 [BS23, Nota- tion 3.1]：将视为局部空间化菱形的一般纤维记作 X_η。对于局部空间化菱形 $\mathcal{X}$，记 $\mathrm{Loc}_{\mathbf{Z}_p}(\mathcal{X})$ 为其拟pro-étale位点上的 $\mathbf{Z}_p$-局部系统范畴。当 X 是 $\mathcal{O}_K$ 上的半稳定 p-进形式概形时，我们将 X_K 记作 X_η，并也将其视为 adic 泛纤维；将 $X_{K,\mathrm{proét}}$ 记作 [Sch13, Sch16] 意义下的 pro-étale 位点。根据 [Sch13, Def. 8.1] 、 [Sch13, Prop. 8.2], [、MW23, Prop. 3.6, 3.7], 以及 [Sch22, Lem. 15.6], ， $\mathrm{Loc}_{\mathbf{Z}_p}(X_K)$ 可自然地与 $X_{K,\mathrm{proét}}$ 上 $\sim p$-无挠的光滑 $\mathbf{Z}_p$-层范畴等同；我们将这些对象统称为 X_K 或 $X_{K,\mathrm{proét}}$ 上的 $\mathbf{Z}_p$-局部系统。

致谢。

我们特别感谢刘同在项目初期与我们合作，并在整个过程中进行了许多有益的讨论。我们感谢 Teruhisa Koshikawa 和井上健太郎分享了许多真知灼见，与我们讨论他们正在进行的合作研究，指出早期稿件中的若干错误并提出建议。我们也感谢李世章与我们进行了有益的讨论和通信。最后，读者显然可以看出，关于带系数的半稳定形式概形的 C_{st}-猜想由两大支柱构成：Tian [Tia23] 的棱柱-étale 比较以及本文。我们感谢 Yichao Tian 与我们进行了几次启发性的讨论。

第一作者部分受到国家重点研发计划（项目编号：2023YFA1009703）和北京市自然科学基金（青年项目，项目编号：1254044）的资助。第三作者部分受到国家自然科学基金优秀青年科学基金项目（海外）的资助。

2. 对数棱柱位点

设$(X,\ M_X)$为有界的 p进对数形式概形，且 M_X 是整的。

定义 2.1（参见 [Kos22，注 4.6]，[DLMS26，定义 2.3]）。令 $(X, M_X)_{\mathbb{\Delta}} := (X,\ M_X)^{\mathrm{str}}_{\mathbb{\Delta}}$表示 (X, M_X) 的绝对严格棱柱位点。回忆一下，一个对象是如下图表

$$(\operatorname{Spf} B, M_{\operatorname{Spf} B}) \hookleftarrow (\operatorname{Spf}(B/J), M_{\operatorname{Spf}(B/J)}) \xrightarrow{f_B} (X, M_X),$$

其中 $(B, J, M_{\operatorname{Spf} B})$ 是一个对数棱柱，而 $(\operatorname{Spf}(B/J)\ M_{\operatorname{Spf}(B/J)}) \to (X, M_X)$ 是对数形式概形之间的一个严格态射。为简化记号，我们常将一个对象写作 $(\operatorname{Spf}\ B, J, M_{\operatorname{Spf} B})$，或者甚至写作 $(B, J, M_{\operatorname{Spf} B})$，箭头方向相反。我们赋予 $(X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$严格平坦拓扑。它带有一个环层 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$，定义为$\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}(B, J, M_{\operatorname{Spf} B}) = B$，该环层带有由各个 B 上的 Frobenius 诱导的弗罗贝尼乌斯自同态 $\phi_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}}$。为简便起见，我们常用 ϕ 表示 $\phi_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}}$。

设 $\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$为由 $\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}(B, J, M_{\operatorname{Spf} B}) = J$给出的理想层。对每个整数$n \geq 1$，记$\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta},n} := \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}/(p, \mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}})^n$。由fpqc下降，我们有$\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta},n}(B, J, M_{\operatorname{Spf} B}) = B/(p, J)^n$，且对任意 $i \geq 1$有 $H^i((\text{形式谱 } B, J, M_{\operatorname{Spf} B}), \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta},n}) = 0$。因此，对每个 $i \geq 1$ 我们有$R^i \lim_{\longleftarrow n} \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta},n} = 0$，并由 [Sch13，引理3.18] 得到自然同构 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}} \cong \lim_{\longleftarrow n} \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta},n}$（相关结果见下文推论 2.5）。

定义2.2. 设$(A, I, M_{\operatorname{Spf} A})$为对数棱柱，使得 $M_{\operatorname{Spf} A}$ 为整的，并假设给定 p-进对数形式概形的态射$(X, M_X) \to (\text{形式谱 } A/I, M_{\operatorname{Spf} A/I})$。我们用$((X, M_X)/(A, M_{\operatorname{Spf} A}))_{\mathbb{\Delta}}$ 表示(X, M_X)的带有严格平坦拓扑的相对严格棱柱位点，如 [Kos22，定义4.1，注记 4.3]。此外，它带有环层 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$。注意，其中涉及$M_A$与 X 的光滑性假设，对于证明 $((X, M_X)/(A, M_{\operatorname{Spf} A}))_{\mathbb{\Delta}}$是位点或$\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$是层并非必要。当强调理想 I时，我们也把该位点记为$((X, M_X)/(A, I, M_{\operatorname{Spf} A}))_{\mathbb{\Delta}}$。

显然的遗忘函子

$$\iota\colon ((X, M_X)/(A, M_{\operatorname{Spf} A}))_{\mathbb{\Delta}} \to (X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$$

是连续且余连续的，由此诱导出一个拓扑斯态射

$$g\colon \operatorname{Sh}(((X, M_X)/(A, M_{\operatorname{Spf} A}))_{\mathbb{\Delta}}) \to \operatorname{Sh}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}})$$

使得 $(g^{-1}\mathcal{F})(B, J, M_{\operatorname{Spf} B}) = \mathcal{F}(\iota(B, J, M_{\operatorname{Spf} B}))$ 对于 $\mathcal{F} \in \operatorname{Sh}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}})$ 和 $(B, J, M_{\operatorname{Spf} B}) \in ((X, M_X)/(A, M_{\operatorname{Spf} A}))_{\mathbb{\Delta}}$ 成立（参见 [Sta21, 00XO, 00XR]）。我们通常将$\mathcal{F}|_{((X,M_X)/(A,M_{\operatorname{Spf} A}))_{\mathbb{\Delta}}}$写作 $g^{-1}\mathcal{F}$，或者在没有歧义时写作 $\mathcal{F}$。

定义 2.3 (参见 [Kos22, 注 4.5]). 定义一个拓扑斯态射

$$\nu_X = (\nu_X^{-1}, \nu_{X,*})\colon \operatorname{Sh}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}) \to \operatorname{Sh}(X_{\text{ét}})$$

如下。设 $\operatorname{ForSch}_{\text{ét}}/X$ 表示带 étale 拓扑的 p-进形式概形位点 ForSch 经由 X 的局部化位点（等价地，在 (X, M_X) 上严格的对数 p-进形式概形范畴，带 étale 拓扑）。关联 (形式谱 $B, J, M_{\operatorname{Spf} B}) \mapsto (f_B\colon$形式谱 $B/J \to X)$ 由 [Kos22，注记 4.2] 定义了一个余连续函子 $(X, M_X)_{\mathbb{\Delta}} \to \operatorname{ForSch}_{\text{ét}}/X$，从而定义了态射 $\operatorname{Sh}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}) \to \operatorname{Sh}(\operatorname{ForSch}_{\text{ét}}/X)$

拓扑斯的。我们将 ν_X 定义为它与限制 $\mathrm{Sh}(\mathrm{ForSch}_{\text{ét}}/X) \to \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$ 的复合。具体地，$(\nu_{X,*}\mathcal{F})(U \to X) = \Gamma((U, M_U)_{\blacktriangle}, \mathcal{F}|_{(U,M_U)_{\blacktriangle}})$，其中 $\mathcal{F}|_{(U,M_U)_{\blacktriangle}}$ 表示显然的限制（关于棱柱位点函子性的一般讨论见 § 3）；$\nu_X^{-1}\mathcal{G}$ 是将 $(B, J, M_{\operatorname{Spf} B})$ 送到 $\Gamma((\text{形式谱 } B/J)_{\text{ét}}, f_B^{-1}, \text{et}\mathcal{G})$ 的预层的平坦层化。在相对框架中，我们也滥用记号，用 ν_X 表示复合 $g \circ \nu_X \colon \mathrm{Sh}(((X, M_X)/(A, M_{\operatorname{Spf} A}))_{\blacktriangle}) \to \mathrm{Sh}(X_{\text{ét}})$。

我们来讨论对数棱柱拓扑斯的完备性。

引理 2.4。设

$$(\operatorname{Spf} A_1, I_1, M_{\operatorname{Spf} A_1}) \xleftarrow{h_1} (\operatorname{Spf} A_2, I_2, M_{\operatorname{Spf} A_2}) \xleftarrow{h_2} (\operatorname{Spf} A_3, I_3, M_{\operatorname{Spf} A_3}) \xleftarrow{h_3} \cdots$$

是棱柱站点 $(X, M_X)_{\blacktriangle}$ 中的一列态射，使得对每个 i，h_i 都是平坦覆盖。则逆极限 $\lim\!\leftarrow_i$(形式谱 $A_i, I_i, M_{\operatorname{Spf} A_i}$) 存在于 $(X, M_X)_{\blacktriangle}$ 中，并且每个投影 (形式谱 $A_i, I_i, M_{\operatorname{Spf} A_i}$) $\leftarrow \lim\!\leftarrow_i$(形式谱 $A_i, I_i, M_{\operatorname{Spf} A_i}$) 都是平坦覆盖。

证明最终归结为讨论 $\delta_{\log}$-三元组的（序列）余极限，但还需要处理预对数棱柱的态射与对数棱柱的态射之间的差异。

证明。 根据定义，(形式谱 $A_1, I_1, M_{\operatorname{Spf} A_1}$)来自某个预对数棱柱 (A_1, I_1, M_1)，其中幺半群为 M_1，因此 $M_1 \to A_1 \to A_1/I_1$ 为 $M_{\operatorname{Spf} A_1}$给出了一个图表。根据 [DLMS26, 推论 2.2(1)], ，我们得到一个预对数棱柱 (A_2, I_2, M_2)，它定义了 (形式谱 $A_2, I_2, M_{\operatorname{Spf} A_2}$)，以及一个与 $\delta_{\log}$-结构相容的幺半群映射 $M_1 \to M_2$。重复这一论证，我们得到一列预对数棱柱

$$(A_1, I_1, M_1) \to (A_2, I_2, M_2) \to (A_3, I_3, M_3) \to \cdots$$

给出所讨论的对数棱柱的逆系统。由 [Kos22, Rem. 2.6]可知，作为 $\delta_{\log}$-环的余极限 $\lim\!\rightarrow_i(A_i, M_i)$ 存在，且底环与幺半群分别由 $A_\infty := \varinjlim_i A_i$ 与 $M_\infty := \varinjlim_i M_i$ 给出。注意 $I_i = I_1 A_i$，并令 B 为 A_∞ 的导出 (p, I_1)-完备化。于是由 [BS22, Lem. 3.7(1)(2)(3)], 每个 $(A_i, I_1 A_i) \to (B, I_1 B)$ 成为有界棱柱之间的 (p, I_1)-完全忠实平坦映射，且 B 为离散的并在经典意义下 (p, I_1)-完备。此外，由 [Kos22, Lem. 2.9], $(B, M_\infty \to B)$ 具有自然的 $\delta_{\log}$-结构。因此我们得到预对数棱柱 $(B, I_1 B, M_\infty)$，以及与 h_i 相容的对数棱柱态射 (形式谱 $A_i, I_i, M_{\operatorname{Spf} A_i}$) $\leftarrow$ (形式谱 $B, I_1 B, M_\infty{}^a$)。现在利用 [DLMS26, Cor. 2.2(1)], 容易验证后者表示该逆极限并满足所需性质。□

推论 2.5. 绝对严格棱柱上拓扑 $\mathrm{Sh}((X, M_X)_{\blacktriangle})$ 是完备的。特别地，对于任意由阿贝尔层构成的逆系统 $\mathcal{F} \colon \mathbf{N}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}((X, M_X)_{\blacktriangle}))$，若其中每个 $F_{n+1} \to F_n$ 都是满射，则有

$$\varprojlim_n \mathcal{F}_n \cong R\varprojlim_n \mathcal{F}_n \quad \textit{and} \quad R\Gamma((X, M_X)_{\blacktriangle}, \varprojlim_n \mathcal{F}_n) \cong R\varprojlim_n R\Gamma((X, M_X)_{\blacktriangle}, \mathcal{F}_n).$$

对于任意局部化上拓扑斯，结论同样成立。

证明。 第一个断言的证明与 [BS15, Ex. 3.1.7] 或 [BS23, Rem. 2.4] 中使用引理 2.4 的证明相同。断言 $\lim\!\leftarrow_n \mathcal{F}_n \cong R\lim\!\leftarrow_n \mathcal{F}_n$ 见 [BS15, Prop. 3.1.10], ，而关于上同调的断言见 [Sta21, 0D6K]。最后一个断言见 [BS15, Lem. 3.1.2]。□

3. 对数棱柱位点的函子性

我们讨论绝对严格对数棱柱位点的函子性。在本节中，固定一个有界整 p-进对数形式概形之间的态射

$$f\colon (X, M_X) \to (Y, M_Y).$$

我们将讨论一个拓扑斯态射

$$f_{\mathbb{\Delta}} = (f_{\mathbb{\Delta}}^{-1}, f_{\mathbb{\Delta},*})\colon \mathrm{Sh}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}) \to \mathrm{Sh}((Y, M_Y)_{\mathbb{\Delta}}).$$

若 f 是严格的，则我们有一个全忠实余连续函子 $(X, M_X)_{\mathbb{\Delta}} \to (Y, M_Y)_{\mathbb{\Delta}}$，由此得到 $f_{\mathbb{\Delta}}$。当 M_Y 是拟凝聚的时，我们将构造 $f_{\mathbb{\Delta}}$（命题 3.6）。

定义 3.1. 从(形式谱 $B, J, M_{\mathrm{Spf}\, B}$) $\in (X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$ 到(形式谱 $A, I, M_{\mathrm{Spf}\, A}$) $\in (Y, M_Y)_{\mathbb{\Delta}}$ 的一个 f-棱柱态射（或简称为 f-$\mathbb{\Delta}$态射）是对数棱柱的态射 g：(形式谱 $B, J, M_{\mathrm{Spf}\, B}$) $\to$(形式谱 $A, I, M_{\mathrm{Spf}\, A}$)，它与 f 相容，即使得如下诱导图表交换：

$$\begin{array}{ccccc} (X, M_X) & \longleftarrow & (\mathrm{Spf}(B/J), M_{\mathrm{Spf}(B/J)}) & \hookrightarrow & (\mathrm{Spf}\, B, M_{\mathrm{Spf}\, B}) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{g}} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ (Y, M_Y) & \longleftarrow & (\mathrm{Spf}(A/I), M_{\mathrm{Spf}(A/I)}) & \hookrightarrow & (\mathrm{Spf}\, A, M_{\mathrm{Spf}\, A}). \end{array} \tag{3.1}$$

引理 3.2. 设 g：(形式谱 $B, J, M_{\mathrm{Spf}\, B}$) $\to$(形式谱 $A, I, M_{\mathrm{Spf}\, A}$) 为一个 f-棱柱态射，并设 h：(形式谱 $A', IA', M_{\mathrm{Spf}\, A'}$) $\to$(形式谱 $A, I, M_{\mathrm{Spf}\, A}$) 为 $(Y, M_Y)_{\mathbb{\Delta}}$ 中的一个 (p, I)- 完全平坦态射。考虑如下形式的交换图范畴

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Spf}\, B', JB', M_{\mathrm{Spf}\, B'}) & \xrightarrow{h'} & (\mathrm{Spf}\, B, J, M_{\mathrm{Spf}\, B}) \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ (\mathrm{Spf}\, A', IA', M_{\mathrm{Spf}\, A'}) & \xrightarrow{h} & (\mathrm{Spf}\, A, I, M_{\mathrm{Spf}\, A}), \end{array}$$

其中 (形式谱 $B', JB', M_{\mathrm{Spf}\, B'}$) $\in (X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$，$h'$ 是 $(X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$ 中的一个态射，且 g' 是一个 f-棱柱态射，并带有显然的态射概念。则该范畴有一个终对象。

证明. 这可由类似于 [DLMS26, 注记 2.4] 的论证得到：设 B' 表示 $B \otimes_A A'$ 的经典 (p, I)-完备化。则 (B', IB') 表示有界棱柱的图 $(B, J) \leftarrow (A, I) \to (A', IA')$ 的推出。由于 h：(形式谱 $A', M_{\mathrm{Spf}\, A'}$) $\to$(形式谱 $A, M_{\mathrm{Spf}\, A}$) 是严格的，可以验证形式谱 $(B'/JB') \hookrightarrow$ 形式谱 B' 可升级为 $(X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$ 中的一个对数棱柱，并给出该范畴的一个终对象。□

引理 3.3. 对于(形式谱 $A, I, M_{\mathrm{Spf}\, A}$) $\in (Y, M_Y)_{\mathbb{\Delta}}$，定义在 $(X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$ 上的预层 f^{-1}(形式谱 $A, I, M_{\mathrm{Spf}\, A}$)

$$(X, M_X)_{\mathbb{\Delta}} \ni (\mathrm{Spf}\, B, J, M_{\mathrm{Spf}\, B}) \mapsto \mathrm{Mor}_{f\text{-}\mathbb{\Delta}}\big((\mathrm{Spf}\, B, J, M_{\mathrm{Spf}\, B}), (\mathrm{Spf}\, A, I, M_{\mathrm{Spf}\, A})\big)$$

是一个集合层。

在不致混淆时，我们常将 $f^{-1}h_A$ 记作 f^{-1}(形式谱 $A, I, M_{\mathrm{Spf}\, A}$)。当 $f = \mathrm{id}$ 时，该引理断言位点 $(X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$ 是次典范的。

证明。由于仿射形式概形是拟紧的，$(X, M_X)_{\mathbb{A}}$ 中的每个覆盖都可被一个有限覆盖加细。此外，每个有限不交并都存在于 $(X, M_X)_{\mathbb{A}}$ 中。因此，只需对单个覆盖检验层条件：取 $(X, M_X)_{\mathbb{A}}$ 中的一个 (p, J)-完全忠实平坦态射 (形式谱 $B', JB', M_{\mathrm{Spf}\, B'}$) $\to$(形式谱 $B, J, M_{\mathrm{Spf}\, B}$)。由 [DLMS26，注记 2.4],，(形式谱 $B', JB', M_{\mathrm{Spf}\, B'}$) 在 (形式谱 $B, J, M_{\mathrm{Spf}\, B}$) 上的自纤维积可由一个对数棱柱 (形式谱 $B'', JB'', M_{\mathrm{Spf}\, B''}$) 表示，其中$B''$是 $B' \otimes_B B'$ 的经典 (p, J)-完备化。设 p_1, p_2: (形式谱 $B'', JB'', M_{\mathrm{Spf}\, B''}$) $\to$(形式谱 $B', JB', M_{\mathrm{Spf}\, B'}$) 为这些投影。

取一个 f-棱柱态射 g': (形式谱 $B', JB', M_{\mathrm{Spf}\, B'}$) $\to$(形式谱 $A, I, M_{\mathrm{Spf}\, A}$)，其中 $g' \circ p_1 = g' \circ p_2$。根据 [BS22，推论 3.12]及其证明，棱柱 (形式谱 B', JB') 在 (形式谱 B, J) 上的自纤维积由 (形式谱 B'', JB'') 表示，并且 g'唯一地下降为棱柱态射 g: (形式谱 B, J) $\to$(形式谱 A, I)。由引理 A.2，幺半群层态射 $g'^{-1} M_{\mathrm{Spf}\, A} \to M_{\mathrm{Spf}\, B'}$ 唯一地下降为态射 $g^{-1} M_{\mathrm{Spf}\, A} \to M_{\mathrm{Spf}\, B}$，从而定义了一个对数概形态射 g: (形式谱 $B, M_{\mathrm{Spf}\, B}$) $\to$(形式谱 $A, M_{\mathrm{Spf}\, A}$)。现在容易验证，g 与 f 和 $\delta_{\log}$-结构相容，并给出一个从 (形式谱 $B, J, M_{\mathrm{Spf}\, B}$) 到 (形式谱 $A, I, M_{\mathrm{Spf}\, A}$) 的对数棱柱态射。□

根据 [BO78，命题 5.7], ，存在唯一的一对函子

$$f_{\mathbb{A},*} \colon \mathrm{PSh}((X, M_X)_{\mathbb{A}}) \to \mathrm{PSh}((Y, M_Y)_{\mathbb{A}})$$

and

$$f_{\mathbb{A}}^{\bullet} \colon \mathrm{PSh}((Y, M_Y)_{\mathbb{A}}) \to \mathrm{PSh}((X, M_X)_{\mathbb{A}})$$

使得 $f_{\mathbb{A}}^{\bullet} h_A$与引理 3.3 中的 $f^{-1} h_A$ 一致，并且 $f_{\mathbb{A}}^{\bullet}$ 是 $f_{\mathbb{A}}$ 的左伴随. $_*$。事实上，同上的证明给出了 $f_{\mathbb{A},\ *}$ 和 $f_{\mathbb{A}}^{\bullet}$ 的显式定义：对于$\mathcal{F} \in$ PSh((X， M_X)$_{\mathbb{A}}$) 和 (Spf A， I， $M_{\mathrm{Spf}\, A}$) $\in$ (Y， M_Y)$_{\mathbb{A}}$，我们有

$$(f_{\mathbb{A},*}\mathcal{F})(\mathrm{Spf}\, A, I, M_{\mathrm{Spf}\, A}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}((X, M_X)_{\mathbb{A}})}(f^{-1} h_A, \mathcal{F}).$$

对于 $\mathcal{G} \in$ PSh((Y， M_Y)$_{\mathbb{A}}$) 和 (Spf B， J， $M_{\mathrm{Spf}\, B}$) $\in$ (X， M_X)$_{\mathbb{A}}$，我们有

$$(f_{\mathbb{A}}^{\bullet}\mathcal{G})(\mathrm{Spf}\, B, J, M_{\mathrm{Spf}\, B}) = \varinjlim_{(\mathrm{Spf}\, B, J, M_{\mathrm{Spf}\, B}) \to (\mathrm{Spf}\, A, I, M_{\mathrm{Spf}\, A})} \mathcal{G}(\mathrm{Spf}\, A, I, M_{\mathrm{Spf}\, A}),$$

其中，余极限取遍所有从 (Spf B， J， $M_{\mathrm{Spf}\, B}$) 出发的 f-棱柱态射。

引理 3.4。若 $\mathcal{F}$ 是 $(X$、 $M_X)_{\mathbb{A}}$ 上的层，则 $f_{\mathbb{A},\ *}\mathcal{F}$ 是 $(Y$、 $M_Y)_{\mathbb{A}}$ 上的层。

证明。这几乎是形式上的：我们可以仿照 [BO78，命题 5.8.2] 的证明，使用引理 3.2。□

定义 3.5。对于 $(Y, M_Y)_{\mathbb{A}}$ 上的一个层 $\mathcal{G}$，记 $f_{\mathbb{A}}^{-1}\mathcal{G}$ 为 $f_{\mathbb{A}}^{\bullet}\mathcal{G}$ 的层化。则 $f_{\mathbb{A}}^{-1}$: Sh((Y, M_Y)$_{\mathbb{A}}$) $\to$Sh((X, M_X)$_{\mathbb{A}}$) 是 $f_{\mathbb{A},*}$ 的左伴随

命题 3.6。假设 M_Y 是拟凝聚且整的。则函子f^{-1}:Sh($(Y, M_Y)_{\mathbb{A}}$) $\to$Sh($(X, M_X)_{\mathbb{A}}$) 与有限极限可交换。因此，这一对

$$f_{\mathbb{A}} := (f_{\mathbb{A}}^{-1}, f_{\mathbb{A},*}) \colon \mathrm{Sh}((X, M_X)_{\mathbb{A}}) \to \mathrm{Sh}((Y, M_Y)_{\mathbb{A}})$$

是拓扑斯态射。

构造 3.7. 假设 M_Y具有整图表 $P \to \Gamma(Y, M_Y)$。对于每个 (形式谱 B, J, $M_{\mathrm{Spf}\, B}$) $\in (X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$, 令 $M^P_{\text{形式谱}(B/J)}$和 $M^P_{\text{形式谱 } B}$表示由幺半群同态所关联的 Spf(B/J) 和 Spf B 上的对数结构

$$P \to \Gamma(Y, M_Y) \to \Gamma(X, M_X) \to \Gamma(\mathrm{Spf}(B/J), M_{\mathrm{Spf}(B/J)}) \to B/J \quad \text{and}$$
$$P_B \coloneqq P \times_{\Gamma(\mathrm{Spf}(B/J), M_{\mathrm{Spf}(B/J)})} \Gamma(\mathrm{Spf}\, B, M_{\mathrm{Spf}\, B}) \to \Gamma(\mathrm{Spf}\, B, M_{\mathrm{Spf}\, B}) \to B,$$

分别。注意，这些对数结构是整的，并且 $M^P_{\text{形式谱}(B/J)} = (f \circ f_B)^* M_Y$，其中 f_B: 形式谱$(B/J) \to X$ 是结构映射。

引理 *3.8.* 诱导映射 (形式谱(B/J) M^P形式谱(B/J)) $\to$(形式谱 B, M^P形式谱 B) 是正合闭浸入，并且诱导映射 M^P形式谱 $B \to M^P_{\mathrm{Spf}(B/J)} \times_{M_{\mathrm{Spf}(B/J)}} M_{\mathrm{Spf}\, B}$是同构，其中纤维积取自 Sh((形式谱$(B/J)$)$_{\text{ét}}$) $=$ Sh((形式谱 B)$_{\text{ét}}$)。此外， $\delta_{\log}$-结构于 Γ(形式谱 $B, M_{\mathrm{Spf}\, B}$) 定义了 δ 上的对数结构，并使 (形式谱 $B, J, M^P_{\mathrm{Spf}\, B}$) 成为 $(Y, M_Y)_{\mathbb{\Delta}}$中的对数棱柱。最后，自然映射

$$(\mathrm{Spf}\, B, J, M_{\mathrm{Spf}\, B}) \to (\mathrm{Spf}\, B, J, M^P_{\mathrm{Spf}\, B})$$

是一个 f-棱柱态射，并且是从 (形式谱 $B, J, M_{\mathrm{Spf}\, B}$) 出发的 f-棱柱态射范畴中的始对象。

证明。 [Kos22，命题 3.7] 第一段中的论证适用：如同 [Kos22，引理 3.8], 的证明中那样，我们看到 Γ(形式谱 $B, M_{\mathrm{Spf}\, B}$) $\to \Gamma$(形式谱(B/J) $M_{\mathrm{Spf}(B/J)}$) 是正合满射，并且是幺半群上的 $(1+J)$-挠子。因此 $P_B = P \times_{\Gamma(\mathrm{Spf}(B/J), M_{\mathrm{Spf}(B/J)})} \Gamma$(形式谱 B, $M_{\mathrm{Spf}\, B}$) $\to P$ 也是如此。通过计算形式谱 B 在每个几何点处的茎，也可以验证映射 $M^P_{\text{形式谱 } B} \to M^P_{\mathrm{Spf}(B/J)} \times_{M_{\mathrm{Spf}(B/J)}} M_{\mathrm{Spf}\, B}$ 是一个同构。其余断言显然。□

命题 *3.6* 的证明。 我们需要证明 $f^{-1}_{\mathbb{\Delta}}$与有限极限交换。由于 M_Y 是整且拟凝聚的，它在 étale 局部 admits an integral chart。特别地，每个 (Spf B, J, $M_{\mathrm{Spf}\, B}$) $\in (X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$都存在一个 étale 覆盖 (Spf B', JB', $M_{\mathrm{Spf}\, B'}$)，使得构造 3.7 适用。令 (Spf B', JB', $M_{\mathrm{Spf}\, B'}$) $\to$(Spf B', JB', $M^P{}_{\mathrm{Spf}\, B'}$) 表示引理 3.8 中得到的 f-棱柱态射。那么对每个 $\mathcal{G} \in$Sh$((Y, M_Y)_{\mathbb{\Delta}})$，我们有

$$(f^{\bullet}_{\mathbb{\Delta}} \mathcal{G})(\mathrm{Spf}\, B', JB', M_{\mathrm{Spf}\, B'}) = \mathcal{G}(\mathrm{Spf}\, B', JB', M^P_{\mathrm{Spf}\, B'}).$$

由此可得 $(f^{-1}_{\mathbb{\Delta}} \mathcal{G})$(Spf B', JB', $M_{\mathrm{Spf}\, B'}$) $=$ $\mathcal{G}$(Spf B', JB', $M^P{}_{\mathrm{Spf}\, B'}$)。由于在 (Spf B', JB', $M^P{}_{\mathrm{Spf}\, B'}$) 处取值与取极限可交换，我们得出 $f^{-1}_{\mathbb{\Delta}}$与有限极限交换。□

对于相对棱柱位点，我们也有一个显然的变体。

命题 3.9. 设 $(A_0, I_0, M_{\mathrm{Spf}\, A_0})$ 是一个对数棱柱，使得 $M_{\mathrm{Spf}\, A_0}$ 是整的，并假设给定了一个 p-进对数形式概形的态射 $(Y, M_Y) \to$(形式谱 $A_0/I_0, M_{\mathrm{Spf}\, A_0/I_0}$)。若 M_Y 是拟凝聚的，则存在一个拓扑斯态射

$$f_{\mathbb{\Delta}} \coloneqq (f^{-1}_{\mathbb{\Delta}}, f_{\mathbb{\Delta},*}) \colon \mathrm{Sh}(((X, M_X)/(A_0, M_{\mathrm{Spf}\, A_0}))_{\mathbb{\Delta}}) \to \mathrm{Sh}(((Y, M_Y)/(A_0, M_{\mathrm{Spf}\, A_0})_{\mathbb{\Delta}})$$

使得

$$(f_{\mathbb{\Delta},*}\mathcal{F})(\mathrm{Spf}\, A, I, M_{\mathrm{Spf}\, A}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}})}(f^{-1} h_A, \mathcal{F})$$

其中，$f^{-1}h_A$的定义是将（形式谱 $B, J, M_{\mathrm{Spf}\,B}$）$\in$（$(X, M_X)$ / （$A_0, M_{\mathrm{Spf}\,A_0}$））$_{\mathbb{A}}$映射到集合$\mathrm{Mor}_{f\text{-}\mathbb{A}/A_0}$（形式谱 $B, J, M_{\mathrm{Spf}\,B}$），（形式谱 $A, I, M_{\mathrm{Spf}\,A}$）），其中包含如（3.1）所示的 f-棱柱态射 g，且 g 是（$A_0, I_0, M_{\mathrm{Spf}\,A_0}$）上的对数棱柱映射。

证明。 命题 3.6 的证明仍然适用。 □

现在我们转而描述高阶直接像。令 $(\mathrm{Spf}\ A,\ I,\ M_{\mathrm{Spf}\,A}) \in (Y,\ M_Y)_{\mathbb{A}}$，并设

$$f_{A/I}\colon (X_{A/I}, M_{X_{A/I}}) \coloneqq (X, M_X)\times_{(Y,M_Y)}(\mathrm{Spf}(A/I), M_{\mathrm{Spf}(A/I)}) \to (\mathrm{Spf}(A/I), M_{\mathrm{Spf}(A/I)})$$

注意，$(X_{A/I},\ M_{X_{A/I}}) \to (X,\ M_X)$ 是严格的。根据构造，我们有一个显然的拓扑斯态射图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sh}(((X_{A/I}, M_{X_{A/I}})/(A, M_{\mathrm{Spf}\,A}))_{\mathbb{A}}) & \xrightarrow{(f_{A/I})_{\mathbb{A}}} & \mathrm{Sh}(((\mathrm{Spf}\,A/I, M_{\mathrm{Spf}\,A/I})/(A, M_{\mathrm{Spf}\,A}))_{\mathbb{A}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sh}((X, M_X)_{\mathbb{A}}) & \xrightarrow{\qquad f_{\mathbb{A}} \qquad} & \mathrm{Sh}((Y, M_Y)_{\mathbb{A}}) \end{array}$$

该图表在典范同构意义下交换，并且上方的水平态射可典范地识别为局部化上拓扑之间诱导的态射

$$\mathrm{Sh}((X, M_X)_{\mathbb{A}})/f_{\mathbb{A}}^{-1}h_A \xrightarrow{f_{\mathbb{A}}} \mathrm{Sh}((Y, M_Y)_{\mathbb{A}})/h_A$$

见于 [Sta21, 04H1]。

命题 3.10。 沿用上述记号。令 $\mathcal{K} \in D((X, M_X)_{\mathbb{A}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}})$ 并考虑 $({}^{R}f_{\mathbb{A},*}\mathcal{K}) \in D((Y, M_Y)_{\mathbb{A}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}})$。则存在一个自然的拟同构

$$R\Gamma((\mathrm{Spf}\,A, I, M_{\mathrm{Spf}\,A}), Rf_{\mathbb{A},*}\mathcal{K}) \cong R\Gamma(((X_{A/I}, M_{X_{A/I}})/(A, M_{\mathrm{Spf}\,A}))_{\mathbb{A}}, \mathcal{K}),$$

其中我们继续将 $\mathcal{K}$ 记作 $\mathcal{K}$ 在 $\mathrm{Sh}(((X_{A/I}, M_{X_{A/I}})/(A, M_{\mathrm{Spf}\,A}))_{\mathbb{A}})$上的限制。

证明。 这由 [Sta21, 0D6H]得出。注意，其中的陈述涉及一个环化位点的态射，但多亏了 [Sta21,04IF]，同样的证明也适用于环化拓扑斯的态射。□

4. Prismatic F-crystals in perfect complexes

设 (X, M_X) 是一个有界 p-进对数形式概形，且 M_X 是整的。我们回顾完美复形中的棱柱 (F-)晶体，以及 (X, M_X) 上的完备棱柱 F-晶体和解析棱柱 F-晶体。这些概念及其变体曾出现在 [BS23, § 4], [DLMS24, § 3.2], [GR24, § 3.1, 5.1], [DLMS26, § 3.1], [Tsu24, § 11], [Tia25, § 1]中。

完美复形中的棱柱晶体。 给定一个（离散）环 A，记 $\mathcal{D}(A)$为 A-模的导出 ∞-范畴，并记 $\mathcal{D}_{\mathrm{perf}}(A) \subset \mathcal{D}(A)$为 A 上的完美复形的全子范畴（参见 [Lur，定义 7.2.4.1，命题 7.2.4.2]）。所谓（$(X,\ M_X)_{\mathbb{A}}$，$\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$）上的完美复形，是指导出 ∞-范畴$\mathcal{D}((X,\ M_X)_{\mathbb{A}},\ \mathcal{O}_{\mathbb{A}})$中的一个对象 $\mathcal{E}$，满足存在一个覆盖 $\{U_i\}$，其覆盖（在拓扑斯中联合覆盖终对象）$(X,\ M_X)_{\mathbb{A}}$，以及完美复形 $P_i \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}}(U_i))$，使得

$\mathcal{E}|_{U_i} \cong P_i \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}(U_i)} \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}, U_i}$。记 $\mathcal{D}_{\mathrm{perf}}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}) \subset \mathcal{D}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}, \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$为完美复形的全子范畴，我们称之为（$X$, M_X）上的完美复形中的棱柱晶体。由（p, I）-完备忠实平坦下降（见 [BS23，命题 2.7 Pf.]），我们得到一个自然等价

$$\mathcal{D}_{\mathrm{perf}}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}) \xrightarrow{\cong} \lim_{(A,I,M_{\mathrm{Spf}\,A}) \in (X,M_X)^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}} \mathcal{D}_{\mathrm{perf}}(A).$$

对任意 $(A, I, M_{\mathrm{Spf}\,A}) \in (X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$，注意弗罗贝尼乌斯自同态 ϕ_A 在A 上诱导 $\mathrm{Spec}(A) \setminus V(p, I)$ 上的一个作用，亦记为 ϕ_A。记 $\mathcal{D}^{\phi}{}_{\mathrm{perf}}(A)$ 为对 $(\mathcal{E}_A, \phi_{\mathcal{E}_A})$ 的 ∞-范畴，其中 $\mathcal{E}_A \in \mathcal{D}_{\mathrm{perf}}(A)$ 且

$$\phi_{\mathcal{E}_A} : L\phi_A^* \mathcal{E}_A \otimes^L_A A[I^{-1}] \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}_A \otimes^L_A A[I^{-1}].$$

是一个同构。按照 [BS23 的注记 4.2],，令 $\mathcal{D}^{\phi}{}_{\mathrm{perf}}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}})$ 为满足 $\mathcal{E} \in \mathcal{D}_{\mathrm{perf}}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}})$ 且 $\phi_{\mathcal{E}}$: $L\phi^*_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}} \mathcal{E}[\mathcal{I}^{-1}_{\mathbb{\Delta}}] \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}[\mathcal{I}^{-1}_{\mathbb{\Delta}}]$是同构的对 $(\mathcal{E}, \phi_{\mathcal{E}})$ 的 ∞-范畴。这些对象称为 (X, M_X) 上的棱柱 F-完美复形中的晶体。

完备棱柱晶体。我们先回顾一下定义。

定义 4.1 ([DLMS24，定义 3。11])。

(1) 在 $(X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$ 上的 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模完备晶体是一个 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模层 $\mathcal{F}$，满足：对于每个 $(A, I, M_{\mathrm{Spf}\,A}) \in (X, M_X)^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$，$A$-模 $\mathcal{F}_A := \mathcal{F}(A, I, M_{\mathrm{Spf}\,A})$ 都是经典的 (p, I)-完备的；并且对于 $(X, M_X)^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$ 中的每个映射 $(A, I, M_{\mathrm{Spf}\,A}) \to (B, IB, M_{\mathrm{Spf}\,B})$，诱导映射

$$\mathcal{F}_A \widehat{\otimes}_A B \to \mathcal{F}_B$$

是一个同构，其中 $\mathcal{F}_A \widehat{\otimes}_A B$ 表示完备张量积 $\lim\!\leftarrow\!\!-_n (\mathcal{F}_A \otimes_A B)/(p, I)^n(\mathcal{F}_A \otimes_A B)$。我们也交替使用术语完备棱柱晶体 。令 $\mathrm{CR}^{\wedge}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}, \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$ 表示 $(X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$ 上的 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模有限生成完备晶体的范畴。

(2) 在 $(X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$ 上的 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta},n}$-模晶体是一个 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta},n}$-模层 $\mathcal{F}_n$，满足对于每个 $(A, I, M_{\mathrm{Spf}\,A}) \to (B, IB, M_{\mathrm{Spf}\,B})$，诱导映射 $\mathcal{F}_{n,A} \otimes_A B \to \mathcal{F}_{n,B}$ 是同构，其中 $\mathcal{F}_n := \mathcal{F}_{n,A}(A, I, M_{\mathrm{Spf}\,A})$。

注4.2。我们回顾一下 [DLMS24，注 3.12、引理 3.13] 中的讨论（另见 [Tsu24，注 11.2、11.4]）。

(1) 若 $\mathcal{F}$ 是 $(X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$ 上的 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模完备晶体，则对于每个$f$: $(A, I, M_{\mathrm{Spf}\,A}) \to (B, IB, M_{\mathrm{Spf}\,B})$，诱导映射

$$\mathcal{F}_A \otimes_A B/(p, IB)^n \to \mathcal{F}_B/(p, IB)^n \mathcal{F}_B$$

对每个 n都是一个同构（使用 [Yek18, Thm. 1.2(2)]）。此外，关联 $(A, I, M_{\mathrm{Spf}\,A}) \mapsto \mathcal{F}_A/(p, I)^n \mathcal{F}_A$ 表示商层 $\mathcal{F}_n := \mathcal{F}/(p, \mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}})^n \mathcal{F}$，并定义了一个由 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta},n}$-模构成的晶体。为说明这一点，假设$f$ 是一个平坦覆盖（因此是严格的），并令 $B' := (B \otimes_A B)^{\wedge}_{(p,I)}$（经典完备化）。那么 $(B', IB', M_A{}^a) \in (X, M_X)^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$表示自余纤维

——

积 f，并且可以原样使用 [DLMS24, Lem. 3.13, Pf., 1st para.] 中的论证，从而得出上述关联确实是一个层。由于 $\mathcal{F}_A^{\sim}$在经典意义下是 (p, I)-完备的，我们还有一个同构 $\mathcal{F} \xrightarrow{\simeq} \varprojlim_n \mathcal{F}_n$。若 $\mathcal{F}$是有限生成的，那么对任意 f，诱导映射

$$\mathcal{F} \otimes_A B \to \mathcal{F}_A \widehat{\otimes}_A B \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_B$$

是满射；此外，若 A和 B是诺特的，或者 A 是诺特的且 $A \to B$ 是经典平坦的，则它是同构。

(2) 设 $(\mathcal{F}_n)_n$ 是一个 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模的逆系统，使得 $\mathcal{F}_n$ 是$\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta},n}$-模的晶体，并且对每个 n，诱导映射 $\mathcal{F}_{n+1} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta},n+1}} \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta},n} \to \mathcal{F}_n$ 是同构。按照 (1) 中的论证，我们看到，关联$A \mapsto \mathcal{F}_{n+1,A} \otimes_A A/(p, I)^n$ 表示层 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta},n} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta},n+1}} \mathcal{F}_{n+1}$。因此，$\mathcal{F} := \varprojlim_n \mathcal{F}_n$ 是一个 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模的完备晶体。最后，由 [Yek18, Thm. 1.2(2)] 可知，诱导映射 $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}} \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta},n} = \mathcal{F}/(p, \mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}})^n \mathcal{F} \to \mathcal{F}_n$是同构。注意，对每个（或某个） n ，$\mathcal{F}_n$ 是有限生成的，当且仅当 $\mathcal{F}$也是如此。

(3) 对于 (X, M_X)𝔸上的 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模的完备晶体 $\mathcal{F}$，我们定义

$$\widehat{\phi^*}\mathcal{F} := \mathcal{F}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}},\phi_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}}} \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}} := \varprojlim_n (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}},\phi_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}}} \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})/(p, \mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}})^n (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}},\phi_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}}} \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}).$$

$\widehat{\ }$那么， $\phi^*\mathcal{F}$也是 (X, M_X)𝔸上的 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模的完备晶体。事实上，$\widehat{\ }$我们有如 (1) 中的 $\mathcal{F} = \varprojlim_n \mathcal{F}_n$。于是，由于 $\phi^*_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}} \mathcal{F}_n = (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}},\phi_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}}} \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})/(p, \phi_{\mathbb{\Delta}}(\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}))^n$ $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}},\phi_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}}} \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$ 且 $(p, \mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}) \supset (p, \phi_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}}(\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}})) \supset \widehat{\ } (p, \mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}})^p$， $\phi^*\mathcal{F} = \varprojlim_n \phi^*_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}} \mathcal{F}_n$。由于 $(\phi^*_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}} \mathcal{F}_n)_n$ 满足 (2) 中的假设，我们得到 $\phi^*\mathcal{F}\widehat{\ }$是一个完备棱柱晶体。该论证还表明，对于每个 $(A, I, M_{\operatorname{Spf} A}) \in (X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$，$(\phi^*\mathcal{F})_A = \mathcal{F}_A \widehat{\otimes}_{A,\phi_A} A$。

定义 4.3（参见 [Tia25，定义 1.15]）。

(1) 定义 $\mathbf{CR}^{\wedge,\,\mathrm{an}}((X,\ M_X)_{\mathbb{\Delta}},\ \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$ 为 $\mathbf{CR}^{\wedge}((X,\ M_X)_{\mathbb{\Delta}},\ \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$ 的全子范畴，其对象 $\mathcal{F}$ 满足：$\mathcal{F}[\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^{-1}]$ （分别为 $\mathcal{F}[p^{-1}]$）是 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}[\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^{-1}]$-模（分别为 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}[p^{-1}]$-模）的局部自由层。等价地，可以要求对于每个 $(A,\ I,\ M_{\operatorname{Spf} A}) \in (X,\ M_X)^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$，与 $\mathcal{F}_A$ 相关联的 $\operatorname{Spec}(A)$ 上的拟凝聚层 $\mathcal{F}_A^{\sim}$ 的限制 $\mathcal{F}_A^{\sim}|_{\operatorname{Spec}(A) \setminus V(p,\ I)}$是一个向量丛。

(2) 定义范畴 $\mathbf{CR}^{\wedge,\,\mathrm{an},\,\phi}((X,\ M_X)_{\mathbb{\Delta}},\ \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$，其对象为 $(X,\ M_X)_{\mathbb{\Delta}}$ 上的完备棱柱 F-晶体，它是由对象对 $(\mathcal{F},\ \phi_{\mathcal{F}})$ 构成的范畴，其中 $\mathcal{F} \in \mathbf{CR}^{\wedge,\,\mathrm{an}}((X,\ M_X)_{\mathbb{\Delta}},\ \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$，并且

$$\phi_{\mathcal{F}} \colon (\widehat{\phi^*_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}}}\mathcal{F})[\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^{-1}] \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}[\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^{-1}]$$

是一个同构。

注记 4.4。 在具有平凡对数结构的小仿射情形中， [DLMS24，定义 3.16] 中所定义的完备棱柱 F-晶体范畴，依 [DLMS24，引理 3.24(iv)]，是如上所定义范畴的一个全子范畴。然而，后者严格更大：首先，我们在此并不施加饱和条件（例如 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}/(p, \mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}})$连同

所诱导的 ϕ，在当前意义下是一个完备棱柱 F-晶体）；其次，我们也纳入非有效的完备棱柱 F-晶体。也就是说，同构$\phi_{\mathcal{F}}$：$(\widehat{\phi^*_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}}}\mathcal{F})[\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^{-1}] \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}[\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^{-1}]$未必来自 $\phi_{\mathcal{F}}$：$\mathcal{F} \to \mathcal{F}$，其余核被 $\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}$的某个幂所零化。在下面的命题 4.6 中，我们引入一个映到 $\mathrm{CR}^{\wedge,\mathrm{an},\phi}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}},\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$ 的全忠实函子 j_*。本质像中的对象满足饱和条件。

解析棱柱 F-晶体。

定义 4.5 ([GR24，定义 3.1], [DLMS26，定义 3.3])。

(1) 令 $(A,\ I,\ M_{\mathrm{Spf}\,A}) \in (X,\ M_X)_{\mathbb{\Delta}}$。记 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{an}}(A,\ I)$ 为 $\mathrm{Spec}(A) \smallsetminus V(p,\ I)$ 上向量丛的范畴，记 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{an},\ \phi}(A,\ I)$ 为由二元组 $(\mathcal{E}_A,\ \phi_{\mathcal{E}_A})$ 构成的范畴，其中 $\mathcal{E}_A \in \mathrm{Vect}^{\mathrm{an}}(A,\ I)$，且 $\phi_{\mathcal{E}_A}$是向量丛的一个同构

$$\phi_{\mathcal{E}_A}\colon (\phi_A^*\mathcal{E}_A)[I^{-1}] \simeq \mathcal{E}_A[I^{-1}]$$

在 $\mathrm{Spec}(A) \smallsetminus V(I)$ 上。

(2) 定义范畴 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{an}(,\phi)}((X,\ M_X)_{\mathbb{\Delta}})$，其对象为 $(X,\ M_X)$ 上的解析棱柱（F-）晶体，定义如下：

$$\mathrm{Vect}^{\mathrm{an}(,\phi)}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}}) \coloneqq \lim_{(A,I,M_{\mathrm{Spf}\,A})\in(X,M_X)^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}} \mathrm{Vect}^{\mathrm{an}(,\phi)}(A,I).$$

它们之间的关系。 下面讨论一些可以将这些概念联系起来的特定情形。为简化记号，对于 $(A,I,M_{\mathrm{Spf}\,A}) \in (X,M_X)_{\mathbb{\Delta}}$，我们将 h_A记作它所表示的层；滥用记号，我们也会使用诸如映射$h_A \to h_{A'}$或层 $\mathcal{F}$的求值 $\mathcal{F}_A \coloneqq \mathcal{F}(h_A)$ 这样的说法。

命题 4.6。 假设存在 $(A,I,M_{\mathrm{Spf}\,A}) \in (X,M_X)_{\mathbb{\Delta}}$，使得

- 它所表示的层覆盖终对象，
- A 是正则诺特环，并且
- 自乘积 h_A^{n+1} 可表，例如可由 $(A_n,I_n,M_{\text{形式谱 }A_n})$ 表示，对每个 $n \geq 0$（其中 $A = A_0$），且每个投影 $p_0^n,\dots,p_n^n\colon \mathrm{Spec}\ A_n \to \mathrm{Spec}\ A$（在经典意义下）都是忠实平坦的。

(1)（参见 [Tia25，命题 6.8], [GR24，定理 5.10], [DLMS26，引理 3.8]）自然限制函子

$$j^*\colon \mathrm{CR}^{\wedge,\mathrm{an}(,\phi)}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}},\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}) \to \mathrm{Vect}^{\mathrm{an}(,\phi)}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}})$$

将 $\mathcal{F}$映至$(\mathcal{F}_A^{\sim}|_{\mathrm{Spec}(A)\smallsetminus V(p,I)})_A$，具有一个右伴随

$$j_*\colon \mathrm{Vect}^{\mathrm{an}(,\phi)}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}}) \to \mathrm{CR}^{\wedge,\mathrm{an}(,\phi)}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}},\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}).$$

此外，余单位映射 $j^*j_* \to \mathrm{id}$ 是一个同构。

(2) 可以函子性且唯一地对应到完美复形 $\iota_A(\mathcal{F}) \in \mathcal{D}_{\mathrm{perf}}((X,M_X^{\wedge})_{\mathbb{\Delta}})$ 以及一个态射 $f\colon \iota_A(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}$，位于 $\mathcal{D}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}},\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$ 中，并满足下列性质。

(a) $\iota_A(\mathcal{F})|_{h_A} \to \mathcal{F}|_{h_A}$到局部化拓扑斯 $\mathrm{Sh}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}})/h_A$的限制由 $P^\bullet \otimes_A \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}} \to \mathcal{F}_A \otimes_A \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}} \to \mathcal{F}|_{h_A}$ 给出，其中 $P^\bullet \to \mathcal{F}_A$ 是由有限投射 A-模构成的有界复形分解。

(b) 对每个 $(B, J, M_{\mathrm{Spf}\,B}) \in (X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}/h_A$，若 $A \to B$ 是经典平坦的，则 f 给出一个同构 $\iota_A(\mathcal{F})(h_B) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_B$，其位于 $\mathcal{D}(B)$ 中。*(c)* 诱导映射 $R\Gamma((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}, \iota_A(\mathcal{F})) \to R\Gamma((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}, \mathcal{F})$ 是一个准同构。

若 $\mathcal{F}$ 带有一个同构 $\phi_{\mathcal{F}}: (\widehat{\phi^*_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}}}\mathcal{F})[\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^{-1}] \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}[\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^{-1}]$，那么 $\iota_A(\mathcal{F})$ 也带有一个同构 $\phi_{\iota_A(\mathcal{F})}: (L\phi^*_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}}\iota_A(\mathcal{F}))[\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^{-1}] \xrightarrow{\cong} \iota_A(\mathcal{F})[\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^{-1}]$，它通过 $\iota_A(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}$ 与 $\phi_{\mathcal{F}}$ 相容。

因此，我们得到全忠实函子

$$\mathrm{Vect}^{\mathrm{an}(,\phi)}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}) \to \mathrm{CR}^{\wedge,\mathrm{an}(,\phi)}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}, \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}) \to \mathcal{D}^{(\phi)}_{\mathrm{perf}}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}).$$

(2) 中的构造事先依赖于 h_A 的选择。在半稳定情形下，我们证明它与选择无关且可整体化（见 § 6.3）。

证明。(1) 唯一性由伴随性质得出。对每个 $n \geq 0$，令 $j^n: \mathrm{Spec}(A_n) \smallsetminus V(p, I_n) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A_n)$ 表示开浸入（注意 $A_0 = A$）。我们将投影记为 $p_0^n, \ldots, p_n^n: \mathrm{Spec}\ A_n \to \mathrm{Spec}\ A$。

令 $\mathcal{F} \in$ 向量丛$^{\mathrm{an}}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}})$，并记 $\mathcal{F}_{/B} \in$ 向量丛$^{\mathrm{an}}(B, J)$ 为其在 $(B, J, M_{\mathrm{Spf}\,B})$ 处的取值。由 $\mathcal{F}$ 的晶体性质，我们有同构 $\varepsilon_{/A_1}$：$p_0^{1,*}\mathcal{F}_{/A} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_{/A_1} \xleftarrow{\cong} p^{1,*}_1\mathcal{F}_{/A}$，它属于向量丛$^{\mathrm{an}}(A_1, I_1)$，并满足向量丛$^{\mathrm{an}}(A_2, I_2)$ 中的余循环条件。

由于 A 是诺特正则环，根据 [Sta21, 0BK3]，$j^0_*\mathcal{F}_{/A}$ 是 $\mathrm{Spec}(A)$ 上的凝聚层。因此，$\mathfrak{F}_A := H^0(\mathrm{Spec}(A), j^0_*\mathcal{F}_{/A}) = H^0(\mathrm{Spec}(A) \smallsetminus V(p, I), \mathcal{F}_{/A})$ 是有限生成的 A-模，故它是经典的 (p, I)-完备。此外，由 [Sta21, 0BK0]，我们有 $j^{0,*}\widetilde{\mathfrak{F}_A} = \mathcal{F}_{\mathfrak{S}_{R,\square}}$。由于假设 $A \to A_n$ 是平坦的，拟凝聚层的平坦基变换 [Sta21, 02KH] 给出一个典范同构

$$\mathfrak{F}_A \otimes_{A, p_i^n} A_n \cong H^0(\mathrm{Spec}(A_n), j^n_*(p_i^{n,*}\mathcal{F}_{/A})).$$

我们还注意到，根据 [Sta21, 0912] and$p^{n,*}_i\mathcal{F}_{/A} \cong j^{n,*}(\mathfrak{F}_A \otimes_{A, p_i^n} A_n)^{\sim}$，$\mathfrak{F}_A \otimes_{A, p_i^n} A_n$ 在经典意义下是 (p, I_n)-完备的。特别地，$\varepsilon_{/A_1}$ 诱导出一个同构

$$\varepsilon: \mathfrak{F}_A \otimes_{A, p_0^1} A_1 \cong \mathfrak{F}_A \otimes_{A, p_1^1} A_2$$

满足关于 A_2 的余循环条件的 A_1-模。我们还指出 $\Delta^*\varepsilon = \mathrm{id}_{\mathfrak{F}_A}$，其中 Δ 表示对角映射 $\mathrm{Spec}\,A \to \mathrm{Spec}\ A_1$；为此，沿三重对角映射 $\mathrm{Spec}\ A \to \mathrm{Spec}\,A_2$ 拉回余循环条件，即可得到 $\Delta^*\varepsilon \circ \Delta^*\varepsilon = \Delta^*\varepsilon$。

对于 $(A, I, M_{\mathrm{Spf}\,A}) \to (B, IB, M_{\mathrm{Spf}\,B})$ 在 $(X, M_X)^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$ 中的每个态射，定义 $\mathfrak{F}_B$ 为经典意义下的 (p, IB)-完备化 $\mathfrak{F}_A\widehat{\otimes}_A B$。由于 ε，B-模 $\mathfrak{F}_B$ 仅取决于对数棱柱 $(B, IB, M_{\mathrm{Spf}\,B})$，而与映射 $h_B \to h_A$ 无关。此外，诱导映射 $\mathfrak{F}_A[p^{-1}] \otimes_A B \to \mathfrak{F}_B[p^{-1}]$ 和 $\mathfrak{F}_A[I^{-1}] \otimes_A B \to \mathfrak{F}_B[I^{-1}]$ 均为同构；这由 [DLMS24，引理 3.24(iv)] 得出，因为其中的证明仅用到了 Breuil–Kisin 棱柱的诺特性质。特别地，我们有一个函子同构 $\mathcal{F}_{/B} \cong \widetilde{\mathfrak{F}_B}|_{\mathrm{Spec}(B) \smallsetminus V(p,J)}$。

利用忠实平坦下降和注 4.2，容易看出，关联 $(h_B \to h_A) \mapsto \mathfrak{F}_B$ 是 $(X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}/h_A$ 上的一个 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模层，并且它进一步下降为 $(X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$ 上的一个 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模完备晶体 $\mathfrak{F}$；例如参见 DLMS24,

命题 3.26 的证明。例如，构造还表明，$\mathfrak{F}$ 确实是 $\mathrm{CR}^{\wedge,\mathrm{an}}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}},\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$ 的一个对象，这是由 Mat22, 定理 7.8], 得到的，并给出了一个典范同构$\mathcal{F}\cong j^*\mathfrak{F}$。由于关联 $\mathcal{F}\mapsto\mathfrak{F}$ 是函子性的，令 $j_*\mathcal{F}:=\mathfrak{F}$，便定义了一个函子$j_*$: 向量丛$^{\mathrm{an}}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}}) \to \mathrm{CR}^{\wedge,\mathrm{an}}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}},\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$。容验证，$j_*$是 j^* 的右伴随，且余单位映射 $j^*j_*\to\mathrm{id}$ 与上述识别一致，因而是一个同构。从构造也可直接看出，j_* 可以提升为一个函子 向量丛$^{\mathrm{an},\phi}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}}) \to \mathrm{CR}^{\wedge,\mathrm{an},\phi}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}},\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$，并且具有$\tilde{}$相同的性质。注意，$j_*$ 是全忠实的，因为 $j^*j_*\xrightarrow{=}\mathrm{id}$。

(2) 我们首先注意到，求值诱导出一个等价

$$\mathcal{D}^{(\phi)}_{\mathrm{perf}}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}})\xrightarrow{\cong}\lim_{[n]\in\Delta}\mathcal{D}^{(\phi)}_{\mathrm{perf}}(A_n) \tag{4.1}$$

通过 $(p,\ I)$-完备忠实平坦下降，因为 h_A 覆盖了终对象。令 $\mathcal{F}\in\mathrm{CR}^{\wedge,\mathrm{an}}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}},\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$。由于 A是正则诺特的，我们有一个由有限投射 A-模组成的有界复形 $P^\bullet\to\mathcal{F}_A$作为分解。对于任意映射 $h_B\to h_A$，我们有 B-模复形之间的态射 $P^\bullet\otimes_A B\to\mathcal{F}_A\otimes_A B\to\mathcal{F}_B$。根据假设，任意余面映射 $p^n_i\colon A\to A_n$ 都是经典平坦的，因此得到的映射

$$P^\bullet\otimes_{A,p^n_i}A_n\xrightarrow{\cong}\mathcal{F}_A\otimes_{A,p^n_i}A_n\xrightarrow{\cong}\mathcal{F}_{A_n}$$

根据注 4.2(1)是拟同构。由等价 (4.1)，这定义了$\iota_A(\mathcal{F})\in\mathcal{D}_{\mathrm{perf}}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}})$，并配有一个态射 $f\colon\iota_A(\mathcal{F})\to\mathcal{F}$，它属于 $\mathcal{D}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}},\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$，使得 $\iota_A(\mathcal{F})|_{h_A}$由 $P^\bullet\otimes_A\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$给出，而 $f|_{h_A}$是复合 $P^\bullet\otimes_A\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}\to\mathcal{F}_A\otimes_A\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}\to\mathcal{F}|_{h_A}$。容易看出，这与分解 $P^\bullet\to\mathcal{F}_A$的选择无关，且该构造关于 $\mathcal{F}$是函子性的。设 $(B,J,M_{\mathrm{Spf}\,B})\in(X,M_X)_{\mathbb{\Delta}}/h_A$，其中 $A\to B$是经典平坦的。根据注 4.2(1)，我们再次得到自然同构 $\mathcal{F}_A\otimes_A B\cong\mathcal{F}_B$，因此 f 给出一个同构$\tilde{}$ $\iota_A(\mathcal{F})(h_B)\xrightarrow{=}\mathcal{F}_B$，它属于 $\mathcal{D}(B)$。由此我们验证了 (a) 和 (b)，并且容易看出，这两个性质唯一刻画了 $\iota_A(\mathcal{F})$ 和 f。

对于 (c)，注意到 f 给出一个交换图

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}},\iota_A(\mathcal{F})) & \longrightarrow & R\Gamma((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}},\mathcal{F}) \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ \mathrm{Tot}(\iota_A(\mathcal{F})(h_{A_\bullet})) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Tot}(\mathcal{F}_{A_\bullet}) \end{array}$$

其中 $\mathrm{Tot}(C^\bullet)$ 表示与余单纯复形（或模）$C^\bullet$ 相关联的上链复形，竖直拟同构由 Čech 上同调下降以及高阶消失 $H^i((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}}/h_{A_n},\mathcal{G})=0$ 给出，对每一个 $n\geq 0$、$i\geq 1$，其中 $\mathcal{G}$ 为有限投射 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模或 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模的完备晶体（参见引理 6.3 与 6.4）。由于底部水平态射依 (b) 为拟同构，故顶部水平态射亦为拟同构。

假设 $\mathcal{F}$带有 $\phi_{\mathcal{F}}\colon(\widehat{\phi^*_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}}}\mathcal{F})[\mathcal{I}^{-1}_{\mathbb{\Delta}}]\xrightarrow{\cong}\mathcal{F}[\mathcal{I}^{-1}_{\mathbb{\Delta}}]$。那么根据等价 (4.1)，上述构造也给出一个同构 $\phi_{\iota_A(\mathcal{F})}\colon(L\phi^*_{\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}}\iota_A(\mathcal{F}))[\mathcal{I}^{-1}_{\mathbb{\Delta}}]\xrightarrow{\cong}\iota_A(\mathcal{F})[\mathcal{I}^{-1}_{\mathbb{\Delta}}]$，它通过 f 与 $\phi_{\mathcal{F}}$相容。

接下来只需证明函子 $\iota_A\colon \mathrm{CR}^{\wedge,\mathrm{an}(,\phi)}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}},\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}) \to \mathcal{D}^{(\phi)}{}_{\mathrm{perf}}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}})$ 是全忠实的。设 $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\mathrm{CR}^{\wedge,\mathrm{an}}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}},\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$。一方面，如证明 (1) 中所示，由态射的忠实平坦下降可得

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}},\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_A}(\mathcal{F}_A,\mathcal{G}_A) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{A_1}}(\mathcal{F}_{A_1},\mathcal{G}_{A_1})$$

是正合的。另一方面，对于任意 $n\geq 0$、$\mathcal{F}_{A_n}$ 和 $\mathcal{G}_{A_n}$，它们在 $\mathcal{D}_{\mathrm{perf}}(A_n)$ 中都位于上同调次数零，因此我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{A_n}}(\mathcal{F}_{A_n},\mathcal{G}_{A_n}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(A_n)}(\mathcal{F}_{A_n},\mathcal{G}_{A_n}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(A_n)}(\iota_A(\mathcal{F})(h_{A_n})\ \iota_A(\mathcal{G})(h_{A_n})\ ).$$

因此，根据等价 (4.1)，ι_A 是全忠实的。 □

5. 关联层的棱柱-晶体比较

我们研究对数棱柱上同调与晶体上同调之间的比较，其中系数取为满足关联条件（见定义 5.3）的 p-进完备晶体。我们的论证基于 [Kos22, § 6]，其中证明了常系数情形（参见 [Kos22, Thm. 6.3]）。本节的主要结果（定理 5.5）将在 § 6.5 中用于半稳定情形。关于晶体位点和$\delta_{\log}$-晶体位点的定义与性质，请参阅附录 B；本节使用 [Kos22] 中的晶体位点以及p-进完备晶体（定义 B.1 和 B.5），它们与 [DMS26] 中相应概念的关系在命题 B.8 中作了解释。

设定 5.1。固定一个晶体对数棱柱 $(A,(p)\ M_{\mathrm{Spf}\,A}) = (A,(p)\ M_A)^a$，其中 $(A,(p)\ M_A)$ 是按照 [Kos22, Def. 3.3]定义的预对数棱柱。假设 M_A 是整的，并且 $\delta_{\log}$-环 (A,M_A) 的秩为 1 或者是一个对数环。令 $I\subset A$ 为一个包含 p 的 PD 理想。则预对数环 $(A/(p)\ M_A)$ 上的 Frobenius ϕ 分解为

$$(A/p,M_A)\to(A/I,M_A)\xrightarrow{\psi}(\phi_*A/p,\phi_*M_A),$$

其中第一个映射是自然商映射，而 $(\phi_*A/p,\phi_*M_A)$ 表示将 $(A/p,M_A)$ 通过 ϕ 视为其自身上的预对数环。

设 (Y,M_Y) 是 [Kat89, 定义 4.8] 中所述的、关于 $(A/I,M_A)$ 的 Cartier 型光滑对数概形。令 $(Y_{(1)}\ M_{Y^{(1)}}) := (Y,M_Y)\times_{(\mathrm{Spec}\,A/I,M_A^a)}\psi(\mathrm{Spec}\ \phi_*A/p,(\phi_*M_A)^a)$。

回顾构造 B.11，我们有如下拓扑斯态射

$$u_Y^{\delta}\colon \mathrm{S}\ \ \mathrm{h}(((Y,M_Y)/(A,M_A))_{\delta\text{-CRIS}})\xrightarrow{\nu_{\mathrm{CRIS}}}\mathrm{Sh}(((Y,M_Y)/(A,M_A))_{\mathrm{CRIS}})\xrightarrow{u_Y}\mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}}).$$

命题 5.2 (参见 [Kos22, 命题 6.8])。设 $\mathcal{E}_{\mathrm{CRIS}}$ 是 $((Y,M_Y)/(A,M_A))_{\mathrm{CRIS}}$ 上一个 p-进完备的 $\mathcal{O}_{\mathrm{CRIS}}$-模晶体，并记 $\mathcal{E}_{\delta\text{-CRIS}} := \nu_{\mathrm{CRIS}}^*\mathcal{E}_{\mathrm{CRIS}}$ 为 $((Y,M_Y)/(A,M_A))_{\delta\text{-CRIS}}$ 上 $\mathcal{O}_{\delta\text{-CRIS}}$- 模的相应层。则诱导的态射

$$Ru_{Y,*}\mathcal{E}_{\mathrm{CRIS}}\to Ru_{Y,*}^{\delta}\mathcal{E}_{\delta\text{-CRIS}}.$$

是 $\mathcal{D}(Y_{\text{ét}},A)$ 中的一个同构。

证明。我们采用与 [Kos22 命题 6.8] 的证明类似的论证。在 Y 上 étale 局部地，我们可以假设存在一个光滑图表 $P\to(Y,M_Y)$，如

[Kos22，定义 A.11]，且 Y 是仿射的，记作 $Y=\operatorname{Spf} R$。于是我们有一个正合满射 $(\widetilde{R},\widetilde{P})\to(R,P)$，它来自于 $(A/p,M_A)$ 上的光滑提升 (R,P)。取一个满射

$$(B_0,M_{B_0}):=(A\langle\mathbf{N}^T\rangle,M_A\oplus\mathbf{N}^T)\twoheadrightarrow(\widetilde{R},\widetilde{P})$$

对某个有限集 T，其核在 Zariski 局部由 p 生成，且相对于 A 是一个 p-完全正则序列。记 $(B_0^\bullet,M_{B_0}^\bullet)$ 为 $(A,M_A)\to(B_0,M_{B_0})$ 的 Čech 神经，记 $(C_0^\bullet,M_{C_0}^\bullet)$ 为作为 p-进对数仿射预对数环的满射 $(B_0^\bullet,M_{B_0}^\bullet)\to(R,P)$ 的 p-完备对数 PD 包络。注意，根据 [BS22，引理 2.43]，$C_0^\bullet$ 在 A 上是 p-完全平坦的。令 J 为 $C_0\to R$ 的核。由于 $(C_0,J,M_{C_0})^a$ 在 $((Y,M_Y)/(A,M_A))_{\mathrm{CRIS}}$ 中是弱 fi-终对象，$(((Y,M_Y)/(A,M_A))_{\mathrm{CRIS}},\mathcal{E}_{\mathrm{CRIS}})$ 可由余单纯 A-复形 $\mathcal{E}_{\mathrm{CRIS}}(C_0^\bullet)$ 的全化计算（参见引理 B.6 和 6.3）。

另一方面，为了计算 $Ru_{Y,*}^{\delta}\mathcal{E}_{\delta\text{-CRIS}}$，考虑 $B:=(A\{\mathbf{N}^T\}_{\log}^{\delta})_p^\wedge$ 其中$\{\mathbf{N}^T\}_{\log}^{\delta}$表示变量取自 T的自由 $\delta_{\log}$-环，如 [Kos22，记号 2.7，注 2.8]所述，并将 $(A,M_A)\to(B,M_B)$ 的 p- 完备 Čech 神经记为 $B^\bullet$。令 $C=(B\otimes_{B_0}C_0)_p^\wedge$。由于 $B_0\to B$ 是 p- 完全平坦的，$(JC)_p^\wedge$是 C的一个 PD 理想，而C 与 (B,M_B) 关于一个 Zariski 局部由 p 和一个相对于 A 的 p- 完全正则序列生成的理想的对数 PD 包络一致。特别地，由 [BS22，推论 2.39] 及 Zariski 下降可知，C 是一个 δ上的 C_0 -环。注意，$(C,(JC)_p^\wedge,M_C)^a$是 $((Y,M_Y)/(A,M_A))_{\delta\text{-CRIS}}$中的一个弱终对象，并将其 Čech 神经记为 $C^\bullet$。同样由 [BS22，推论 2.39] 及 Zariski 下降可知，每个 $(B^n\otimes_{B_0^n}C_0^n)_p^\wedge$都是 C_0^n上的 δ-环。我们有

$$C^\bullet\cong(B^\bullet\otimes_{B_0^\bullet}C_0^\bullet)_p^\wedge.$$

现在，$Ru_{Y,\ *}^{\delta}\mathcal{E}_{\delta\text{-CRIS}}$ 由余单纯 A-复形$\mathcal{E}_{\mathrm{CRIS}}(C^\bullet)$的全化计算。注意到 B 根据构造是 p-完全自由的 B_0，因此，映射$B_0^\bullet\to B^\bullet$ 是余单纯同伦等价；其构造与[BdJ11，例 2.16]中的构造类似。由于 $\mathcal{E}_{\mathrm{CRIS}}$ 是一个 p-进完备晶体，我们有

$$\mathcal{E}_{\mathrm{CRIS}}(C^\bullet)\cong\mathcal{E}_{\mathrm{CRIS}}(C_0^\bullet)\widehat{\otimes}_{C_0^\bullet}C^\bullet\cong\mathcal{E}_{\mathrm{CRIS}}(C_0^\bullet)\widehat{\otimes}_{B_0^\bullet}B^\bullet.$$

Thu因此，映射 $\mathcal{E}_{\mathrm{CRIS}}(C_0^\bullet)\to\mathcal{E}_{\mathrm{CRIS}}(C^\bullet)$ 是余单纯同伦等价 . □

现在我们比较对数棱柱上同调与 δ-对数晶体上同调。回顾构造 B.12，我们有一个余连续函子

$$((Y,M_Y)/(A,M_A))_{\delta\text{-CRIS}}\to((Y^{(1)},M_Y^{(1)})/(\phi_*A,(p),\phi_*M_A)^a)_{\mathbb{\Delta},\text{ét}},$$

它诱导出一个环化拓扑斯态射

$$\mathrm{Sh}(((Y,M_Y)/(A,M_A))_{\delta\text{-CRIS}},\phi_*\mathcal{O}_{\delta\text{-CRIS}})\xrightarrow{\nu_{\mathbb{\Delta}}}\mathrm{Sh}(((Y^{(1)},M_Y^{(1)})/(\phi_*A,(p),\phi_*M_A)^a)_{\mathbb{\Delta},\text{ét}},\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}).$$

根据构造，我们有 $\nu_{\mathbb{\Delta}}^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}=\phi_*\mathcal{O}_{\delta\text{-CRIS}}$。

定义 5.3。设 $\mathcal{E}_{\delta\text{-CRIS}}$ 是（Y,M_Y）/（A,M_A）$_{\delta\text{-CRIS}}$上的 $\mathcal{O}_{\delta\text{-CRIS}}$-模的 p-进完备晶体，设 $\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}^{(1)}$ 是（（$Y_{(1)}M_{(1)Y}$）/（ϕ_*A，（p） ϕ_*M_A）^{a}）$_{\mathbb{\Delta},\text{ét}}$上的 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模的完备棱柱晶体。若存在一个同构，我们称 $\mathcal{E}_{\delta\text{-CRIS}}$和 $\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}^{(1)}$ 是相关联的

$$c\colon\nu_{\mathbb{\Delta}}^{-1}\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}^{(1)}\xrightarrow{\cong}\phi_*\mathcal{E}_{\delta\text{-CRIS}}$$

$\phi_*\mathcal{O}_{\delta\text{-CRIS}}$-模之间的同构。

设 $\nu^{(1)}$ 为自然的拓扑斯态射

$$\nu^{(1)}\colon \mathrm{Sh}(((Y^{(1)}, M_Y^{(1)})/(\phi_* A, (p), \phi_* M_A)^a)_{\mathbb{\Delta}}) \to \mathrm{Sh}((Y^{(1)})_{\text{ét}})$$

如 [Kos22，注记 4.5]中所给出。

命题 5.4（参见 [Kos22，§ 6.2]）。沿用上述记号，并假设$\mathcal{E}_{\delta\text{-CRIS}}$ 与 $\mathcal{E}^{(1)}_{\mathbb{\Delta}}$ 经由同构 c相关联。则映射

$$R\nu^{(1)}_* \mathcal{E}^{(1)}_{\mathbb{\Delta}} \to \phi_* R(\nu^{(1)} \circ \nu_{\mathbb{\Delta}})_* \mathcal{E}_{\delta\text{-CRIS}}$$

由 c 所诱导，是 $\mathcal{D}((Y_{(1)})_{\text{ét}}, \phi_* A)$中的同构。

证明。我们采用与 [Kos22，§ 6.2]中类似的论证。在 étale 局部上，我们可以假设 $Y =$形式谱 R 带有光滑图表 $P \to (Y, M_Y)$，如 [Kos22，定义 A.11]中所述。我们首先如命题 5.2 的证明中那样计算 $\delta_{\log}$-晶体上同调：$\widetilde{\ }\ \widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }\ \widetilde{\ }$设 $(R, P) \to (R, P)$ 是来自 $(A/p, M_A)$ 上的光滑提升 (R, P) 的正合满射，并选取一个满射

$$(B_0, M_{B_0}) := (A\langle \mathbf{N}^T \rangle, M_A \oplus \mathbf{N}^T) \twoheadrightarrow (\widetilde{R}, \widetilde{P})$$

对于某个有限集 T，其核在 Zariski 局部由 p 生成，并且相对于 A 是一个 p-完全正则序列。令 $B:=(A\{\mathbf{N}^T\}^{\delta}_{\log})^{\wedge}_p$，并令 $B^\bullet$为 $(A, M_A) \to (B, M_B)$ 的 p-完备 Čech 神经。记 $(B_0^\bullet, M_{B_0}^\bullet)$ 为 $(A, M_A) \to (B_0, M_{B_0})$ 的 Čech 神经，记 $(C_0^\bullet, M_{C_0}^\bullet)$ 为满射 $(B_0^\bullet, M_{B_0}^\bullet) \to (R, P)$ 的 p-完备对数 PD 包络。令 $((B_0^\bullet)', (M_{B_0}^\bullet)')$ 为满射 $(B_0^\bullet, M_B^\bullet) \to$ $\widetilde{\ }\ \widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }(R, P)$ 的 p-完备精确化。则 $C_0^\bullet$与 $J^\bullet \subset (B_0^\bullet)'$ 的 p-完备 PD 包络一致，其中$\sim$ $\sim J^\bullet := \mathrm{Ker}((B_0^\bullet)' \to R)$。

记 $B = (A\{\mathbf{N}^T\}^{\delta}_{\log})^{\wedge}_p$和 $B^\bullet$为 $(A, M_A) \to (B, M_B)$ 的 p-完备 Čech 神经。记 $C^\bullet$ 为相对于 $(J^\bullet(B^\bullet)')^{\wedge}_p$ 的 $(B^\bullet)' := (B^\bullet \otimes_{B_0^\bullet} (B_0^\bullet)')^{\wedge\ \widetilde{\ }}_p$ 的 p-完备 PD 包络，则 $\delta_{\log}$-晶体上同调可由 $(C^\bullet, M_C^\bullet)$ 计算。由于 $B_0^\bullet \to B^\bullet$ 是 p-完全平坦的，我们有 $C^\bullet = (B^\bullet \otimes_{B_0^\bullet} C_0^\bullet)^{\wedge}_p$。

对于任意 A-代数 E，记 $\phi_A^* E := A \otimes_{\phi, A} E$，并将其视为一个 $\phi_* A$-代数。为计算对数棱柱上同调，考虑所诱导的满射

$$((\phi_A^* B_0)^{\wedge}_p, M_B^{(1)}) \to (\widetilde{R}^{(1)}, \widetilde{P}^{(1)})$$

$\widetilde{\ }$在 $(\phi_* A, \phi_* M_A)$ 上。则 $(\phi_A^* J^\bullet (B^\bullet)')^{\wedge}_p \subset (\phi_A^* (B^\bullet)')^{\wedge}_p$ 相对于 $(\phi_* A, (p))$ 的棱柱包络 $D^\bullet$ 可计算对数棱柱上同调。考虑相对 Frobenius

$$1 \otimes \phi_{(B^\bullet)'}\colon \phi_A^*(B^\bullet)' \to \phi_*(B^\bullet)'.$$

根据 [BS22，推论 2.39], 这可推广到 $D^\bullet \to \phi_* C^\bullet$。根据构造，这与环化拓扑斯态射相容。

对每个 $m \geq 1$，令 $\mathcal{E}^{(1)}_{\mathbb{\Delta}, m}$ 表示注 4.2(1) 中完备棱柱晶体 $\mathcal{E}^{(1)}_{\mathbb{\Delta}}$ 的模 p^m 约化（回顾一下，我们的基底对数棱柱是棱柱型的）；由同上及推论 2.5，我们有$\mathcal{E}^{(1)}_{\mathbb{\Delta}} \cong \lim_{\leftarrow m} \mathcal{E}^{(1)}_{\mathbb{\Delta}, m} \cong R\lim_{\leftarrow m} \mathcal{E}^{(1)}_{\mathbb{\Delta}, m}$。类似地，我们推出

由 $\mathcal{E}_{\delta\text{-CRIS}}$ 是一个 p-进完备晶体这一事实可知，预层 $\mathcal{E}_{\delta\text{-CRIS},\,m}$由 $\mathcal{E}_{\delta\text{-CRIS},\,m}(B_1,\ J_1,\ M_{B_1}) := \mathcal{E}_{\delta\text{-CRIS}}(B_1,\ J_1,\ M_{B_1})/p^m\mathcal{E}_{\delta\text{-CRIS}}(B_1,\ J_1,\ M_{B_1})$ 给出，是一个层；并且 $\mathcal{E}_{\delta\text{-CRIS}} \cong \lim_{\longleftarrow m}\mathcal{E}_{\delta\text{-CRIS},\,m} \cong R\lim_{\longleftarrow m}\mathcal{E}_{\delta\text{-CRIS},\,m}$ （仿照引理 B.6 的证明）。映射 c 给出一个同构 $c_m\colon \nu_{\mathbb{\Delta}}^{-1}\mathcal{E}^{(1)}_{\mathbb{\Delta},\,m} \xrightarrow{\cong} \phi_*\mathcal{E}_{\delta\text{-CRIS},\,m}$。

只需证明，对于每个 $m \geq 1$，映射

$$\mathcal{E}^{(1)}_{\mathbb{\Delta},m}(D^\bullet) \to \mathcal{E}^{(1)}_{\mathbb{\Delta},m}(\phi_*C^\bullet) \cong \mathcal{E}^{(1)}_{\mathbb{\Delta},m}(D^\bullet) \otimes_{D^\bullet} \phi_*C^\bullet$$

由 c_m 导出，并在相应的全化上给出一个拟同构；事实上，对命题取 $R\lim_{\longleftarrow m}$ 并使用 [Sta21, 0D6K] 即可推出该命题。最后，所声称的拟同构由 [BS22, 引理 5.4] 和 [Kos22, 命题 B.3] 得出，并结合 $D^\bullet \to \phi_*C^\bullet$ 在 [Kos22, § 6.2, 最后一段] 中的描述：回想其构造可知，B_0' 在 p 完备化的 p-完全自由，其中 $A \otimes_{\mathbf{Z}_p[M_A]} \mathbf{Z}_p[M_B']$。注意，根据假设，$M_A \to M_B'$ 是 Cartier 型。记作$G\colon = (M_B')^{\mathrm{gp}}/M_A^{\mathrm{gp}}$，它是一个自由阿贝尔群。于是，对每个 n，$(M_B^n)'$ 同构于 $M_B' \oplus G^n$，并且我们有余单纯 A-代数

$$(5.1)\quad A \otimes_{\mathbf{Z}_p[M_A]} \mathbf{Z}_p[M_B'] \to A \otimes_{\mathbf{Z}_p[M_A]} \mathbf{Z}_p[M_B' \oplus G] \to A \otimes_{\mathbf{Z}_p[M_A]} \mathbf{Z}_p[M_B' \oplus G^2] \to \cdots$$

与 [Kos22, 附录 B]中相同。因此，$D^\bullet \to \phi_*C^\bullet$ 模 p^m 约化后分解为两个映射：自由多项式代数部分上的相对 Frobenius，由 A和 B上的 Frobenius 诱导；以及如 [Kos22, 附录 B.1]中的 (5.1) 上的相对 Frobenius。对自由部分应用 [BS22, 引理 5.4]，并对 (5.1) 上的部分应用 [Kos22, 命题 B.3]，即可得到拟同构。□

定理 *5.5*（参见[*Kos22*, 定理 *6*.3]）。假设设定 *5.1*，且 (Y, M_Y) 是 *Cartier* 型的 $(A/I, M_A)$ 上的光滑对数概形。设 $\mathcal{E}^{(1)}_{\mathbb{\Delta}}$ 是 $((Y(1)\ M_Y^{(1)})/(\phi_*A, (p)\ \phi_*M_A)^a)$[2]$\mathbb{\Delta}$ 上的 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模完备棱柱晶体，并设 $\mathcal{E}_{\mathrm{CRIS}}$ 是 $((Y, M_Y)/(A, M_A))_{\mathrm{CRIS}}$ 上的 $\mathcal{O}_{\mathrm{CRIS}}$-模的 p-进完备晶体。假设 $\mathcal{E}^{(1)}_{\mathbb{\Delta}}$ 和 $\nu^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{E}_{\mathrm{CRIS}}$ 由 c关联。则 c 诱导一个同构

$$R\nu^{(1)}_*\mathcal{E}^{(1)}_{\mathbb{\Delta}} \cong \phi_*Ru_{Y,*}\mathcal{E}_{\mathrm{CRIS}}$$

在 $\mathcal{D}(Y_{\text{ét}}, \phi_*A)$（在自然识别 $\mathcal{D}(Y_{\text{ét}}, \phi_*A) \cong \mathcal{D}(Y_{(1)\,\text{ét}}, \phi_*A)$）下）。

T这推广了 [Kos22, 定理 6.3], ，其适用于常系数情形 .

证明。这由命题 5.2 和 5.4 得出。□

6. 棱 柱晶体比较：半稳定形式概形

本节讨论半稳定形式概形上的棱柱-晶体比较定理，并定义 Hyodo–Kato 复形。在 § 6.1 中，我们首先介绍与半稳定形式概形相关的记号，并说明一种用于计算上同调的一般 Čech–Alexander 方法（引理 6.3 和 6.4）。在 § 6.2 中，我们回顾 Breuil–Kisin 对数棱柱，并构造由一族 Breuil–Kisin 对数棱柱给出的 Čech 神经

[2]在 [BS22, 引理 5.4], k 中，假设其特征为 p。然而，给定相对 Frobenius，同样的论证在我们的设定中也成立。

（构造 6.14）。在 § 6.3 中，我们将解析棱柱晶体 $\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$、完备棱柱晶体 $j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 和完美复形中的棱柱晶体 $i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})$ 联系起来（命题 6.15 和 6.16）。基于 § 6.1–§ 6.3 中的结果和构造，我们在 § 6.4 中引入并研究 Breuil–Kisin 上同调和 Breuil 上同调（定义 6.18），并建立它们的比较结果和基变换性质（命题 6.20，定理 6.21）。在 § 6.5 中，我们研究棱柱上同调与晶体上同调之间的比较（定理 6.25 和 6.26）；在 § 6.6 中，给出晶体上同调和 Breuil 上同调的 Frobenius 等源性质（定理 6.27）。我们在 § 6.7 中基于 [Bei11] 讨论 Hyodo–Kato 理论。在 § 6.8 中，我们应用这些结果来定义并研究 Hyodo–Kato 复形 $R\Gamma_{\mathrm{HK}}(X_0,\ M_{X_0}\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\ \mathbb{Q}})$（定理 6.42）。

6.1. 记号与概述。设 k 是特征为 p的完美域。记$W=W(k)$。设 K是 K_0的有限全分歧扩张：$=W[p^{-1}]$和 $e:=[K:\ K_0]$ 为分歧指数。固定 K 的一个一致化元 π，并令 $E=E(u)\in W[u]$表示 π的首一最小多项式。固定 K的一个代数闭包 K，并令$C:=K^{\wedge}$ 为其 p-进完备化。选取一个非平凡的相容系统 $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$，它是 C 中的 p 次单位根，并满足 $\epsilon_0=1$ 和 $\epsilon_{n+1}^p=\epsilon_n$，记 $\epsilon:=(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ 为 $\mathcal{O}_C^{\flat}$ 中的对应元素。另选取一个相容系统 $(\pi_n)_{n\geq 0}$，它是 C 中的 p次 π 根，并满足 $\pi_0=\pi$ 和 $\pi_{n+1}^p=\pi_n$，令 $\pi^{\flat}:=(\pi_n)_{n\geq 0}$ 为 $\mathcal{O}_C^{\flat}$中的对应元素。我们在 Spf $\mathcal{O}_K$ 上赋予典范对数结构 M_{can}（即与 $\mathcal{O}_K\cap K^{\times}$相关联的对数结构）。

一个半稳定 p-进形式概形 over $\mathcal{O}_K$ 指的是一个 over$\mathcal{O}_K$ 的 p-进形式概形，即 étale 局部地 étale 于形如 Spf R^0 with 的仿射形式概形

$$R^0=\mathcal{O}_K\langle T_1,\dots,T_m,T_{m+1}^{\pm 1},\dots,T_d^{\pm 1}\rangle/(T_1\cdots T_m-\pi).$$

在本节中，我们固定一个半稳定的 p-进形式概形 $f:\ X\to$ Spf $\mathcal{O}_K$，并始终赋予 X 由子预层 $\mathcal{O}_{X,\ \text{ét}}\cap(\mathcal{O}_{X,\ \text{ét}}[p^{-1}])^{\times}\hookrightarrow\mathcal{O}_{X,\ \text{ét}}$ 所对应的子层 M_X 给出的对数结构（参见 [ČK19, 1.6(2)]）。

我们主要关注拓扑斯态射

$$f_{\mathbb{\Delta}}\colon \mathrm{Sh}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}})\to\mathrm{Sh}((\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}_K,M_{\mathrm{can}})_{\mathbb{\Delta}}).$$

回忆命题 3.10，对于每个 $\mathcal{K}\in D((X,\ M_X)_{\mathbb{\Delta}},\ \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$ 和 $(A,\ I,\ M_{\mathrm{Spf}\,A})\in(\mathrm{Spf}\ \mathcal{O}_K,\ M_{\mathrm{can}})^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$，我们有

$$R\Gamma((\mathrm{Spf}\,A,I,M_{\mathrm{Spf}\,A}),Rf_{\mathbb{\Delta},*}\mathcal{K})\cong R\Gamma(((X_{A/I},M_{X_{A/I}})/(A,M_{\mathrm{Spf}\,A}))_{\mathbb{\Delta}},\mathcal{K}),$$

其中 $(X_{A/I},\ M_{X_{A/I}}):=(X,\ M_X)\times_{(\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}_K,M_{\mathrm{can}})}(\mathrm{Spf}(A/I)\ M_{\mathrm{Spf}(A/I)})$。下面给出 $(A,\ I,\ M_{\mathrm{Spf}\,A})$ 的主要例子。

例 6.1。以下是 (形式谱 $\mathcal{O}_K,\ M_{\mathrm{can}})^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$ 中的对数棱柱。

(1)（Breuil–Kisin 对数棱柱）。一个有界预对数棱柱

$$(\mathfrak{S}_K:=W(k)[\![u]\!],(E(u)),\mathbf{N}\to\mathfrak{S}_K,1\mapsto u)$$

借助 $\delta_{\log}(1)=0$和 $\delta(u)=0$，定义一个对数棱柱 $(\mathfrak{S}_K,\ (E)\,M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_K})$，其定义方式为$\mathcal{O}_K\cong\mathfrak{S}_K/(E)$。

(2)（Breuil 对数棱柱及其 Frobenius 扭曲）。令 S_K 表示相对于 Ker($\mathfrak{S}_K \to \mathcal{O}_K/p$) 的 p-进完备（对数）PD 包络，其中 $\mathfrak{S}_K$ 配备了将 $\mathfrak{S}_K$ 上的 Frobenius 延拓而来的 Frobenius。由于 $\phi(E)/p$ 是 S_K 中的一个单位元，因此存在一个棱柱态射 ϕ: ($\mathfrak{S}_K$，(E)) →(S_K，(p))，它定义了一个对数棱柱

$$(S_K, (p), M_{\operatorname{Spf} S_K}) \coloneqq (S_K, (p), \phi_* \mathbf{N})^a.$$

记 ($\phi_* S_K$，(p) $M_{\operatorname{Spf} \phi_* S_K}$) 为 (形式谱 $\mathcal{O}_K$， M_{can})$^{\mathrm{op}}_{\triangle}$ 中的对数棱柱，其底层棱柱为 (S_K，(p))，对数结构由 $\mathbf{N} \to S_K, 1 \mapsto u^{p^2}$ 给出，结构映射为 $\mathcal{O}_K \cong \mathfrak{S}_K/(E) \xrightarrow{\phi^2} S/(p)$。注意， ϕ: (S_K，(p) $M_{\operatorname{Spf} S_K}$) →($\phi_* S_K$，($p$) $M_{\operatorname{Spf} \phi_* S_K}$) 是 (形式谱 $\mathcal{O}_K$， M_{can})$^{\mathrm{op}}_{\triangle}$ 中的一个态射。

(3) 有界预对数棱柱

$$(W(k), (p), \mathbf{N} \to W(k), 1 \mapsto 0)$$

with $\delta_{\log}(1) = 0$ 通过 $\mathcal{O}_K \to k \cong W(k)/(p)$ 定义一个对数棱柱 ($W(k)$，(p) M_0)。

(4) 考虑 C 上连同满射 θ: $A_{\mathrm{inf}} \to \mathcal{O}_C$。一个有界预对数棱柱

$$(A_{\mathrm{inf}}, \operatorname{Ker}(\theta \circ \phi^{-1}), \mathbf{N} \to A_{\mathrm{inf}}, 1 \mapsto [\pi^\flat]^p)$$

定义一个对数棱柱（A_{inf}，核（$\theta \circ \phi^{-1}$） $M_{\operatorname{Spf} A_{\mathrm{inf}}}$）[3]，经由 $\mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_C \cong A_{\mathrm{inf}}/$核（$\theta \circ \phi^{-1}$）。

（5）令 A_{cris} 为关于（核（θ） p）的 p-完备（对数）PD 包络，它带有一个延拓 A_{inf} 上 Frobenius 的 Frobenius。自然包含映射 $A_{\mathrm{inf}} \to A_{\mathrm{cris}}$ 给出棱柱的映射（A_{inf}，核（$\theta \circ \phi^{-1}$） → （A_{cris}， （p））。这定义了一个对数棱柱

$$(A_{\mathrm{cris}}, (p), M_{\operatorname{Spf} A_{\mathrm{cris}}}) \coloneqq (A_{\mathrm{cris}}, (p), \mathbf{N} \to A_{\mathrm{inf}} \to A_{\mathrm{cris}})^a.$$

在（形式谱 $\mathcal{O}_K$， M_{can}）$^{\mathrm{op}}_{\triangle}$中有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{S}_K, (E), M_{\operatorname{Spf} \mathfrak{S}_K}) & \xrightarrow{\phi} & (S_K, (p), M_{\operatorname{Spf} S_K}) \\ \downarrow{\scriptstyle u \mapsto [\pi^\flat]^p} & & \downarrow{\scriptstyle u \mapsto [\pi^\flat]} \\ (A_{\mathrm{inf}}, \operatorname{Ker}(\theta \circ \phi^{-1}), M_{\operatorname{Spf} A_{\mathrm{inf}}}) & \longrightarrow & (A_{\mathrm{cris}}, (p), M_{\operatorname{Spf} A_{\mathrm{cris}}}). \end{array} \tag{6.1}$$

引理 6.2。考虑图（6.1）中底层环之间的映射 .

（*1*）映射 $\mathfrak{S}_K \to A_{\mathrm{inf}}$ 是经典忠实平坦的。（*2*）映射 $S_K \to A_{\mathrm{cris}}$ 是 p-完全忠实平坦的。（*3*）映射 ϕ: $\mathfrak{S}_K \to S_K$ 和 $A_{\mathrm{inf}} \to A_{\mathrm{cris}}$ 具有有限的 p-完备 *Tor* 振幅。

证明. 注意 ϕ: $\mathfrak{S}_K \to \mathfrak{S}_K$ 是经典忠实平坦的。因此只需考虑映射 $\mathfrak{S}_K \to A_{\mathrm{inf}}$、 $u \mapsto [\pi^\flat]$ 与 $\mathfrak{S}_K \to S_K$、 $u \mapsto u$。陈述(2)即[CL19, Lem. 5.18(4)]。事实上，在同上的证明中，已证明映射$\mathfrak{S}_K/(p) \to A_{\mathrm{inf}}/(p)$是经典忠实平坦的，且$A_{\mathrm{inf}} \otimes_{\mathfrak{S}_K} S_K/(p^n) \cong A_{\mathrm{cris}}/(p^n)$对

[3]我们在严格棱柱站点上工作，因此我们使用与$\mathbf{N} \to A_{\mathrm{inf}}$ 相关联的对数结构，而不是$\mathcal{O}_C^\flat \smallsetminus \{0\} \to A_{\mathrm{inf}}$。注意， $M_{\operatorname{Spf} A_{\mathrm{inf}}}$与 π 或 $\pi^\flat$的选择无关。

每个 $n \geq 1$成立。由于 $\mathfrak{S}_K$ 是诺特的，这蕴含(1)。陈述(3)由这些以及 [CL19, pp. 1225, fn. 3]得出。□

我们以 Čech–Alexander 方法结束本小节。固定 $(A, I, M_{\mathrm{Spf}\,A}) \in$(形式谱 $\mathcal{O}_K$, $M_{\mathrm{can}})^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$。为简化记号，令 $A := A/I$，并将对数棱柱位点 $(X_{A/I}, M_{X_{A/I}})/(A, M_{\mathrm{Spf}\,A})$)$\mathbb{\Delta}$ 记作 $((X_A, M_{X_A})/A)\mathbb{\Delta}$。我们还假设存在一个对象 $(B, IB, M_{\mathrm{Spf}\,B}) \in (X_A/A)^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$，它覆盖相关拓扑斯的终对象，并且对每个 $n \geq 0$，第 $(n+1)$ 个自余积都存在，记作 $(B^{[n]}, IB^{[n]}, M_{\mathrm{Spf}\,B^{[n]}})$，或简记为 $B^{[n]}$。这便得到一个带增广的单纯环化拓扑斯

$$a\colon (\mathrm{Sh}(((X_{\overline{A}}, M_{X_{\overline{A}}})/A)_{\mathbb{\Delta}}/B^{[\bullet]}), \mathcal{O}^{\bullet}_{\mathbb{\Delta}}) \to (\mathrm{Sh}((X_{\overline{A}}, M_{X_{\overline{A}}})/A)_{\mathbb{\Delta}}, \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}),$$

其中，我们用 $\mathcal{O}^{\bullet}_{\mathbb{\Delta}}$ 表示单纯拓扑斯上的环层 $a^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$；参见 [Sta21, 03CI,0GMA, 0D9Y]。令

$$g_n\colon (\mathrm{Sh}(((X_{\overline{A}}, M_{X_{\overline{A}}})/A)_{\mathbb{\Delta}}/B^{[n]}), \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}) \to (\mathrm{Sh}(((X_{\overline{A}}, M_{X_{\overline{A}}})/A)_{\mathbb{\Delta}}/B^{[\bullet]}), \mathcal{O}^{\bullet}_{\mathbb{\Delta}})$$

表示相应的环化拓扑斯态射；注意，g_n^* 存在左伴随，因此是正合的。

结合点拓扑斯 Sh(pt) 和相应的常值单纯拓扑斯 Sh(pt $\times \Delta$)，我们得到环化拓扑斯态射的交换图

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Sh}(((X_{\overline{A}}, M_{X_{\overline{A}}})/A)_{\mathbb{\Delta}}/B^{[\bullet]}), \mathcal{O}^{\bullet}_{\mathbb{\Delta}}) & \xrightarrow{b^{\bullet}} & (\mathrm{Sh}(\mathrm{pt} \times \Delta), A^{\bullet}) \\ \downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle a_A} \\ (\mathrm{Sh}((X_{\overline{A}}, M_{X_{\overline{A}}})/A)_{\mathbb{\Delta}}, \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}) & \xrightarrow{b} & (\mathrm{Sh}(\mathrm{pt}), A), \end{array}$$

其中 $b_*(\mathcal{F}) = \Gamma(((X_{\overline{A}}, M_{X_{\overline{A}}})/A)\mathbb{\Delta}, \mathcal{F})$，且 b^* 将一个 A-模 M 映射为相应的 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模的层 $M \otimes_A \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$。

引理 6.3. 沿用上述记号。

(1) 对于 $\mathcal{K} \in D(((X_A, M_{X_A})/A)\mathbb{\Delta}, \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$，伴随映射

$$\mathcal{K} \to Ra_*a^*\mathcal{K}$$

是 $D(((X_A, M_{X_A})/A)\mathbb{\Delta}, \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$中的同构。

(2) 设 $\mathcal{F}$是$((X_A, M_{X_A})/A)\mathbb{\Delta}$上的 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模层，使得对每个 $n \geq 0$和 $i > 0$都有 $H^i(B^{[n]}, \mathcal{F}) = 0$。则 $R\Gamma(((X_A, M_{X_A})/A)\mathbb{\Delta}, \mathcal{F})$由与余单纯$A$-模 $\mathcal{F}(B^{[\bullet]})$相伴的上链复形 $s(\mathcal{F}(B^{[\bullet]}))$给出（如 [*Sta21, 019H*]中所述）。当 $\mathcal{F}$ 是有限投射 $\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$-模，或是$(X, M_X)\mathbb{\Delta}$上完备棱柱晶体（的限制）时，即属此种情形。

证明。第 (1) 部分见 [Sta21, 0DA0]。(2) 的第一部分见 [BS22, 脚注 10]。为方便读者并供后文使用，我们在此给出一个略有不同的论证。由 (1)，我们有一个同构 $R\Gamma(((X_A, M_{X_A})/A)\mathbb{\Delta}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} Ra_{A,*}Rb^{\bullet}_*a^*\mathcal{F}$。$\simeq$由假设和 [Sta21, 0DH1] 可知，映射 $b^{\bullet}_*a^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} Rb^{\bullet}_*a^*\mathcal{F}$是一个同构。注意，根据 [Sta21, 09WF]（环化拓扑斯版本），$b^{\bullet}_*a^*\mathcal{F} \in \mathrm{Mod}(A^{\bullet})$ 由余单纯形 A-模 $\mathcal{F}(B^{[\bullet]})$ 给出。因此，剩下的

是证明，对于每个 $M^\bullet \in \mathrm{Mod}(A^\bullet)$，$Ra_{A,*}M^\bullet$都由相应的上链复形 $s(M^\bullet)$ 给出。如果 $M^\bullet$ 是 $\mathrm{pt} \times \Delta$ 上的内射 $A^\bullet$-模，那么此断言是 [Sta21, 0D7D] 的一个特例；事实上，对于任意 $M^\bullet$，我们都有一个函子性的映射 $a_{A,*}M^\bullet \to s(M^\bullet)$，且当 $M^\bullet$ 是内射对象时，它是拟同构。为证明一般情形，取一个内射分解 $M^\bullet \to I^0$, $^\bullet \to I^1$,$^\bullet \to I^2$,$^\bullet \to \cdots$。那么 $Ra_{A,*}M^\bullet$ 由 $a_{A,*}I^0$,$^\bullet \to a_{A,*}I^1$,$^\bullet \to a_{A,*}I^2$,$^\bullet \to \cdots$ 给出。考虑双复形 $I^\star$,$^\bullet$，其中我们沿 $\bullet$ 方向取余单纯形 A-模所对应的上链复形，并令 $\mathrm{Tot}(I^\star,^\bullet)$ 表示相应的全复形。根据构造，我们有复形的 A-模之间的映射

$$s(M^\bullet) \to \mathrm{Tot}(I^{\star,\bullet}) \leftarrow [a_{A,*}I^{0,\bullet} \to a_{A,*}I^{1,\bullet} \to a_{A,*}I^{2,\bullet} \to \cdots].$$

由与双复形相关的 E_1-谱序列可知，这两个映射都是拟同构；对于第一个映射，使用如下事实：每个 $g_{A,n}^*$ (g_n^* for $(\mathrm{Sh}(\mathrm{pt} \times \Delta)\ A^\bullet)$) 都是正合的；对于第二个映射，则使用前面的讨论。(2) 的第二部分在前一种情形下由 [BS22，推论 3.12] 得到；在后一种情形下，基于忠实平坦下降、注 4.2(1)、推论 2.5 以及 [Sta21，0DD8]，类似的论证同样适用。□

我们还需要这个引理的一个 ∞-范畴类比。由于有环位点上的模范畴是一个 Grothendieck阿贝尔范畴，我们有如下相关导出 ∞-范畴的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}((((X_{\overline{A}}, M_{X_{\overline{A}}})/A)_{\mathbb{\Delta}}/B^{[\bullet]}), \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}^\bullet) & \xrightarrow{Rb_*^\bullet} & \mathcal{D}((\mathrm{pt} \times \Delta), A^\bullet) \\ \downarrow{\scriptstyle Ra_*} & & \downarrow{\scriptstyle Ra_{A,*}} \\ \mathcal{D}(((X_{\overline{A}}, M_{X_{\overline{A}}})/A)_{\mathbb{\Delta}}, \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}) & \xrightarrow{Rb_*} & \mathcal{D}(\mathrm{pt}, A), \end{array}$$

其中，在 $\mathcal{D}(\mathrm{pt}\ A) = \mathcal{D}(A)$ 的识别下，$Rb_* = R\Gamma(((X_A, M_{X_A})/A)_{\mathbb{\Delta}}, -)$。对于 $\mathcal{K} \in \mathcal{D}(((X_A,M_{X_A})/A)_{\mathbb{\Delta}},\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$, $-$伴随映射 $\mathcal{K} \to Ra_*a^*\mathcal{K}$ 根据引理 6.3(1) 是一个同构。我们还需要引理 6.3(2) 的一个变体。注意，集合 $(g_{A,n}^*)_{n\geq 0}$ 给出一个函子 $g_A^*\colon \mathcal{D}((\mathrm{pt} \times \Delta)\ A^\bullet) \to \mathrm{Fun}(N(\Delta)\ \mathcal{D}(A))$。根据 [Sta21，0DH0]，我们注意到 $g_{A,n}^* \circ Rb_*^\bullet = R\Gamma(B^{[n]}, -)$。由于 $\mathcal{D}(A)$ 是可表出的，我们通过取极限得到全化函子 $\mathrm{Tot} : \mathrm{Fun}(N(\Delta)\ \mathcal{D}(A)) \to \mathcal{D}(A)$。滥用记号，我们继续将复合函子 $\mathrm{Tot} \circ g_A^*$ 记作 Tot。

引理 6.4。对于 $M \in \mathcal{D}^+((\mathrm{pt} \times \Delta)\ A^\bullet)$，$Ra_{A,*}M$ 由 $\mathrm{Tot}\ M$ 给出。

证明。取 $\mathrm{Mod}(A^\bullet)$ 中表示 M 的内射对象的有下界复形 $I^\star$。如同引理 6.3(2) 的证明，$Ra_{A,*}M$ 由与双复形 $(g_{A,}^*{}^\bullet I^\star)$ 相关联的全复形给出，其中我们在 $\bullet$ 方向上取与余单纯 A-模相关联的上链复形。由 [Sta21, 019I] 可知，后者拟同构于与双复形 $(g_{A,}^*{}^\bullet I^\star)'$ 相关联的全复形，其中我们在 $\bullet$ 方向上取与余单纯 A-模相关联的正规化上链复形。因此，剩下只需证明 $\mathrm{Tot}\, g_A^*M$ 由全复形 $\mathrm{Tot}(g_{A,}^*{}^\bullet I^\star)'$ 给出；例如，这在 [Bun13, Prop. 4.23] 中当$A = \mathbf{Z}$ 时有所说明，且其中的证明对一般的 A 同样适用。□

注 6.5. 设 Λ 为有限集，并假设存在 $(X_A/A)^{\mathrm{op}}_{\blacktriangle}$ 的对象族$\{(B_\lambda, IB_\lambda, M_{\mathrm{Spf}\, B_\lambda})\}_{\lambda\in\Lambda}$，它们共同覆盖相应拓扑斯的终对象。我们还假设，对每个 $n\geq 0$ 以及 $\lambda_0,\dots,\lambda_n\in\Lambda$，$(B_{\lambda_0}, IB_{\lambda_0}, M_{\mathrm{Spf}\, B_{\lambda_0}})\dots,(B_{\lambda_0}, IB_{\lambda_0}, M_{\mathrm{Spf}\, B_{\lambda_0}})$ 的余积 $(B_{\lambda_0,\dots\lambda_n}, IB_{\lambda_0,\dots\lambda_n}, M_{\mathrm{Spf}\, B_{\lambda_0,\dots\lambda_n}})$ 在 $(X_A/A)^{\mathrm{op}}_{\blacktriangle}$ 中存在。令 $B:=\prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$。则所得的对数棱柱 $(B, IB, M_{\mathrm{Spf}\, B})$ 覆盖终对象。在此情形下，对任意层 $\mathcal{F}$，我们有 $B^{[n]}=\prod_{(\lambda_0,\dots,\lambda_n)\in\Lambda^{n+1}} B_{\lambda_0,\dots\lambda_n}$ 以及$\mathcal{F}(B^{[n]})=\prod_{(\lambda_0,\dots,\lambda_n)\in\Lambda^{n+1}}\mathcal{F}(B_{\lambda_0,\dots\lambda_n})$。

最后，我们以 BS22、DLMS 中的两个纯代数引理作结；在讨论基变换性质时，它们将是关键的代数输入。

引理 6.6。

(1) 设 $A\to B$ 是交换环的一个映射，其对于有限生成理想 $I\subset A$ 具有有限的 I-完备 *Tor* 振幅。对于任意 $c\in\mathbf{Z}$，I-完备基变换函子 $-\widehat{\otimes}^L_A B$ 与 $\mathcal{D}^{\geq c}$ 上的全化函子 Tot 交换。*(2)* 设 $A\to B$ 是 p-进完备环之间的一个映射，且具有 A p- 无挠性；设 M 是有限生成的 p- 进完备 A- 模。若 $M[p^{-1}]$ 是有限投射的 $A[p^{-1}]$-模，则映射

$$M[p^{-1}]\otimes_A B\to (M\widehat{\otimes}_A B)\otimes_B B[p^{-1}]$$

是一个同构。特别地，后者是 $B[p^{-1}]$ 上的有限投射模。

证明。对于 $c=0$，(1) 是 [BS22，引理 4.22]，，这也推出一般情形，因为所涉及的函子与平移可交换。(2) 是 [DLMS26，引理 B.17]。□

6.2. **Breuil–Kisin 对数棱柱**。我们先回顾 Breuil–Kisin 对数棱柱的概念，这在局部工作时会很有用。

小仿射情形。

定义 6.7。对于 $d\geq m\geq 1$，令

$$R^0=\mathcal{O}_K\langle T_1,\dots,T_m,T_{m+1}^{\pm 1},\dots,T_d^{\pm 1}\rangle/(T_1\cdots T_m-\pi),$$

并考虑预对数结构 $\mathbf{N}^d\to R^0$，它将 $e_i\mapsto T_i$ 映到 $1\leq i\leq d$。令 R 为一个连通的 $\mathcal{O}_K$-代数，并配备一个 p-进完备的 étale 映射

$$\square\colon R^0\to R.$$

如果一个 p-进对数形式概形 (X, M_X) 是形如 $(X, M_X)=$(形式谱 $R, \mathbf{N}^d\to R^0\xrightarrow{\square} R$)^a 的仿射对数形式概形，我们就称其为带框架 的小仿射。

例6.8（小仿射情形下的 Breuil–Kisin 对数棱柱与 Breuil 对数棱柱）。假设 $(X, M_X)=$(形式谱 $R, \mathbf{N}^d\to R^0\xrightarrow{\square} R$)^a 如定义 6.7 中所述为小仿射。我们经常考虑如下给出的*Breuil–Kisin* 对数棱柱 $(\mathfrak{S}, (E(u))\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}})\in(X, M_X)_{\blacktriangle}$（关于 π 和 $\square$）。

令 $\mathfrak{S}_{R^0}:=W(k)\langle T_1,\dots,T_m,T_{m+1}^{\pm 1},\dots,T_d^{\pm 1}\rangle[\![u]\!]/(T_1\cdots T_m-u)$。注意，$\mathfrak{S}_{R^0}$是 (p, E)-进完备的，且 $\mathfrak{S}_{R^0}/(E)\cong R^0$。我们赋予 $\mathfrak{S}_{R^0}$ 预对数结构

$\mathbf{N}^d \to \mathfrak{S}_{R^0}, e_i \mapsto T_i\ (1 \le i \le d)$，其提升了 R^0上的结构。由于 $\square$是 p-进完备的 étale 映射，它唯一地提升为一个 (p, E)-进完备的 étale 映射

$$\square_{\mathfrak{S}} \colon \mathfrak{S}_{R^0} \to \mathfrak{S}_{\square}.$$

我们常将 $\mathfrak{S}$ 记作 $\mathfrak{S}_{\square}$。令 $\delta_{\log}(e_i) = 0$和 $\delta(T_j) = 0$，则 $(\mathfrak{S}_{R^0}, \delta, (E), \mathbf{N}^d, \delta_{\log})$ 是一个有界预对数棱柱；为简便起见，我们也将其记作 $(\mathfrak{S}_{R^0}, (E), \mathbf{N}^d)$。根据 [Kos22，命题 2.13], $(\mathfrak{S}, (E), \mathbf{N}^d \to \mathfrak{S}_{R^0} \to \mathfrak{S})$ 具有有界预对数棱柱结构。Breuil–Kisin 对数棱柱 $(\mathfrak{S}, (E)\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}})$ 是与 $(\mathfrak{S}, (E), \mathbf{N}^d)$ 关联的对数棱柱；后者是 $((\text{形式谱 } R, \mathbf{N}^d)^a)_{\mathbb{\Delta}}$ 经由 $R \cong \mathfrak{S}/(E)$ 得到的一个对象。

为了在小仿射情形下建立对数棱柱位点与对数晶体站之间的联系，我们还将考虑 Breuil 对数棱柱 $(S, (p)\ M_{\mathrm{Spf}\,S})$：令 $S_{\square}$为 p-进完备化，即相对于满射$\mathfrak{S}_{\square} \to R/p$的核，对 $\mathfrak{S}_{\square}$ 取对数 PD 包络后所得的完备化。根据 [BS22，推论 2.39], ，我们有 $S_{\square} \simeq \mathfrak{S}_{\square}\{\phi(E)/p\}^{\wedge}_{\delta}$，其中 $\{-\}_{\delta}$ 表示将元素作为 δ-环添入。若无歧义，我们将 S 记作 $S_{\square}$。 $\mathfrak{S}$ 上的预对数结构的拉回定义了 S上的预对数结构 $\phi^*\mathbf{N}^d$ ，并且有 $(S, (p)\ M_{\mathrm{Spf}\,S}) := (S, (p)\ \phi^*\mathbf{N}^d)^a \in (X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$。根据构造，我们有一个良定义的映射 $\phi\colon (\mathfrak{S}, (E)\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}}) \to (S, (p)\ M_{\mathrm{Spf}\,S})$，它是 $(X, M_X)^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$ 中对数棱柱之间的映射。

关于 Breuil–Kisin 对数棱柱和 Breuil 对数棱柱的更多细节，请参阅[DLMS26, 第 2.2 节，3.5]。例如，以下性质成立。

引理 *6.9*（[*DLMS26*，引理 *2.9*]）。保留小仿射假设，并令（$A, I, M_{\mathrm{Spf}\,A}$）为反范畴（$X, M_X$）$^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$中的任意对数棱柱。则（$A, I, M_{\mathrm{Spf}\,A}$）$\amalg$（$\mathfrak{S}$,（$E$（$u$））$M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}}$）是（$A, I, M_{\mathrm{Spf}\,A}$）与（$\mathfrak{S}$,（$E$（$u$））$M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}}$）在（$X, M_X$）$^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$中的余积，且结构映射

$$(A, I, M_{\mathrm{Spf}\,A}) \to (A, I, M_{\mathrm{Spf}\,A}) \amalg (\mathfrak{S}, (E(u)), M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}})$$

是一个覆盖。特别地，$(\mathfrak{S}, (E(u))\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}})$ 覆盖$\mathrm{Sh}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}})$的终对象。

对于小仿射 $X = \mathrm{Spf}\ R$的两个框架 $\square, \square'$，记 $(\mathfrak{S}_{\square,\square'}, (E)\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_{\square,\square'}})$ 为 $(\mathfrak{S}_{\square}, (E)\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_{\square}})$ 与 $(\mathfrak{S}_{\square'}, (E)\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_{\square'}})$ 在 $(X, M_X)^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$中的余积。框架 $\square$固定时，我们将 $(\mathfrak{S}^{[n]}_{\square}, (E)\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}^{[n]}_{\square}})$或简写为 $(\mathfrak{S}^{[n]}, (E)\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}^{[n]}})$，表示 $(\mathfrak{S}_{\square}, (E)\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_{\square}})$ 的第 $(n+1)$ 次自余积。[4] 对于 $n \ge 1$和 $0 \le i \le n$，记 $p^n_i\colon \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}^{[n]}$ 为第 i 个投影（余面）映射。

引理 6.10 ([DLMS26, 推论 2.12])。每个余面映射 $p^n_i\colon \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}^{[n]}$ 都是经典忠实平坦的。

引理 *6.11.* 假设 $(X, M_X) = (\text{形式谱 } R, \mathbf{N}^d)^a$ 是小仿射。那么，任意晶体对数棱柱 $(A, (p)\ M_{\mathrm{Spf}\,A})$ 与 *Breuil* 对数棱柱 $(S, (p)\ M_{\mathrm{Spf}\,S})$ 在 $(X, M_X)^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$中的余积 $(A,(p)\ M_{\mathrm{Spf}\,A}) \amalg (S, (p)\ M_{\mathrm{Spf}\,S})$ 存在，且结构映射

$$(A, (p), M_{\mathrm{Spf}\,A}) \to (A, (p), M_{\mathrm{Spf}\,A}) \amalg (S, (p), M_{\mathrm{Spf}\,S})$$

是一个覆盖。

[4]在 [DLMS26], 中，对象 $\mathfrak{S}^{[n]}$ 记作 $\mathfrak{S}^{(n)}$，而其中的记号 $\mathfrak{S}^{[n]}$ 表示另一个对象（参见 [DLMS26, 例 2.15]）。

证明。由引理 6.9，我们得到 $(A,(p)\ M_{\mathrm{Spf}\,A}))\amalg(\mathfrak{S},(E)\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}})$ 是 $(A,(p)\ M_{\mathrm{Spf}\,A}))$ 和 $(\mathfrak{S},(E)\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}})$ 在 $(X,M_X)^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$ 中的余积，以及映射

$$(A,(p),M_{\mathrm{Spf}\,A}))\to(A,(p),M_{\mathrm{Spf}\,A}))\amalg(\mathfrak{S},(E),M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}})$$

是一个覆盖。考虑 Breuil–Kisin 对数棱柱的 Frobenius 扭曲 $(\mathfrak{S},(\phi(E))\ \phi^*\mathbf{N}^d)^a\in(X,M_X)^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$，如 [DLMS26，例 2.15] 所述。映射 $\phi\colon(\mathfrak{S},(E),\mathbf{N}^d)^a\to(\mathfrak{S},(\phi(E))\ \phi^*\mathbf{N}^d)^a$ 依 [DLMS26，引理 2.7] 是一个覆盖。设 $(B,(p)\ M_{\mathrm{Spf}\,B})\in(X,M_X)^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$ 为 $\phi\colon(\mathfrak{S},(E),\mathbf{N}^d)^a\to(\mathfrak{S},(\phi(E))\ \phi^*\mathbf{N}^d)^a$ 沿由 [DLMS26，注 2.4] 给出的结构映射 $(\mathfrak{S},(E)\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}})\to(A,(p)\ M_{\mathrm{Spf}\,A})\amalg(\mathfrak{S},(E)\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}})$ 的推出。由构造，$(B,(p)\ M_{\mathrm{Spf}\,B})$ 是 $(A,(p)\ M_{\mathrm{Spf}\,A})$ 与 $(\mathfrak{S},(\phi(E))\ \phi^*\mathbf{N}^d)^a$ 在 $(X,M_X)^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$ 中的余积，且映射 $(A,(p)\ M_{\mathrm{Spf}\,A})\to(B,(p)\ M_{\mathrm{Spf}\,B})$ 是一个覆盖。

由于 $(B,(p)\ M_{\mathrm{Spf}\,B})$ 存在一个来自 $(\mathfrak{S},(\phi(E))\ \phi^*\mathbf{N}^d)^a$ 的映射，我们有 $\phi(E)/p\in B$。根据 [BS22, Cor. 2.39],，映射 $(\mathfrak{S},(\phi(E))\ \phi^*\mathbf{N}^d)^a\to(B,(p)\ M_{\mathrm{Spf}\,B})$ 可分解为

$$(\mathfrak{S},(\phi(E)),\phi^*\mathbf{N}^d)^a\to(S,(p),\phi^*\mathbf{N}^d)^a\to(B,(p),M_{\mathrm{Spf}\,B}).$$

因此，对数棱柱 $(B,(p)\ M_{\mathrm{Spf}\,B})=(A,(p)\ M_{\mathrm{Spf}\,A}))\amalg(\mathfrak{S},(\phi(E))\ \phi^*\mathbf{N}^d)^a$ 给出了余积 $(A,(p)\ M_{\mathrm{Spf}\,A}))\amalg(S,(p)\ M_{\mathrm{Spf}\,S})$。□

现在，将 $(\mathfrak{S}_K,(E)\ M_{\mathrm{Spf}\,S_K})$（分别地，$(S_K,(p)\ M_{\mathrm{Spf}\,S_K}$）记为 $(\mathrm{Spf}\ \mathcal{O}_K,\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}_K})_{\mathbb{\Delta}}$ 中的 Breuil–Kisin（分别地，Breuil）对数棱柱。考虑由 $\phi\colon\mathfrak{S}_K\to S_K$ 诱导的映射 $\mathfrak{S}_K/(E)=\mathcal{O}_K\to S_K/(p)$，并令 $X^{(1)}:=X\times_{\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}_K}\mathrm{Spf}\ S_K/(p)$ 为相应的基变换，其带有诱导对数结构 $M_{X^{(1)}}$。当 $X=\mathrm{Spf}\,R$ 是小仿射时，[MW22] 中证明了以下相对版本。

引理 *6.12*（参见 [*MW22, § 3.2.*1]）。设 $X=\mathrm{Spf}\,R$ 是带有框架 $\square$ 的小仿射。*Breuil–Kisin* 对数棱柱 $(\mathfrak{S}_\square,(E)\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_\square})$ 在 $(X,M_X)^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$ 中覆盖 $\mathrm{Sh}(((X,M_X)/(\mathfrak{S}_K,M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_K}))_{\mathbb{\Delta}})$ 的终对象。此外，对每个 $n\geq 0$，$(\mathfrak{S}_\square,(E)\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_\square})$ 在 $((X,M_X)/(\mathfrak{S}_K,M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_K}))^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$ 中的第 $(n+1)$ 个自余积存在（记作 $(\mathfrak{S}^{\mathrm{rel}}{}_{,\square}{}^{[n]},(E)M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}^{\mathrm{rel}}{}_{,\square}{}^{[n]}})$）。任意余面映射 $\mathfrak{S}_\square\to\mathfrak{S}^{\mathrm{rel}}{}_{,\square}{}^{[n]}$ 都是经典忠实平坦的。

注意，映射 $\mathfrak{S}_K\to\mathfrak{S}_\square$ 是经典忠实平坦的，因此对于任意 n，结构映射 $\mathfrak{S}_K\to\mathfrak{S}^{\mathrm{rel}}{}_{,\square}{}^{[n]}$ 也是经典忠实平坦的。因此，$\mathfrak{S}^{\mathrm{rel}}{}_{,\square}{}^{[n]}\otimes^L_{\mathfrak{S}_K,\phi}S_K$ 的导出 p-完备化是离散的，并且与 $\mathfrak{S}^{\mathrm{rel}}{}_{,\square}{}^{[n]}\otimes_{\mathfrak{S}_K,\phi}S_K$ 的经典 p-完备化 $\mathfrak{S}^{\mathrm{rel}}{}_{,\square}{}^{[n]}\widehat{\otimes}_{\mathfrak{S}_K,\phi}S_K$ 一致。此外，由于映射 $\phi\colon(\mathfrak{S}_K,(E)\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_K})\to(S_K,(p)\ M_{\mathrm{Spf}\,S_K})$ 在（形式谱 $\mathcal{O}_K,M_{\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}_K})^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$ 中是严格的，带有诱导对数结构和 $\delta_{\log}$ 结构的 $S^{\mathrm{rel}}{}_{,\square}{}^{[n]}:=\mathfrak{S}^{\mathrm{rel}}{}_{,\square}{}^{[n]}\widehat{\otimes}_{\mathfrak{S}_K,\phi}S_K$ 给出 $((X^{(1)},M_{X^{(1)}})/(S_K,M_{\mathrm{Spf}\,S_K}))^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$ 的一个对象 $(S^{\mathrm{rel}}{}_{,\square}{}^{[n]},(p)M_{\mathrm{Spf}\,S^{\mathrm{rel}}{}_{,\square}{}^{[n]}})$。

引理 *6.13.* 设 $X=$形式谱 R 是带有框架 $\square$ 的小仿射。则 $(S^{\mathrm{rel}}{}_{,\square}{}^{[0]},(p)M_{\mathrm{Spf}\,S^{\mathrm{rel}}{}_{,\square}{}^{[0]}})$ 覆盖 $\mathrm{Sh}(((X^{(1)},M_{X^{(1)}})/(S_K,M_{\mathrm{Spf}\,S_K}))_{\mathbb{\Delta}})$ 的终对象，其 $(n+1)$-重自余积由 $(S^{\mathrm{rel}}{}_{,\square}{}^{[n]},(p)M_{\mathrm{Spf}\,S^{\mathrm{rel}}{}_{,\square}{}^{[n]}})$ 给出。

证明。由引理 6.12 和 S^{rel} 的构造可得 $\square^{[n]}$。□

分离情形。 在全局情形下，当 X 为分离的时，以下通过一族 Breuil–Kisin 对数棱柱构造 Čech 神经的方法将很有用。

构造 6.14（分离半稳定情形的 Čech 神经）。设 (X, M_X) 是 Spf $\mathcal{O}_K$ 上的分离半稳定 p-进形式概形。取一个 p-完全 étale 覆盖 $\{g_\lambda\colon X_\lambda \to X\}_{\lambda\in\Lambda}$，使得每个 X_λ 都是带有框架$\square_\lambda$的小仿射。对于每个 λ，令 $(\mathfrak{S}_{\square_\lambda}, (E)\ M) \in (X_\lambda, M_{X_\lambda})_{\mathbb{\Delta}}$ 为 Breuil–Kisin 对数棱柱。[5]由于 X 是分离的，对于每个 $\lambda, \lambda' \in \Lambda$，$X_{\lambda\lambda'} \coloneqq X_\lambda \times_X X_{\lambda'}$ 都是小仿射。由于$X_{\lambda\lambda'} \to X_\lambda$ 是 p-完全 étale 的，它唯一地提升为 (p, E)-完全 étale 映射 $(\mathfrak{S}_{\square_\lambda}, (E)\ M) \to (\mathfrak{S}_{\lambda\lambda',\square_\lambda}, (E)\ M)$，其中该映射位于 $(X_\lambda, M_{X_\lambda})^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$ 中，依据 [Kos22，引理 2.13，推论 2.15],其中 $(\mathfrak{S}_{\lambda\lambda',\square_\lambda}, (E)\ M)$ 是 $(X_{\lambda\lambda'}, M_{X_{\lambda\lambda'}})_{\mathbb{\Delta}}$ 中相对于框架 $\square_\lambda$ 的 Breuil–Kisin 对数棱柱。类似地，p-完全 étale 映射 $X_{\lambda\lambda'} \to X_{\lambda'}$ 唯一地提升为 (p, E)-完全 étale 映射 $(\mathfrak{S}_{\square_\lambda}, (E)\ M) \to (\mathfrak{S}_{\lambda\lambda',\square_{\lambda'}}, (E)\ M)$，其中 $(\mathfrak{S}_{\lambda\lambda',\square_{\lambda'}}, (E)\ M)$ 是 $(X_{\lambda\lambda'}, M_{X_{\lambda\lambda'}})_{\mathbb{\Delta}}$ 中对应框架$\square_{\lambda'}$的 Breuil–Kisin 对数棱柱。由引理 6.9，存在 $(\mathfrak{S}_{\lambda\lambda',\square_\lambda,\square_{\lambda'}}, (E)\ M)$，它是 $(\mathfrak{S}_{\lambda\lambda',\square_\lambda}, (E)\ M)$ 和 $(\mathfrak{S}_{\lambda\lambda',\square_{\lambda'}}, (E)\ M)$ 在 $(X_{\lambda\lambda'}, M_{X_{\lambda\lambda'}})^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$ 中的余积。注意，$(\mathfrak{S}_{\lambda\lambda',\square_\lambda,\square_{\lambda'}}, (E)\ M)$ 也是 $(\mathfrak{S}_{\square_\lambda}, (E)\ M)$ 和 $(\mathfrak{S}_{\square_{\lambda'}}, (E)\ M)$ 在 $(X, M_X)^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$ 中的余积，并记

$$(\mathfrak{S}_{\square_\lambda,\square_{\lambda'}}, (E), M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_{\square_\lambda,\square_{\lambda'}}}) \coloneqq (\mathfrak{S}_{\lambda\lambda',\square_\lambda,\square_{\lambda'}}, (E), M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_{\lambda\lambda',\square_\lambda,\square_{\lambda'}}}).$$

重复这一论证，我们推得，对于任意 $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$，$(\mathfrak{S}_{\square_{\lambda_0}}, (E)\ M) \ldots, (\mathfrak{S}_{\square_{\lambda_n}}, (E)\ M)$ 在 $(X, M_X)^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$ 中的余积 $(\mathfrak{S}_{\square_{\lambda_0},\ldots,\square_{\lambda_n}}, (E)\ M)$ 存在。

由引理 6.9 和 [Kos22，引理 2.13，推论 2.15],，族 $(\mathfrak{S}_{\square_\lambda}, (E)\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_{\square_\lambda}})_{\lambda\in\Lambda}$ 联合覆盖 $\mathrm{Sh}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}})$ 的终对象，因此我们得到覆盖 $\coprod_{\lambda\in\Lambda}(\mathrm{Spf}\ \mathfrak{S}_{\square_\lambda}, (E)\ M) \twoheadrightarrow *$ 的 Čech 神经；第 n 个位置为 $\coprod_{(\lambda_0,\ldots,\lambda_n)\in\Lambda^{n+1}}(\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_{\square_{\lambda_0},\ldots,\square_{\lambda_n}}, (E)\ M)$。我们将 Čech 神经简记为 $\mathrm{Spf}(\mathfrak{S}^{[\bullet]}_\Lambda)$。由 (p, E)-完备忠实平坦下降，我们得到一个自然等价

$$\mathcal{D}_{\mathrm{perf}}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}) \cong \lim_{[n]\in\Delta} \mathcal{D}_{\mathrm{perf}}(\mathfrak{S}^{[n]}_\Lambda).$$

此外，我们还有一个自然等价

$$\mathcal{D}^{\phi}_{\mathrm{perf}}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}) \cong \lim_{[n]\in\Delta} \mathcal{D}^{\phi}_{\mathrm{perf}}(\mathfrak{S}^{[n]}_\Lambda).$$

为此，由Zariski下降，我们可以归结到 X 拟紧的情形，从而上述集合 Λ 可以取为有限集。于是，通过考虑一个诱导该同源的有效态射，该等价可由Frobenius结构的(p, E)-完备忠实平坦下降得出，见 [Mat22，定理7.8],。

对于相对位点 $((X, M_X)/(\mathfrak{S}_K, M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_K}))_{\mathbb{\Delta}}$，我们也有一个类似的 Čech 神经构造，它推广了引理 6.12。注意，族 $(\mathfrak{S}_{\square_\lambda}, (E)\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_{\square_\lambda}})_{\lambda\in\Lambda}$共同覆盖 $\mathrm{Sh}(((X, M_X)/(\mathfrak{S}_K, M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_K}))_{\mathbb{\Delta}})$ 的终对象。对于每个 $n \geq 0$，令 $(\mathfrak{S}^{[n]}_K, (E)\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}^{[n]}_K})$ 为 $(\mathrm{Spf}\ \mathcal{O}_K, M_{\mathrm{can}})_{\mathbb{\Delta}}$ 中 $(\mathfrak{S}_K, (E)\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_K})$ 的第 $(n+1)$ 个自余积。令 $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$。由于结构映射 $\mathfrak{S}^{[n]}_K \to \mathfrak{S}_{\square_{\lambda_0},\ldots,\square_{\lambda_n}}$ 是 (p, E)-完全忠实平坦的，该映射沿对角映射的推出

[5]这里我们常常用 M 表示对数棱柱的对数结构（例如 $M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_{\square_\lambda}}$），以简化记号。

$\mathfrak{S}_K^{[n]} \to \mathfrak{S}_K$ 在有界棱柱的范畴中，由 DLMS24, 引理 3.3] 给出的 $\mathfrak{S}_{\square_{\lambda_0},\dots,\square_{\lambda_n}} \otimes_{\mathfrak{S}_K^{[n]}} \mathfrak{S}_K$ 的经典 (p,E)-完备化构成，并配备诱导的对数结构和 $\delta_{\log}$-结构。这给出了 $(\mathfrak{S}_{\square_{\lambda_i}}, (E)\ M_{\operatorname{Spf}\mathfrak{S}_{\square_{\lambda_i}}})$'s 与 $0 \le i \le n$ 在 $((X,M_X)/(\mathfrak{S}_K, M_{\operatorname{Spf}\mathfrak{S}_K}))^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$ 中的余积。将相应的 Čech 神经记为 $\operatorname{Spf}(\mathfrak{S}^{\mathrm{rel}}_{,\Lambda}{}^{[\bullet]}\ )$。

最后，对每个 λ，令 $(S_{\square_\lambda},\ (p)\ M_{\operatorname{Spf} S_{\square_\lambda}}) \in (X_\lambda,\ M_{X_\lambda})\mathbb{\Delta}$ 为 Breuil 对数棱柱。根据引理 6.11 和 [Kos22，引理 2.13，推论 2.15],，族 $(S_{\square_\lambda},\ (p)\ M)_{\lambda\in\Lambda}$ 共同覆盖 $\operatorname{Sh}((X,\ M_X)/(S_K,\ M_{\operatorname{Spf} S_K}))\mathbb{\Delta}$ 的终对象。类似于上述构造，可得到相应的 Čech 神经，记作 $\operatorname{Spf}(S^{\mathrm{rel}}_{,\Lambda}{}^{[\bullet]})$。

6.3. **解析棱柱 F-晶体与完美复形**。在本小节中，固定一个定义在 $\operatorname{Spf}\mathcal{O}_K$ 上的半稳定 p-进形式概形。注意，限制到解析位点会给出一个函子

$$j^*\colon \mathrm{CR}^{\wedge,\mathrm{an}(,\phi)}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}},\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}) \to \mathrm{Vect}^{\mathrm{an}(,\phi)}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}}).$$

命题 6.15 （参见 [Tia25，命题 6.8]）。函子 j^* 有一个右伴随

$$j_*\colon \mathrm{Vect}^{\mathrm{an}(,\phi)}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}}) \to \mathrm{CR}^{\wedge,\mathrm{an}(,\phi)}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}},\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$$

使得余单位映射 $j^*j_* \to \mathrm{id}$是一个等价。特别地，j_* 是全忠实的。此外，这样的 j_* 在典范同构意义下唯一。

证明。 j_* 的唯一性由伴随性质得出。首先假设X 是分离的。由构造 6.14，我们有一族 Breuil–Kisin 对数棱柱，它们共同覆盖与 $(X,M_X)\mathbb{\Delta}$关联的拓扑斯的终对象，并有相应的 Čech 神经。注意，任何 Breuil–Kisin 对数棱柱的底层环都是正则诺特的。此外，根据引理 6.9 和 [Sta21，标签 0912]，Čech 神经中每个来自 Breuil–Kisin 对数棱柱的余面映射都是经典平坦的。因此，我们可以应用命题 4.6(1)，在分离情形下得到 j_* 。由唯一性还可得出， j_* 与 étale 拉回相容。

在一般情形下，我们有一个由 $\mathcal{O}_K$ 上的分离半稳定 p-adic 形式概形构成的 X Zariski 覆盖。因此，我们通过注意到源范畴和目标范畴都满足 Zariski下降来证明一般情形。□

命题 6.16。 我们有一个典范全忠实函子

$$\iota\colon \mathrm{CR}^{\wedge,\mathrm{an}(,\phi)}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}},\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}) \to \mathcal{D}^{(\phi)}_{\mathrm{perf}}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}})$$

以及一个态射 $\iota(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}$，其位于 $\mathcal{D}$（$(X、M_X)\mathbb{\Delta}$、$\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}$）中，并且关于 $\mathcal{F}$ 具有函子性（且与 ϕ 兼容）。

证明。首先假设 X 是小仿射。对于每个框架 $\square$，命题 4.6(2)给出一个全忠实函子 $\iota_{\mathfrak{S}_\square}\colon \mathrm{CR}^{\wedge,\mathrm{an}(,\phi)}((X,M_X)\mathbb{\Delta},\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}) \to \mathcal{D}^{(\phi)}\mathrm{perf}\,((X,M_X)\mathbb{\Delta})$，以及一个自然变换，它为每个 $\mathcal{F}$指定 $\iota_{\mathfrak{S}_\square}(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}$。我们声称这与选择无关。为此，取另一个框架 $\square'$。由于 $(\operatorname{Spf}\mathfrak{S}_{\square,\square'}, (E)\, M_{\operatorname{Spf}\mathfrak{S}_{\square,\square'}})$ 覆盖 $\operatorname{Sh}((X,M_X)\mathbb{\Delta})$ 的终对象，只需证明 $\iota_{\mathfrak{S}_\square}$ 和 $\iota_{\mathfrak{S}_{\square'}}$ 在每个自乘积 $\operatorname{Spf}\mathfrak{S}_\square^{[\bullet]},\square'$ 上都能被典范地识别

且与它们之间的投影相容。由于所有映射 $\mathfrak{S}_{\square} \to \mathfrak{S}_{\square}^{[\bullet]}$，$\square'$ 和 $\mathfrak{S}_{\square'} \to \mathfrak{S}_{\square}^{[\bullet]}$，$\square'$ 根据 [Sta 21, 0912], 都是经典平坦的，因此这些典范识别由命题 4.6(2) 的性质 (a) 和 (b) 得出。

接下来，假设 X 是分离的。取一个 p-完全 étale 覆盖 $\{X_\lambda \to X\}_{\lambda\in\Lambda}$，使得每个 X_λ 都是带有框架 $\square_\lambda$ 的小仿射概形。由构造 6.14，我们得到一族 Breuil–Kisin 对数棱柱 $(\mathfrak{S}_{\square_\lambda}, (E)\ M_{\operatorname{Spf}\mathfrak{S}_{\square_\lambda}})_{\lambda\in\Lambda}$，它们共同覆盖 $\mathrm{Sh}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}})$ 的终对象，其诱导的 Čech 神经为形式谱 $\mathfrak{S}_\Lambda^{[\bullet]}$。利用 $\mathfrak{S}_\Lambda^{[\bullet]}$ 并如上论证，我们得到一个全忠实函子 $\iota_{\mathfrak{S}_\Lambda}\colon \mathrm{CR}^{\wedge,\mathrm{an}(,\phi)}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}, \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}) \to \mathcal{D}^{(\phi)}\text{perf}\,((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}})$，以及一个自然变换 $\iota_{\mathfrak{S}_\Lambda}(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}$，其构造与细化 $\Lambda \subset \Lambda'$ 和 étale 局部化相容。在一般情形下，我们有一个 Zariski 覆盖，将 X 覆盖为分离的半稳定 p-进形式概形（定义在 $\mathcal{O}_K$ 上）。由于分离情形中的构造与覆盖和框架的选择无关，且与 étale 拉回相容，因此通过 Zariski 下降，我们得到一个全忠实函子

$$\iota\colon \mathrm{CR}^{\wedge,\mathrm{an}(,\phi)}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}, \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}) \to \mathcal{D}^{(\phi)}_{\mathrm{perf}}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}).$$

带有一个态射 $\iota(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}$ 属于 $\mathcal{D}((X,\ M_X)_{\mathbb{\Delta}},\ \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$，它关于 $\mathcal{F}$ 是函子性的（并且与 ϕ 兼容）。□

定义 6.17。定义函子 i: 向量丛$^{\mathrm{an}(,\phi)}((X,\ M_X)_{\mathbb{\Delta}}) \to \mathcal{D}^{(\phi)}{}_{\text{完美}}((X,\ M_X)_{\mathbb{\Delta}})$，其定义为$i := \iota \circ j_*$。注意，由命题 6.15 和 6.16 可知，$i$ 是全忠实的。

6.4. Breuil–Kisin 上同调与 Breuil 上同调。为了应用于 C_{st}-猜想，我们考虑以下特殊情形，其中系数来自解析棱柱 F-晶体。令 $\mathcal{E} \in$向量丛$^{\mathrm{an},\phi}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}})$ 为 $(X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$ 上的解析棱柱 F-晶体。记 $j_*\mathcal{E} \in \mathrm{CR}^{\wedge,\mathrm{an},\phi}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}, \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$ 和 $i(\mathcal{E}) \in \mathcal{D}^{\phi}$完美$((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}})$ 分别为由命题 6.15 和定义 6.17 给出的相应完备棱柱 F- 晶体以及完美复形中的棱柱F-晶体。根据构造，我们有一个态射 $i(\mathcal{E}) \to j_*\mathcal{E}$。

定义 6.18. 对于例 6.1 中的对数棱柱，我们定义

(1) $R\Gamma_{\mathrm{BK}}(X, j_*\mathcal{E}) := R\Gamma(((X, M_X)/(\mathfrak{S}_K, M_{\operatorname{Spf}\mathfrak{S}_K}))_{\mathbb{\Delta}}, j_*\mathcal{E}) \in \mathcal{D}(\mathfrak{S}_K)$;
(2) $R\Gamma_{\mathrm{Br}}(X, j_*\mathcal{E}) := R\Gamma(((X_{S_K/p}, M_{X_{S_K/p}})/(S_K, M_{\operatorname{Spf} S_k}))_{\mathbb{\Delta}}, j_*\mathcal{E}) \in \mathcal{D}(S_K)$;
(3) $R\Gamma_W(X, j_*\mathcal{E}) := R\Gamma(((X_k, M_{X_k})/(W(k), M_0))_{\mathbb{\Delta}}, j_*\mathcal{E}) \in \mathcal{D}(W(k))$;
(4) $R\Gamma_{A_{\mathrm{inf}}}(X, j_*\mathcal{E}) := R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C}, M_{X_{\mathcal{O}_C}})/(A_{\mathrm{inf}}, M_{\operatorname{Spf} A_{\mathrm{inf}}}))_{\mathbb{\Delta}}, j_*\mathcal{E}) \in \mathcal{D}(A_{\mathrm{inf}})$;
(5) $R\Gamma_{A_{\mathrm{cris}}}(X, j_*\mathcal{E}) := R\Gamma(((X_{A_{\mathrm{cris}}/p}, M_{X_{A_{\mathrm{cris}}/p}})/(A_{\mathrm{cris}}, M_{\operatorname{Spf} A_{\mathrm{cris}}}))_{\mathbb{\Delta}}, j_*\mathcal{E}) \in \mathcal{D}(A_{\mathrm{cris}})$.

对于系数 $i(\mathcal{E})$，我们使用类似的记号。注意，$R\Gamma_{\mathrm{BK}}$ 和 $R\Gamma_{\mathrm{Br}}$ 取决于一致化元 π 的选择，而 $R\Gamma_W$、$R\Gamma_{A_{\mathrm{inf}}}$和 $R\Gamma_{A_{\mathrm{cris}}}$则不然。此外，Gal$(K/K)$作用于 (4) 和 (5) 中的棱柱，从而在 $R\Gamma_{A_{\mathrm{inf}}}$ 和 $R\Gamma_{A_{\mathrm{cris}}}$上诱导出 Gal$(K/K)$的作用。

Breuil–Kisin 上同调给出 $\mathfrak{S}_K$ 上的一个完美复形，并提供基变换定理（定理 6.19 和 6.21）；此外，还通过晶体方法证明 Breuil 上同调满足 Frobenius 等源性质（定理 6.26）。

定理 6.19 ([Tia25，定理 6.18，注 6.19])。假设 X 在 $\mathcal{O}_K$ 上为真，并令 $\mathcal{E}\in$向量丛$^{\mathrm{an},\ \phi}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}})$。则 $R\Gamma_{\mathrm{BK}}(X,j_*\mathcal{E})$ 是 $\mathcal{D}(\mathfrak{S}_K)$中的一个完美复形。

命题 6.20. 假设 X 是拟紧且分离的，并令 $\mathcal{E}\in$向量丛$^{\mathrm{an},\phi}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}})$。则自然映射

$$R\Gamma_{\mathrm{BK}}(X,i(\mathcal{E}))\to R\Gamma_{\mathrm{BK}}(X,j_*\mathcal{E})$$

由命题 *6.16* 给出，是 $\mathcal{D}(\mathfrak{S}_K)$ 中的一个同构。

证明. 我们有一个 p-完全 étale 覆盖 $\{g_\lambda\colon X_\lambda\to X\}_{\lambda\in\Lambda}$，其中 Λ 有限，且每个 X_λ 都是带框架 $\square_\lambda$ 的小仿射。由构造 6.14，有限族 $(\mathfrak{S}_{\square_\lambda},(E)\ M_{\mathrm{Spf}_{\mathfrak{S}_{\square_\lambda}}})_{\lambda\in\Lambda}$ 联合覆盖 $\mathrm{Sh}(((X,M_X)/(\mathfrak{S}_K,M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_K}))_{\mathbb{\Delta}})$ 的终对象，并且我们有相应的 Čech 神经 形式谱$(\mathfrak{S}^{\mathrm{rel}}{}_{,\Lambda}^{\ [\bullet]})$。

我们有一个自然的交换图

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma_{\mathrm{BK}}(X,i(\mathcal{E})) & \longrightarrow & R\Gamma_{\mathrm{BK}}(X,j_*\mathcal{E}) \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ \mathrm{Tot}(i(\mathcal{E})(\mathfrak{S}_\Lambda^{\mathrm{rel},[\bullet]})) & \longrightarrow & \mathrm{Tot}(j_*\mathcal{E}(\mathfrak{S}_\Lambda^{\mathrm{rel},[\bullet]})) \end{array}$$

其中垂直同构由引理 6.3 和 6.4 以及注 6.5 中的 Čech 上同调下降给出（应用于 $(A,I,M_{\mathrm{Spf}\,A})=(\mathfrak{S}_K,(E)\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_K})$ 和由 $B=\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{S}_{\square_\lambda}$ 给出的 $(B,IB,M_{\mathrm{Spf}\,B})$）。由于任意余面映射 $\mathfrak{S}_{\square_\lambda}\to\mathfrak{S}^{\mathrm{rel}}{}_{,\Lambda}^{\ [n]}$ 都是经典平坦的，由其中的性质 (b) 可知底部水平映射是一个同构（参见命题 6.16 的证明）。因此，顶部水平映射是一个同构。□

为供后续使用，我们考虑以下基变换性质。

定理 *6.21.* 假设 X 在 $\mathcal{O}_K$ 上拟紧且分离，并令$\mathcal{E}\in$向量丛$^{\mathrm{an},\phi}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}})$。令 $(A,(E)\ M_{\mathrm{Spf}\,A})\in$((形式谱 $(\mathcal{O}_K,M_{\mathrm{can}})/(\mathfrak{S}_K,M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_K}))^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$，使得映射 $\mathfrak{S}_K\to A$ 具有有限的 (p,E)-完备 *Tor*振幅。记 $X_{A/(E)}:=X\times_{\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}_K}$形式谱 $A/(E)$，其配备由 M_X诱导的对数结构。

(1) 映射

$$(R\Gamma_{\mathrm{BK}}(X,i(\mathcal{E}))\widehat{\otimes}_{\mathfrak{S}_K}A\to R\Gamma((X_{A/(E)}/(A,M_{\mathrm{Spf}\,A}))_{\mathbb{\Delta}},i(\mathcal{E}))$$

是 $\mathcal{D}(A)$ 中的同构，其中张量积取导出意义下的 (p,E)-完备化。

(2) 映射

$$(R\Gamma_{\mathrm{BK}}(X,j_*\mathcal{E})\widehat{\otimes}_{\mathfrak{S}_K}A)\otimes_A^L A[p^{-1}]\to R\Gamma((X_{A/(E)}/(A,M_{\mathrm{Spf}\,A}))_{\mathbb{\Delta}},j_*\mathcal{E})\otimes_A^L A[p^{-1}]$$

是 $\mathcal{D}(A[p^{-1}])$中的同构。

当 A为 A_{inf}、A_{cris}、$W(k)$，或任意 $n\geq 0$对应的 $S_K^{[n]}$时，便是这种情况。这里（$S_K^{[n]}$，(p) $\phi^*\mathbf{N}$）^{a}表示由引理 *6.11* 给出的、在（n+1）中 ***Breuil*** 对数棱柱（S_K，(p) $\phi^*\mathbf{N}$）^{a}的（形式谱 $\mathcal{O}_K$，$M_{\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}_K}$）$^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$中的（$n$+1）重自余积。

证明。我们将使用引理 6.3 和 6.4 以及重标记 6.5 中的 Čech 上同调下降。正如命题 6.20 的证明中一样，我们有一个 p-完全 étale 覆盖 $\{g_\lambda\colon X_\lambda\to X\}_{\lambda\in\Lambda}$，其中 Λ 是一个有限集，使得每个 X_λ 都是带有

框架 $\square_\lambda$ 的小仿射。族 $(\mathfrak{S}_{\square_\lambda},\ (E)\ M_{\mathrm{Spf}_{\mathfrak{S}_{\square_\lambda}}})_{\lambda\in\Lambda}$ 共同覆盖 Sh（$(X,\ M_X)$/$(\mathfrak{S}_K,\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_K})$）$_{\blacktriangle}$ 的终对象，其对应的 Čech 神经为形式谱 $(\mathfrak{S}^{\mathrm{rel}}{}_{,\ \Lambda}{}^{[\bullet]})$。

另一方面，由于对于任意 n，结构映射 $\mathfrak{S}_K\to\mathfrak{S}^{\mathrm{rel}}{}_{,\Lambda}{}^{[n]}$ 在经典意义下是忠实平坦的，$\mathfrak{S}^{\mathrm{rel}}{}_{,\Lambda}{}^{[n]}\otimes^L_{\mathfrak{S}_K}A$ 的导出(p,E)-完备化是离散的，并且与经典的(p,E)-完备化 $A^{\mathrm{rel}}{}_{,\Lambda}{}^{[n]}:=\mathfrak{S}^{\mathrm{rel}}{}_{,\Lambda}{}^{[n]}\widehat{\otimes}_{\mathfrak{S}_K}A$ 一致。注意，$(A^{\mathrm{rel}}{}_{,\Lambda}{}^{[n]},(E)M_{\mathrm{Spf}\,A^{\mathrm{rel}}{}_{,\ \Lambda}{}^{[n]}})$配备了从 $\mathfrak{S}^{\mathrm{rel}}{}_{,\Lambda}{}^{[n]}$ 继承的对数结构和 $\delta_{\log}$-结构，因此是$(X_{A/(E)}/(A,M_{\mathrm{Spf}\,A}))_{\blacktriangle}$中的一个对象。此外，族$(A^{\mathrm{rel}}_{\square_\lambda},(E)\ M_{\mathrm{Spf}\,A^{\mathrm{rel}}_{\square_\lambda}})_{\lambda\in\Lambda}$（其中 $A^{\mathrm{rel}}_{\square_\lambda}:=\mathfrak{S}_{\square_\lambda}\widehat{\otimes}_{\mathfrak{S}_K}A$）共同覆盖Sh(($X_{A/(E)}/(A,M_{\mathrm{Spf}\,A})$)$_{\blacktriangle}$的终对象，其Čech 神经由Spf $A^{\mathrm{rel}}{}_{,\Lambda}{}^{[\bullet]}$ 给出。

(1) 由上可知,

$$R\Gamma_{\mathfrak{S}_K}(X,i(\mathcal{E}))\cong\mathrm{Tot}(i(\mathcal{E})(\mathfrak{S}^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda))$$

and

$$R\Gamma((X_{A/(E)}/(A,M_{\mathrm{Spf}\,A}))_{\blacktriangle},i(\mathcal{E}))\cong\mathrm{Tot}(i(\mathcal{E})(A^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda)).$$

考虑交换图

$$\begin{array}{ccc}R\Gamma_{\mathrm{BK}}(X,i(\mathcal{E}))&\longrightarrow&R\Gamma((X_{A/(E)}/(A,M_{\mathrm{Spf}\,A}))_{\blacktriangle},i(\mathcal{E}))\\ \downarrow\cong&&\downarrow\cong\\ \mathrm{Tot}(i(\mathcal{E})(\mathfrak{S}^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda))&\longrightarrow&\mathrm{Tot}(i(\mathcal{E})(A^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda)).\end{array}$$

我们需要证明映射

$$\mathrm{Tot}(i(\mathcal{E})(\mathfrak{S}^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda))\widehat{\otimes}^L_{\mathfrak{S}_K}A\to\mathrm{Tot}(i(\mathcal{E})(A^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda))\tag{6.2}$$

是一个同构。对于每个 $\lambda\in\Lambda$, $i(\mathcal{E})(\mathfrak{S}_{\square_\lambda})\in\mathcal{D}(\mathfrak{S}_{\square_\lambda})$，它都由一个有限投射 $\mathfrak{S}_{\square_\lambda}$-模的有界复形 $P^\bullet_{\square_\lambda}$ 表示。于是，对于任意余面映射 $\mathfrak{S}_{\square_\lambda}\to\mathfrak{S}^{\mathrm{rel},\ \Lambda}{}^{[n]}$, $i(\mathcal{E})(\mathfrak{S}^{\mathrm{rel}}{}_{,\ \Lambda}{}^{[n]})$ 由 $P^\bullet_{\square_\lambda}\otimes_{\mathfrak{S}_{\square_\lambda}}\mathfrak{S}^{\mathrm{rel}}{}_{,\ \Lambda}{}^{[n]}$ 表示，而 $i(\mathcal{E})(A^{\mathrm{rel}}{}_{,\ \Lambda}{}^{[n]})$ 由以下对象表示:

$$P^\bullet_{\square_\lambda}\otimes_{\mathfrak{S}_{\square_\lambda}}A^{\mathrm{rel},[n]}_\Lambda\cong(P^\bullet_{\square_\lambda}\otimes_{\mathfrak{S}_{\square_\lambda}}\mathfrak{S}^{\mathrm{rel},[n]}_\Lambda)\otimes_{\mathfrak{S}^{\mathrm{rel},[n]}_\Lambda}A^{\mathrm{rel},[n]}_\Lambda.$$

因此，我们有 $i(\mathcal{E})(A^{\mathrm{rel}}{}_{,\ \Lambda}{}^{[n]})\cong i(\mathcal{E})(\mathfrak{S}^{\mathrm{rel}}{}_{,\ \Lambda}{}^{[n]})\widehat{\otimes}^L_{\mathfrak{S}_K}A$。注意，存在 $a,\ b\in\mathbf{Z}$使得对于任意 n，$i(\mathcal{E})(\mathfrak{S}^{\mathrm{rel}}{}_{,\ \Lambda}{}^{[n]})\in\mathcal{D}^{[a,b]}(\mathfrak{S}^{\mathrm{rel}}{}_{,\ \Lambda}{}^{[n]})$，因为 Λ 是有限的。[6] 由于 $\mathfrak{S}_K\to A$ 具有有限的 $(p,\ E)$- 完全 Tor 振幅，根据引理 6.6(1)，映射 (6.2) 是一个同构。

(2) 考虑交换图

$$\begin{array}{ccc}R\Gamma_{\mathrm{BK}}(X,j_*\mathcal{E})&\longrightarrow&R\Gamma((X_{A/(E)}/(A,M_{\mathrm{Spf}\,A}))_{\blacktriangle},j_*\mathcal{E})\\ \downarrow\cong&&\downarrow\cong\\ \mathrm{Tot}(j_*\mathcal{E}(\mathfrak{S}^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda))&\longrightarrow&\mathrm{Tot}(j_*\mathcal{E}(A^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda))\end{array}$$

[6]事实上，$i(\mathcal{E})(B)\in\mathcal{D}^{[a,b]}(B)$ 对任意 $(B,\ I,\ M_{\mathrm{Spf}\,B})\in((X,\ M_X)/(\mathfrak{S}_K,\ M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_K}))^{\mathrm{op}}_{\blacktriangle}$，由 $(p,\ I)$-完备忠实平坦下降可得；也就是说，[GL23，命题 3.11，证明，引理 3.12] 中的论证在我们的情形下由引理 6.9 仍然成立

其中垂直同构已在上文解释。我们需要证明映射

$$(\mathrm{Tot}(j_*\mathcal{E}(\mathfrak{S}_\Lambda^{\mathrm{rel},[\bullet]}))\widehat{\otimes}^L_{\mathfrak{S}_K}A)\otimes^L_A A[p^{-1}]\to \mathrm{Tot}(j_*\mathcal{E}(A_\Lambda^{\mathrm{rel},[\bullet]}))\otimes^L_A A[p^{-1}] \tag{6.3}$$

是一个同构。

对于任意余面映射 $\mathfrak{S}_{\square_\lambda}\to\mathfrak{S}^{\mathrm{rel},[n]}_{\square_\lambda,\Lambda}$，注意到

$$(j_*\mathcal{E}(\mathfrak{S}_\Lambda^{\mathrm{rel},[n]})\widehat{\otimes}^L_{\mathfrak{S}_K}A)\otimes^L_A A[p^{-1}]$$

由以下对象表示

$$(P^\bullet_{\square_\lambda}\otimes_{\mathfrak{S}_{\square_\lambda}}\mathfrak{S}_\Lambda^{\mathrm{rel},[n]})\otimes_{\mathfrak{S}_\Lambda^{\mathrm{rel},[n]}}A_\Lambda^{\mathrm{rel},[n]}[p^{-1}].$$

由于 $j_*\mathcal{E}$ 限制在解析位点上是一个向量丛，由引理 6.6(2) 可知，上述对象同构于 $j_*\mathcal{E}(A^{\mathrm{rel},[n]}_{\square,\Lambda})\otimes_A A[p^{-1}]$ 在 $\mathcal{D}(A^{\mathrm{rel},[n]}_{\square,\Lambda}[p^{-1}])$ 中。因此，由引理 6.6(1)，映射 (6.3) 是一个同构，因为 $A\to A[p^{-1}]$ 是经典平坦的。

对于最后一个结论，注意到任意投影映射 $S_K\to S_K^{[n]}$ 都是 p-完全忠实平坦的，这是引理 6.11 的结论。因此，对于每个 $A=A_{\mathrm{inf}}$、A_{cris} 或 $S_K^{[n]}$，映射 $\mathfrak{S}_K\to A$ 都具有有限的 (p,E)-完全 Tor 振幅。由于 $0\to\mathfrak{S}_K\xrightarrow{\times u}\mathfrak{S}_K\to W(k)\to 0$，映射 $\mathfrak{S}_K\to W(k)$ 也具有有限的 (p,E)-完全 Tor 振幅。□

推论 6.22. *考虑例 6.1 中的态射 $(\mathfrak{S}_K,M_{\mathrm{Spf}\,\mathfrak{S}_K})\to(\phi_*S_K,M_{\mathrm{Spf}\,\phi_*S_K})$ in(形式谱 $\mathcal{O}_K$, $M_{\mathrm{can}})^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$，并记 $X_{\phi_*S_K/p}:=X\times_{\mathcal{O}_K}\phi_*S_K/p$。若 X在 $\mathcal{O}_K$上是真，则映射*

$$R\Gamma_{\mathrm{Br}}(X,j_*\mathcal{E})\otimes^L_{S_K,\phi}S_K[p^{-1}]\to R\Gamma((X_{\phi_*S_K/p}/(\phi_*S_K,M_{\mathrm{Spf}\,\phi_*S_K}))_{\mathbb{\Delta}},j_*\mathcal{E})\otimes^L_{S_K}S_K[p^{-1}]$$

是 $\mathcal{D}(S_K[p^{-1}])$中的同构。

证明。 在真性假设下，定理 6.19 和 6.21 表明映射

$$R\Gamma_{\mathrm{BK}}(X,j_*\mathcal{E})\otimes^L_{\mathfrak{S}_K,\phi}S_K[p^{-1}]\to R\Gamma_{\mathrm{Br}}(X,j_*\mathcal{E})\otimes^L_{S_K}S_K[p^{-1}]$$

是一个同构。此外，由于 ϕ: $\mathfrak{S}_K\to\mathfrak{S}_K$ 是经典平坦的，根据引理 6.2，映射ϕ^2: $\mathfrak{S}_K\to S_K$具有有限的 (p,E)-完备 Tor振幅。因此映射
$R\Gamma_{\mathrm{BK}}(X,j_*\mathcal{E})\otimes^L_{\mathfrak{S}_K,\phi^2}S_K[p^{-1}]\to R\Gamma((X_{\phi_*S_K/p}/(\phi_*S_K,M_{\mathrm{Spf}\,\phi_*S_K}))_{\mathbb{\Delta}},j_*\mathcal{E})\otimes^L_{S_K}S_K[p^{-1}]$
根据定理 6.19 和 6.21，这仍是一个同构。结论由上述两个同构得出。□

6.5. **晶体的棱柱-晶体比较**。 我们研究半稳定形式概形上棱柱上同调与晶体上同调之间的比较，其中系数由完备棱柱（F-）晶体及其晶体实现给出。

令 $f_1\colon(X_1,M_{X_1})\to(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K/p,M_{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K/p})$ 表示 f 模 p 的约化。令 $(A,(p)\ M_A)$ 为一个晶体预对数棱柱，其中 M_A 为整，并且满足以下条件之一：$(A,(p)\ M_A)$ 的秩为 1，或 (A,M_A) 是一个对数环。令 $J\subset A$ 为一个包含 p 的 p-完备 PD 理想。假设 $(A,J,M_{\mathrm{Spf}\,A})=(A,J,M_A)^a\in$(形式谱 $\mathcal{O}_K,M_{\mathrm{can}})_{\delta\text{-CRIS}}$。记 $X_{A/J}:=X\times_{\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}_K}$形式谱$(A/J)$，并考虑设定 5.1 中 $(\phi_*A,(p)\ \phi_*M_A)^a$ 上的 $(X^{(1)}_{A/J},M(1)^{X_{A/J}})$。

令 $\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}} \in$向量丛$^{\mathrm{an},\phi}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}})$ 为 $(X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$ 上的解析棱柱（F）-晶体，并记 $j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}} \in \mathrm{CR}^{\wedge,\mathrm{an},\phi}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}, \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}})$ 为命题 6.15 给出的对应的完备棱柱（F）-晶体。

定义 6.23 ([DLMS26, § 3.5, 推论 3.31])。 令 $(X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}$ 表示 X_1 的绝对对数晶体位（另见注 B.3）。定义 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris}}$ 为 $j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 的晶体实现，并令 $(\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbb{Q}}, \phi_{\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbb{Q}}})$ 表示相应的有限局部自由F-等晶体，其定义在 $(X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}$上。回忆一下，按照 [DLMS26, DMS26]，的意义， $\mathcal{E}_{\mathrm{cris}}$ 是 $(X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}$ 上的有限型 $\mathcal{O}_{\mathrm{CRIS}}$-模拟凝聚晶体；在带框架 $\square$的小仿射情形下，它由下式给出

$$\mathcal{E}_{\mathrm{cris}}(X_1, D_X) = j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}(S_\square, M_{\mathrm{Spf}\, S_\square})$$

其中 $D_X :=$ 形式谱 $S_\square$ 配备了与$\mathbf{N}^d$ 相关的对数结构 M_{D_X}，其中$e_i \mapsto T_i$；正合闭浸入 $X_1 \hookrightarrow D_X$ 是由 PD-理想 $J_\square \subset S_\square$给出的对数 PD-加厚，而 (X_1, D_X)[7] 是 [DLMS26, 引理 3.28] 中 $(X_1, M_{X_1})^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{CRIS}}$ 的弱终归纳对象 $\lim\!\!\longrightarrow_n (X_1, \mathrm{Spec}(S_\square/p^n))$。由命题 B.8，我们也将 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris}}$视为 $(X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}$ 上的 p-进完备晶体，其意义见定义 B.1 和 B.5；此时求值记作 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris}}(S_\square, J_\square)$ 或 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris}}(S_\square, S_\square/J_\square)$。

记 $(E \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega^\bullet_{X/\mathcal{O}_K}, \nabla_E)$ 为与 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris}}$ 相伴的对数 de Rham 复形，如[DMS26, § 6] 中所述。由构造可知， E 是有限生成的 $\mathcal{O}_X$-模，因为 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris}}$ 是有限生成的 $\mathcal{O}_{\mathrm{CRIS}}$-模。

$\mathcal{E}_{\mathrm{cris}}$ 的对数晶体上同调由对数 de Rham 上同调计算。

定理 6.24. 沿用上述记号。我们有一个同构

$$R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(\mathcal{O}_K, M_{\mathrm{can}}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris}}) \cong R\Gamma(X, (E \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega^\bullet_{X/\mathcal{O}_K}, \nabla_E)).$$

特别地，若X 在 $\mathcal{O}_K$上为真，则 $R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(\mathcal{O}_K, M_{\mathrm{can}}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris}})$ 是 $\mathcal{O}_K$ 上的完美复形。

回顾本文使用两个晶体位，且命题 B.8 给出$R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(\mathcal{O}_K, M_{\mathrm{can}}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris}}) \cong R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(\text{形式谱 } \mathcal{O}_K)^\natural)_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris}})$，其中 (形式谱 $\mathcal{O}_K)^\natural$ 表示带有 PD 理想 (p) 的 (形式谱 $\mathcal{O}_K, M_{\mathrm{can}}$)。

证明。 该比较同构是 [DMS26 定理 6.21] 的一个特例。完美性源于 $\mathcal{O}_K$ 是一个诺特正则环。□

接下来讨论定理 5.5 的推论。

定理 6.25。 存在一个 ϕ_*A-复形的同构

$$R\Gamma(((X_{A/J})^{(1)}, M^{(1)}_{X_{A/J}})/(\phi_*A, (p), \phi_*M_A)^a)_{\mathbb{\Delta}}, (j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})^{(1)}) \cong \phi_*R\Gamma(((X_{A/J}, M_{X_{A/J}})/(A, M_A))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris}})$$

该同构关于 $(A, (p)\ M_A)^a$ 具有函子性。当 $\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 是解析棱柱 F-晶体时，上述同构在反转 p 后与 *Frobenius* 相容。这里，$(j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})^{(1)}$ 表示由 $j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 的拉回给出的 $((X_{A/J})^{(1)}, M^{(1)}_{X_{A/J}}/(\phi_*A, (p)\ \phi_*M_A)^a)_{\mathbb{\Delta}}$ 上的完备棱柱（F）-晶体。

[7]这也记作（X_1， D_X， M_{D_X}），以表示 [DLMS26，附录 B] 中的对数结构。

证明。 我们首先断言存在一个自然同构

$$\nu_{\mathbb{\Delta}}^{-1}(j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})^{(1)} \xrightarrow{\cong} \phi_*\nu_{\mathrm{CRIS}}^*\mathcal{E}_{\mathrm{cris}}, \quad \text{where}$$

$\nu_{\mathbb{\Delta}}$: Sh(((X_{A/J}, M_{X_{A/J}})/(A, M_A))_{δ-CRIS}) → Sh(((X_{A/J})^{(1)}, M^{(1)}_{X_{A/J}}/(φ_*A, (p) φ_*M_A)^a)_{\mathbb{\Delta}, ét}) 和 ν_{CRIS}: Sh(((X_{A/J}, M_{X_{A/J}})/(A, M_A))_{δ-CRIS}) → Sh(((X_{A/J}, M_{X_{A/J}})/(A, M_A))_{CRIS}) 是 § 5 中的拓扑斯态射。考虑 ((X_{A/J}, M_{X_{A/J}})/(A, M_A))_{δ-CRIS} 中的一个对象，它由一个对数棱柱 (B, (p) M_{Spf B}) = (B, (p) M_B)^a （在 (A, (p) M_{Spf A}) 上）、一个 p-完备 PD 理想 $J_1 \subset B$ 以及映射 Spf(B/J_1) → X_{A/J} 组成，如 [Kos22，定义 6.4] 所述。不失一般性，我们可以假设 (B, M_B) 是一个对数环。注意

$$\nu_{\mathbb{\Delta}}^{-1}(j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})^{(1)}(B, J_1, M_B) = (j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})^{(1)}(\phi_*B, (p), M_B^{(1)})^a,$$

以及 (φ_*B, (p) φ_*M_B)^a ∈ (X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}。

另一方面，我们声称存在一个自然识别

$$\phi_*\nu_{\mathrm{CRIS}}^*\mathcal{E}_{\mathrm{cris}}(B, J_1, M_B) = j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}(\phi_*B, (p), \phi_*M_B)^a.$$

根据 [Kos22，注 4.2] 以及 étale 下降，我们可以假设 (X, M_X) 是小仿射。此外，根据引理 6.11 和 p-完备忠实平坦下降，我们可以假设存在一个态射 (S, (p) M_{Spf S}) → (φ_*B, (p) φ_*M_B)^a，它位于 (X, M_X)_{\mathbb{\Delta}} 中，其中 (S, (p) M_{Spf S}) ∈ (X, M_X)_{\mathbb{\Delta}} 是 Breuil 对数棱柱。由此，结论直接来自 [DLMS26，构造 3.29] 中晶体实现的构造。因此，我们得到一个自然同构 $\nu_{\mathbb{\Delta}}^{-1}(j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})^{(1)} \xrightarrow{\cong} \phi_*\nu_{\mathrm{CRIS}}^*\mathcal{E}_{\mathrm{cris}}$。

现在，该陈述由定理 5.5、命题 3.10 和 B.4 得出。 □

我们在以下情形中应用上述比较定理。对于例 6.1(2) 中的 Breuil 环 S_K，记 $J_{S_K} \subset S_K$ 为 p-完备 PD 理想 Ker($S_K \twoheadrightarrow \mathcal{O}_K/p$)。我们有 $(S_K, S_K/J_{S_K} = \mathcal{O}_K/p) \in (\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K/p, M_{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K/p})^{\mathrm{op}}$CRIS，其中 Spf S_K 上的对数结构 M_{S_K} 由 $\mathbb{N} \to S_K, 1 \mapsto u$ 给出。[8] 注意，$(S_K, \mathcal{O}_K/p)$ 是 $(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K/p, M_{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K/p})^{\mathrm{op}}$CRIS 的弱初始对象。令 $(S_K^{(n)}, \mathcal{O}_K/p)$ 为 $(S_K, \mathcal{O}_K/p)$ 在 $(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K/p, M_{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K/p})^{\mathrm{op}}$CRIS 中的 $(n+1)$-重自余积。根据构造以及 [BS22，推论 2.39]（参见 [DLMS26，引理 3.32]），我们有一个环的自然同一化 $S_K^{(n)} = S_K^{[n]}$。

定理 6.26。 设 (X, M_X) 是一个定义在形式谱 $\mathcal{O}_K$ 上的真半稳定 p-进形式概形。我们有一个典范同构

$$R\Gamma_{\mathrm{Br}}(X, j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}) \cong R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(S_K, M_{S_K}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris}}).$$

在 $\mathcal{D}(S_K)$ 中。特别地，我们有一个同构

$$R\Gamma_{\mathrm{BK}}(X, j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}) \otimes^L_{\mathfrak{S}_K, \phi} S_K[p^{-1}] \cong R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(S_K, M_{S_K}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris}, \mathbb{Q}})$$

在 $\mathcal{D}_{\mathrm{perf}}(S_K[p^{-1}])$ 与 *Frobenius* 相容。此外，以下同构成立，且它们与 *Frobenius* 相容。

[8] 注意，M_{S_K} 与同上中的 $M_{\mathrm{Spf}\,S_K}$ 不同；按照定理 6.25 的记号，$M_{S_K} = M_A^a$ 和 $M_{\mathrm{Spf}\,S_K} = (\phi_*M_A)^a$。

(1) 对于 $(X_0, M_{X_0}) := (X_1, M_{X_1}) \otimes_{\mathcal{O}_K/p} k$，我们在 $\mathcal{D}_{\mathrm{perf}}(K_0)$:$R\Gamma_W(X, j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}) \otimes^L_{W(k)} K_0 \cong R\Gamma(((X_0, M_{X_0})/(W(k)\ M_0))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})$中有一个同构。

(2) 沿任意投影 $S_K \to S_K^{[n]}$ 的基变换都会诱导一个同构

$$R\Gamma_{\mathrm{Br}}(X, j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}) \otimes^L_{S_K} S_K^{[n]}[p^{-1}] \cong R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(S_K^{[n]}, M_{S_K^{[n]}}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})$$

$in\ D_{\mathrm{p}}{}^{\mathrm{erf}}(S_K^{[n]}[p^{-1}])$。

(3) 沿 $S_K \to A_{\mathrm{cris}}$、$u \mapsto [\pi^\flat]$ 的基变换会诱导一个同构$R\Gamma_{A_{\mathrm{cris}}}(X,\ j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}) \otimes^L_{A_{\mathrm{cris}}} A_{\mathrm{cris}}[p^{-1}] \cong R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p},\ M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(A_{\mathrm{cris}},\ M_{A_{\mathrm{cris}}}))_{\mathrm{CRIS}},\ \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\ \mathbf{Q}})$

$in\ D_{\mathrm{perf}}(A_{\mathrm{cris}}[p^{-1}])$.

这里的对数结构 $M_{S_K^{[n]}}$ 和$M_{A_{\mathrm{cris}}}$ 是通过所述映射从 S_K诱导而来的 M_{S_K} 上的对数结构。

同样，命题 B.8 给出了两个晶体位点的识别

$R\Gamma(((X_{A/J},\ M_{X_{A/J}})/(A,\ M_A))_{\mathrm{CRIS}},\ \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\ \mathbf{Q}}) \cong R\Gamma(((X_{A/J},\ M_{X_{A/J}})/(\text{形式谱 } A)^\sharp)_{\mathrm{CRIS}},\ \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\ \mathbf{Q}})$

其中，(形式谱 $A)^\sharp$是 p-进对数 PD 形式概形 (形式谱 A，M_A)，其 PD 理想为 J；而 $R\Gamma(-,\ \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\ \mathbf{Q}})$ 表示 $R\Gamma(-,\ \mathcal{E}_{\mathrm{cris}}) \otimes^L_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$。

证明。注意，由定理 6.19，$R\Gamma_{\mathrm{BK}}(X,\ j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})$ 是 $D(\mathfrak{S}_K)$ 中的完美复形。我们将定理 6.25 应用于 $(A,\ J) = (S_K,\ J_{S_K})$；注意，根据例 6.1(2)，$((X_{A/J})^{(1)},\ M_{(1)^{X_{A/J}}})/(\phi_* A,\ (p)\ \phi_* M_A)^a)$$\mathbb{\Delta}$可识别为$((X_{S_K/p},\ M_{X_{S_K/p}})/(S_K,\ M_{\mathrm{Spf}\, S_k}))_{\mathbb{\Delta}}$。因此，作为 $S_K = \phi_* A$ 上的模复形，我们有一个典范同构

$$R\Gamma_{\mathrm{Br}}(X, j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}) \cong R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(S_K, M_{S_K}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris}}).$$

因此，第一个陈述由定理 6.21（针对 $A = S_K$）得出。

第 (1)、(2) 和 (3) 部分分别由前两个结论、定理 6.21(2) 和定理 6.25 针对 $A = W(k)$、$A = S_K^{[n]} = S_K^{(n)}$ 和 $A = A_{\mathrm{cris}}$ 得出。□

6.6. 晶体上同调与 Breuil 上同调的 Frobenius 等源性质。我们采用 [DMS26, Thm. 11.3, Pf.] 中的方法，证明以下 Frobenius 等源性质。

定理 6.27。设(X, M_X) 是定义在 $\mathcal{O}_K$ 上的真半稳定 p-进形式概形，并沿用 *§ 6.5* 中的记号。则 $R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(S_K, M_{S_K}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})$满足 *Frobenius* 等源性质：若将上述复形记为 $\mathcal{M} \in \mathcal{D}_{\mathrm{perf}}(S_K[p^{-1}])$，则诱导映射 $1 \otimes \phi$：$L\phi^*\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是同构。因此，定理 *6.26(1)(2)(3)* 中的对象也满足 *Frobenius* 等源性质。

为证明这一点，我们需要引入一个完美复形 $i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})_{\mathrm{cris}}$，它是 $(X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}$ 上 $i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})$ 的晶体实现。[9]

[9]以下论证既适用于（X_1，M_{X_1}）定义 B.1 中的含义，也适用于 [DMS26，定义 10.1]/定义 B.7 中的含义。由于我们在定理 6.27 的证明中使用了 [DMS26] 中的技术，因此这里默认采用后者。

令 $\mathcal{D}_{\mathrm{perf}}((X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}})$ 为完美复形的导出 ∞-范畴，即由完美复形构成的 $\mathcal{D}((X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{O}_{X_1}/\mathbb{Z}_p)$ 的全子范畴。设 $\mathcal{D}_{\mathrm{perf}}((X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}})_{\mathbb{Q}} := \mathcal{D}_{\mathrm{perf}}((X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}) \otimes_{\mathcal{D}(\mathbb{Z})} \mathcal{D}(\mathbb{Q})$。令 $\mathcal{D}^{\phi}\mathrm{perf}((X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}})^{\sim}$ 为由满足以下条件的二元组 $(\mathcal{E}, \phi_{\mathcal{E}})$ 构成的 ∞-范畴：$\mathcal{E} \in \mathcal{D}_{\mathrm{perf}}((X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}})$，且 $\phi_{\mathcal{E}}\colon LF^*_{X_1,\mathrm{CRIS}}\mathcal{E} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{E}$ 是 $\mathcal{D}_{\mathrm{perf}}((X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}})_{\mathbb{Q}}$ 中的一个同构。[10] $\mathcal{D}^{\phi}\mathrm{perf}((X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}})$ 的对象称为 $(X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}$ 上完美复形中的 F-等晶体。

构造 6.28（$i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})$ 的晶体实现）。沿用 § 6.5 中的设定和记号。设 $\{g_\lambda\colon X_\lambda \to X\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一个 p-完全 étale 覆盖，其中 Λ 是有限集，并且每个 X_λ 都是带有框架 $\square_\lambda$ 的小仿射。对于每个 λ，考虑 Breuil 对数棱柱 $(S_{\square_\lambda}, (p)\ M_{\mathrm{Spf}\, S_{\square_\lambda}}) \in (X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$ 以及归纳对象 $(X_\lambda,1, \text{形式谱}\ S_{\square_\lambda}) = \varinjlim_m (X_\lambda,1, \mathrm{Spec}\, S_{\square_\lambda}/p^m) \in (X_1, M_{X_1})^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{CRIS}}$。[11] 于是族 $(X_\lambda,1, \text{形式谱}\ S_{\square_\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ 联合覆盖 $\mathrm{Sh}((X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}})$ 的终对象。

与构造 6.14 中类似，对任意 $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$，我们有 $(S_{\square_{\lambda_0}}, (p)\ M_{\mathrm{Spf}\, S_{\square_{\lambda_0}}}), \ldots, (S_{\square_{\lambda_n}}, (p)\ M_{\mathrm{Spf}\, S_{\square_{\lambda_n}}})$ 在 $(X, M_X)^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$ 中的余积 $(S_{\square_{\lambda_0},\ldots,\square_{\lambda_n}}, (p)\, M_{\mathrm{Spf}\, S_{\square_{\lambda_0},\ldots,\square_{\lambda_n}}})$。由 [BS22 推论 2.39],，$(X_{\lambda_0\ldots\lambda_n},1, \text{形式谱}\ S_{\square_{\lambda_0},\ldots,\square_{\lambda_n}})$ 将 $(X_{\lambda_0},1, \text{形式谱}\ S_{\square_{\lambda_0}}), \ldots, (X_{\lambda_n},1, \text{形式谱}\ S_{\square_{\lambda_n}})$ 表示为 $(X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}$ 的 ind 对象之积，其中 $X_{\lambda_0\ldots\lambda_n},1 := X_{\lambda_0},1 \times_{X_1} \cdots \times_{X_1} X_{\lambda_n},1$（参见 [DLMS26 引理 3.32] 的小仿射情形）。注意，当 $q = 0$ 时，$H^q((X_{\lambda_0\ldots\lambda_n},1, \text{形式谱}\ S_{\square_{\lambda_0},\ldots,\square_{\lambda_n}})\mathcal{O}_{X_1}/\mathbb{Z}_p)$ 为 $S_{\square_{\lambda_0},\ldots,\square_{\lambda_n}}$，而当 $q \geq 1$ 时它为零。

记 $\mathrm{Spf}(S^{[\bullet]}_\Lambda)$ 为覆盖 $\coprod_{\lambda\in\Lambda}(X_{\lambda,\ 1},\ \mathrm{Spf}\ S_{\square_\lambda}) \to *$ 的 Čech 神经；第 n 个位置由 $\coprod_{(\lambda_0,\ \ldots,\ \lambda_n)\in\Lambda^{n+1}}(X_{\lambda_0\ldots\lambda_n,\ 1},\ \mathrm{Spf}(S_{\square_{\lambda_0},\ \ldots,\ \square_{\lambda_n}}))$ 给出。由 p-完备忠实平坦下降，我们得到一个自然等价

$$\mathcal{D}^{\phi}_{\mathrm{perf}}((X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}) \cong \lim_{[n]\in\Delta} \mathcal{D}^{\phi}_{\mathrm{perf}}(S^{[n]}_\Lambda).$$

我们将 $i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})$ 的晶体实现定义为对象 $i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})_{\mathrm{cris}} \in \mathcal{D}^{(\phi)\text{完美}}((X_1,\ M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}})$，它是在上述等价下由 $\lim_{[n]\in\Delta} i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})(S^{[n]}_\Lambda)$ 给出的。

令 $(\mathrm{Spf}\ S_K)^\sharp$ 为带有 PD 理想 $J_{S_K} = \mathrm{Ker}(S_K \to \mathcal{O}_K/p)$ 的 p-进对数 PD 形式概形 $(\mathrm{Spf}\ S_K,\ M_{S_K})$。因此我们有如下恒等

$$R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(S_K, M_{S_K}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbb{Q}}) \cong R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(\mathrm{Spf}\, S_K)^\sharp)_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbb{Q}})$$

构造 6.29（$((X_1, M_{X_1})/(\text{形式谱}\ S_K)^\sharp)_{\mathrm{CRIS}}$ 的 Čech 神经）。设 $\{g_\lambda\colon\ X_\lambda \to X\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为一个 p-完全 étale 覆盖，其中 Λ 为有限集，使得每个 X_λ 均为带框架 $\square_\lambda$ 的小仿射。构造 6.14 给出一族 Breuil 对数棱柱 $(S_{\square_\lambda}, (p)\ M_{\mathrm{Spf}\, S_{\square_\lambda}}) \in (X_\lambda, M_{X_\lambda})^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$，它们共同覆盖拓扑斯 $\mathrm{Sh}(((X, M_X)/(S_K, M_{\mathrm{Spf}\, S_K}))_{\mathbb{\Delta}})$ 的终对象，其 Čech 神经记为形式谱$(S^{\mathrm{rel}}_{,\Lambda}{}^{[\bullet]})$。与小仿射情形类似，这给出一族 ind 对象 $(X_1, \text{形式谱}\ S_{\square_\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$，它们共同覆盖 $\mathrm{Sh}(((X_1, M_{X_1})/(\text{形式谱}\ S_K)^\sharp)_{\mathrm{CRIS}})$ 的终对象；由该构造及 [BS22，推论 2.39]，其相伴的 Čech 神经由 $(X_1, \text{形式谱}\ S^{\mathrm{rel}}_{,\Lambda}{}^{[\bullet]})$ 给出。

[10] 与 [DMS26], 中一样，我们也将 $F^*_{X_1,\ \mathrm{CRIS}}$ 记作 $LF^*_{X_1,\ \mathrm{CRIS}}$，因为 $F^*_{X_1,\ \mathrm{CRIS}}$ 是正合的。[11] 这里，$(X_{\lambda,\ 1},$ 形式谱 $S_{\square_\lambda})$ 的对数结构按定义 6.23 给出。

命题 6.30。诱导映射

$$R\Gamma(((X_1,M_{X_1})/(\operatorname{Spf} S_K)^\sharp)_{\mathrm{CRIS}}, i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})_{\mathrm{cris}})_{\mathbf{Q}} \to R\Gamma(((X_1,M_{X_1})/(\operatorname{Spf} S_K)^\sharp)_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})$$

是 $\mathcal{D}_{\mathrm{perf}}(S_K[p^{-1}])$ 中的一个同构，并且与 *Frobenius* 相容，其中源中的下标$\mathbf{Q}$指的是 $-\otimes^L_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q} = -\otimes^L_{S_K} S_K[p^{-1}]$。

证明。 考虑构造 6.29 中的 Čech 神经 $(X_1$，形式谱 $S^{\mathrm{rel},}{}_{\Lambda}{}^{[\bullet]})$。我们有自然同构

$$i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})(S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda)\otimes^L_{S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda} S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda[p^{-1}] \cong j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}(S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda)\otimes^L_{S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda} S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda[p^{-1}] \cong \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}(S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda),$$

其中，第一个同构由 $i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})$和 $j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 的构造结合引理 6.6(2)（应用于 $\mathfrak{S}_{\square_\lambda}\to S^{\mathrm{rel},}{}_{\Lambda}{}^{[\bullet]}$）得出；第二个同构则利用了 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris}}$ 的构造和引理 6.6(2)（应用于 $S_{\square_\lambda}\to S^{\mathrm{rel},}{}_{\Lambda}{}^{[\bullet]}$）。

此外，构造 6.28 给出

$$i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})(S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda)\cong i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})_{\mathrm{cris}}(S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda).$$

因此，我们得到 $(i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})_{\mathrm{cris}}(S^{\mathrm{rel},}{}_{\Lambda}{}^{[\bullet]}))_{\mathbf{Q}}\cong\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}(S^{\mathrm{rel},}{}_{\Lambda}{}^{[\bullet]})$。

现在应用 Čech 上同调下降；引理 6.3 和 6.4 及注 6.5 的证明可原样用于当前的晶体上同调设定。因此我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma(((X_1,M_{X_1})/(\operatorname{Spf} S_K)^\sharp)_{\mathrm{CRIS}}, i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})_{\mathrm{cris}})_{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & R\Gamma(((X_1,M_{X_1})/(\operatorname{Spf} S_K)^\sharp)_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ \mathrm{Tot}(i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})_{\mathrm{cris}}(S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda))_{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & \mathrm{Tot}(\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}(S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda)) \end{array}$$

其中竖直映射都是同构。由于 $\mathbf{Z}\to\mathbf{Q}$ 是经典平坦的，由引理 6.6(1)可知

$$\mathrm{Tot}(i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})_{\mathrm{cris}}(S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda))_{\mathbf{Q}}\cong\mathrm{Tot}((i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})_{\mathrm{cris}}(S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda))_{\mathbf{Q}}).$$

因此，上述图中的底部映射是一个同构，结论由此得出。与 Frobenius 的相容性显然。□

定理 *6.27* 的证明。 由命题 6.30，只需证明 $R\Gamma(((X_1,\ M_{X_1})/$(形式谱 $S_K)^\sharp)_{\mathrm{CRIS}},\ i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})_{\mathrm{cris}})_{\mathbf{Q}}$ 满足 Frobenius 等源性质；第二个结论由定理 6.21 推出，因为所涉及的基变换与 Frobenius 兼容。令 $(Y,\ M_Y):=(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K/p,\ M_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K/p})$，以及 $(X_1',\ M_{X_1'}):=(Y,\ M_Y)\times_{F_Y,\ (Y,\ M_Y)}(X_1,\ M_{X_1})$；它们构成如下交换图：

(6.4)
$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{F_{X_1}}{\frown} & & \\ (X_1,M_{X_1}) & \xrightarrow{F_{X_1/Y}} & (X_1',M_{X_1'}) & \xrightarrow{g} & (X_1,M_{X_1}) \\ & {\scriptstyle f_1}\searrow & \downarrow{\scriptstyle f_1'} & \square & \downarrow{\scriptstyle f_1} \\ & & (Y,M_Y) & \xrightarrow{F_Y} & (Y,M_Y). \end{array}$$

令 $\mathcal{K} := i(\mathcal{E}_{\mathbb{A}})_{\mathrm{cris}}$ 和 $\mathcal{K}' := g^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{K}$。记 $\phi_{\mathcal{K}_{\mathbf{Q}}} = p^r\phi_{\mathcal{K}}$ 为某个 $r \in \mathbf{Z}$以及一个态射 $\phi_{\mathcal{K}}\colon F^*_{X_1,\mathrm{CRIS}}\mathcal{K} \to \mathcal{K}$，它属于 $D_{\mathrm{perf}}((X_1,\ M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}},\ \mathcal{O}_{X_1/\mathbf{Z}_p})$。为简化记号，对于 $R\Gamma(((X_1,\ M_{X_1})/($形式谱 $S_K)^\natural)_{\mathrm{CRIS}},\ \mathcal{K})$，我们记作 $R\Gamma((X_1/S_K)_{\mathrm{CRIS}},\ \mathcal{K})$，等等。考虑以下映射的复合 α

(6.5)

$$\begin{array}{ccc}
R\Gamma((X_1/S_K)_{\mathrm{CRIS}},\mathcal{K})\otimes_{S_K,\phi}S_K & \xrightarrow{\ \delta\ } & R\Gamma((X_1'/S_K)_{\mathrm{CRIS}},\mathcal{K}') \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle R\Gamma((X_1'/S_K)_{\mathrm{CRIS}},\mathrm{adj})}\ {\scriptstyle \beta} \\
 & & R\Gamma((X_1'/S_K)_{\mathrm{CRIS}},RF_{X_1/Y,\mathrm{CRIS},*}F^*_{X_1/Y,\mathrm{CRIS}}\mathcal{K}') \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \cong} \\
R\Gamma((X_1/S_K)_{\mathrm{CRIS}},\mathcal{K}) & \xleftarrow{R\Gamma((X_1/S_K)_{\mathrm{CRIS}},\phi_{\mathcal{K}})} & R\Gamma((X_1/S_K)_{\mathrm{CRIS}},F^*_{X_1,\mathrm{CRIS}}\mathcal{K}),
\end{array}$$

其中 δ 由相对于 (6.4) 中笛卡尔图的基变换定义，第二个右侧竖直映射是由右导出函子的复合给出的同构。所讨论的态射

$$R\Gamma((X_1/S_K)_{\mathrm{CRIS}},\mathcal{K})_{\mathbf{Q}}\otimes_{S_K[p^{-1}],\phi}S_K[p^{-1}] \to R\Gamma((X_1/S_K)_{\mathrm{CRIS}},\mathcal{K})_{\mathbf{Q}}$$

由 $p^r\alpha_{\mathbf{Q}}$ 给出，其中 $\alpha_{\mathbf{Q}} := \alpha\otimes\mathrm{id}_{S_K[p^{-1}]}$。由于 $\phi_{\mathcal{K}_{\mathbf{Q}}}$ 是同构，故 $R\Gamma((X_1/S_K)_{\mathrm{CRIS}},\ \phi_{\mathcal{K}})_{\mathbf{Q}}$ 亦为同构。因此只需证明 $\beta_{\mathbf{Q}}$ 与 $\delta_{\mathbf{Q}}$ 是同构。对于 $\beta_{\mathbf{Q}}$，考虑如下图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{K}' & \xrightarrow{\ \mathrm{adj}\ } & RF_{X_1/Y,\mathrm{CRIS},*}(F^*_{X_1/Y,\mathrm{CRIS}}\mathcal{K}'\otimes F^*_{X_1/Y,\mathrm{CRIS}}\mathcal{O}_{X_1'/\mathbf{Z}_p}) \\
\| & & \cong\Big\uparrow{\scriptstyle \gamma} \\
\mathcal{K}'\otimes\mathcal{O}_{X_1'/\mathbf{Z}_p} & \xrightarrow{\ \mathrm{id}\otimes\mathrm{adj}\ } & \mathcal{K}'\otimes RF_{X_1/Y,\mathrm{CRIS},*}F^*_{X_1/Y,\mathrm{CRIS}}\mathcal{O}_{X_1'/\mathbf{Z}_p}.
\end{array}$$

此处 γ 是由投影公式给出的典范拟同构；由于 $\mathcal{K}'$ 是完美复形，该公式适用，且上述图表依构造交换（见 [Sta21, 0943]）。由于 $\beta = R\Gamma((X_1/S_K)_{\mathrm{CRIS}},\gamma\circ\mathrm{id}\otimes\mathrm{adj})$，只需证明由伴随给出的典范态射

$$\mathcal{O}_{X_1'/\mathbf{Z}_p} \to RF_{X_1/Y,\mathrm{CRIS},*}F^*_{X_1/Y,\mathrm{CRIS}}\mathcal{O}_{X_1'/\mathbf{Z}_p} = RF_{X_1/Y,\mathrm{CRIS},*}\mathcal{O}_{X_1/\mathbf{Z}_p}$$

是一个同源（即 $D_{\mathrm{perf}}((X,\ M_X)_{\mathrm{CRIS}})_{\mathbf{Q}}$ 中的一个同构）。这由 [HK94, 命题 2.24] 得出；参见 [DMS26, 定理 11.3，证明，注 11.6(1)]。

对于 $\delta_{\mathbf{Q}}$，回忆定理 6.26，我们有 $R\Gamma_{\mathrm{Br}}(X,\ j_*\mathcal{E}_{\mathbb{A}}) \cong R\Gamma((X_1/S_K)_{\mathrm{CRIS}},\ \mathcal{E}_{\mathrm{cris}})$。此外，我们有一个典范同构

$$R\Gamma((X_{\phi_*S_K/p}/(\phi_*S_K,M_{\mathrm{Spf}\,\phi_*S_K}))_{\mathbb{A}},j_*\mathcal{E}_{\mathbb{A}}) \cong R\Gamma((X_1'/S_K)_{\mathrm{CRIS}},\mathcal{E}'_{\mathrm{cris}})$$

对于 $\mathcal{E}'_{\mathrm{cris}} := g^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{E}_{\mathrm{cris}}$，由定理 6.25 应用于 $A = \phi_*S_K$，其中 M_A 取为$\mathbf{N}\to\phi_*S_K$，$1\mapsto u^p$。另一方面，我们有

$$R\Gamma((X_1^{(')}/S_K)_{\mathrm{CRIS}},\mathcal{K}^{(')})_{\mathbf{Q}} \cong R\Gamma((X_1^{(')}/S_K)_{\mathrm{CRIS}},\mathcal{E}^{(')}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}).$$

由命题 6.30 及其证明（针对 $\mathcal{K}'$）可知。因此，根据上述同构和推论 6.22，我们得出 $\delta_{\mathbf{Q}}$ 是一个同构。□

6.7. **Hyodo–Kato 理论**。 本小节讨论 Hyodo–Kato 理论。在 § 6.8 中，我们将利用这一理论为定理 6.26 中的 $R\Gamma(((X_0,\ M_{X_0})/((W(k)\ M_0))_{\mathrm{CRIS}},\ \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\ \mathbf{Q}})$赋予额外结构。我们遵循 [HK94、Kat94、Tsu99、Bei13、Bei11] 中关于对数晶体上同调的 Hyodo–Kato 理论。对于主要构造，我们采用 Beilinson 的工作 [Bei11] （arXiv 版本）以及定义 B.7 中的绝对晶体位点，这最适合我们的构造。

ϕ之上的 $(N,\ K_0)$-模是一个三元组 (V,ϕ_V,N_V)，其中 V是有限维的K_0-向量空间，$\phi_V\colon\ V\to V$是一个 ϕ-半线性自同构，而 $N_V\colon\ V\to V$是一个K_0-线性自同态，满足 $N_V\phi_V\ =\ p\phi_V N_V$。若 V含有一个 ϕ_V-稳定的 $W(k)$-格，则称其为有效。记 $D_{\phi,N}(K_0)$ 为 K_0之上的 (ϕ,N)-模的有界导出范畴，记 $D_{\phi,N}(K_0)^{\mathrm{eff}}$为由有效对象构成的子范畴。注意，对于每个$V\in D_{\phi,N}(K_0)^{\mathrm{eff}}$，都存在 $m\geq 0$使得 $N_V^m=0$。

将带有典范对数结构的 $\mathcal{Y}=\mathrm{Spf}\ \mathcal{O}_K$记为 $M_{\mathcal{Y}}$，并令 $(Y_n,\ M_{Y_n}):=(\mathcal{Y},\ M_{\mathcal{Y}})^{\times_{\mathbf{Z}_p}}\mathbf{Z}_p/p^n$。令 $(Y_0,\ M_{Y_0}):=(\mathcal{Y},\ M_{\mathcal{Y}})\ \times_{\mathcal{O}_K}k$。注意，$(Y_0,\ M_{Y_0})$ 可视为带有典范对数结构的 $\mathrm{Spf}\ W(k)$ 的模 p约化 $(Y_1^0,\ M_{Y_1^0})$。映射$k=W(k)/(p)\ \to\mathcal{O}_K/(p)\ \to k$给出

$$(Y_0,M_{Y_0})\xrightarrow{i}(Y_1,M_{Y_1})\xrightarrow{i^0}(Y_1^0,M_{Y_1^0}).$$

关于整的拟凝聚对数概形 $(Z,\ M_Z)$ 上非退化完美F-晶体的概念，请参阅 [Bei11, § 1.14][12] 。该概形定义在 $\mathbf{F}_p$ 上。与同上，令 $D_\phi^{\mathrm{pcr}}(Z,\ M_Z)^{(\mathrm{nd})}$表示 $(Z,\ M_Z)_{\mathrm{CRIS}}$ 上（非退化）完美 F-晶体的范畴，并记 $D_\phi^{\mathrm{pcr}}(Z,\ M_Z)^{(\mathrm{nd})}{}_{\mathbf{Q}}$为其同源范畴。

我们首先回顾 [Bei11] 对 $(Y_1,\ M_{Y_1})$ 或 $(Y_0,\ M_{Y_0})$ 上完美复形中的 F-等晶体范畴的描述。

定理 6.31 ([Bei11, § 1.15, 定理-构造])。 设 $f\colon(Z,M_Z)\ \to(Y_1^0,M_{Y_1^0})$ 是整的拟凝聚对数概形之间的态射。存在一个自然函子

$$\epsilon_f\colon D_{\phi,N}(K_0)^{\mathrm{eff}}\to D_\phi^{\mathrm{pcr}}(Z,M_Z)^{\mathrm{nd}}_{\mathbf{Q}},$$

与基变换相容：对于 $g\colon\ (Z',M_{Z'})\ \to\ (Z,M_Z)$，我们有一个规范的-$\tilde{}$恒等识别 $\epsilon_{f\circ g}\xrightarrow{=}g^*_{\mathrm{CRIS}}\epsilon_f$。

此外，以下函子给出了范畴等价

$$D_{\phi,N}(K_0)^{\mathrm{eff}}\xrightarrow[\cong]{\epsilon:=\epsilon_{\mathrm{id}}}D_\phi^{\mathrm{pcr}}(Y_1^0,M_{Y_1^0})^{\mathrm{nd}}_{\mathbf{Q}}\xrightarrow[\cong]{i^{0,*}_{\mathrm{CRIS}}}D_\phi^{\mathrm{pcr}}(Y_1,M_{Y_1})^{\mathrm{nd}}_{\mathbf{Q}}\xrightarrow[\cong]{i^*_{\mathrm{CRIS}}}D_\phi^{\mathrm{pcr}}(Y_0,M_{Y_0})^{\mathrm{nd}}_{\mathbf{Q}}.$$

证明。 这在 [Bei11, § 1.15, Thm.-Const.] 中得到了证明。注意，大晶体框架也适用于 [DMS26, Rem. 10.3] and $g^*_{\mathrm{CRIS}}=Lg^*_{\mathrm{CRIS}}$。 □

注记 6.32。 如果 V 是 K_0 上的一个（$\phi,\ N$）-模，那么 $\epsilon(V)$ 的底层是一个定义在（$Y_0,\ M_{Y_0}$）上的有限局部自由 F-晶体$_{\mathrm{CRIS}}$，其显式地由带对数联络的模给出。如果$V\in D_{\phi,\ N}(K_0)^{\mathrm{eff}}$ 由 K_0 上的一个有效（$\phi,\ N$）-模的有界复形 $\cdots\to V_n\to V_{n+1}\to\cdots$ 表示，那么 $\epsilon_f(V)$ 由一个有界复形表示

$\cdots\to f^*{}_{\mathrm{CRIS}}\epsilon(V_n)\to f^*{}_{\mathrm{CRIS}}\epsilon(V_{n+1})\ \to\cdots$的 F-等晶体，在$(Z,M_Z)_{\mathrm{CRIS}}$上。

[12]更准确地说， [DMS26，定义 11.1，注 11.2]因为我们是在大站点上进行研究。不过，这不会造成任何本质上的差异。

我们需要从 ϵ的构造中推出若干性质。设 $\mathcal{T}^\sharp$ $=(\mathcal{T}, M_{\mathcal{T}}, \mathcal{J}_{\mathcal{T}}, \gamma_{\mathcal{T}})$为一个仿射 p-进对数 PD-形式概形，使得 $M_{\mathcal{T}}$是整的且拟凝聚的（见 [DMS26，§ 10]）。假设存在一个严格态射(U, M_U): $=(V(\mathcal{J}_{\mathcal{T}})$ $M_{\mathcal{T}}|_U)$ $\to(Z, M_Z)$。则对某个 p-进完备环 A，有 $\mathcal{T}$ $=$形式谱 A，并且 $\mathcal{J}_{\mathcal{T}}$ 对应于一个开 PD 理想 J，使得 $U=\mathrm{Spec}$ A/J。对于 $\mathcal{K}_{\mathbf{Q}} \in D_{\phi}^{\mathrm{pcr}}(Z, M_Z)_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{nd}}$，我们有 $R\Gamma((U, \mathcal{T})$ $\mathcal{K}_{\mathbf{Q}})$: $= R\Gamma((U, \mathcal{T})$ $\mathcal{K}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \in D_{\mathrm{perf}}(A[p^{-1}])$，其中$R\Gamma((U, \mathcal{T})$ $\mathcal{K}) = R\lim_{\longleftarrow n} R\Gamma((U,$ $\mathrm{Spec}\, A/p^n)$ $\mathcal{K})$（参见 [DMS26，构造10.6，命题10.7]）。为简便起见，我们将 $R\Gamma((U, \mathcal{T})$ $\mathcal{K}_{\mathbf{Q}})$记作 $\mathcal{K}_{\mathbf{Q}}(A)$。

当 (Z, M_Z) $=(Y_1, M_{Y_1})$ 时，两个主要例子是 $A = S_K$带有 J $=$核$(S_K \to \mathcal{O}_K/p)$以及与 $\mathbf{N} \to S_K$ 相关联的对数结构，$1 \mapsto u$，以及 $(\mathcal{O}_K, (p)$ $M_{\mathrm{can}})$。

为讨论 $Z = Y_1 := \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_C/p$ 的情形，我们先引入两个周期环。

定义 6.33。考虑 $A = \mathcal{O}_K, \mathcal{O}_C, A_{\mathrm{inf}}, A_{\mathrm{cris}}$ 上与预对数结构 $\mathbf{N} \to A$ 相关联的对数结构，它们分别将 1 映到 $\pi, \pi, [\pi^\flat], [\pi^\flat]$。

(1) 定义 A_{st} 为满射 $A_{\mathrm{inf}} \otimes_{W(k)} S_K \to \mathcal{O}_C$ 的 p-完备对数 PD 包络，其中 $S_K \to \mathcal{O}_C$ 将 u 映到 π；若 $A_{\mathrm{cris}}\{v\}_{\mathrm{PD}}$ 表示 p- 完备的、关于 v 的 PD 多项式代数，则一个 p-进连续的 A_{cris}-代数同态 $A_{\mathrm{cris}}\langle v\rangle_{\mathrm{PD}} \to \widehat{A}_{\mathrm{st}}$，将 $v^{[n]}$ 映到 $(u/[\pi^\flat] - 1)^{[n]}$，是一个同构。记作 $\widehat{B}_{\mathrm{st}}^+ := \widehat{A}_{\mathrm{st}}[p^{-1}]$。

(2) 令 θ_K: $A_{\mathrm{inf}, K} := A_{\mathrm{inf}} \otimes_{W(k)} \mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_C$ 为 $\mathcal{O}_K$-线性扩张 θ: $A_{\mathrm{inf}} \to \mathcal{O}_C$。定义 $A_{\text{log-cris}, K}$ 为满射 θ_K的 p-完备对数 PD 包络；注意到 $S_K \to \mathcal{O}_K$, $u \mapsto \pi$ 诱导一个同构 $A_{\mathrm{st}} \otimes_{S_K} \mathcal{O}_K \cong A_{\text{log-cris}, K}$。将所得的对数结构记为 $M_{A_{\text{log-cris}, K}}$。令 ι_1: $S_K \to A_{\text{log-cris}, K}$（分别令 ι_2: $S_K \to A_{\text{log-cris}, K}$）为由 $u \mapsto [\pi^\flat]$（分别由 $u \mapsto \pi$）给出的映射；ι_1 通过 A_{cris} 分解，且 ι_2 通过 $\mathcal{O}_K$ 分解。

引理 6.34。考虑 h: $(Y_1, M_{Y_1}) := (\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_C/p, (\mathcal{O}_C \setminus \{0\})^a) \to (Y_1, M_{Y_1})$。

(1) $A = A_{\mathrm{cris}}$ 带有与 $\mathcal{O}_{C^\flat} \setminus \{0\} \xrightarrow{[-]} W(\mathcal{O}_{C^\flat}) \to A_{\mathrm{cris}}$ 相关的对数结构，且 *PD* 理想 $J =$核$(A_{\mathrm{cris}} \to \mathcal{O}_C/p)$ 给出 $(Y_1, M_{Y_1})_{\mathrm{CRIS}}$ 的初始归纳对象。*(2)* $h_{\mathrm{CRIS}, *}\mathcal{O}_{Y_1/\mathbf{Z}_p}(S_K) = A_{\mathrm{st}}$和 $R^q h_{\mathrm{CRIS}, *}\mathcal{O}_{Y_1/\mathbf{Z}_p}(S_K) = 0$对于 $q \geq 1$。*(3)* $h_{\mathrm{CRIS}, *}\mathcal{O}_{Y_1/\mathbf{Z}_p}(\mathcal{O}_K) = A_{\text{log-cris}, K}$和 $R^q h_{\mathrm{CRIS}, *}\mathcal{O}_{Y_1/\mathbf{Z}_p}(\mathcal{O}_K) = 0$ 对于 $q \geq 1$。

证明。(1) 注意，满射 $A_{\mathrm{cris}} \to \mathcal{O}_C/p$ 相对于我们所考虑的对数结构是正合的，并且 $(\mathcal{O}_C \setminus \{0\})^a/(\mathcal{O}_C/p)^\times$ 是唯一地 p-可除的。因此，结论由 [Bei11, § 1.17, 引理] 得出。

（2）我们采用 [DMS26，第 10]节中的记号。令 $\mathcal{S}^\sharp$ 表示与 $\mathcal{S} = \mathrm{Spf}\, S_K$ 相关联的仿射 p-adic 对数 PD-形式概形（其余结构同上）。由 [DMS26，命题 10.5、10.7 以及引理 10.9] 可得

$$Rh_{\mathrm{CRIS}, *}\mathcal{O}_{\overline{Y}_1/\mathbf{Z}_p}(S_K) = R\Gamma((\overline{Y}_1, M_{\overline{Y}_1})/\mathcal{S}^\sharp)_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{O}_{\overline{Y}_1/\mathcal{S}}).$$

注意到，A_{st} 可识别为满射$A_{\mathrm{cris}} \otimes_{W(k)} S_K \to \mathcal{O}_C/p$的 p-完备对数 PD 包络，其中 A_{cris}（分别为 $\mathcal{O}_C/p$）上的对数结构是与 $\mathcal{O}_{C^\flat} \setminus \{0\}$（分别为 $\mathcal{O}_C \setminus \{0\}$）相关联的对数结构。由此及 (1) 可推出，$A_{\mathrm{st}}$（带有新的 PD 理想和对数结构）给出了 $((Y_1, M_{Y_1})/\mathcal{S}^\sharp)^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{CRIS}}$ 的初始归纳对象。

因此， $H^q(((\overline{Y_1}, M_{Y_1})/\mathcal{S}^\sharp)_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{O}_{Y_1/\mathcal{S}})$ $= H^q((Y_1, \mathcal{S})\overline{\ }\mathcal{O}_{Y_1/\mathcal{S}})$；当 $q = 0$ 时，后者为 $\widehat{A}_{\mathrm{st}}$；当 $q \geq 1$ 时，后者为零。证明方法与引理 B.6 类似。

(3) 这与 (2) 的证明完全相同。 □

注记 6.35。

(1) 回忆 A_{cris}-代数同构 $A_{\mathrm{cris}}\langle v\rangle_{\mathrm{PD}} \cong \widehat{A}_{\mathrm{st}}$，它将 v 映到 $u/[\pi^\flat] - 1$。由此可知，对数联络 $\nabla_{S_K}\colon S_K \to S_K\, d\log u$ 可扩张为一个 p-$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$进连续的 A_{cris}-线性对数联络 $\nabla_{\widehat{A}_{\mathrm{st}}}\colon A_{\mathrm{st}} \to A_{\mathrm{st}}\, d\log u$。定义$\widehat{\ }$一个 A_{cris}-线性导子 N于 A_{st}上，其公式为 $\nabla_{\widehat{A}_{\mathrm{st}}}(x) = N(x)\ d\log u$。$\widehat{\ }$(2) 不难看出，我们的 A_{st} 与 [中Tsu99, 第 1 节6] 的 $\varprojlim_n P_n$ 一致；作为带有所有附加结构的 A_{cris}-代数，它将 $u/[\pi^\flat] - 1$ 映为 $(v_{[\pi^\flat]}$模 $_{p^n})_n$；因此 (1) 与 [Tsu99，引理 1.65]相容。我们指出，$\varprojlim_n P_n$ 最初由 [Kat94，第 3] 节引入，但我们采用 [Tsu99]的规范化方式。类似地，我们的 $A_{\text{log-cris},K}$ 与 [Tsu99，第 4 节6]中的 $A_{\text{log-crys},S}$ 一致。

定义 6.36（参见 [Tsu99，第 4 节.1]）。固定 $\mathcal{O}_K$ 的一个一致化元 π，并选取由 π的相容的 p次方根系给出的 $\pi^\flat \in \mathcal{O}_{C^\flat}$。我们将 $B^+_{\mathrm{st}} := B^+_{\mathrm{st},\pi}$ 定义为 B^+ $_{\mathrm{dR}}$ 的子环 $B_{\mathrm{cris}}[u_{\pi^\flat}]$，其中 $u_{\pi^\flat}$ =log$([\pi^\flat]/\pi)$；作为子环，它与 $\pi^\flat$ 的选择无关。将 B^+ $_{\mathrm{cris}}$ 上的 ϕ 通过 $\phi(u_{\pi^\flat})$ $= pu_{\pi^\flat}$ 延拓到 B^+_{st}，并用公式 $N(u_{\pi^\flat}) = -1/e$ 定义 B^+_{st} 上的一个 B^+ $_{\mathrm{cris}}$-线性导子 $N = N_\pi$，其中 e 是 K的分歧指数。令 $B_{\mathrm{st}} := B^+_{\mathrm{st}}[t^{-1}]$，并以显然的方式延拓 ϕ 和 N。

注 6.37. 令 B^+ st,Fon 表示 Sym$(C^\flat,^\times)$ $\otimes_{\mathrm{Sym}(\mathcal{O}^\times_{C^\flat})}$ $_\lambda$ B^+ cris，其中 λ: $\mathcal{O}^\times_{C^\flat} \to B^+$ cris 是一个加法映射，由 $\lambda(y) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}[y]^n/n$ 定义，其中 $y \in 1 + \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{C^\flat}}$。这是 [Fon94a, 第 3], 节中定义的正半稳定周期环；作出一个选择 $\pi^\flat \in C^\flat$便可将 B^+ st,Fon 与上文的$B^+_{\mathrm{st},\pi}$ 等同。我们对 B^+_{st} 上的单值算子N 所采用的符号约定，与 [Tsu99] 的约定一致，与 [Fon94a]的约定相反。我们采用 [Fon94a, 注 3.2.4], 意义下的规范化，而 [Tsu99] 采用规范化 $N(u_{\pi^\flat}) = -1$。我们选择此规范化，使其与定理 6.31 的显式构造相容；见下文命题 6.39。

命题 6.38. 存在一个定义良好且单射的 B^+ $_{\mathrm{cris}}$-代数映射 ι: $B^+_{\mathrm{st}} \to \widehat{B}^+_{\mathrm{st}}$，将 $u_{\pi^\flat}$ 映为 $\log([\pi^\flat]/u)$。此外， ι 与 ϕ、 N 以及 $\mathrm{Gal}(K/K)$-作用相容，并将 B^+_{st} 识别为 $\widehat{B}^+_{\mathrm{st}}$ 的子环 $(\widehat{B}^+_{\mathrm{st}})^{N\text{-}nilp}$，其中由 N 幂零作用的元素组成。最后，图表

$$\begin{array}{ccc} B^+_{\mathrm{st}} & \xrightarrow{\ \iota\ } & \widehat{B}^+_{\mathrm{st}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B^+_{\mathrm{dR}} & \longleftarrow & A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}] \end{array}$$

是交换的，且$\mathrm{Gal}(K/K)$-等变。

证明. 这由 [Tsu99, 命题 4.1.3] 和注 6.35 得出。 □

命题 6.39。沿用上述记号。任取 $V \in D_{\phi,\ N}(K_0)^{\mathrm{eff}}$ 并令$\mathcal{E}_V$：$= i^0,\ _*\mathrm{CRIS}\epsilon(V) \in D^{\mathrm{pcr}}_\phi$ $(Y_1, M_{Y_1})^{\mathrm{nd}}_{\mathbf{Q}}$。以下性质成立。

(1) $V \cong (i^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{E}_V)(W(k))$ 作为完美 K_0-复形中的 ϕ-模，其中 $W(k)$带有 *PD* 理想(p) 以及与$\mathbf{N} \to W(k)$相关联的对数结构， $1 \mapsto 0$。
(2) $V \otimes^L_{K_0} S_K[p^{-1}] \cong \mathcal{E}_V(S_K)$作为完美 $S_K[p^{-1}]$-复形中的 ϕ-模；若 *V* 是一个(ϕ, N)-模，使得 $\mathcal{E}_V$是拟凝聚晶体，且 $\mathcal{E}_V(S_K)$带有对数联络 ∇，则通过上述同构， ∇ 对应于

$$\nabla(v \otimes x) = eN(v) \otimes x\, d\log u + v \otimes dx.$$

(3) 在 *(2)* 的条件下，映射 $S_K \to \mathcal{O}_K$, $u \mapsto \pi$ 给出

$$\rho_\pi \colon V \otimes^L_{K_0} K \cong \mathcal{E}_V(\mathcal{O}_K).$$

作为完美 K-复形。对于另一个一致化元 $\pi' = a\pi$ $(a \in \mathcal{O}_K^\times)$，我们有

$$\rho_{\pi'} = \rho_\pi \circ \exp(\log(a)eN) \quad with \quad \exp(\log(a)eN) \coloneqq \sum_{n\geq 0} \frac{(\log(a)e)^n}{n!} N^n.$$

(4) $h^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{E}_V = \epsilon_{i^0 \circ h}(V)$，且 $(h^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{E}_V)(A_{\mathrm{cris}})$ 是 $B^+{}_{\mathrm{cris}}$-模中的一个完美复形，带有彼此交换的 ϕ 和 Gal_K 作用。
(5) 我们有同构

$$V \otimes^L_{K_0} \widehat{B}^+_{\mathrm{st}} \cong (h^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{E}_V)(\widehat{A}_{\mathrm{st}}) \cong (h^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{E}_V)(A_{\mathrm{cris}}) \otimes^L_{B^+_{\mathrm{cris}}} \widehat{B}^+_{\mathrm{st}}$$

在与 ϕ、 N 以及 $\mathrm{Gal}(K/K)$ 作用相容的 $\widehat{B}^+_{\mathrm{st}}$-模中的完美复形之间，其中左边的$\overline{\ }N$ 是 $N \otimes 1 + 1 \otimes N$，右边的 N 是 $1 \otimes N$。这诱导出 B^+_{st}-模中的完美复形之间的同构

$$\rho_{\mathrm{st}} \colon V \otimes^L_{K_0} B^+_{\mathrm{st}} \cong (h^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{E}_V)(A_{\mathrm{cris}}) \otimes^L_{B^+_{\mathrm{cris}}} B^+_{\mathrm{st}}$$

与 ϕ、 N 以及 $\mathrm{Gal}(K/K)$ 作用相容。
(6) 我们有同构

$$\mathcal{E}_V(\mathcal{O}_K) \otimes^L_K A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}] \cong (h^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{E}_V)(A_{\text{log-cris},K}) \cong (h^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{E}_V)(A_{\mathrm{cris}}) \otimes^L_{B^+_{\mathrm{cris}}} A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}].$$

将 u 映到 π 的映射 $S_K \to \mathcal{O}_K$ 给出 $B^+_{\mathrm{st}} \to \widehat{B}^+_{\mathrm{st}} \to A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}]$，从而得到交换图

$$\begin{array}{ccc} V \otimes^L_{K_0} A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}] & \xrightarrow{\rho_{\mathrm{st}} \otimes A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}]} & (h^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{E}_V)(A_{\mathrm{cris}}) \otimes^L_{B^+_{\mathrm{cris}}} A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}] \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_\pi \otimes A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}]} & \nearrow & \\ \mathcal{E}_V(\mathcal{O}_K) \otimes^L_K A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}]. & & \end{array}$$

证明。 (1) 这是 [Bei11，第 1.15 节，注释 (iv)]。

(2) 第一部分由 Dwork技巧应用于 ϕ-等变满射$S_K \to W$得出；参见 [Bei11, § 1.13, 命题]。第二部分由 [Bei11, § 1.15, 定理-构造] 及其证明得出。为解释这一点，我们沿用其中的记号。首先注意， $i^0{}_{,\,*\,\mathrm{CRIS}\epsilon}$ 也可表示为 $(i^*_{\mathrm{CRIS}})^{-1} \circ (i^*_{\mathrm{CRIS}} i^0{}_{,\,*\,\mathrm{CRIS}\epsilon})$，其中 $(i^*_{\mathrm{CRIS}})^{-1}$ 由针对 F-晶体的 Dwork技巧给出（参见其中的证明 (iii)(b)）。现在我们展开后一个描述，因为它与第一部分中的同构相容。

令$\overline{p} \in \Gamma(Y_1^0, M_{Y_1^0})$为 $p \in M_{\mathrm{can}}$在 $W(k)$上的像，并令 $\pi \in \Gamma(Y_0, \overline{M}_{Y_0})$为 $\pi \in M_{\mathrm{can}}$在 $\mathcal{O}_K$上的像。记$(i^0 \circ i)^{-1}(p) = a\pi^e (a \in k^\times)$。于是，$i^*_{\mathrm{CRIS}}\overline{i^0, *_{\mathrm{CRIS}}\epsilon}$由构造可知是 $\epsilon_{a\pi^e}$，且 $\epsilon_{\overline{a\pi^e}}(V, \phi, N) = \epsilon_\pi(V, \phi, \overline{eN})$。

为描述 ϵ_π 和 $(i^*_{\mathrm{CRIS}})^{-1}$，令 $S_{K_0} = W(k)\{s\}_{\mathrm{PD}}$ 表示 $W(k)$上关于 p 完备化的 PD 多项式代数，其对数结构由 $\mathbb{N} \to S_{K_0}$ 给出，其中 1 映至 s。那么，F-等晶体 $\mathcal{E} := \epsilon_\pi(V, \phi, eN)$ 由一个 $S_{K_0}[p^{-1}]$-模 $V \otimes_{K_0} S_{K_0}[\overline{p^{-1}}]$ 给出，其 Frobenius 为 $\phi \otimes \phi_{S_{K_0}[p^{-1}]}$，拓扑幂零对数联络 ∇ 由 $\nabla(v \otimes x) = eN(v) \otimes x\, d\log s + v \otimes dx$ 给出（参见证明 (iii)(a)）。现在取 $m \gg 0$，使得存在映射 ϕ_m: $S_{K_0} \to S_K$，将 s 映至 u^{p^m}。那么，$S_K[p^{-1}]$ 上的对数联络 $\phi_m^*(V \otimes_{K_0} S_{K_0}[p^{-1}], \nabla)$ 表示 F-等晶体 $(F^*_{Y_1}\text{,CRIS})^m((i^*_{\mathrm{CRIS}})^{-1}\mathcal{E})$，其底层 $S_K[p^{-1}]$-模由 [给出；根据 Bei11，第 1.13 节，命题] ，该模为 $(\phi^*_{K_0})^m V \otimes_{K_0} S_K[p^{-1}]$。这里，$F^*_{Y_1}$,CRIS 对应于沿 $\phi_{S_K[p^{-1}]}$ 对对数联络作拉回。由 $\phi_m^* d\log s = p^m d\log u$ 和 $(\phi^m_{S_K[p^{-1}]})^* d\log u = p^m d\log u$，我们推得第二个断言。

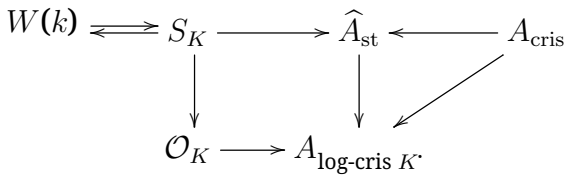
(3) 第一部分由 $\mathcal{E}_V$的晶体性质可得。对于第二部分，我们可以假设 V是一个有效的（ϕ, N）-模，且 $\mathcal{E}_V$是一个 F-等晶体。在这种情况下，该公式可由 (2) 以及涉及 S_K的自乘积 $S_K^{(1)}$ 的标准计算得到；相关计算见 [HK94, Thm. 5.1] 或 [Tsu99, Rem. 4.4.18] 。

(4) 这是显然的。

(5) 根据注 6.32，我们可以假设 V是一个有效的（ϕ, N）-模。第一部分中的同构由 $h^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{E}$ 的晶体性质和 (2) 给出。根据构造，这些同构与 ϕ 和 Gal(K/K)-作用相容。因此，只需证明它们也与单值算子相容。由引理 6.34(2) 和类似的论证可知，A_{st} 是（Y_1, M_{Y_1}）^{op}CRIS 中的弱初始归纳对象，其自余积为（h_{CRIS},$*\mathcal{O}_{Y_1}/\mathbb{Z}_p$）（$S_K^{(1)}$）。由此以及一个标准论证可知，拟凝聚$\mathcal{O}_{Y_1}/\mathbb{Z}_p$-模范畴等价于由如下对象对组成的范畴：$(E, \nabla)$，其中 E是一个p-进完备的 A_{st}-模，且 ∇: $E \to E\, d\log u$是一个与 $\nabla_{\widehat{A}_{\mathrm{st}}}$相容的拓扑幂零对数联络。令 ∇ 表示由等晶体 $h^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{E}_V$ 给出的 $\widehat{B}^+_{\mathrm{st}}$-模$(h^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{E}_V)(A_{\mathrm{st}})$上的对数联络，并在$(h^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{E}_V)(A_{\mathrm{st}})$上定义自同态 $\mathcal{N}$： $\nabla(v) = e\mathcal{N}(v)\, d\log u$。由于 ∇ 是 (2) 中对数联络的拉回，我们看到，识别$V \otimes_{K_0} \widehat{B}^+_{\mathrm{st}} \cong (h^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{E}_V)(\widehat{A}_{\mathrm{st}})$将 $N \otimes 1 + 1 \otimes N$映至$\mathcal{N}$。由于 A_{cris}是（Y_1, M_{Y_1}）^{op}CRIS 中的初始归纳对象（引理 6.34(1)），我们推得识别$(h^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{E}_V)(\widehat{A}_{\mathrm{st}}) \cong (h^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{E}_V)(A_{\mathrm{cris}}) \otimes_{B^+\text{cris}} \widehat{B}^+_{\mathrm{st}}$将 $\mathcal{N}$映至 $1 \otimes N$。第二部分由第一部分、命题 6.38 以及 N 在V上的幂零性可得。

(6) 第一部分中的同构由 $h^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{E}$的晶体性质以及(3)给出。第二个断言由(2)、(3)、(5)中的构造并利用

晶体性质与Dwork技巧，以及下面显然的交换图



□

注记 6.40。 命题 6.39 的第 (2) 部分可推广如下。设 $p_0, p_1\colon S_K \to S_K^{(1)}$ 表示这些投影。则 $p_1\colon S_K \to S_K^{(1)}$ 可扩张为一个 S_K-代数同构 $S_K\{v\}_{\mathrm{PD}} \xrightarrow{\cong} S_K^{(1)}$，其中 $S_K\{v\}_{\mathrm{PD}}$ 表示关于 v 的 p-完备 PD 多项式代数，而该映射由将 v 映至 $p_0(u)/p_1(u) - 1$ 定义。将此同构的逆与 S_K-线性投影 $S_K\{v\}_{\mathrm{PD}} = \widehat{\oplus}_{n\geq 0} S_K v^{[n]} \to S_K v^{[1]} = S_K$ 复合，并对 p求逆，可得到一个 $S_K[p^{-1}]$-线性映射 $f\colon S_K^{(1)}[p^{-1}] \to S_K[p^{-1}]$。

设 V 和 $\mathcal{E}_V$ 如命题 6.39 中所述。考虑 K_0-线性映射

$$e\mathcal{N}\colon \mathcal{E}_V(S_K) \to \mathcal{E}_V(S_K) \otimes^L_{S_K, p_0} S_K^{(1)} \cong \mathcal{E}_V(S_K^{(1)}) \cong \mathcal{E}_V(S_K) \otimes^L_{S_K, p_1} S_K^{(1)} \to \mathcal{E}_V(S_K),$$

其中，第一个映射（分别地，最后一个映射）由 p_0 （分别地， f）诱导。在由 (2) 给出的同构 $V \cong \mathcal{E}_V(S_K) \otimes^L_{S_K[p^{-1}]} K_0$ 下， V 上的单值算子 N 对应于 $\mathcal{N} \otimes \mathrm{id}_{K_0}$；为此，我们可以假设 V 是一个有效的（ϕ， N）-模，此时结论由 (2) 的第二部分以及以下事实得出： $d\log u$ 对应于 $p_0(u)/p_1(u) - 1$ 在 $J/J^{[2]}$ 中的像，其中 $J = \mathrm{Ker}(S_K^{(1)} \to S_K)$。

6.8. **Hyodo–Kato 上同调**。在本小节中，我们将 § 6.7 中的 Hyodo–Kato 理论应用于完备棱柱 F-晶体的晶体实现的上同调。为此，我们首先需要绕道讨论一些内容。

令 $(Y_1, M_{Y_1}) := (\mathrm{Spf}\ \mathcal{O}_K, M_{\mathrm{can}}) \times_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/p$ 如 § 6.7 中所述。记 $\mathcal{D}_{\mathrm{perf}}((Y_1, M_{Y_1})_{\mathrm{CRIS}})$ 为 $\mathcal{O}_{Y_1}/\mathbf{Z}_p$-模的完美复形的导出 ∞-范畴，即 $\mathcal{D}((Y_1, M_{Y_1})_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{O}_{Y_1}/\mathbf{Z}_p)$ 中由完美复形构成的全子范畴。令 $\mathcal{D}^{\phi}\,\mathrm{perf}((Y_1, M_{Y_1})_{\mathrm{CRIS}})^{\sim}$ 为由二元组 $(\mathcal{K}, \phi_{\mathcal{K}})$ 构成的 ∞-范畴，其中 $\mathcal{K} \in \mathcal{D}_{\mathrm{perf}}((Y_1, M_{Y_1})_{\mathrm{CRIS}})$，且 $\phi_{\mathcal{K}}\colon LF^*_{Y_1,\mathrm{CRIS}}\mathcal{K} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{K}$ 是 $\mathcal{D}_{\mathrm{perf}}((Y_1, M_{Y_1})_{\mathrm{CRIS}})_{\mathbf{Q}} := \mathcal{D}_{\mathrm{perf}}((Y_1, M_{Y_1})_{\mathrm{CRIS}}) \otimes_{\mathcal{D}(\mathbf{Z})} \mathcal{D}(\mathbf{Q})$ 中的一个同构。注意，§ 6.7 中已将 $\mathcal{D}_{\mathrm{perf}}((Y_1, M_{Y_1})_{\mathrm{CRIS}})$ 的同伦范畴识别为 $D^{\mathrm{pcr}}_{\phi}(Z, M_Z)$。由 p-完备忠实平坦下降，我们得到一个自然等价

$$\mathcal{D}^{(\phi)}_{\mathrm{perf}}((Y_1, M_{Y_1})_{\mathrm{CRIS}}) \cong \lim_{[n]\in\Delta} \mathcal{D}^{(\phi)}_{\mathrm{perf}}(S_K^{[n]}), \tag{6.6}$$

其中 $S_K^{[n]}$ 是 Breuil 对数棱柱的第 $(n+1)$ 个自余积（参见定理 6.21）。

设 (X, M_X) 是一个在形式谱 $\mathcal{O}_K$ 上的真半稳定 p-进形式概形。并令 $(X_i, M_{X_i}) := (X, M_X) \times_{(\mathcal{Y}, M_{\mathcal{Y}})} (Y_i, M_{Y_i})$，其中 $i = 0, 1$。令 $\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}} \in$向量丛$^{\mathrm{an},\phi}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}})$ 为 $(X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$ 上的解析棱柱 F-晶体，并按定义 6.23 将 $(\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}, \phi_{\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}})$ 记为 $j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 的晶体实现。

构造 6.41. 沿用上述设定。回忆一下， $R\Gamma_{\mathrm{Br}}(X, i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}))$ 满足以下性质：

- $R\Gamma_{\mathrm{Br}}(X,\ i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}))$ 属于 $\mathcal{D}_{\text{完美}}(S_K)$，并满足关于 $S_K[p^{-1}]$ 的 Frobenius 等源性质（定理 6.19、命题 6.20、定理 6.21(1) 和 6.26）；
- 对任意投影映射 $S_K \to S_K^{[n]}$，ϕ-等变映射

$$R\Gamma_{\mathrm{Br}}(X, i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})) \otimes^L_{S_K} S_K^{[n]} \to R\Gamma((X_{S_K^{[n]}/p}/(S_K^{[n]}, M_{\operatorname{Spf} S_K^{[n]}}))_{\mathbb{\Delta}}, i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}))$$

是一个同构（定理 6.21(1)）。

通过等价（6.6），这给出了完美复形中的一个 F-等晶体（$\mathcal{K}_{\mathrm{cris}} := \mathcal{K}_{\mathrm{cris}}(i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}))$ $\phi_{\mathcal{K}_{\mathrm{cris}}}$）$\in \mathcal{D}^{\phi}{}_{\text{完美}}((Y_1,\ M_{Y_1})_{\mathrm{CRIS}})$，满足

$$\mathcal{K}_{\mathrm{cris}}(i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}))(S_K^{[n]}) \cong R\Gamma((X_{S_K^{[n]}/p}/(S_K^{[n]}, M_{\operatorname{Spf} S_K^{[n]}}))_{\mathbb{\Delta}}, i(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})).$$

展开这一构造可知，存在 $m \geq 0$，使得（$\mathcal{K}_{\mathrm{cris}}$，$p^m\phi_{\mathcal{K}_{\mathrm{cris}}}$）属于 $D_\phi^{\mathrm{pcr}}(Z,\ M_Z)^{\mathrm{nd}} \subset D_\phi^{\mathrm{pcr}}(Z,\ M_Z)$。因此，对（$\mathcal{K}_{\mathrm{cris}}$，$p^m\phi_{\mathcal{K}_{\mathrm{cris}}}$）$_{\mathbf{Q}} \in D_\phi^{\mathrm{pcr}}(Z,\ M_Z)^{\mathrm{nd}}_{\mathbf{Q}}$应用定理 6.31，并将 Frobenius 通过 p^{-m} 扭曲回来，我们得到（$V,\ \phi,\ N$）$\in D_{\phi,\ N}(K_0)$。

定理 6.42. 上述$(V, \phi, N) \in D_{\phi,N}(K_0)$满足以下性质。

作为完美复形中的 ϕ-模，我们有

$$V \cong R\Gamma(((X_0, M_{X_0})/(W(k), M_0))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}).$$

作为完美复形中的 ϕ-模，我们有

$$V \otimes^L_{K_0} S_K[p^{-1}] \cong R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(S_K, M_{S_K}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}).$$

每个一致化元 $\pi \in \mathcal{O}_K$ 都会给出完美 K-复形的一个同构

$$\rho_\pi \colon V \otimes^L_{K_0} K \cong R\Gamma(X, (E \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega^\bullet_{X/\mathcal{O}_K}, \nabla_E)) \otimes^L_{\mathcal{O}_K} K,$$

其中(E, ∇_E) 是定义 *6.23* 中与 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris}}$ 相关联的 X 上的可积对数联络。对于 $\pi' = a\pi (a \in \mathcal{O}_K^\times)$，我们有 $\rho_{\pi'} = \rho_\pi \circ \exp(\log(a) eN)$。

我们有一个 B^+_{st}-模中的完美复形之间的同构

$$\rho_{\mathrm{st}} \colon V \otimes^L_{K_0} B^+_{\mathrm{st}} \cong R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p}, M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(A_{\mathrm{cris}}, M_{A_{\mathrm{cris}}}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \otimes^L_{B^+_{\mathrm{cris}}} B^+_{\mathrm{st}}$$

与 ϕ、N 以及 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-作用相容。

(5) 我们有同构

$$\begin{aligned} &R\Gamma(X, (E \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega^\bullet_{X/\mathcal{O}_K}, \nabla_E)) \otimes^L_{\mathcal{O}_K} A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}] \\ &\quad \cong R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p}, M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(A_{\text{log-cris},K}, M_{A_{\text{log-cris},K}}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \\ &\quad \cong R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p}, M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(A_{\mathrm{cris}}, M_{A_{\mathrm{cris}}}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \otimes^L_{B^+_{\mathrm{cris}}} A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}]. \end{aligned}$$

将 u 映到 π 的映射 $S_K \to \mathcal{O}_K$ 给出 $B^+_{\mathrm{st}} \to \widehat{B}^+_{\mathrm{st}} \to A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}]$，它将上述复合等同于 $(\rho_{\mathrm{st}} \otimes A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}]) \circ (\rho_\pi^{-1} \otimes A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}])$。

我们用 $R\Gamma_{\mathrm{HK}}((X_0, M_{X_0}) \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}))$ 表示 (V, ϕ, N)，并称之为相伴于 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}$ 的 Hyodo–Kato 复形。

关于上述陈述右侧的记号，请参见下文的定理 6.26（及其后续段落）和命题 6.43。

证明。我们使用命题 6.39。（2）由以下同构给出

$$V \otimes^L_{K_0} S_K[p^{-1}] \cong R\Gamma_{\mathrm{Br}}(X, i(\mathcal{E}_{\mathbb{A}})) \otimes^L_{S_K} S_K[p^{-1}] \cong R\Gamma_{\mathrm{Br}}(X, j_*\mathcal{E}_{\mathbb{A}}) \otimes^L_{S_K} S_K[p^{-1}]$$
$$\cong R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(S_K, M_{S_K}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})$$

其中，第一个同构由构造和命题 6.39(2) 得出，第二个由定理 6.21 ($A = S_K$) 得出，第三个由定理 6.26 得出。利用 (2)，第 (1) 部分也可由命题 6.39(1)、定理 6.21 ($A = W(k)$) 和定理 6.26(1) 得出。同理，对于 $h\colon (Y_1,\ M_{Y_1}) := (\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_C/p,\ (\mathcal{O}_C \smallsetminus \{0\})^a) \to (Y_1,\ M_{Y_1})$，第 (2) 部分、定理 6.21 ($A = A_{\mathrm{cris}}$) 和定理 6.26(3) 给出一个 $B^+_{\ \mathrm{cris}}$-模中的完美复形同构 $(h^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{K}_{\mathrm{cris}})(A_{\mathrm{cris}}) \cong R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p},\ M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(A_{\mathrm{cris}},\ M_{A_{\mathrm{cris}}}))_{\mathrm{CRIS}},\ \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\ \mathbf{Q}})$；这里我们使用了 [DMS26, 命题 4.4] 给出的识别：

$$(h^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{K}_{\mathrm{cris}})(A_{\mathrm{cris}}, (\mathcal{O}_{C^\flat} \smallsetminus \{0\} \to A_{\mathrm{cris}})^a) = \mathcal{K}_{\mathrm{cris}}(A_{\mathrm{cris}}, (\mathbf{N} \to A_{\mathrm{cris}}, 1 \mapsto [\pi^\flat])^a).$$

因此，(4) 由命题 6.39(5) 得出。(3) 由 (2)、定理 6.24、下文的命题 6.39(3) 和 6.43(2) 得出。(5) 由 (2)、下文的命题 6.39(6) 和 6.43(1)、(3) 得出。□

命题 6.43. 沿用上述设定。

(1) 采用定义 *6.33(2)* 中的记号，映射

$$R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(S_K, M_{S_K}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \otimes^L_{S_K[p^{-1}]} A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}]$$
$$\to R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p}, M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(A_{\text{log-cris},K}, M_{A_{\text{log-cris},K}}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})$$

由 $\iota_1, \iota_2\colon\ S_K \to A_{\text{log-cris},\ K}$ 诱导的映射是 $D(A_{\text{log-cris},\ K}[p^{-1}])$ 中的同构。

(2) 映射

$$R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(S_K, M_{S_K}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \otimes^L_{S_K[p^{-1}]} K$$
$$\to R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(\mathcal{O}_K, M_{\mathrm{can}}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})$$

由 $S_K \to \mathcal{O}_K$ *(*$u \mapsto \pi$*)* 给出的映射是 $D(K)$ 中的同构。

(3) 基变换

$$R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p}, M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(A_{\mathrm{cris}}, M_{A_{\mathrm{cris}}}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \otimes^L_{B^+_{\mathrm{cris}}} A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}]$$
$$\to R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p}, M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(A_{\text{log-cris},K}, M_{A_{\text{log-cris},K}}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})$$

is an isomorphism in $D(A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}])$.

证明。这些断言是按照定义 B.1 的意义在晶体位上表述的，但在证明中，我们通过命题 B.8 使用定义 B.7 中的晶体位，如命题 6.30 中所述。

我们使用 Čech 神经 (X_1,形式谱 $S^{\mathrm{rel}}_{\bullet,\Lambda}$) 以及同构

$$i(\mathcal{E}_{\mathbb{A}})(S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda) \otimes^L_{S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda} S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda[p^{-1}] \cong j_*\mathcal{E}_{\mathbb{A}}(S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda) \otimes^L_{S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda} S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda[p^{-1}] \cong \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}(S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda)$$

见构造 6.29 和命题 6.30 的证明。

(1) 我们有

$$R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(\mathrm{Spf}\ S_K)^\sharp)_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \cong \mathrm{Tot}(\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}(S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\Lambda)).$$

类似地，考虑由 $(X_{\mathcal{O}_C/P}, \text{Spf } S^{\text{rel}}_{,\Lambda}{}^{[\bullet]}\widehat{\otimes}_{S_K,\iota_1} A_{\text{log-cris},K})$ 给出的、作用于 $((X_{\mathcal{O}_C/p}, M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(\text{Spf } A_{\text{log-cris},K})^\sharp)_{\text{CRIS}}$ 上的 Čech 神经，我们得到一个同构

$$R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p},\ M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(\text{形式谱 } A_{\text{log-cris},\ K})^\sharp)_{\text{CRIS}},\ \mathcal{E}_{\text{cris},\ \mathbf{Q}}) \cong \text{Tot}(\mathcal{E}_{\text{cris},\ \mathbf{Q}}(S^{\text{rel}}_{,\ \Lambda}{}^{[\bullet]}\widehat{\otimes}_{S_K,\ \iota_1} A_{\text{log-cris},\ K})).$$

由于 $\iota_1\colon S_K \to A_{\text{log-cris},K}$ 根据下文引理 6.2 和 6.44 具有有限的 p-完备Tor振幅，由 ι_1给出的基变换

$$\begin{aligned} R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(\text{Spf } S_K)^\sharp)_{\text{CRIS}}, \mathcal{E}_{\text{cris},\mathbf{Q}}) \otimes^L_{S_K,\iota_1} A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}] \\ \to R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p}, M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(\text{Spf } A_{\text{log-cris},K})^\sharp)_{\text{CRIS}}, \mathcal{E}_{\text{cris},\mathbf{Q}}) \end{aligned}$$

是一个同构；如同定理 6.21 的证明中那样使用引理 6.6。由此对 ι_1得到(1)。

对于 ι_2，回顾构造 6.41 中给出的完美复形中的 F-等晶体 $\mathcal{K}_{\text{cris}} \in \mathcal{D}^{\phi\text{完美}}((Y_1, M_{Y_1})_{\text{CRIS}})$；我们有

$$\mathcal{K}_{\text{cris}}(S_K) \otimes^L_{S_K,\iota_1} A_{\text{log-cris},K} \cong \mathcal{K}_{\text{cris}}(A_{\text{log-cris},K}) \cong \mathcal{K}_{\text{cris}}(S_K) \otimes^L_{S_K,\iota_2} A_{\text{log-cris},K}.$$

由于根据命题6.20以及定理6.21和6.26，$\mathcal{K}_{\text{cris}}(S_K) \otimes^L_{S_K} S_K[p^{-1}] \cong R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(\text{形式谱 } S_K)^\sharp)_{\text{CRIS}}, \mathcal{E}_{\text{cris},\mathbf{Q}})$，这表明对 ι_2成立(1)。

(2) 我们有

$$R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(\text{Spf } \mathcal{O}_K)^\sharp)_{\text{CRIS}}, \mathcal{E}_{\text{cris}}) \cong \text{Tot}(\mathcal{E}_{\text{cris}}(S^{\text{rel},[\bullet]}_\Lambda \widehat{\otimes}_{S_K} \mathcal{O}_K)).$$

由于 $\mathcal{O}_K \to A_{\text{log-cris},K}$ 是平坦的，基变换

$$\begin{aligned} (R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(\text{Spf } \mathcal{O}_K)^\sharp)_{\text{CRIS}}, \mathcal{E}_{\text{cris}}) \widehat{\otimes}^L_{\mathcal{O}_K} A_{\text{log-cris},K}) \otimes^L_{A_{\text{log-cris},K}} A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}] \\ \to R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p}, M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(\text{Spf } A_{\text{log-cris},K})^\sharp)_{\text{CRIS}}, \mathcal{E}_{\text{cris},\mathbf{Q}}) \end{aligned}$$

如上所述，由引理 6.6 可知这是一个同构。注意

$$R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(\text{Spf } \mathcal{O}_K)^\sharp)_{\text{CRIS}}, \mathcal{E}_{\text{cris}}) \otimes^L_{\mathcal{O}_K} A_{\text{log-cris},K}$$

是导出的 p-完备的，因为 $R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(\text{形式谱 } \mathcal{O}_K)^\sharp)_{\text{CRIS}}, \mathcal{E}_{\text{cris}}) \in D_{\text{perf}}(\mathcal{O}_K)$（定理 6.24），并且 $A_{\text{log-cris},K}$ 是 p-完备的。因此，上述的 $\widehat{\otimes}^L_{\mathcal{O}_K} = \otimes^L_{\mathcal{O}_K}$，且映射

$$\begin{aligned} R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(\text{Spf } \mathcal{O}_K)^\sharp)_{\text{CRIS}}, \mathcal{E}_{\text{cris},\mathbf{Q}}) \otimes^L_{\mathcal{O}_K} A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}] \\ \to R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p}, M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(\text{Spf } A_{\text{log-cris},K})^\sharp)_{\text{CRIS}}, \mathcal{E}_{\text{cris},\mathbf{Q}}) \end{aligned}$$

是一个同构。

现在，考虑基变换

$$\begin{aligned} R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(\text{Spf } S_K)^\sharp)_{\text{CRIS}}, \mathcal{E}_{\text{cris},\mathbf{Q}}) \otimes^L_{S_K} K \\ \to R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(\text{Spf } \mathcal{O}_K)^\sharp)_{\text{CRIS}}, \mathcal{E}_{\text{cris},\mathbf{Q}}). \end{aligned}$$

根据 (1) 及上述内容，这在 $-\otimes^L_K A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}]$ 之后成为一个同构（适用于 ι_2）。由于 $\mathcal{O}_K \to A_{\text{log-cris},K}$ 是经典忠实平坦的，我们得出 (2)。

(3) 注意到

$$R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p}, M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(\text{Spf } A_{\text{cris}})^\sharp)_{\text{CRIS}}, \mathcal{E}_{\text{cris},\mathbf{Q}}) \cong \text{Tot}(\mathcal{E}_{\text{cris},\mathbf{Q}}(S^{\text{rel},[\bullet]}_\Lambda \widehat{\otimes}_{S_K} A_{\text{cris}})).$$

由于 $A_{\mathrm{cris}} \to A_{\text{log-cris},\ K}$ 根据下文的引理 6.44 具有有限的 p-完备 Tor振幅，故 (3) 由引理 6.6 按照 (1) 中的类似方式得出。□

Lemma 6.44. 映射 $A_{\mathrm{cris}} \to A_{\text{log-cris},K}$ 具有有限的 p-完备 *Tor*振幅 $de.$

证明。首先考虑 $(S_K \otimes_{W(k)} \mathcal{O}_K)[\frac{v}{\pi}] := (S_K \otimes_{W(k)} \mathcal{O}_K)[x]/(\pi x - v)$，其中 $v := u - \pi$。则映射 $S_K \to (S_K \otimes_{W(k)} \mathcal{O}_K)[\frac{v}{\pi}]$ 具有有限的 p-完备 Tor振幅。设 $(S_K \otimes_{W(k)} \mathcal{O}_K)\{\frac{v}{\pi}\}_{\mathrm{PD}}$ 为满射 $(S_K \otimes_{W(k)} \mathcal{O}_K)[\frac{v}{\pi}] \to \mathcal{O}_K$ 的 p-完备化 PD 包络，该满射将 u 映到 π，并将 $\frac{v}{\pi}$ 映到 0。我们断言该序列

$$0 \to (S_K \otimes_{W(k)} \mathcal{O}_K\big[\frac{v}{\pi}\big])\{T\}_{\mathrm{PD}} \to (S_K \otimes_{W(k)} \mathcal{O}_K\big[\frac{v}{\pi}\big])\{T\}_{\mathrm{PD}} \to (S_K \otimes_{W(k)} \mathcal{O}_K)\big\{\frac{v}{\pi}\big\}_{\mathrm{PD}} \to 0$$

是正合的，其中 $(S_K \otimes_{W(k)} \mathcal{O}_K[\frac{v}{\pi}])\{T\}_{\mathrm{PD}}$ 表示 $(S_K \otimes_{W(k)} \mathcal{O}_K)[\frac{v}{\pi}]$ 上以 T 为变元的 p-完备化 PD 多项式代数，第一个单射是乘以 $T - \frac{v}{\pi}$，第二个满射由 $T^{[n]} \mapsto (\frac{v}{\pi})^{[n]}$ 给出；中间的正合性可通过将 $(S_K \otimes_{W(k)} \mathcal{O}_K[\frac{v}{\pi}])\{T\}_{\mathrm{PD}}$ 与 $(S_K \otimes_{W(k)} \mathcal{O}_K)\{\frac{v}{\pi}\}_{\mathrm{PD}}$ 分别实现为 $K[\![v, T]\!]$ 与 $K[\![v]\!]$ 的子环来验证。由于 $(S_K \otimes_{W(k)} \mathcal{O}_K[\frac{v}{\pi}])\{T\}_{\mathrm{PD}}$ 在 $(S_K \otimes_{W(k)} \mathcal{O}_K[\frac{v}{\pi}])$ 上是 p-完全平坦的，我们推出 $S_K \to (S_K \otimes_{W(k)} \mathcal{O}_K)\{\frac{v}{\pi}\}_{\mathrm{PD}}$ 具有有限的 p-完备 Tor振幅。

现在，对每个 $n \geq 1$，映射 $A_{\mathrm{cris}}/p^n \to A_{\text{log-cris},\ K}/p^n$ 由 $S_K/p^n \to (S_K \otimes_{W(k)} \mathcal{O}_K)\{\frac{v}{\pi}\}_{\mathrm{PD}}/p^n$ 经由 $S_K/p^n \to A_{\mathrm{cris}}/p^n$ 这一经典平坦的基变换得到（引理 6.2）。因此，$A_{\mathrm{cris}} \to A_{\text{log-cris},\ K}$ 具有有限的 p-完备 Tor 振幅。□

备注 6.45。利用备注 6.40，我们可以如下描述作用于 $R\Gamma_{\mathrm{HK}}((X_0,\ M_{X_0})\mathcal{E}_{\text{cris},\ \mathbf{Q}})$ 上的单值算子 N。如定理 6.42(2) 所示，我们有一个同构

$$\mathcal{K}_{\mathrm{cris}}(i(\mathcal{E}_{\mathbb{A}}))(S_K^{(1)}) \cong R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(S_K^{(1)}, M_{S_K^{(1)}}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})$$

由定理 6.21（$A = S_K^{[1]} = S_K^{(1)}$）和 6.26(2) 得出，并且此同构在沿 p_0，p_1 进行基变换时，与 $\mathcal{K}_{\mathrm{cris}}(i(\mathcal{E}_{\mathbb{A}}))(S_K) \cong R\Gamma(((X_1,\ M_{X_1})/(S_K,\ M_{S_K}))_{\mathrm{CRIS}},\ \mathcal{E}_{\text{cris},\ \mathbf{Q}})$ 兼容：$S_K \to S_K^{(1)}$。定义 $e\mathcal{N}$ 为如下复合所给出的 K_0-线性映射

$$\begin{aligned} &R\Gamma((X_1/S_K)_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \to R\Gamma((X_1/S_K)_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \otimes^L_{S_K[p^{-1}],p_0} S_K^{(1)}[p^{-1}] \\ \cong\ &R\Gamma((X_1/S_K^{(1)})_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \cong R\Gamma((X_1/S_K)_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \otimes^L_{S_K[p^{-1}],p_1} S_K^{(1)}[p^{-1}] \\ &\to R\Gamma((X_1/S_K)_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \end{aligned}$$

如备注 6.40 所示（记号显然作了简化）。通过如下识别 $R\Gamma_{\mathrm{HK}}((X_0, M_{X_0})\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \cong R\Gamma((X_1/S_K)_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \otimes^L_{S_K[p^{-1}]} K_0$，$N$ 对应于 $\mathcal{N} \otimes \mathrm{id}_{K_0}$。当 $j_*\mathcal{E}_{\mathbb{A}} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ 时，我们的 N 与 [HK94, (3.5)] 和 [Tsu99, 第 4 节3] 中的约定一致，相差一个乘以 e 的因子（见 [Tsu99, 第 4 节3]的最后一段）。

注记 6.46。设 $(E,\ \nabla_E)$ 是一个有限生成的 $\mathcal{O}_X$-模，在 X 上带有对数可积联络，对应于 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris}}$ 上的有限生成 p-进完备晶体，该对应关系由 [DMS26, 命题 6.18] 和命题 B.8 给出。记 $(E_{\mathbf{Q}},\ \nabla_{E_{\mathbf{Q}}})$ 为其在 X 上的关联有限局部自由等相干层及其可积联络（参见 [DLMS26, 定义 B.12]）。定理 6.24 给出同构

$$R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(\mathcal{O}_K, M_{\mathrm{can}}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \cong R\Gamma(X, (E_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega^{\bullet}_{X/\mathcal{O}_K}, \nabla_{E_{\mathbf{Q}}})).$$

令 $((X,\ M_X)/(\mathcal{O}_K,\ M_{\mathrm{can}}))_{\mathrm{conv}}$ 为 [DLMS26, 定义 B.27] 中的对数收敛位点。根据 [DLMS26, 命题 B.32、B.30], , 我们将 $(X_1,\ M_{X_1})$ 上的有限局部自由 F-等晶体 $(\mathcal{E}_{\mathrm{cris}},\ \mathbf{Q},\ \phi_{\mathcal{E}_{\mathrm{cris}}},\ \mathbf{Q})$ 与 $((X,\ M_X)/(\mathcal{O}_K,\ M_{\mathrm{can}}))_{\mathrm{conv}}$ 上的一个等晶体 $\mathcal{E}_{\mathrm{conv}}$ 以及一般纤维 X_K 上带可积联络的向量丛 $(\mathbf{E}\ \nabla_{\mathbf{E}})$ 关联起来。由 [DLMS26, 注 B.33] 可知，$(\mathbf{E}\ \nabla_{\mathbf{E}})$ 与 $(E_{\mathbf{Q}},\ \nabla_{E_{\mathbf{Q}}})$ 自然同一。我们还有同构

$$\begin{aligned} R\Gamma(X,(E_{\mathbf{Q}}\otimes_{\mathcal{O}_X}\omega^{\bullet}_{X/\mathcal{O}_K},\nabla_{E_{\mathbf{Q}}}))&\cong R\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K,\mathbf{E}):=R\Gamma(X_K,(\mathbf{E}\otimes\Omega^{\bullet}_{X_K/K},\nabla_{\mathbf{E}}))\\ &\cong R\Gamma(((X,M_X)/(\mathcal{O}_K,M_{\mathrm{can}}))_{\mathrm{conv}},E_{\mathrm{conv}}),\end{aligned}$$

其中，第一个结论可通过谱序列论证，由 X 上等凝聚层的上同调与相应凝聚层的上同调之间的比较轻易推出；第二个结论则由 [Shi02, Cor. 2.3.9, Def. 2.2.12] 和 [DLMS26, Rem. B.29(3)] 得出。根据定理 6.42(3)，每个一致化子 $\pi\in\mathcal{O}_K$ 都将 $R\Gamma_{\mathrm{HK}}((X_0,\ M_{X_0})\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\ \mathbf{Q}}))\otimes^{L}_{K_0}K$ 与上述任意一个彼此同构的复形等同起来。

7. 对 C_{st}-猜想的应用

在本节中，设 $(X,\ M_X)$ 是形式谱 $\mathcal{O}_K$ 上的半稳定 p-进形式概形，且 $X\to\mathrm{Spf}\ \mathcal{O}_K$ 是真概形。我们结合 [Tia25] 中证明的棱柱-étale 比较定理以及前几节的结果，研究 $(X,\ M_X)$ 关于系数取为半稳定局部系统时的 C_{st}-猜想。

7.1. 半稳定 $\mathbb{Z}_p$-局部系统与解析棱柱 F-晶体。我们首先回顾 X_K 上半稳定 $\mathbb{Z}_p$-局部系统的定义，$_{\mathrm{pro\acute{e}t}}$ 通过关联来定义，这一关联在 [DLMS26] 中得到研究（其源自 Faltings 的工作 [Fal89, V.f)]）。记 $\mathrm{Perfd}/X_{K,\mathrm{pro\acute{e}t}}$ 为 $X_{K,\mathrm{pro\acute{e}t}}$ 的全子范畴，由包含所有 p-次单位根的仿射刚性完美体组成，并赋予 $\mathrm{Perfd}/X_{K,\mathrm{pro\acute{e}t}}$ 诱导的$\widetilde{}$拓扑。该包含诱导拓扑斯之间的等价 $\mathrm{Sh}(X_{K,\mathrm{pro\acute{e}t}})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Sh}(\mathrm{Perfd}/X_{K,\mathrm{pro\acute{e}t}})$。令 $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$, $\mathbb{B}^+$ cris 和 $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$ 表示 $X_{K,\mathrm{pro\acute{e}t}}$ 上的晶体周期层，它们由 [TT19, § 2A] 引入。

$\widehat{}$构造 7.1（[DLMS26, Const. 3.37, 3.38]）。对于 $U\in\mathrm{Perfd}/X_{K,\mathrm{pro\acute{e}t}}$，记 $U=\mathrm{Spa}(A,A^+)$ 为相应的仿射完备化完美空间。赋予形式谱 A^+ 来自 M_X 的拉回对数结构 $M_{\mathrm{Spf}\,A^+}$，该结构经由形式谱 $A^+\to X$ 之间的映射拉回，其中 $A^+\to X$ 是 p-进形式概形。由于 A^+ 是（整）完美的，满射 $\theta\colon \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+):=W((A^+)^\flat)\to A^+$ 给出 X 上的完美棱柱。根据 [DLMS26, Const. 3.37], , 这给出一个对数棱柱 $(\mathrm{Spf}\ \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+),\text{核 }\theta,M_\theta)\in(X,M_X)_{\mathbb{\Delta}}$.[13]

设 $\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}(A^+)$ 表示正合满射 θ 的 p-完备（对数）PD 包络。记 $\mathbf{B}^+\ \mathrm{cris}(A^+):=\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}(A^+)[p^{-1}]$ 以及 $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}(A^+):=\mathbf{B}^+\ \mathrm{cris}(A^+)[t^{-1}]$，其中 $t:=\log[\epsilon]\in\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}(A^+)$。由此在 $(X_1,M_{X_1})^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{CRIS}}$ 中得到归纳对象 $(\mathrm{Spec}(A^+/p),\text{形式谱}(\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}(A^+)))$。$\widetilde{}$我们有映射 $\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}(A^+)\to\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(U)$，它由 [TT19，推论 2.8(2)] 诱导同构 $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}(A^+)\xrightarrow{\sim}\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}(U)$。当 $A^+=\mathcal{O}_C$ 时，我们简单地用 A_{inf} 表示 $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C)$，对 A_{cris}、B_{cris} 等亦然。

[13]在我们的工作中，$\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+)$会根据我们使用核 θ还是核$(\theta\circ\phi^{-1})$而得到两个对数棱柱。原因见下文的注 7.13。

对于 $(X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}$ 上的有限局部自由等晶 $\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}$（参见 [DLMS26，定义 B.15]），在$X_{K,\mathrm{pro\acute{e}t}}$ 上如下定义 $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}$-模的层 $\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}})$：

$$\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}})(U) \coloneqq \mathcal{E}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}(A^+)) \otimes_{\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}}(A^+)} \mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(U)$$

其中， $\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}(A^+))$ 表示 $\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}$ 在 $(\mathrm{Spec}(A^+/p), \mathrm{Spf}(\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}(A^+)))$ 上的求值（作为归纳对象；参见 [DLMS26, Const. B.14]），它是一个有限射影的$\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}}(A^+)$-模。注意，由于等晶性质和有限射影性， $\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}})$ 满足 $\mathrm{Perfd}/X_{K,\mathrm{pro\acute{e}t}}$ 上的层条件，因为 $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}$ 是一个层。最后，定义

$$\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}(\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}) \coloneqq \mathcal{E}_{\mathbf{Q}}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}) \otimes_{\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}} \mathbb{B}_{\mathrm{cris}},$$

它是 $X_{K,\mathrm{pro\acute{e}t}}$ 上的 $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$-模层。若 $\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}$ 是一个 F-等晶体，则 $\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}(\mathbb{B}_{\mathrm{cris}})$ 配备由 Frobenius F 诱导的结构。

定义 7.2（半稳定局部系统；参见 [DLMS26, Def. 3.39]）。设 $\mathbb{L}$ 是 $X_{K,\mathrm{pro\acute{e}t}}$ 上的一个$\mathbf{Z}_p$-局部系统，并设 $(\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}, \phi_{\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}})$ 是 $(X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}$ 上的一个 F-等晶体。若存在一个同构，我们称 $\mathbb{L}$ 与 $(\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}, \phi_{\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}})$ 是相关联的

$$\alpha_{\mathrm{cris},\mathbb{L},\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}} \colon \mathcal{E}_{\mathbf{Q}}(\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{L} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$$

作为 $X_{K,\mathrm{pro\acute{e}t}}$ 上的 $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$-模层，满足 $\alpha_{\mathrm{cris},\mathbb{L},\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}}$ 与 Frobenius 相容。

称 $\mathbb{L}$ 半稳定，若 $\mathbb{L}$ 与 $(X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}$ 上的一个 F-等晶体相关联。令 $\mathrm{Loc}^{\mathrm{st}}_{\mathbf{Z}_p}(X_K)$ 表示 $\mathrm{Loc}_{\mathbf{Z}_p}(X_K)$ 中由半稳定对象构成的全子范畴。

注7.3。

(1) 与 Faltings [Fal89], 的工作不同，我们不要求 $\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}$ 是一个带滤过的F-等晶体。典范滤过结构见 [DLMS26, 命题 3.45] 。(2) 当 $X = \mathrm{Spf}\ \mathcal{O}_K$ 时，上述半稳定局部系统的定义与 Fontaine 使用周期环 B_{st} 所定义的经典半稳定表示概念一致（[DLMS26, 定理 4.1]）。

现在，我们回顾 [DLMS26] 中半稳定$\mathbf{Z}_p$-局部系统与解析棱柱 F-晶体之间的关系。继续假设 (X, M_X) 是 $\mathcal{O}_K$ 上的半稳定p-adic 形式概形。

定义 7.4. (X, M_X)上的一个$Laurent\ F$-晶体 $\mathbb{\Delta}$ 由一对$(\mathscr{E}, \phi_{\mathscr{E}})$组成，其中$\mathscr{E}$是环化位点$((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}, \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}[\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^{-1}]^\wedge_p)$上的向量丛中的晶体，且 $\phi_{\mathscr{E}}$是一个同构 $\phi_{\mathscr{E}}\colon \phi^*\mathscr{E} \xrightarrow{\cong} \mathscr{E}$。记 $\mathrm{Vect}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}, \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}[\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^{-1}]^\wedge_p)^{\phi=1}$ 为 $(X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$ 上的 Laurent F- 晶体范畴。

记 $\mathrm{Vect}(A[I^{-1}]^\wedge_p)^{\phi=1}$ 为 $A[I^{-1}]^\wedge_p$上的 étale ϕ-模范畴，即由满足以下条件的一对$(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}})$组成： $\mathcal{M}$ 是有限局部自由的 $A[I^{-1}]^\wedge_p$-模，且 $\phi_{\mathcal{M}}$: $\phi^*\mathcal{M} \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}$是$A[I^{-1}]^\wedge_p$-模的一个同构。

Lem命题 7.5 ([DLMS26，引理 3。13])。存在一个范畴的自然等价 es

$$\mathrm{Vect}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}, \mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}[\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^{-1}]^\wedge_p)^{\phi=1} \cong \lim_{(A,I,M_{\mathrm{Spf}\,A}) \in (X,M_X)^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}} \mathrm{Vect}(A[I^{-1}]^\wedge_p)^{\phi=1}.$$

此外，我们还有以下基于 [BS23, 推论 3.7, 3.8] 的结果，该结果出自 [DLMS26] , 涉及 Laurent F-晶体与 $\mathbf{Z}_p$-局部系统：

定理 7.6（参见 [BS23, 推论 3.7, 3.8], [DLMS26, 定理 3.14]）。存在一个范畴的自然等价

$$\mathrm{Vect}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}},\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}[\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^{-1}]_p^{\wedge})^{\phi=1}\cong \mathrm{Loc}_{\mathbf{Z}_p}(X_K).$$

注意，对于 $(A,I,M_{\mathrm{Spf}\,A})\in(X,M_X)_{\mathbb{\Delta}}$，将 Spec$(A)$ 上的向量丛限制到 Spec(A)，即 $\smallsetminus V(p,I)$ 到 Spec$(A)\smallsetminus V(I)$，然后沿 $A[I^{-1}]\to A[I^{-1}]_p^{\wedge}$ 进行标量扩张，便得到函子 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{an},\phi}(A,I)\to\mathrm{Vect}(A[I^{-1}]_p^{\wedge})^{\phi=1}$。由引理 7.5，我们得到标量扩张函子

$$\mathrm{Vect}^{\mathrm{an},\phi}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}})\to\mathrm{Vect}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}},\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}[\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^{-1}]_p^{\wedge})^{\phi=1}.$$

定义 7.7（解析棱柱 F-晶体的 étale 实现）。该*étale* 实现 函子定义为以下复合

$$T=T_X\colon \mathrm{Vect}^{\mathrm{an},\phi}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}})\to\mathrm{Vect}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}},\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}[\mathcal{I}_{\mathbb{\Delta}}^{-1}]_p^{\wedge})^{\phi=1}\xrightarrow{\cong}\mathrm{Loc}_{\mathbf{Z}_p}(X_K),$$

其中第二个等价由定理 7.6 给出。

定理 7.8（[DLMS26，推论 3.46，5.2]）。*étale* 实现函子 T 在向量丛$^{\mathrm{an},\phi}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}})$与$\mathrm{Loc}^{\mathrm{st}}_{\mathbf{Z}_p}(X_K)$之间诱导范畴等价。

更确切地说，对于 $\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}\in\mathit{Vect}^{\mathrm{an},\phi}((X,M_X)_{\mathbb{\Delta}})$，$\mathbb{L}=T_X(\mathcal{E}_X)$ 与 $j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 的晶体实现 $(\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}},\phi_{\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}})$ 相关联；此外，$\mathbb{L}$ 是德拉姆的，其关联的带滤过的向量丛及可积联络 $(D_{\mathrm{dR}}(\mathbb{L})\nabla_{D_{\mathrm{dR}}(\mathbb{L})},\mathit{Fil}^\bullet D_{\mathrm{dR}}(\mathbb{L}))$ 位于 X_K 上，并与由 $(\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}},\phi_{\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}})$ 诱导的、位于 X_K 上的带可积联络向量丛 $(E\ \nabla_{\mathbf{E}})$ 相识别，同时配备唯一的格里菲斯横截滤过，使得 $\alpha_{\mathrm{cris},\mathbb{L},\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}}\otimes\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ 是滤化同构。

晶体实现见定义 6.23，而 $(\mathbf{E}\ \nabla_{\mathbf{E}})$ 的构造见注 6.46。

7.2. The C_{st}-猜想。

仍假设 (X,M_X) 是定义在 Spf $\mathcal{O}_K$ 上的半稳定 p-进形式概形，且 $X\to\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}_K$ 是真概形。现在我们研究以半稳定 $\mathbf{Z}_p$-局部系统及其关联的 F-等晶体为系数的 étale 上同调与 Hyodo–Kato 上同调之间的比较。

设 $\mathbb{L}$ 是 X_K 上的半稳定 $\mathbf{Z}_p$-局部系统，并设 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\,\mathbf{Q}}$ 是 $(X_1,\ M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}$ 上与 $\mathbb{L}$ 相关联的 F-等晶体。由定理 6.42，$\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\,\mathbf{Q}}$ 产生 Hyodo– Kato 复形 $R\Gamma_{\mathrm{HK}}((X_0,\ M_{X_0})\,\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\,\mathbf{Q}})\in D_{\phi,\,N}(K_0)$，事实上它只取决于 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\,\mathbf{Q}}|_{(X_0,M_{X_0})_{\mathrm{CRIS}}}$。

我们用 $(\mathbf{E}\ \nabla_{\mathbf{E}},\ \mathrm{Fil}^\bullet\mathbf{E})$ 表示 X_K 上带可积联络的带滤过的向量丛 $(D_{\mathrm{dR}}(\mathbb{L})\nabla_{D_{\mathrm{dR}}(\mathbb{L})},\ \mathrm{Fil}^\bullet D_{\mathrm{dR}}(\mathbb{L}))$（参见注 6.46 和定理 7.8）。回顾 Sch13，定理 8.4] 中的 étale-de Rham 比较

$$R\Gamma(X_{C,\text{ét}},\mathbb{L})\otimes^L_{\mathbf{Z}_p}B_{\mathrm{dR}}\cong R\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K,\mathbf{E})\otimes^L_K B_{\mathrm{dR}},\tag{7.1}$$

这是一个 $D(B_{\mathrm{dR}})$ 中与 Gal(K/K)-作用相容的同构。选取一致化元 $\pi\in K$ 即可得到 Hyodo–Kato 同构

$$\rho_\pi\colon R\Gamma_{\mathrm{HK}}((X_0,M_{X_0}),\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})\otimes^L_{K_0}K\cong R\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K,\mathbf{E}).$$

将此与由选取 π 给出的嵌入 $B_{\mathrm{st}} \to B_{\mathrm{dR}}$ 结合起来（见定义 6.36），我们得到

$$R\Gamma_{\mathrm{HK}}((X_0, M_{X_0}), \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \otimes^L_{K_0} B_{\mathrm{st}} \to R\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K, \mathbf{E}) \otimes^L_K B_{\mathrm{dR}}. \tag{7.2}$$

我们现在此给出定理 1.1 中所述 C_{st}-猜想的精确表述。

定理 7.9。沿用上述记号。存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma(X_{C,\text{ét}}, \mathbb{L}) \otimes^L_{\mathbf{Z}_p} B_{\mathrm{st}} & \xrightarrow[\cong]{\alpha_{\mathrm{st}}} & R\Gamma_{\mathrm{HK}}((X_0, M_{X_0}), \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \otimes^L_{K_0} B_{\mathrm{st}} \\ \downarrow & & \downarrow (7.2) \\ R\Gamma(X_{C,\text{ét}}, \mathbb{L}) \otimes^L_{\mathbf{Z}_p} B_{\mathrm{dR}} & \xrightarrow{(7.1)} & R\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K, \mathbf{E}) \otimes^L_K B_{\mathrm{dR}}, \end{array}$$

其中，顶部水平映射是一个同构 $D(B_{\mathrm{st}})$，且与伽罗瓦作用、*Frobenius* 和单值作用相容；左侧垂直映射由嵌入 $B_{\mathrm{st}} \to B_{\mathrm{dR}}$ 诱导。

我们首先构造 α_{st}（见下文定义 7.12）。根据定理 7.8，存在一个解析棱柱 F-晶体 $\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}} \in$向量丛$^{\mathrm{an},\phi}((X, M_X)_{\mathbb{\Delta}})$，使得 $T(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}) \cong \mathbb{L}$，并且 $(X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}$ 上的 F-等晶体 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}$ 由完备化棱柱 F-晶体 $j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 的晶体实现 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris}}$ 给出。

回顾 § 6 中的记号（尤其是例 6.1）。考虑 $(\mathrm{Spf}\ \mathcal{O}_K,\ M_{\mathrm{can}})^{\mathrm{op}}$ 中由 $u \mapsto [\pi^\flat]^p$ 给出的对数棱柱态射 $\mathfrak{S}_K \to A_{\mathrm{inf}}$。记 $\mu := [\epsilon] - 1 \in A_{\mathrm{inf}}$。[Tia25]，中证明了以下棱柱上同调与 étale 上同调之间的比较，该结果是一个关键输入。

定理 7.10（[Tia25, Thm.0.4(2), 5.6(2)]）。保持上述记号。*étale* 实现诱导出一个与 *Frobenius* 及 $\mathrm{Gal}(K/K)$等变的同构

$$R\Gamma_{A_{\mathrm{inf}}}(X, j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}) \otimes^L_{A_{\mathrm{inf}}} A_{\mathrm{inf}}[\mu^{-1}] \cong R\Gamma(X_{C,\text{ét}}, T(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})) \otimes^L_{\mathbf{Z}_p} A_{\mathrm{inf}}[\mu^{-1}].$$

回顾 $B_{\mathrm{cris}} = A_{\mathrm{cris}}[p^{-1}, t^{-1}]$。

推论 7.11。保持上述记号。我们有一个同构

$R\Gamma_{(X_{C,\text{ét}}, \mathbb{L})} \otimes^L_{\mathbf{Z}_p} B_{\mathrm{cris}} \cong R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p}, M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(A_{\mathrm{cris}}, M_{A_{\mathrm{cris}}}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \otimes^L_{A_{\mathrm{cris}}} B_{\mathrm{cris}}$，且与 *Frobenius* 及 $\mathrm{Gal}(K/K)$作用相容。

证明。由定理 7.10，我们有一个同构

$$R\Gamma_{A_{\mathrm{inf}}}(X, j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}) \otimes^L_{A_{\mathrm{inf}}} B_{\mathrm{cris}} \cong R\Gamma(X_{C,\text{ét}}, \mathbb{L}) \otimes^L_{\mathbf{Z}_p} B_{\mathrm{cris}}$$

它与 Frobenius 及 Gal(K/K)-作用相容。另一方面，定理 6.26(3) 给出了一个 ϕ-等变同构

$$R\Gamma_{A_{\mathrm{cris}}}(X,\ j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}) \otimes^L_{A_{\mathrm{cris}}} B_{\mathrm{cris}} \cong R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p},\ M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(A_{\mathrm{cris}},\ M_{A_{\mathrm{cris}}}))_{\mathrm{CRIS}},\ \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\ \mathbf{Q}}) \otimes^L_{A_{\mathrm{cris}}} B_{\mathrm{cris}}.$$

沿 $A_{\mathrm{inf}} \to A_{\mathrm{cris}}$ 的基变换给出同构

$$R\Gamma_{A_{\mathrm{inf}}}(X, j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}) \otimes^L_{A_{\mathrm{inf}}} B_{\mathrm{cris}} \cong R\Gamma_{A_{\mathrm{cris}}}(X, j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}) \otimes^L_{A_{\mathrm{cris}}} B_{\mathrm{cris}}$$

由定理 6.21（参见 (6.1)），从而得到该陈述。 □

定义 7.12. 定义 α_{st} 为复合

$$R\Gamma(X_{C,\text{ét}},\mathbb{L})\otimes^L_{\mathbf{Z}_p} B_{\mathrm{st}} \xrightarrow[\cong]{\text{Cor. 7.11}} R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p},M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(A_{\mathrm{cris}},M_{A_{\mathrm{cris}}}))_{\mathrm{CRIS}},\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})\otimes^L_{A_{\mathrm{cris}}} B_{\mathrm{st}}$$
$$\xleftarrow[\cong]{\text{Thm. 6.42(4)}} R\Gamma_{\mathrm{HK}}((X_0,M_{X_0}),\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})\otimes^L_{K_0} B_{\mathrm{st}}.$$

注意，$\alpha_{\mathrm{st},\,\pi}$ 是一个与伽罗瓦作用、Frobenius 和单值作用相容的同构。

定理 *7.9* 的证明。 剩下要证明该交换图的交换性，我们将在 § 7.3 中验证这一点。 □

注 7.13。 形式上，étale 实现有两种约定（[DLMS24、DLMS26] 和 [GR24、Tia25]），但它们在以下意义下是相容的。取$\backsim U \in \mathrm{Perfd}/X_{K,\,\text{proét}}$ 其中仿射完备化完美空间 $U = \mathrm{Spa}(A,\ A^+)$ 如构造 7.1 所述。我们有一个对数棱柱的态射

$$\phi := \phi_{\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+)}\colon (\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+),\operatorname{Ker}\theta,M_\theta)\to(\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+),\operatorname{Ker}\widetilde{\theta},M_{\widetilde{\theta}})$$

$\widetilde{\ }$在 $(X,\ M_X)^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$ 中，其中 $\theta := \theta\circ\phi^{-1}\colon \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+)\to A^+$，且 $M_{\widetilde{\theta}}$是沿着 ϕ 对 M_θ 的拉回对数结构$\widetilde{\ }$。这诱导出一个映射 $\mathrm{can}:\ \mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}(\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+),\text{核 }\theta)\to\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}(\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+),\text{核 }\theta)$；为简便起见，我们在求值中省略对数结构。étale 实现附带如下由同构构成的交换图

$$\begin{array}{ccc} T(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})(U)\otimes\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+)[1/\operatorname{Ker}\theta]^\wedge_p & \xrightarrow{\cong} & j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}(\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+),\operatorname{Ker}\theta)\otimes\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+)[1/\operatorname{Ker}\theta]^\wedge_p \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\phi}\ \cong & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{can}\otimes\phi}\ \cong \\ T(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})(U)\otimes\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+)[1/\operatorname{Ker}\widetilde{\theta}]^\wedge_p & \xrightarrow{\cong} & j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}(\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+),\operatorname{Ker}\widetilde{\theta})\otimes\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+)[1/\operatorname{Ker}\widetilde{\theta}]^\wedge_p, \end{array}$$

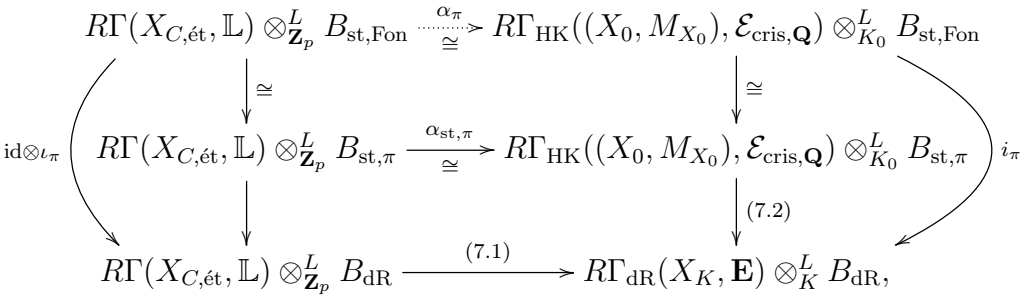
它关于 U 是函子性的。上方水平同构是[DLMS26，命题 3.24]中用于描述 étale 实现的同构，而下方水平同构则是 [GR24，Tia25] 中所用的同构（见 [Tia25，引理 5.5(1)，证明]）。右侧竖直同构下降为同构 $\mathrm{can}\otimes\phi$：$\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}(\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+),\text{核 }\theta)\otimes\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+)[(\phi^{-1}(\mu))^{-1}]\xrightarrow{\cong}\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}(\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+),\text{核 }\widetilde{\theta})\otimes\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+)[\mu^{-1}]$，由此得到如下同构的交换图

$$\begin{array}{ccc} j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}(\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+),\operatorname{Ker}\theta)\otimes_{\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+),\phi}\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}(A^+) & & \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{can}\otimes\phi\otimes\mathrm{id}_{\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}(A^+)}}\ \cong & \searrow^{\alpha\circ(\mathrm{can}\otimes\phi\otimes\mathrm{id})}_{\cong} & \\ j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}(\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+),\operatorname{Ker}\widetilde{\theta})\otimes_{\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(A^+)}\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}(A^+) & \xrightarrow[\cong]{\alpha} & \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}(\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}(A^+))\otimes_{\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}}(A^+)}\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}(A^+). \end{array}$$

同构 $\alpha\circ(\mathrm{can}\otimes\phi\otimes\mathrm{id})$ 与 [DLMS26，注3.41(2)]中的同构一致，因而用于定理 7.8 的证明，而 α 用于定理6.26(3)的证明。借助上述图，它们是相容的，我们在以下论证中隐式地使用这一点。

注 7.14。回忆一下，$B_{\mathrm{st}} := B_{\mathrm{st},\,\pi}$ 是在定义 6.36 中引入的，作为 B_{dR} 的一个子环，它取决于一致化元 π的选择。不过，映射 $\alpha_{\mathrm{st}} =$

$\alpha_{\mathrm{st},\pi}$: $R\Gamma(X_{C,\text{ét}},\mathbb{L})\otimes^L_{\mathbf{Z}_p} B_{\mathrm{st},\pi}\to R\Gamma_{\mathrm{HK}}((X_0,M_{X_0}),\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})\otimes^L_{K_0} B_{\mathrm{st},\pi}$ 在定义 7.12 中与选择 π 无关，具体含义如下。回忆一下，典范半稳定周期环 $B_{\mathrm{st,\,Fon}}:=B^+_{\mathrm{st,\,Fon}}[t^{-1}]$ 带有一个嵌入 $\iota_\pi\colon B_{\mathrm{st,\,Fon}}\xrightarrow{\cong} B_{\mathrm{st},\pi}\subset B_{\mathrm{dR}}$，由 π 给出（见注 6.37）。定义 α_π 和 i_π 为使下图交换的映射：



我们断言，α_π 确实与 π无关。为此，任取 $c\in R\Gamma(X_{C,\text{ét}},\mathbb{L})$[14]，我们证明 $\alpha_\pi(c\otimes 1)$与 π无关。由于 $\iota_\pi|_{B_{\mathrm{cris}}}$和（7.1）与 π无关，因此 $i_\pi(\alpha_\pi(c\otimes 1))\in R\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K,\mathbf{E})\otimes^L_K B_{\mathrm{dR}}$也与之无关。取另一个一致化元 $\pi'=a\pi(a\in\mathcal{O}_K^\times)$，比较 i_π和 $i_{\pi'}$。对于 $x\otimes y\in R\Gamma_{\mathrm{HK}}((X_0,M_{X_0})\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})\otimes^L_{K_0} B_{\mathrm{st,Fon}}$，根据定义，有 $i_\pi(x\otimes y)=\rho_\pi(x)\otimes\iota_\pi(y)$。由定理 6.42(3)，得到 $\rho_{\pi'}(x)=\sum_{n\geq 0}(\log(a^n))!\,\rho_\pi(N^n(x))$。令 N_π 表示作用于$B_{\mathrm{st,Fon}}$ 上的单值算子，它由作用于$B_{\mathrm{st},\pi}$上的单值算子诱导而来。根据 [Tsu99，（4.1.2）]，我们知道$\iota_{\pi'}(y)=\sum_{n\geq 0}(\log(a^n))!\,\iota_\pi(N_\pi^n(y))$（回顾我们对 N_π的归一化）。因此我们推出$i_{\pi'}(x\otimes y)=\sum_{n\geq 0}(\log(a^n))!\,i_\pi((N\otimes 1+1\otimes N_\pi)^n(x\otimes y))$。特别地，$i_\pi$ 和 $i_{\pi'}$在核 $\mathrm{Ker}(N\otimes 1+1\otimes N_\pi^n)$ 上重合。由于$\alpha_{\mathrm{st},\pi}$ 与单值算子相容，我们看到 $\alpha_\pi(c\otimes 1)$属于核 $\mathrm{Ker}(N\otimes 1+1\otimes N_\pi)$，因而等于 $\alpha_{\pi'}(c\otimes 1)$。

7.3. 平展-德拉姆比较。 在本小节中，我们证明定理 7.9 中图表的交换性。我们主要遵循 [GR24, § 10]，其基于 B^+_{dR} 上的无穷小上同调；该上同调在 [BMS18, § 13] 中针对光滑情形引入，并在 [ČK19, § 6] 中推广到半稳定情形。由于本小节中的许多论证是 [GR24, § 10], 中相应论证的直接推广，我们将着重补充必要的额外输入（例如来自 [ČK19]），并请读者参阅 同上 以了解细节。

7.3.1. $B^+\mathrm{dR}$ 上的无穷小上同调。记 $A_{\mathrm{inf},K}:=A_{\mathrm{inf}}\otimes_{W(k)}\mathcal{O}_K$。选取一个与 $K\to C$ 在满射 $B^+\,\mathrm{dR}\to C$ 下相容的映射 $\mathcal{O}_K\to B^+\,\mathrm{dR}$。令 $\theta:=\theta\circ\phi^{-1}\colon A_{\mathrm{inf}}\to\mathcal{O}_C$，它经由 $\mathcal{O}_K\to\mathcal{O}_C$ 延拓为 $\theta_K\colon A_{\mathrm{inf},K}\to\mathcal{O}_C$。注意，映射 $A_{\mathrm{inf}}\to A_{\mathrm{inf},K}$ 诱导同构 $(A_{\mathrm{inf},K}[p^{-1}])^\wedge$ 核$(\tilde{\theta}_K)\cong B^+\mathrm{dR}$。对每个正整数 c，记 $B^+\,\mathrm{dR}_c:=B^+\,\mathrm{dR}/(\text{核}(\theta_K))^c$；它成为一个 f-进环，其中$A_{\mathrm{inf},L}$的像（带有 p-进拓扑）是一个定义环。

设 X 是 $\mathcal{O}_K$ 上的半稳定 p-进形式概形，其一般纤维为 X_K。记 $X_{B^+\,\mathrm{dR}\,c}$ 为 X_K 沿 $K\to A_{\mathrm{inf},K}[p^{-1}]\to B^+\,\mathrm{dR}\,c$ 的基变换。

[14]更准确地说，在此处及下文中取上同调之后。

定义 7.15 ([GR24，定义 10.1])。 无穷小位点 $X_{C,\text{ét}}/B^+_{\text{dR,inf}}$ 定义如下：

- 一个对象是一个对 (U, T)，称为 X_C 的无穷小加厚，其中$U \in X_{C,\text{ét}}$ 且 T 是某个 $c \geq 1$ 上拓扑有限型的 adic 空间 $B^+_{\text{dR},c}$，并带有由幂零理想给出的扎里斯基闭浸入 $U \to T$。
- 对象 (U_1, T_1) 与 $\to (U_2, T_2)$ 之间的态射由 $X_{C,\text{ét}}$ 且 $U_1 \to U_2$ 中的一个态射，以及某个 c 上 $B^+_{\text{dR},c}$ 之上的兼容 adic 空间态射 $T_1 \to T_2$ 给出。

(U, T) 的一个覆盖是态射族 $\{(U_i, T_i) \to (U, T)\}$，满足$\{U_i \to U\}$和 $\{T_i \to T\}$ 是 étale 覆盖。

结构层 $\mathcal{O}_{\text{inf}}$ 由赋值 $(U, T) \mapsto \mathcal{O}_T(T)$ 给出。

一个上的向量丛中的晶体$\text{ét}/B^+_{\text{dR, inf}}$是一个 $\mathcal{O}_{\text{inf}}$-模层 $\mathcal{F}$，满足$\mathcal{F}(U, T)$在每个(U, T)上都是向量丛，并且对每个$(U_1, T_1) \to (U_2, T_2)$满足基变换同构。记 Vect$(X_{C,\text{ét}}/B^+_{\text{dR, inf}})$为$X_{C,\text{ét}}/B^+_{\text{dR, inf}}$上的向量丛中的晶体范畴。

引理 7.16。 纤维积和等化子在$X_{C,\text{ét}}/B^+_{\text{dR,}}$中存在。此外，非空有限积在$X_{C,\text{ét}}/B^+_{\text{dR,}}$中是归纳可表的。

证明。 这直接由 [Guo，引理 2.1.4]的证明得出。 □

引理 7.17。 设 Z 是一个光滑 *adic* 空间，定义在 K 上，并带有一个闭浸入 $X_C \to Z_C$。

- 记 $Z_{m,c}$ 为 $Z_{B^+_{\text{dR},c}}$中 X_C 的第 m 个无穷小邻域。则归纳系统 $D_Z(X) := \{Z_{m,c}\}_{m,c}$是 $X_{C,\text{ét}}/B^+_{\text{dR,inf}}$中的弱终对象。
- 归纳系统$\{Z_{m,c}\}_{m,c}$的第 $(n+1)$ 个自乘积可由归纳系统$\{Z^n_{m,c}\}_{m,c}$表示，其中 Z^n 表示 Z 在 K 和 $Z^n_{m,c}$ 上的第 $(n+1)$ 个自乘积，即 $Z^n_{B^+_{\text{dR},c}}$中 X_C 的第 m 个无穷小邻域。

证明。 利用引理 7.16，这可按 [GR24, 引理 10.3] 中的方法证明。 □

对于任意拓扑有限型 $\mathcal{O}_K$-代数 A，令 $A_{B^+_{\text{dR},c}}$ 表示 A 沿 $\mathcal{O}_K \to A_{\text{inf},K} \to B^+_{\text{dR},c}$ 作为 f-进环的基变换，并设 $A_{B^+_{\text{dR}}} = \varprojlim_c A_{B^+_{\text{dR},c}}$。上述引理的以下示例将在计算中用到。

例 7.18 （参见 [GR24，例 10.5]）。 假设 $X = \text{Spf}\, R$ 具有一个整扩大的框架 （Ψ, Σ），如 [ČK19，§ 6], 所述，该框架由有限子集 $\Psi \subset R^\times$ 和$\Sigma \subset R \cap R[p^{-1}]^\times$给出，使得映射 $\mathcal{O}_K\langle (T_\psi^{\pm 1})_{\psi\in\Psi}, (T_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}\rangle \to R$（由 $T_\psi \mapsto \psi$, $T_\sigma \mapsto \sigma$给出）是满射，并且存在子集 $\Psi' \subset \Psi$ 和 $\Sigma' \subset \Sigma$，满足$\prod_{\sigma\in\Sigma'} T_\sigma = \pi$ 属于 R，使得诱导映射

$$X \to \text{Spf}\, \mathcal{O}_K\langle (T_\psi^{\pm 1})_{u\in\Psi'}, (T_\sigma)_{\sigma\in\Sigma'}\rangle / (\prod_{\sigma\in\Sigma'} T_\sigma - \pi)$$

是 étale。注意，这在 X 上 étale 局部成立。我们给 Spf $\mathcal{O}_K\langle(T_\psi^{\pm 1})_{\psi\in\Psi},\ (T_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}\rangle$ 赋予由$M_{\Psi,\ \Sigma}$ 给出的对数结构

$$\mathbf{N}\times\mathbf{N}^{\Sigma'}\to\mathcal{O}_K\langle(T_\psi^{\pm 1})_{\psi\in\Psi},(T_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}\rangle,\ (1,0)\mapsto\pi,\ (0,e_\sigma)\mapsto T_\sigma \text{ for } \sigma\in\Sigma'.$$

令 Z 为 形式谱 $\mathcal{O}_K\langle(T_\psi^{\pm 1})_{\psi\in\Psi},\ (T_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}\rangle$ 的一般纤维。那么， $\mathcal{O}_{\inf}$ 在归纳系统 $\{Z_{m,c}\}_{m,\ c}$ 上的值是满射 $D_{\Psi,\ \Sigma}(R)$ 的形式完备化环

$$\mathcal{O}_K\langle(T_\psi^{\pm 1})_{\psi\in\Psi},(T_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}\rangle_{B^+_{\mathrm{dR}}}\twoheadrightarrow R_C.$$

此外，对每个 $n\geq 1$， $D_{(\Psi,\Sigma)^n}(R):=\mathcal{O}_{\inf}(\{Z^n_{m,c}\}_{m,\ c})$ 都等于满射 $(\mathcal{O}_K\langle(T_\psi^{\pm 1})_{\psi\in\Psi},(T_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}\rangle^{\widehat{\otimes}^{n+1}_{\mathcal{O}_K}})_{B^+\text{德拉姆}}\to R_C$ 的形式完备化。

令 $\mathcal{F}$ 为 $X_{C,\text{ét}}/B^+$ dR,inf 上的向量丛中的晶体。我们考虑两种计算 $R\Gamma(X_C,{}_{\text{ét}}/B^+\text{dR,inf}\mathcal{F})$ 的方法，一种使用 Čech–Alexander复形，另一种使用 de Rham复形，如 GR24 的 Const. 10.6] 所示。令 Z 为 K 上的光滑仿射解析adic空间，并假设存在一个闭浸入 $X_C\to Z_C$。覆盖 $D_Z(X)$ 的 Čech–Alexander复形是余单纯复形 $\mathcal{F}_{D_Z\bullet}(X)$，其中 $\mathcal{F}_{D_{Z^n}}(X):=\lim_{m,c}\mathcal{F}(Z^n_{m,c})$。若 Z 由一个扩大的框架 (Ψ,Σ) 给出，如例 7.18 所示，则$\mathcal{F}_{D_Z\bullet}(X)=\mathcal{F}_{D_{(\Psi,\Sigma)}\bullet}(R)$。根据引理 7.17 以及仿射刚性空间上向量丛的高阶上同调消失性，我们有一个自然同构

$$R\Gamma(X_{C,\text{ét}}/B^+_{\mathrm{dR,inf}},\mathcal{F})\cong\mathrm{Tot}(\mathcal{F}_{D_Z\bullet(X)}).$$

另一方面，由 [Guo，定理3.3.1],， $\mathcal{O}_{\inf}(D_Z(X))$上的向量丛$\mathcal{F}_{D_Z(X)}$配备了自然的平坦联络 $\nabla:\ \mathcal{F}_{D_Z(X)}\to\mathcal{F}_{D_Z(X)}\otimes_{\mathcal{O}_Z}\Omega^1_{Z/K}$。将dR($\mathcal{F}_{D_Z(X)}$)记为de Rham复形

$$\mathrm{dR}(\mathcal{F}_{D_Z(X)}):=\mathcal{F}_{D_Z(X)}\to\mathcal{F}_{D_Z(X)}\otimes_{\mathcal{O}_Z}\Omega^1_{Z/K}\to\cdots\to\mathcal{F}_{D_Z(X)}\otimes_{\mathcal{O}_Z}\Omega^d_{Z/K}$$

其中 d 是 Z/K 的维数（由于 Z 是仿射型的，我们也将其视为模的复形）。注意，当 Z 由如例7.18中的扩大的框架(Ψ,Σ)给出时，dR($\mathcal{F}_{D_{\Psi,\Sigma}(R)}$) := dR($\mathcal{F}_{D_Z(X)}$)由导子 $\partial^{\ }_{\log(T_\lambda)}:=\underline{T_\lambda\frac{\partial}{\partial T_\lambda}}$, $\lambda\in\Psi\cup\Sigma$ 的Koszul复形表示（参见 [ČK19，§ 6.3]）。de Rham复形也计算 $R\Gamma(\overline{X_{C,\text{ét}}}/B^+{}_{\mathrm{dR,inf}}\mathcal{F})$。

定理 7.19 ([GR24，定理 10。7])。 沿用上述记号。设 $\mathcal{F}$ 是 $X_{C,\ \text{ét}}/B^+{}_{\mathrm{dR},\ \inf}$上的向量丛中的晶体。设 Z 是 K 上的光滑仿射刚性空间，并带有一个闭浸入 $X_K\to Z$。则存在一个自然的双复形

$$M^{a,b}:=\mathcal{F}_{D_{Z^a}(X)}\otimes_{\mathcal{O}_{Z^a}}\Omega^b_{Z^a/K},$$

它关于 $\mathcal{F}$ 以及 Z 的选择是函子性的（在例 *7.18*的情形下，还关于扩大的框架 (Ψ,Σ) 的选择是函子性的）。它满足以下性质。

- 对于每个 $b\geq 1$，余单纯复形 $M^{\bullet,\ b}$ 是无挠的。
- 任意退化映射 $[a]\to[0]$ 都会诱导 ***de Rham***复形$_{M^{0,\ \bullet}}\to M^{a,\ \bullet}$的一个同构。

特别地， $M^{a,\ b}$的全复形同构于 $M^{\bullet,\ 0}=\mathrm{Tot}(\mathcal{F}_{D_Z\bullet(X)})$和 $M^{0,\ \bullet}=\mathrm{dR}(\mathcal{F}_{D_Z(X)})$。

现在我们研究对数晶体上同调与无穷小上同调之间的关系。关于$(X_1,\ M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}$上的有限局部自由等晶体的概念，请参阅 [DLMS26，定义 B.15] 。

命题 7.20 (参见 [GR24, 命题 10。10])。 设 X 是一个分离的半稳定 p-进形式概形，定义在 $\mathcal{O}_K$ 上。存在一个自然函子，将有限局部自由等晶体的范畴从 $(X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}$ 映到 向量丛 $(X_{C,\text{ét}}/B^+_{\mathrm{dR,inf}})$。

证明。 我们采用与 [GR24, 命题 10.10] 的证明类似的构造。设$\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}$ 是 $(X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}$上的有限局部自由等晶体。为了将向量丛中的晶体赋予 $X_{C,\text{ét}}/B^+_{\mathrm{dR,inf}}$ 上的 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}$，我们在 X 上 étale 局部地工作，并考虑例 7.18 中的整扩张框架。

设 $X=$形式谱 R带有一个整扩张框架 (Ψ,Σ)。考虑 A_{inf},$_K$-代数 A_{inf},$_K\langle(T_\psi^{\pm1})_{\psi\in\Psi}$, $(T_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}\rangle$，其配备的对数结构由定理 6.26 中的 $M_{A_{\mathrm{inf}}}$和例 7.18 中的 $M_{\Psi,\Sigma}$给出。令 $J:=$核$(A_{\mathrm{inf}}$,$_K\langle(T_\psi^{\pm1})_{\psi\in\Psi}$, $(T_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}\rangle\twoheadrightarrow R_{\mathcal{O}_C})$。记 $D_{\mathrm{pd},\Psi,\Sigma}(R)$ 为 p-完备化的对数 PD 包络，其对象是 A_{inf},$_K\langle(T_\psi^{\pm1})_{\psi\in\Psi}$, $(T_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}\rangle$，相对于 J。诱导映射 $D_{\mathrm{pd},\Psi,\Sigma}(R)\to A_{\mathrm{inf}}$,$_K\langle(T_\psi^{\pm1})_{\psi\in\Psi}$, $(T_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}\rangle[p^{-1}]/J^m$在求逆 p后变为满射。对 m取逆极限，得到

$$D_{\mathrm{pd},\Psi,\Sigma}(R)\to D_{\Psi,\Sigma}(R)\cong(D_{\mathrm{pd},\Psi,\Sigma}(R)[p^{-1}])^\wedge_J,$$

其经由 $D_{\mathrm{pd},\ \Psi,\ \Sigma}(R)\ \widehat{\otimes}_{A_{\mathrm{inf},\ K}}B^+_{\mathrm{dR}}:=\varprojlim_m D_{\mathrm{pd},\ \Psi,\ \Sigma}(R)[p^{-1}]/$核$(\widetilde{\theta}_K)^m$. S

imilarly, 对每个 $n\geq0$，令 $D_{\mathrm{pd},\ (\Psi,\Sigma)^n}(R)$ 为 p-完备化的对数 PD 包络

$$A_{\mathrm{inf},K}\langle(T_\psi^{\pm1})_{\psi\in\Psi},(T_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}\rangle^{\widehat{\otimes}^{n+1}_{A_{\mathrm{inf},K}}}\twoheadrightarrow R_{\mathcal{O}_C}.$$

于是我们有一个自然映射 $D_{\mathrm{pd},\ (\Psi,\Sigma)^n}(R)\to D_{(\Psi,\Sigma)^n}(R)$。

对每个 n，考虑有限投射 $D_{(\Psi,\Sigma)^n}(R)$-模

$$\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}(D_{\mathrm{pd},(\Psi,\Sigma)^n}(R))\otimes_{D_{\mathrm{pd},(\Psi,\Sigma)^n}(R)}D_{(\Psi,\Sigma)^n}(R),$$

其中，$\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}$ 在归纳对象 (Spec $R_{\mathcal{O}_C/p}$, Spf $D_{\mathrm{pd},(\Psi,\Sigma)^n}(R)$) 处的求值记作 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}(D_{\mathrm{pd},\ (\Psi,\Sigma)^n}(R))$，如构造 7.1 所示。由 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}$ 的晶体性质（见引理 6.6(2)），相应的余单纯对象在 Δ 中任意 $[n]\to[m]$ 下都满足自然的基变换同构。根据引理 7.17，这给出了向量丛中的晶体 $\mathcal{E}_{\mathrm{inf}}\in$Vect$(X_{C,\text{ét}}/B^+$dR,inf), 使得 $\mathcal{E}_{\mathrm{inf}}(D_{(\Psi,\Sigma)^n}(R))=\mathcal{E}_{\mathrm{cris}}(D_{\mathrm{pd},(\Psi,\Sigma)^n}(R))\otimes_{D_{\mathrm{pd},(\Psi,\Sigma)^n}(R)}D_{(\Psi,\Sigma)^n}(R)$。

现在，由于上述构造关于 R 和扩大的框架 (Ψ,Σ) 具有函子性，它可以整体化为一个函子，将 $(X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}$ 上有限局部自由等晶体的范畴映到向量丛$(X_{C,\text{ét}}/B^+_{\mathrm{dR,inf}})$。 □

命题 7.21 （参见 [GR24，命题 10。11]）。 设 X 是定义在 $\mathcal{O}_K$ 上的真半稳定 p-进形式概形。设 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\ \mathbf{Q}}$ 是 $(X_1,\ M_{X_1})_{\ \mathrm{CRIS}}$ 上的有限局部自由等晶体，由 $(X,\ M_X)_{\ \mathbb{A}}$ 上某个解析棱柱晶体 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris}}$ 的晶体实现给出（定义 *6.23* ），并将由命题 *7.20* 给出的、与之对应的 向量丛 $(X_{C,\ \text{ét}}/B^+_{\mathrm{dR},\ \mathrm{inf}})$ 上的向量丛中的晶体记为 $\mathcal{E}_{\mathrm{inf}}\in$ ，其中 $X_{C,\ \text{ét}}/B^+_{\mathrm{dR},\ \mathrm{inf}}$ 。那么我们有一个自然的

同构 $D(B^+_{\mathrm{dR}})$

$$R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p}, M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(A_{\text{log-cris},K}, M_{A_{\text{log-cris},K}}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \otimes^L_{A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}]} B^+_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\cong} R\Gamma(X_{C,\text{ét}}/B^+_{\mathrm{dR,inf}}, \mathcal{E}_{\mathrm{inf}}).$$

证明。由命题 6.43(1)(2)，只需证明存在一个自然同构

$$(R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(\mathcal{O}_K, M_{\mathrm{can}}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) \otimes^L_K B^+_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\cong} R\Gamma(X_{C,\text{ét}}/B^+_{\mathrm{dR,inf}}, \mathcal{E}_{\mathrm{inf}}).$$

回顾注 6.46 中的记号及其中的同构：

$$\begin{aligned} R\Gamma(((X_1, M_{X_1})/(\mathcal{O}_K, M_{\mathrm{can}}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}) &\cong R\Gamma(X, (E_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega^\bullet_{X/\mathcal{O}_K}, \nabla_{E_{\mathbf{Q}}})) \\ &\cong R\Gamma(X_K, (\mathbf{E} \otimes \Omega^\bullet_{X_K/K}, \nabla_{\mathbf{E}})). \end{aligned}$$

另一方面，由于 X_K 在 K 上光滑，对恒等映射 $X_K \to Z := X_K$ 应用定理 7.19，可知 $R\Gamma(X_{C,\text{ét}}/B^+_{\mathrm{dR,inf}} \mathcal{E}_{\mathrm{inf}})$ 可由 $\mathrm{dR}((\mathcal{E}_{\mathrm{inf}})_{D_Z(X)})$ 计算。根据命题 7.20 证明中 $\mathcal{E}_{\mathrm{inf}}$ 的构造，我们有 $E \otimes_{\mathcal{O}_K} B^+_{\mathrm{dR}} \cong (\mathcal{E}_{\mathrm{inf}})_{D_Z(X)}$，并且存在一个自然同构

$$(\mathbf{E} \otimes \Omega^\bullet_{X_K/K}, \nabla_{\mathbf{E}}) \otimes_{\mathcal{O}_K} B_{\mathrm{dR}^+} \cong \mathrm{dR}((\mathcal{E}_{\mathrm{inf}})_{D_Z(X)}).$$

□

7.3.2. 比较映射的相容性。我们接下来证明定理 7.9 中交换图的交换性。与 [GR24, § 10.2], 类似，我们将在下文定理 7.22 中给出 B_{dR} 上的上同调复形同构的交换图 (7.3)。图中的 $\gamma_{\text{ét}}$ 和 γ_{cris} 分别由定理 7.10 和定理 6.26 给出，而 ρ_{st} 和 ρ_π 由定理 6.42 给出。图中的虚线同构由 [Sch13], 给出，因此所讨论的交换性由定理 7.22 得出。

沿用第 7.2 节中的记号：设 (X, M_X) 是 $\mathcal{O}_K$ 上的真半稳定 p-进形式概形。设 $\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 是 $(X, M_X)_{\mathbb{\Delta}}$ 上的解析棱柱 F-晶体，且 $\mathbb{L} = T(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})$ 是对应的半稳定 $\mathbf{Z}_p$-局部系统，它定义在 X_K 上，并与由 $\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}$ 的晶体实现 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris}}$ 给出的、在 $(X_1, M_{X_1})_{\mathrm{CRIS}}$ 上的有限局部自由 F-等晶体 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}$ 相关。记 $(A, I, M_{\mathrm{Spf}\, A}) = (A_{\mathrm{inf}}, ([p]_{[\epsilon]}) M_{A_{\mathrm{inf}}}) \in (\mathrm{Spf}\ \mathcal{O}_K, M_{\mathrm{Spf}\, \mathcal{O}_K})_{\mathbb{\Delta}}$，并对所涉及的各种上同调理论作如下简写：

- $R\Gamma_{\mathbb{\Delta}} := R\Gamma_{A\text{下确界}}(X, j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})$
- $R\Gamma_{\text{等}} := R\Gamma\ (X_{C,\ \text{等}}\mathbb{L})$
- $R\Gamma_{\mathrm{cris}} := R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p},\ M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(A\mathrm{cris}\ M_{A\mathrm{cris}}))_{\mathrm{CRIS}}\ \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\ \mathbf{Q}})$
- $R\Gamma_{\mathrm{HK}} := R\Gamma_{\mathrm{HK}}((X_0, M_{X_0})\ \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}))$.
- 令 $\mathcal{E}_{\mathrm{inf}}$ 为由命题 7.20 将 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}$ 关联到 $X_{C,\text{ét}}/B^+_{\mathrm{dR,inf}}$ 上的向量丛中的晶体。记 $R\Gamma_{\mathrm{inf}} := R\Gamma(X_{C,\text{ét}}/B^+_{\mathrm{dR,inf}}\mathrm{inf}\,\mathcal{E}\mathrm{inf}$
- 我们有 pro-étale 位点 $X_{C,\mathrm{pro\text{ét}}}$ 上的 $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$-局部系统 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})$，它由 [DLMS26，构造 3.43]给出。记 $R\Gamma_{\mathrm{pro\text{ét}}} := R\Gamma(X_{C,\mathrm{pro\text{ét}}}\ \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}))$.
- 令 $(\mathbf{E}\ \nabla_{\mathbf{E}})$ 为与 X_K/K 上的 $\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}$ 相关联的带整连接的向量丛，其配备滤过 $\mathrm{Fil}^\bullet\mathbf{E}$ ([DLMS26, Rem. B.33, Prop. 3.45])。记 $R\Gamma_{\mathrm{dR}} := R\Gamma_{\mathrm{dR}}(X_K/K, \mathbf{E})$。

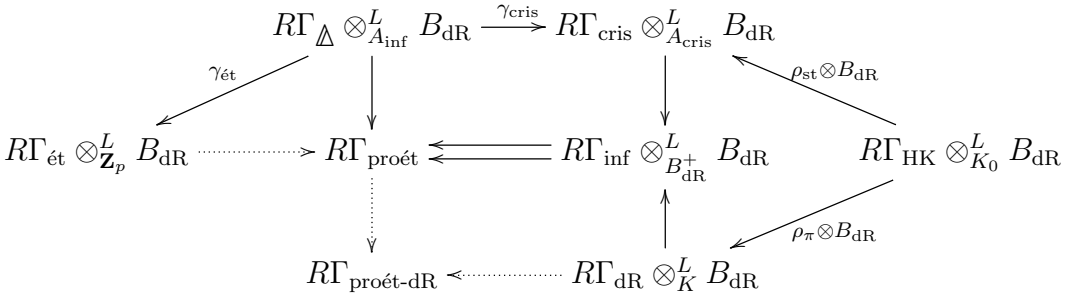
• 令 $\mathrm{dR}(\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}} \mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}) \coloneqq \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}} \mathrm{dR}(\mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}\ d_{X_K/K})$ 为相关联的带滤过的德拉姆复形，并配备张量积滤过。由 [DLMS26, Prop. 3.45], 可得一个自然的滤化同构

$$\mathrm{dR}(\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}} \mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}) \cong \mathrm{dR}(\mathbf{E}, \nabla_{X_K/K}) \otimes_{\mathcal{O}_{X_K}} \mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}.$$

将其滤化 pro-étale上同调记为 $R\Gamma_{\text{proét-dR}} \coloneqq R\Gamma(X_{C,\text{proét}}, \mathrm{dR}(\mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}} \mathcal{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}))$。

定理 7.22 （参见 [GR24, 定理 10.16]）。 我们有一个由 B_{dR} 上的上同调复形的同构成的自然交换图

(7.3)



其中虚线箭头是 [Sch13] 中给出的滤化同构。

Proof. Write $R\Gamma_{\text{log-cris},K} \coloneqq R\Gamma(((X_{\mathcal{O}_C/p}, M_{X_{\mathcal{O}_C/p}})/(A_{\text{log-cris},K}, M_{A_{\text{log-cris},K}}))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}})$. Note first that we have a commutative diagram

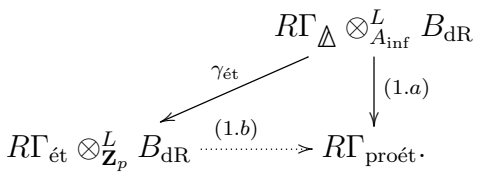
$$\begin{array}{ccc} R\Gamma_{\mathrm{HK}} \otimes^L_{K_0} B_{\mathrm{dR}} & \xrightarrow{\rho_{\mathrm{st}} \otimes B_{\mathrm{dR}}} & R\Gamma_{\mathrm{cris}} \otimes^L_{A_{\mathrm{cris}}} B_{\mathrm{dR}} \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_{\pi} \otimes B_{\mathrm{dR}}} & & \downarrow \\ R\Gamma_{\mathrm{dR}} \otimes^L_K B_{\mathrm{dR}} & \longrightarrow & R\Gamma_{\text{log-cris},K} \otimes^L_{A_{\text{log-cris},K}} B_{\mathrm{dR}} \end{array}$$

由定理 6.42(3)(4)(5) 以及沿 $A_{\text{log-cris},K}[p^{-1}] \to B_{\mathrm{dR}}$ 的基变换给出，其中所有映射均为同构。图 (7.3) 的最右部分通过将上述内容与命题 7.21 中的同构复合而得到。

对于图 (7.3) 的其余部分，论证与 [GR24, 定理 10.16] 的证明非常相似；由于 X 是半稳定的，局部计算中我们如例 7.18 那样使用扩大的框架。因此我们略去部分细节，相应部分请参阅同上所引 。

首先考虑该图

(7.4)



• **(1.a)：** 对于任意定义在 $X_{C,\text{pro´et}}$ 上的仿紧完美空间 $\mathrm{Spa}(B, B^+)$, 考虑完美棱柱 $(\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(B^+)\ I)$。根据 [Tia25, 命题 1.23], , 存在唯一的 δ对数结构

$M_{\mathrm{Spf}\,\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(B^+)}$ 定义在形式谱 $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(B^+)$ 上，使得 $(\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(B^+)\ I, M_{\mathrm{Spf}\,\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(B^+)})$ 成为 $((X_C, M_{X_C})/(A, I, M_{\mathrm{Spf}\,A}))^{\mathrm{op}}_{\mathbb{\Delta}}$ 的对数棱柱。由此定义出一个余连续函子

$$\mathrm{Perfd}/X_{C,\mathrm{pro\acute{e}t}} \to ((X_{\mathcal{O}_C}, M_{X_{\mathcal{O}_C}})/(A, I, M_{\mathrm{Spf}\,A}))_{\mathbb{\Delta},\mathrm{\acute{e}t}}$$

从而给出一个拓扑斯态射 $\mathrm{Sh}(X_{C,\ \mathrm{pro\acute{e}t}}) \to \mathrm{Sh}(((X_{\mathcal{O}_C},\ M_{X_{\mathcal{O}_C}})/(A,\ I,\ M_{\mathrm{Spf}\,A}))_{\mathbb{\Delta},\ \mathrm{\acute{e}t}})$。右侧的垂直映射 (1.a) 由此诱导。

• **(1.b)：** 映射 $R\Gamma_{\prime\mathrm{et}} \otimes^L_{\mathbf{Z}_p} B_{\mathrm{dR}} \to R\Gamma_{\mathrm{pro}\prime\mathrm{et}}$ 定义于 [Sch13, Thm. 8.8], ，并且是一个滤化同构。

• $\gamma_{\prime\mathrm{et}}$ ：同构 $\gamma_{\prime\mathrm{et}}$: $R\Gamma_{\mathbb{\Delta}} \otimes^L_{A_{\mathrm{inf}}} B_{\mathrm{dR}} \to R\Gamma_{\prime\mathrm{et}} \otimes^L_{\mathbf{Z}_p} B_{\mathrm{dR}}$ 由 $A_{\mathrm{inf}}[\mu^{-1}] \to B_{\mathrm{dR}}$ 沿棱柱-étale 比较进行基变换得到，该比较见于 [Tia25]: 我们有一个 $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(B^+)$-代数的自然同构

$$T(\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(B^+)[\mu^{-1}] \cong \mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}(\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(B^+), I, M_{\mathrm{Spf}\,\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(B^+)})[\mu^{-1}]$$

由 [Tia25, Lem. 5.5(1)]，它在 $\mathrm{Spa}(B, B^+)$ 上是函子性的。根据 [Tia25, Thm. 5. 6],的证明，比较 $\gamma_{\mathrm{\acute{e}t}}$ 由上述函子同构给出，从而图表 (7.4) 是交换的。

接下来，我们考虑该图表

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma_{\mathbb{\Delta}} \otimes^L_{A_{\mathrm{inf}}} B_{\mathrm{dR}} & \xrightarrow{\gamma_{\mathrm{cris}}} & R\Gamma_{\mathrm{cris}} \otimes^L_{A_{\mathrm{cris}}} B_{\mathrm{dR}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ R\Gamma_{\mathrm{pro\acute{e}t}} & \longleftarrow & R\Gamma_{\mathrm{inf}} \otimes^L_{B^+_{\mathrm{dR}}} B_{\mathrm{dR}} \end{array}$$

上述图表的右侧竖直映射由命题 7.21 连同该分解给出

$$R\Gamma_{\mathrm{cris}} \otimes^L_{A_{\mathrm{cris}}} B_{\mathrm{dR}} \to R\Gamma_{\text{log-cris},K} \otimes^L_{A_{\text{log-cris},K}} B_{\mathrm{dR}} \to R\Gamma_{\mathrm{inf}} \otimes^L_{B^+_{\mathrm{dR}}} B_{\mathrm{dR}},$$

其中第一个映射依命题 6.43(3) 是一个同构。考虑所诱导的图表

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma_{\mathbb{\Delta}} \otimes^L_{A_{\mathrm{inf}}} B_{\mathrm{dR}} & \xrightarrow{\gamma_{\mathrm{cris},K}} & R\Gamma_{\text{log-cris},K} \otimes^L_{A_{\text{log-cris},K}} B_{\mathrm{dR}} \\ \downarrow{\scriptstyle (1.a)} & & \downarrow{\scriptstyle (2.a)} \\ R\Gamma_{\mathrm{pro\acute{e}t}} & \xleftarrow[(2.b)]{} & R\Gamma_{\mathrm{inf}} \otimes^L_{B^+_{\mathrm{dR}}} B_{\mathrm{dR}}. \end{array} \tag{7.5}$$

我们有两个关于 $R\Gamma_{\text{log-cris},K}$ 的 étale 局部计算：令 $\mathrm{Spf}\ R \in X_{\mathrm{\acute{e}t}}$ 配备一个扩大的框架 (Ψ, Σ)，如例 7.18 所示。特别地，我们有一个 $\mathcal{O}_K$-线性满射 $\mathcal{O}_K\langle(T_\psi^{\pm 1})_{\psi\in\Psi}, (T_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}\rangle \to R$。对于每个 $\psi \in \Psi$ 和 $\sigma \in \Sigma$，选取相容的 p-次方根系统 T_ψ^{1/p^∞} 和 T_σ^{1/p^∞}，并令 R_∞ 为沿映射 $\mathcal{O}_K\langle(T_\psi^{\pm 1})_{\psi\in\Psi}, (T_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}\rangle \to \mathcal{O}_K\langle(T_\psi^{\pm 1/p^\infty})_{\psi\in\Psi}, (T_\sigma^{1/p^\infty})_{\sigma\in\Sigma}\rangle$ 对 R 作 p-完备基变换所得的空间。则映射 $R \to R_\infty$ 是准 syntomic 的。记 $G = \prod_\Psi \mathbf{Z}_p(1) \times \prod_\Sigma \mathbf{Z}_p(1)$。注意，

Spa$(R_{\infty,C}, R_{\infty,\mathcal{O}_C})$ 是一个仿射完备化完美空间，而覆盖 Spa$(R_{\infty,C}, R_{\infty,\mathcal{O}_C}) \to X_C$ 是一个 G-挠子。对于每个 $n \geq 0$，记 R^n（分别为 R^n_∞）为 p-完备自张量积 $R^{\widehat{\otimes}^{n+1}_{\mathcal{O}_K}}$（分别为 $R_\infty^{\widehat{\otimes}^{n+1}_{\mathcal{O}_K}}$）。

与命题 7.20 的证明中一样，令$D_{\mathrm{pd},\,(\Psi,\Sigma)^n}(R)$ 为 p完备的对数 PD 包络

$$A_{\mathrm{inf},K}\langle (T_\psi^{\pm 1})_{\psi\in\Psi}, (T_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}\rangle^{\widehat{\otimes}^{n+1}_{A_{\mathrm{inf},K}}} \twoheadrightarrow R\mathcal{O}_C.$$

令 $\mathbf{A}_{\text{log-cris},\,K}(R^n_\infty,\,\mathcal{O}_C)$ 为映射 $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(R^n_\infty,\,\mathcal{O}_C)\otimes_{W(k)}\mathcal{O}_K \twoheadrightarrow R_\infty,\,\mathcal{O}_C$ 的 p-完备对数 PD 包络。分别将 T_ψ 和 T_σ 映至 $[(T_\psi^{1/p^m})_m]$ 和 $[(T_\sigma^{1/p^m})_m]$ 中的 $A_{\mathrm{inf}}(R_\infty,\,\mathcal{O}_C)$，得到

$$\lim_{[n]\in\Delta} \mathcal{E}_{\mathrm{cris}}(D_{\mathrm{pd},(\Psi,\Sigma)^n}(R)) \to \lim_{[n]\in\Delta} \mathcal{E}_{\mathrm{cris}}(\mathbf{A}_{\text{log-cris},K}(R^n_{\infty,\mathcal{O}_C})).$$

此映射是一个同构，因为二者计算的是同一个晶体上同调 $R\Gamma$(((形式谱 $R_{\mathcal{O}_C/p},\ M_{\mathrm{Spf}\,R_{\mathcal{O}_C/p}}$)/($A_{\text{log-cris},\,K},\ M_{A_{\text{log-cris},\,K}}$))$_{\mathrm{CRIS}},\ \mathcal{E}_{\mathrm{cris}}$)（注意 $R \to R_\infty$ 是准 syntomic；另见 [DMS26，定理 6.6]）。

在这一局部情形下，我们可以用 Čech–Alexander复形描述 (7.5) 中的映射：

- **(2.a)：** 回顾命题 7.20 的证明，我们有

$$\mathcal{E}_{\mathrm{inf}}(D_{(\Psi,\Sigma)^n}(R)) = \mathcal{E}_{\mathrm{cris}}(D_{\mathrm{pd},(\Psi,\Sigma)^n}(R)) \otimes_{D_{\mathrm{pd},(\Psi,\Sigma)^n}(R)} D_{(\Psi,\Sigma)^n}(R)$$

并且有一个自然映射

$$(\lim_{[n]\in\Delta} \mathcal{E}_{\mathrm{cris}}(D_{\mathrm{pd},(\Psi,\Sigma)^n}(R))\widehat{\otimes}^L_{A_{\text{log-cris},K}} B^+_{\mathrm{dR}} \to \lim_{[n]\in\Delta} \mathcal{E}_{\mathrm{inf}}(D_{(\Psi,\Sigma)^n}(R)).$$

由于第二个复形计算 $R\Gamma_{\mathrm{inf}}$，根据命题 7.21，上述映射是同构。沿着 $B^{+}{}_{\mathrm{dR}} \to B_{\mathrm{dR}}$ 进行基变换得到映射 (2.a)。

- $\gamma_{\mathrm{cris}\,K}$：为了描述 (7.5) 中的映射$\gamma_{\mathrm{cris}\,K}$，注意对于任意选择的扩大的框架 (Ψ,Σ)，我们都有子集 $\Psi'\subset\Psi$ 和 $\Sigma'\subset\Sigma$，其中 $\prod_{\sigma\in\Sigma'} T_\sigma = \pi$ 位于 R 中，使得诱导映射

$$\square\colon \mathcal{O}_K\langle (T_\psi^{\pm 1})_{\psi\in\Psi'}, (T_\sigma)_{\sigma\in\Sigma'}\rangle/(\prod_{\sigma\in\Sigma'} T_\sigma - \pi) \to R$$

是 p-完全 étale 的。因此，我们有由 $\mathfrak{S}_\square \to \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(R_{\infty,\mathcal{O}_C})$ 给出的 $T_\psi \mapsto [(T_\psi^{1/p^m})_m]$（对于 $\psi\in\Psi'$）、由 $T_\sigma \mapsto [(T_\sigma^{1/p^m})_m]$ 给出的 $\sigma\in\Sigma'$，以及 $u \mapsto \prod_{\sigma\in\Sigma'}[(T_\sigma^{1/p^m})_m]$。这唯一地延拓为 $S_\square \to \mathbf{A}_{\text{log-cris},K}(R_{\infty,\mathcal{O}_C})$，并诱导出一个余单纯环的映射

$$S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\square \to \mathbf{A}_{\text{log-cris},K}(R^\bullet_{\infty,\mathcal{O}_C}),$$

其中 $S^{\mathrm{rel}}{}_{,\,\square}{}^{[\bullet]}$ 在引理 6.13 和上文中定义。回想根据定理 6.21 及其证明，我们有

$$R\Gamma_{\mathbb{\Delta}}\otimes^L_{A_{\mathrm{inf}}} A_{\mathrm{cris}}[p^{-1}] \cong R\Gamma_{\mathrm{Br}}(X, j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}})\widehat{\otimes}^L_{S_K} A_{\mathrm{cris}}[p^{-1}] \cong (\lim_{[n]\in\Delta} j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}(S^{\mathrm{rel},[\bullet]}_\square))\widehat{\otimes}^L_{S_K} A_{\mathrm{cris}}[p^{-1}].$$

因此，根据定理 6.26 的证明，映射 $\gamma_{\mathrm{cris},\ K}$ 由下式给出

$$\gamma_{\mathrm{cris},K}\colon R\Gamma_{\mathbb{\Delta}} \otimes^{L}_{A_{\mathrm{inf}}} B_{\mathrm{dR}} \cong (\lim_{[n]\in\Delta} j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}(S^{\mathrm{rel},[n]}_{\square}))\widehat{\otimes}^{L}_{S_K} B_{\mathrm{dR}} \\ \to (\lim_{[n]\in\Delta} \mathcal{E}_{\mathrm{cris}}(\mathbf{A}_{\text{log-cris},K}(R^n_{\infty,\mathcal{O}_C}))\widehat{\otimes}^{L}_{A_{\text{log-cris},K}} B_{\mathrm{dR}}.$$

• **(1.a)：** 对于 (7.5) 的左侧垂直映射，将 $\mathrm{Spa}(R_{\infty,\ C},\ R_{\infty,\ \mathcal{O}_C})^{\bullet}$ 记作 $\mathrm{Spa}(R_{\infty,\ C},\ R_{\infty,\ \mathcal{O}_C}) \to X_C$在 $X_{C,\ \mathrm{pro\acute{e}t}}$中的 Čech 神经。我们有

$$R\Gamma(X_{C,\mathrm{proét}}, \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})) \cong \lim_{[n]\in\Delta} \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})(\mathrm{Spa}(R_{\infty,C}, R_{\infty,\mathcal{O}_C})^n).$$

如上所述，映射 $\mathfrak{S}_{R,\ \square} \to \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}(R_{\infty,\ \mathcal{O}_C})$ 诱导出一个余单纯环的映射

$$\mathfrak{S}^{\mathrm{rel},[\bullet]}_{\square} \to \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(\mathrm{Spa}(R_{\infty,C}, R_{\infty,\mathcal{O}_C})^{\bullet}).$$

因此，映射 (1.a) 由下式给出

$$R\Gamma_{\mathrm{BK}}(X, j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}) \cong \lim_{[n]\in\Delta} j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}(\mathfrak{S}^{\mathrm{rel},[n]}_{\square}) \to \lim_{[n]\in\Delta} j_*\mathcal{E}_{\mathbb{\Delta}}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(\mathrm{Spa}(R_{\infty,C}, R_{\infty,\mathcal{O}_C})^n)),$$

其中，第一个同构在命题 6.20 的证明中给出。

• **(2.b)：** 类似地，$T_\lambda \mapsto [(T_\lambda^{1/p^m})_m]$ 对于 $\lambda \in \Psi \cup \Sigma$ g 给出

$$\lim_{[n]\in\Delta} \mathcal{E}_{\mathrm{inf}}(D_{(\Psi,\Sigma)^n}(R)) \to \lim_{[n]\in\Delta} \mathcal{E}_{\mathrm{cris},\mathbf{Q}}(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})(\mathrm{Spa}(R_{\infty,C}, R_{\infty,\mathcal{O}_C})^n),$$

这就给出了 (7.5) 中的底部映射。

由上述以 Čech–Alexander复形给出的显式描述可知，图表 (7.5) 可交换，且其中的局部构造关于形式谱 $R \in X_{\text{ét}}$ 和整扩张框架 (Ψ, Σ) 具有函子性。此外，映射 (2.b) 在整体上是拟同构；也就是说，在 X上取整体截面后，它仍是拟同构，因为图表中的其他映射也都是拟同构。

图表 (7.3) 的其余部分基本上可由 [GR24 定理 10.16] 证明中相应部分的相同论证得到（在我们的情形中，使用例 7.18 中的扩大框架），由此也可推出整个图表可交换。□

附录 A. 对数形式概形的补充

设 X 是一个 p-进形式概形。对每个 $n \geq 1$，记 X_n 为概形 $(|X|, \mathcal{O}_X/p^n)$，并令 $i_n\colon X_{n,\text{ét}} \to X_{\text{ét}}$ 表示由此诱导的小 étale$^{\sim}$位点之间的态射。仍记 $\mathcal{O}_X$ 为 $X_{\text{ét}}$ 上的结构层。回忆一下，根据 [FK18 引理 I.6.2.11]，有 $\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \lim_{\longleftarrow n} i_{n,*}\mathcal{O}_{X_n}$。

命题 A.1. 设 M_X 是 X 上的一个对数结构，并记M_{X_n} 为由预对数结构$i_n^{-1}M_X \to \mathcal{O}_{X_n}$附加到 X_n 上的对数结构。映射

$$M_X \to \varprojlim_n i_{n,*}M_{X_n} \quad and \quad \Gamma(X_{\text{ét}}, M_X) \to \varprojlim_n \Gamma(X_{n,\text{ét}}, M_{X_n})$$

是同构。

证明。考虑幺半群层的短正合序列

$$1 \to \mathcal{O}_X^\times \to M_X \to \overline{M}_X \to 1 \quad \text{and} \quad 1 \to \mathcal{O}_{X_n}^\times \to M_{X_n} \to \overline{M}_{X_n} \to 1,$$

其中 $\overline{M}_X := M_X/\mathcal{O}_X^\times$ 且 $\overline{M_{X_n}} := M_{X_n}/\mathcal{O}_{X_n}^\times$。根据（形式概形版本的）[Ogu18, 注 III.1.1。6], 我们有 $M_{X_n} = i_n^{-1}(\overline{M}_X)$。因此得到一个短正合序列

$$1 \to i_{n,*}\mathcal{O}_{X_n}^\times \to i_{n,*}M_{X_n} \to i_{n,*}i_n^{-1}(\overline{M}_X) \to 1$$

其中 $i_{n,*}i_n^{-1}(\overline{M}_X) = \overline{M}_X$。取逆极限得到一个行正合的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X^\times & \longrightarrow & M_X & \longrightarrow & \overline{M}_X \longrightarrow 1. \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ 1 & \longrightarrow & \varprojlim i_{n,*}\mathcal{O}_{X_n}^\times & \longrightarrow & \varprojlim i_{n,*}M_{X_n} & \longrightarrow & \overline{M}_X \end{array}$$

$\sim$ $\sim$由于 $\mathcal{O}_X^\times \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n i_{n,*}\mathcal{O}_{X_n}^\times$，我们得出 $M_X \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n i_{n,*}M_{X_n}$。第二个断言可由第一个断言取整体截面得到。□

引理 A.2. 设 X' 是一个 p-进形式概形，且 $f\colon X' \to X$ 是一个拟紧进忠实平坦态射。令 $g\colon X'' := X' \times_X X' \to X$。设 M_X 是一个在 *Zariski* 局部允许图表的整对数结构，并设 $M_{X'}$（分别为 $M_{X''}$）表示 X'（分别为 X''）上的拉回对数结构。那么幺半群层的图

$$M_X \to f_*M_{X'} \rightrightarrows g_*M_{X''}$$

是正合的。

证明。令 $X'_n := X' \times_X X_n$ 并令 $X''_n := X'' \times_X X_n$。那么它们都是概形，且 X''_n可识别为 $X'_n \times_{X_n} X'_n$。根据假设，诱导映射 $f_n\colon X'_n \to X_n$ 是拟紧忠实平坦的。由 [Ogu18，命题 II.1.1.8.3，引理 III.1.4.2], $M_{X_n} \to f_{n,*}M_{X'_n} \rightrightarrows g_{n,*}M_{X''_n}$ 是正合的，其中 M_{Y_n} 表示 M_Y在 Y_n 上的拉回对数结构，而 g_n 表示诱导映射 $X''_n \to X_n$。现在由引理 A.1 即得该引理。□

附录 B. 晶体位点的变体

B.1. 晶体位。 我们介绍 [Kos22],中使用的晶体位点变体，并将用它们来建立第 5 节中的棱柱-晶体比较定理。本小节中的所有形式概形都是 p-进的。

以下是本小节的设定：令 A 为一个 p-挠无关 p-完备环，令 $M_A \to A$ 为 A 上的预对数结构，使得 M_A 是整的。令 I 为 A 的一个 p-完备 PD 理想，且包含 p，其 PD-结构为 γ_A。令 (Y, M_Y) 为定义在 (A, M_A) 上的对数 p-进形式概形，使得 M_Y 是整且拟凝聚的。

定义 B.1 ([Kos22，注 6.6])。将 $((Y, M_Y)/(A, M_A))_{\mathrm{CRIS}}$ 定义为一个位点，其反范畴如下：对象是一个四元组 $(B, M_{\mathrm{Spf}\,B}, J, f)$（为简便起见，也写作 (B, J) 或 $(B, B/J)$），其中

- (形式谱 B, $M_{\text{形式谱 }B}$) 是与预对数环 $(B,\ M_B)$上 $(A,\ M_A)$ 相关联的对数形式概形，其中 B 是一个 p无挠 p-完备环，且 $M_{\text{形式谱 }B}$是整的； J 是 B 的一个 p-完备 PD 理想，并且 B/J 是 p- 完备的；
- f 是 p-进形式概形的态射 $\mathrm{Spf}\, B/J \to Y$；
- 一个正合闭浸入 $(\mathrm{Spf}\ B/J, f^*M_Y) \hookrightarrow (\mathrm{Spf}\ B, M_{\mathrm{Spf}\ B})$。

从 $(B, M_{\mathrm{Spf}\, B}, J, f)$ 到 $(B', M_{\mathrm{Spf}\, B'}, J', f')$ 的态射是一个环同态g: $B \to B'$，它与其他结构相容。我们用同一符号 g表示诱导态射 $(\mathrm{Spf}\ B', M_{\mathrm{Spf}\, B'}) \to (\mathrm{Spf}\ B, M_{\mathrm{Spf}\, B})$。我们在 $((Y, M_Y)/(A, M_A))_{\mathrm{CRIS}}$ 上赋予严格 étale 拓扑： $\{g_i : (B, M_{\mathrm{Spf}\, B}, J, f) \to (B_i, M_{\mathrm{Spf}\, B_i}, J_i, f_i)\}$ 是一个覆盖，当且仅当 g_i: $(\mathrm{Spf}\ B_i, M_{\mathrm{Spf}\, B_i}) \to (\mathrm{Spf}\ B, M_{\mathrm{Spf}\, B})$ 是 p-完全 étale 且严格并且联合满射，并且对每个 i， $J_i = (JB_i)^\wedge_p$。为说明这定义了一个位点，注意推出存在于如下图表中

$$(B_1, M_{\mathrm{Spf}\, B_1}, J_1, f_1) \xleftarrow{g_1} (B, M_{\mathrm{Spf}\, B}, J, f) \xrightarrow{g_2} (B_2, M_{\mathrm{Spf}\, B_2}, J_2, f_2)$$

在$((Y,\ M_Y)/(A,\ M_A))^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{CRIS}}$中，若 g_1 是 p-完全 étale 且严格的，并且若 $J_1 = (JB_1)^\wedge_p$，则在此情形下，推出 $(B',\ M_{\mathrm{Spf}\, B'},\ J',\ f')$ 由 $B' = B_1 \widehat{\otimes}_B B_2 := (B_1 \otimes_B B_2)^\wedge_p$ 和 $J' = (J_2 B')^\wedge_p$ 给出。

关联 $(B,\ M_{\mathrm{Spf}\, B},\ J,\ f) \mapsto B$ 通过 p-完全忠实平坦下降定义了一个环层 $\mathcal{O}_{\mathrm{CRIS}}$。

记号 $((Y,\ M_Y)/(A,\ M_A))_{\mathrm{CRIS}}$ 是 $((Y,\ M_Y)/(A,\ (p)\ M_A))_{\mathrm{CRIS}}$ 的缩写，因为 $J \subset B$ 上的 PD-结构与 pB 上的典范 PD-结构相容（见注 B.2）。当 $(A,\ M_A)$ 是带有平凡对数结构的 $\mathbf{Z}_p$ 时，我们将简称 $(Y,\ M_Y)_{\mathrm{CRIS}}$，以表示 $((Y,\ M_Y)/(A,\ M_A))_{\mathrm{CRIS}}$，并称其为绝对晶体位点。

注记 B.2 ([Kos22，注记 6.5])。对于每个 $(B, J) \in ((Y, M_Y)/(A, M_A))^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{CRIS}}$， I 和 J 上的 PD-结构是相容的，因为 B 是 p-无挠的。

注记 B.3。严格来说，上述 $(Y, M_Y)_{\mathrm{CRIS}}$ 不同于绝对晶体位点 $(Y, M_Y)_{\mathrm{CRIS}} := ((Y, M_Y)/\mathbf{Z}_p^\sharp)_{\mathrm{CRIS}}$ 中的 [DMS26，定义 10.1]。然而，我们有如下文命题 B.8 所述的比较结果。因此，我们通常忽略这种差异。

对于 (A, M_A) 上的整且拟凝聚 log p-adic 形式概形之间的态射 h: $(Y', M_{Y'}) \to (Y, M_Y)$，可以定义一个拓扑斯态射

$$h_{\mathrm{CRIS}} : ((Y', M_{Y'})/(A, M_A))_{\mathrm{CRIS}} \to ((Y, M_Y)/(A, M_A))_{\mathrm{CRIS}}$$

方式类似于 [DMS26，§ 4]；细节留给读者。

命题 B.4. 存在一个拓扑斯态射（称为从晶体拓扑斯到 étale 拓扑的投影）

$$u_Y := u_{Y/(A,M_A)} : \mathrm{Sh}(((Y, M_Y)/(A, M_A))_{\mathrm{CRIS}}) \to \mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}})$$

由以下给出

$$(u_{Y/(A,M_A),*}\mathcal{F})(V) = \Gamma(((V, M_V)/(A, M_A))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{F}|_{((V,M_V)/(A,M_A))_{\mathrm{CRIS}}})$$

（其中 M_V 是来自 M_Y 的拉回对数结构）以及

$$(u^*_{Y/(A,M_A)}\mathcal{G})(B, M_{\operatorname{Spf} B}, J, f) = (f^*_{\text{ét}}\mathcal{G})(\operatorname{Spf} B/J).$$

注意，对于 $V \in Y_{\text{ét}}$，显然存在一个限制函子 $\mathrm{Sh}(((Y, M_Y)/(A, M_A))_{\mathrm{CRIS}}) \to \mathrm{Sh}(((V, M_V)/(A, M_A))_{\mathrm{CRIS}})$。

证明。 [DMS26，命题 5.1] 的证明在这种情形下也适用。 □

定义 B.5。 称一个 $\mathcal{O}_{\mathrm{CRIS}}$-模 $\mathcal{E}$ 为 p-进完备晶体，如果

(1) 对每个 $(B, J) \in ((Y, M_Y)/(A, M_A))^{\mathrm{op}}_{\mathrm{CRIS}}$，$\mathcal{E}(B, J)$ 都是一个 p-进完备 B-模；并且 (2) 对于 $((Y, M_Y)/(A, M_A))^{\mathrm{op}}_{\mathrm{CRIS}}$ 中的每个映射 $(B, J) \to (B', J')$，其诱导映射 $\mathcal{E}(B, J) \widehat{\otimes}_B B' := \varprojlim (\mathcal{E}(B, J) \otimes_B B')/p^n(\mathcal{E}(B, J) \otimes_B B') \to \mathcal{E}(B', J')_n$ 是一个同构。

Lemma B.6. 设 $\mathcal{E}$ 是 $((Y, M_Y)/(A, M_A))_{\mathrm{CRIS}}$ 上的 p-进完备晶体。

(1) 对每个 $n \geq 1$，由 $\mathcal{E}_n(B, J) := \mathcal{E}(B, J)/p^n\mathcal{E}(B, J)$ 给出的预层 $\mathcal{E}_n$ 是一个层，并且对每个 (B, J) 和 $q > 0$ 满足 $H^q((B, J)\ \mathcal{E}_n) = 0$。*(2)* 映射 $\mathcal{E} \to \varprojlim_n \mathcal{E}_n$ 是一个同构，并且对每个 $q > 0$ 有 $R^q \varprojlim_n \mathcal{E}_n = 0$。此外，对每个 (B, J) 和 $q > 0$，有 $H^q((B, J)\ \mathcal{E}) = 0$。

证明。固定 $(B, J) \in ((Y, M_Y)/(A, M_A))^{\mathrm{op}}_{\mathrm{CRIS}}$，并令 $B_n = B/p^n$。注意，(B, J) 的每个覆盖都可以加细为形如 $g\colon (B, J) \to (B', J')$ 的覆盖，其中 g 是 p-完全 étale 且忠实平坦的，并且 $J' = (JB')^\wedge_p$，我们也将其固定。由于 $\mathcal{E}$ 是一个 p-进完备晶体，对每个 $(B, J) \to (B'', J'')$，我们有 $\mathcal{E}_n(B'', J'') \cong \mathcal{E}_n(B, J) \otimes_{B_n} B''_n$。特别地，由于 $B_n \to B'_n$ 是忠实平坦的，切赫上同调 $\check{H}^q(\{(B, J) \to (B', J')\}, \mathcal{E}_n)$ 在 $q = 0$ 时为 $\mathcal{E}_n(B, J)$，在 $q > 0$ 时为零。由此，由 [Sta21, 03F9] 可得 (1)，由 [Sch13, 引理 3.18] 可得 (2)。 □

我们还回顾一下 [DMS26, § 10] 中研究的大晶体位点。

定义 B.7 （详见 [DMS26, Def. 10.1] ）。 保持前述设定，并进一步假设 (Y, M_Y) 是一个关于 A/I 的对数（形式）概形。令 $\mathcal{S}^\sharp = (\mathcal{S}, M_{\mathcal{S}}, \mathcal{J}_{\mathcal{S}}, \gamma_{\mathcal{S}})$ 为与 (A, M_A, I, γ_A) 相关联的 p-进对数 PD 形式概形，并将对数 PD 概形 $S^\sharp_n \mathcal{S}^\sharp \times_{\operatorname{Spf} \mathbf{Z}_p} \operatorname{Spec} \mathbf{Z}_p/p^n$ 记作 $S^\sharp_n$。

令 $((Y, M_Y)/\mathcal{S}^\sharp)_{\mathrm{CRIS}}$ 表示大相对对数晶体位点，它是 $((Y, M_Y)/S^\sharp_n)_{\mathrm{CRIS}}$ 的余极限：具体而言，一个对象是一个六元组 $(U, T, M_T, f, i, \gamma)$，其中 $f\colon U \to Y$ 是 S_1 上的概形态射，(T, M_T) 是一个对数 $S^\sharp_n$-概形，且对某个 $n \geq 1$，M_T 是整且拟凝聚的；i 是一个正合闭浸入 $(U, M_U := f^*M_Y) \to (T, M_T)$，其定义在 (S_n, M_{S_n}) 上；γ 是 $\mathcal{O}_T$ 的理想上的 PD-结构，该理想定义了 U，并且与 $\mathcal{J}_{S_n}\mathcal{O}_T$ 上的 PD-结构相容。我们常将其简写为 (U, T)。态射取显然的态射，并考虑严格 étale 拓扑。将 (U, T) 关联到 $\mathcal{O}_T(T)$ 的对应关系定义了结构层 $\mathcal{O}_{Y/\mathcal{S}}$，并且我们有拓扑斯投影态射 $u_{Y,\mathcal{S}}\colon \mathrm{Sh}(((Y, M_Y)/\mathcal{S}^\sharp)_{\mathrm{CRIS}}) \to \mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}})$。当 $\mathcal{S} = \operatorname{Spf} \mathbf{Z}_p$ 带有平凡对数结构和典范 PD 理想 (p) 时，我们将 $((Y, M_Y)/\mathcal{S}^\sharp)_{\mathrm{CRIS}}$ 记作 $(Y, M_Y)_{\mathrm{CRIS}}$。

我们定义加性函子

$$\alpha\colon \mathrm{Ab}(((Y,M_Y)/\mathcal{S}^\sharp)_{\mathrm{CRIS}}) \to \mathrm{Ab}(((Y,M_Y)/(A,M_A))_{\mathrm{CRIS}})$$

如 [DMS26，构造 10.6] 中所述。对于 $(B, M_{\mathrm{Spf}\,B}, J, f) \in ((Y,M_Y)/(A,M_A))^{\mathrm{op}}$ CRIS，设 $\overline{B} := B/J$ 且 $B_n := B/p^nB$。那么 (Spec B, Spec B_n, $M_{\mathrm{Spec}\,B_n}$, f, Spec $B \hookrightarrow$ Spec B_n, γ) 给出 $((Y,M_Y)/S_n^\sharp)_{\mathrm{CRIS}}$ 的一个对象，为简便起见，我们将其记作 (Spec B, Spec B_n)。令 (Spec B, 形式谱 B) $\in \mathrm{Sh}(((Y,M_Y)/\mathcal{S}^\sharp)_{\mathrm{CRIS}})$ 表示由 n 上由 (Spec B, Spec B_n) 表示的层构成的余极限。对于 $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}(((Y,M_Y)/\mathcal{S}^\sharp)_{\mathrm{CRIS}})$，定义 $\alpha(\mathcal{F})$ 如下：

$$\alpha(\mathcal{F})\colon (B, M_{\mathrm{Spf}\,B}, J, f) \mapsto \mathcal{F}(\mathrm{Spec}\,\overline{B}, \mathrm{Spf}\,B) = \varprojlim_n \mathcal{F}(\mathrm{Spec}\,\overline{B}, \mathrm{Spec}\,B_n).$$

由于 $\alpha(\mathcal{O}_{Y/\mathcal{S}}) = \mathcal{O}_{\mathrm{CRIS}}$，它给出 $\alpha\colon \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{Y/\mathcal{S}}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\mathrm{CRIS}})$。显然，$\alpha$ 与 Y 上的 étale 局部化相容。

命题 *B.8.* *假设 M_A 是有限型的，且 $\pi\colon (Y,M_Y) \to (\mathrm{Spec}\ A/I, M_A^a)$ 是有限型对数概形之间的光滑整态射。那么 α 在 $((Y,M_Y)/\mathcal{S}^\sharp)_{\mathrm{CRIS}}$ 上的拟凝聚 $\mathcal{O}_{Y/\mathcal{S}}$-模范畴与 $((Y,M_Y)/(A,M_A))_{\mathrm{CRIS}}$ 上的 p-进完备晶体范畴之间诱导一个等价。进一步，对于拟凝聚 $\mathcal{O}_{Y/\mathcal{S}}$-模 $\mathcal{E}$，存在函子性的同构 $Ru_{Y/\mathcal{S},*}\mathcal{E} \cong Ru_{Y,*}\alpha$，它们属于 $D(Y_{\text{ét}}, A)$，以及 $R\Gamma(((Y,M_Y)/\mathcal{S}^\sharp)_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E}) \cong R\Gamma(((Y,M_Y)/(A,M_A))_{\mathrm{CRIS}}, \mathcal{E})$，它们属于 $D(A)$*

证明。令 $((Y,M_Y)/\mathcal{S}^\sharp)^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{CRIS}} \subset ((Y,M_Y)/\mathcal{S}^\sharp)_{\mathrm{CRIS}}$ 表示由满足 T 为仿射的 (U,T) 所构成的全子范畴。则该包含是一个特殊余连续函子（见 [Sta21, 03CG]），从而在伴随拓扑斯上诱导一个等价。在本证明的其余部分，我们可以并且确实将 α 视为从 $\mathrm{Ab}(((Y,M_Y)/\mathcal{S}^\sharp)^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{CRIS}})$ 出发的函子。

对于第一个断言，由于 α 与 étale 局部化相容，我们可以假设 $Y = \mathrm{Spec}\,R$ 是仿射的，且 M_Y 在 M_A 上具有一个图表。于是可以将 $(Y,M_Y) \to (\mathrm{Spec}\ A/I, M_A^a)$ 提升为仿射 p-进对数形式概形的一个态射 $(\mathcal{Y}, M_{\mathcal{Y}}) \to (\text{形式谱 } R, M_{\mathrm{Spf}\,\widetilde{R}}) \to (\mathcal{S}, M_{\mathcal{S}})$，使得对每个 $n \geq 1$，$(Y_n, M_{Y_n}) := (\mathrm{Spec}\,R/p^n, M_{\mathrm{Spec}\,\widetilde{R}/p^n}) \to (S_n, M_{S_n})$ 都是光滑且整的（见 [Kat89, 命题 3.14, 命题 4.1]）。记 $(\mathcal{Y}^{[m]}, M_{\mathcal{Y}^{[m]}})$ 为 $(\mathcal{Y}, M_{\mathcal{Y}})$ 在 $(\mathcal{S}, M_{\mathcal{S}})$ 上的 $(m+1)$ 次自纤维积，并令 $(Y,M_Y) \hookrightarrow (\mathcal{D}^{[m]}, M_{\mathcal{D}^{[m]}})$ 为闭浸入 $(Y,M_Y) \hookrightarrow (\mathcal{Y}^{[m]}, M_{\mathcal{Y}^{[m]}})$ 相对于 $\mathcal{S}^\sharp$ 的 p- 进完备化 PD 包络。则 $\mathcal{D}^{[m]} =$ 形式谱 $B^{[m]}$ 是仿射的（注 $B^{[0]} = \widehat{R}$），并且由 [Kat89, 推论 4.5, 命题 6.5]，对每个 $n \geq 1$，$B^{[m]}/p^n$ 在 A/p^n 上平坦。特别地，$B^{[m]}$ 是一个 p-无挠的 p-完备环；若令 $J^{[m]} :=$核$(B^{[m]} \to R)$，则 $(B^{[m]}, M_{\mathcal{D}^{[m]}}, J^{[m]}, \pi)$ 定义了 $((Y,M_Y)/\mathcal{S}^\sharp)^{\mathrm{op}}$ CRIS 中的一个对象。由 [Ogu18, 命题 IV.3.1.4.2] 可知，由 $(B^{[0]}, M_{\mathcal{D}^{[0]}}, J^{[0]}, \pi)$ 所表示的层作为预层的态射满射到伴随拓扑斯的终对象，并且 $(B^{[m]}, M_{\mathcal{D}^{[m]}}, J^{[m]}, \pi)$ 作为层表示它的 $(m+1)$ 次积。类似地，若令 $D_n^{[m]} :=$ Spec $B^{[m]}/p^n$，则对 $(Y, D_n^{[0]})$、$(Y, D_n^{[m]}) \in ((Y,M_Y)/S_n^\sharp)^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{CRIS}}$ 也有类似的性质。

对于拟凝聚 $\mathcal{O}_{Y/\mathcal{S}}$-模 $\mathcal{E}$，对每个 $m \geq 1$，令 $E^{[m]} := \alpha(\mathcal{E})(B^{[m]}, M_{\mathcal{D}^{[m]}}, J^{[m]}, \pi) =$li m$_{\longleftarrow n}\,\mathcal{E}(Y, D_n^{[m]})$。注意每个 $E^{[m]}$ 都是 p-进完备的 $B^{[m]}$-模。这容易由前一段以及标准讨论得出

关于 HPD 分层的结论： $\mathcal{E}$ 与 $\alpha(\mathcal{E})$ 都决定并被 2 截断余单纯环 $(B^{[\bullet]})_{0\leq\bullet\leq 2}$ 上的 2 截断余单纯模 $(E^{[\bullet]})_{0\leq\bullet\leq 2}$ 所决定，使得对每个映射 $[\bullet]\to[\bullet']$，诱导映射 $E^{[\bullet]}\otimes_{B^{[\bullet]}}B^{[\bullet']}\to E^{[\bullet']}$ 都是同构（参见 [DMS26，命题 6.8]）。类似地可以看出，$((Y,M_Y)/(A,M_A))_{\mathrm{CRIS}}$ 上 p-进完备晶体的范畴等价于同一范畴。第一个断言由这些观察得出。

对于第二个断言，我们先构造一个比较映射。令 $n\geq 1$。包含映射 $((Y,M_Y)/\mathcal{S}_n^\sharp)^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{CRIS}}\hookrightarrow((Y,M_Y)/\mathcal{S}^\sharp)^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{CRIS}}$ 以及函子 $((Y,M_Y)/(A,_M_A))_{\mathrm{CRIS}}\to((Y,M_Y)/\mathcal{S}_n^\sharp)^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{CRIS}}$，它将 $(B,M_{\mathrm{Spf}\,B},J,f)$ 发送到 $(\mathrm{Spec}\,B,\mathrm{Spec}\,B_n)$，二者都是连续且余连续的。它们诱导出拓扑斯态射，这些态射出现在下面的拓扑斯交换图中

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathrm{Sh}((Y,M_Y)/\mathcal{S}_n^\sharp)^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{CRIS}}) & & \\
 & \overset{i_n}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle u_{Y/\mathcal{S}_n}} & \overset{\beta_n}{\nwarrow} & \\
\mathrm{Sh}(((Y,M_Y)/\mathcal{S}^\sharp)^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{CRIS}}) & \xrightarrow{u_{Y/\mathcal{S}}} & \mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}}) & \xleftarrow{u_Y} & \mathrm{Sh}(((Y,M_Y)/(A,M_A))_{\mathrm{CRIS}}).
\end{array}$$

通过验证 $i_n^*\circ u_{Y/\mathcal{S}}=u_{Y\mathcal{S}_n}$ 和 $\beta_n^*\circ u_{Y/\mathcal{S}_n}^*=u_Y^*$，即可看出这里的交换性。令 $\mathcal{E}$ 为一个拟凝聚 $\mathcal{O}_{Y/\mathcal{S}}$-模。由 [DMS26，命题 10.5]，我们有 $Ru_{Y/\mathcal{S},*}\mathcal{E}\xrightarrow{=}R\lim_{\longleftarrow n}Ru_{Y/\mathcal{S}_n,*}i_n^*\mathcal{E}$ in $D(Y_{\text{ét}},A)$[15]。另一方面，我们计算得 $\beta_n^*i_n^*\mathcal{E}=\alpha(\mathcal{E})_n$，因此由引理 B.6 可得 $\alpha(\mathcal{E})\xrightarrow{\cong}R\lim_{\longleftarrow n}\beta_n^*i_n^*\mathcal{E}$。于是，根据 [Sta21，0A07]，有 $Ru_{Y,*}\alpha(\mathcal{E})\xrightarrow{\cong}R\lim_{\longleftarrow n}Ru_{Y,*}\beta_n^*i_n^*\mathcal{E}$。容易看出，伴随映射 $i_n^*\mathcal{E}\to R\beta_{n,*}\beta_n^*i_n^*\mathcal{E}$ 诱导出一个比较映射

$$\begin{aligned}
Ru_{Y/\mathcal{S},*}\mathcal{E}\xrightarrow{\cong}R\varprojlim_n Ru_{Y/\mathcal{S}_n,*}i_n^*\mathcal{E}\to&R\varprojlim_n Ru_{Y/\mathcal{S}_n,*}R\beta_{n,*}\beta_n^*i_n^*\mathcal{E}\\
&\xrightarrow{\cong}R\varprojlim_n Ru_{Y,*}\beta_n^*i_n^*\mathcal{E}\xleftarrow{\cong}Ru_{Y,*}\alpha(\mathcal{E}).
\end{aligned}$$

进一步应用 $R\Gamma(Y_{\text{ét}},_)$，我们还得到

$$R\Gamma(((Y,M_Y)/\mathcal{S}^\sharp)^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{CRIS}},\mathcal{E})\to R\Gamma(((Y,M_Y)/(A,M_A))_{\mathrm{CRIS}},\mathcal{E})\quad\text{in}\quad D(A).$$

要证明这些是同构，只需证明映射

$$Ru_{Y/\mathcal{S}_n,*}i_n^*\mathcal{E}\to Ru_{Y/\mathcal{S}_n,*}R\beta_{n,*}\beta_n^*i_n^*\mathcal{E}=Ru_{Y,*}\beta_n^*i_n^*\mathcal{E}$$

对每个 n 都是同构，这可以在 Y 上 étale 局部地检验。更确切地说，只需证明对于每个从仿射概形出发的 étale 态射 $Y'=\mathrm{Spec}\,R\to Y$，诱导映射

$$\begin{aligned}
R\Gamma(((Y',M_{Y'})/\mathcal{S}_n^\sharp)^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{CRIS}},i_n^*\mathcal{E})&=R\Gamma(Y',Ru_{Y/\mathcal{S}_n,*}i_n^*\mathcal{E})\\
&\to R\Gamma(Y',Ru_{Y,*}\beta_n^*i_n^*\mathcal{E})=R\Gamma(((Y',M_{Y'})/(A,M_A))_{\mathrm{CRIS}},\beta_n^*i_n^*\mathcal{E})
\end{aligned}$$

是一个同构。为此，我们可以假设 $Y=Y'=\mathrm{Spec}\,R$，并考虑当前证明第二段中引入的对象。由 Čech–Alexandar方法（引理 B.6、其关于 $((Y,M_Y)/\mathcal{S}_n)^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{CRIS}}$ 的类似结果，以及

[15]在*loc. cit.*中，我们证明了 $D(Y_{\text{ét}},Z)$ 中的一个同构，但同样的证明也适用于 A-模。

[BS22，第 1184 页，脚注 10]）可知，它们自然地由余单纯模$\mathcal{E}(Y, D_n^{[\bullet]})$表示，由此完成证明。□

注记 B.9。从命题 B.8 的证明中可以直接看出以下结论：

(1) 我们可以放宽命题 B.8 中的假设：例如，若 $(Y, M_Y) \to (\mathrm{Spec}\ A/I, N_A^a) \to$ (形式谱 A, M_A^a) 是满足这些假设的态射 $(Y_0, M_{Y_0}) \to (\mathrm{Spec}\ A_0/I_0, N_{A_0}^a) \to$(形式谱 $A_0, M_{A_0}^a$) 沿 $(A_0, M_{A_0}) \to (A, M_A)$ 的基变换，则该命题仍然成立。(2) 我们可以表述并证明命题 B.8 中的等价（在导出意义下）与 $Rh_{\mathrm{CRIS},*}$ 相容；例如，若 $h\colon (Y, M_Y) \to (\mathrm{Spec}\ A/I, M_A^a)$ 是真半稳定形式概形 $X \to$ 形式谱 $\mathcal{O}_K$ 的约化纤维或模 p 纤维，则情况确实如此（使用与第 6 节中类似的 Čech–Alexander 方法）。

B.2. **.....的 $\delta_{\log}$-晶体位**。本小节将回顾 [Kos22, § 6.1] 中讨论的 $\delta_{\log}$-晶体位。除非另有说明，我们记 $(A,(p)\ M_A)$ 为一个有界预对数棱柱，其整对数结构 M_A 的秩为 1；或者 (A, M_A) 是一个对数环。令 $I \subset A$ 为一个包含 p 的 PD-理想。令 (Y, M_Y) 为一个 Cartier 型的 $(A/I, M_A)$ 上的光滑对数概形（参见 [Kat89, Def. 4.8]）。

定义 B.10 ([Kos22, 定义 6.4])。记 $((Y, M_Y)/(A, M_A))_{\delta\text{-CRIS}}$ 为 $\delta_{\log}$-晶体位，它定义为一个反范畴，其对象由以下数据组成：

- 一个对数棱柱 $(B,(p)\ M_{\text{形式谱}(B)}) = (B,(p)\ M_B)^a$，它与一个带整对数结构的预对数棱柱 $(B,(p)\ M_B)$ 相关联，且该预对数棱柱位于 $(A,(p)\ M_A)$ 之上；以及一个 p-完备的 PD-理想 $J \subset B$，使得 B/J 在经典意义下是 p-完备的（这样的对象 $(B, J, M_B)^a$ 称为 (A, M_A) 之上的一个 $\delta_{\text{对数}}$-PD 三元组），
- 一个 p-进形式概形之间的映射 $f\colon \mathrm{Spf}(B/J) \to Y$ 在 A上，以及
- 对数 p-进形式概形的正合闭浸入

$$(\mathrm{Spf}(B/J), f^*M_Y) \hookrightarrow (\mathrm{Spf}(B), M_{\mathrm{Spf}(B)})$$

在 $(A,\ M_A)$ 上。

态射是保持所有结构的映射。我们赋予其 étale 拓扑。将 $(B,\ J,\ M_B)^a$ 映到 B 的函子 $\mathcal{O}_{\delta\text{-CRIS}}$ 确实是一个层，称为结构层。

当 $(A,\ I) = (\mathbf{Z}_p,\ (p))$，其中 (p) 具有典范 PD-结构，且 A 赋予了平凡对数结构时，我们将 $((Y,\ M_Y)/(A,\ M_A))_{\delta\text{-CRIS}}$简记为 $(Y,\ M_Y)_{\delta\text{-CRIS}}$，并称其为绝对 $\delta_{\log}$-晶体位。δ-结构在结构层 $\mathcal{O}_{\delta\text{-CRIS}}$上定义了一个自然自同态 $\phi = \phi_{\delta\text{-CRIS}}$。

与 $((Y,\ M_Y)/(A,\ M_A))_{\delta\text{-CRIS}}$ 相关联的两个自然函数，在本文正文讨论的比较定理中起着关键作用。

构造 B.11 ([Kos22，注记 6.6]). 忘记 δ-结构与 $\delta_{\log}$-结构定义了一个函子 $((Y, M_Y)/(A, M_A))_{\delta\text{-CRIS}} \to ((Y, M_Y)/(A, M_A))_{\mathrm{CRIS}}$。它是余连续的，并诱导一个拓扑斯态射

$$\nu_{\mathrm{CRIS}} := \nu_{Y/(A,M_A),\ \mathrm{CRIS}}\colon \mathrm{Sh}(((Y,\ M_Y)/(A,\ M_A))_{\delta\text{-CRIS}}) \to \mathrm{Sh}(((Y,\ M_Y)/(A,\ M_A))_{\mathrm{CRIS}}),$$

注 $\nu^{-1}{}_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{O}_{\mathrm{CRIS}}=\mathcal{O}_{\delta\text{-CRIS}}$。定义从 étale 拓扑到 étale 拓扑的*projection* 函子

$$u_Y^\delta:=u^\delta_{Y/(A,M_A)}\colon \mathrm{Sh}(((Y,M_Y)/(A,M_A))_{\delta\text{-CRIS}})\to \mathrm{Sh}(Y_{\text{ét}})$$

为复合映射 $u_{Y/(A,M_A)}\circ\nu_{Y/(A,M_A),\ \mathrm{CRIS}}$，其中 $u_{Y/(A,M_A)}$ 由命题 B.4 定义。

由于 $\nu^*_{\mathrm{CRIS}}\colon \mathrm{Sh}(((Y,\ M_Y)/(A,\ M_A))_{\mathrm{CRIS}},\ \mathcal{O}_{\mathrm{CRIS}})\to \mathrm{Sh}(((Y,\ M_Y)/(A,\ M_A))_{\delta\text{-CRIS}},\ \mathcal{O}_{\delta\text{-CRIS}})$ 是正合的，我们有一个伴随态射

$$Ru_{Y/(A,M_A),*}\mathcal{F}_{\mathrm{CRIS}}\to Ru^\delta_{Y/(A,M_A),*}\nu^*_{\mathrm{CRIS}}\mathcal{F}_{\mathrm{CRIS}}$$

对每个 $\mathcal{O}_{\mathrm{CRIS}}$-模 $\mathcal{F}_{\mathrm{CRIS}}$ 都成立。在命题 5.2 中，我们证明：若 Y 是 $(A/I,\ M_A)$ 上 Cartier 型的光滑对象，且 $\mathcal{F}_{\mathrm{CRIS}}$ 是一个 p-进完备晶体，则这是一个拟同构。

构造 B.12。存在一个余连续函子

$$f_{\mathbb{\Delta}/(A,M_A)}\colon ((Y,M_Y)/(A,M_A))_{\delta\text{-CRIS}}\to((Y^{(1)},M_Y^{(1)})/(\phi_*A,\phi_*M_A))_{\mathbb{\Delta},\text{ét}}$$

定义见 Kos22, § 6.2] 开头。这里，$(\phi_*A,\ \phi_*M_A)$ 表示将 $(A,\ M_A)$ 通过 ϕ 视为其自身上的预对数环。预对数环 $(A/(p)\ M_A)$ 上的弗罗贝尼乌斯自同态 ϕ 可分解为 $(A/p,\ M_A)\to(A/I,\ M_A)\xrightarrow{\psi}(\phi_*A/p,\ \phi_*M_A)$，并令 $(Y_{(1)}\,M_{Y^{(1)}}):=(Y,\ M_Y)\times_{(\mathrm{Spec}\,A/I,M_A^a)}\psi(\mathrm{Spec}\ \phi_*A/p,\ (\phi_*M_A)^a)$。

回顾当 (Y,M_Y) 与 (A,M_A) 上的预对数环 (R,P) 相关联，且 P整时的构造。取 $(B,J,M_B)^a\in((Y,M_Y)/(A,M_A))^{\mathrm{op}}_\delta$-CRIS，使得 (B,M_B) 是对数环。对 (B,J,M_B) 使用类似记号，并考虑在幺半群范畴中沿着 $M_A\to M_B$ 对 $M_A\xrightarrow{\phi_{M_A}}\phi_*M_A$ 作出的推出 $M_B\to M_B^{(1)}$。它定义了预对数环的态射 $(B,J,M_B)\xrightarrow{\psi_B}(\phi_*B,(p)\ M_B^{(1)})\to(\phi_*B,\phi_*M_B)$。

记 $f_B\colon(\mathrm{Spec}(B/J)\ M_B^a)\to(Y,\ M_Y)$ 为结构映射，并注意映射 $(\mathrm{Spec}(\phi_*B/p),\ (\phi_*M_B)^a)\xrightarrow{\psi_B}(\mathrm{Spec}(B/J)\ M_B^a)\xrightarrow{f_B}(Y,\ M_Y)$ 可经由 $Y_{(1)}$在 ϕ_*A/p 上分解，并定义一个对象 $(\phi_*B,\ (p)\ M_{(1)\,B})^a\in(Y_{(1)}\,M_Y^{(1)})_{\mathbb{\Delta}}$。此构造是函子性的，并定义了所需的 $f_{\mathbb{\Delta}/(A,M_A)}$。它诱导出一个环化拓扑斯态射 $\nu_{\mathbb{\Delta}}:=(\nu_{\mathbb{\Delta}}^{-1},\nu_{\mathbb{\Delta},*})\colon\mathrm{Sh}(((Y,M_Y)/(A,M_A))_{\delta\text{-CRIS}})\to\mathrm{Sh}(((Y_{(1)}\,M_Y^{(1)})/(\phi_*A,\phi_*M_A)^a)_{\mathbb{\Delta},\text{ét}})$。根据构造，我们有 $\nu_{\mathbb{\Delta}}^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{\Delta}}=\phi_*\mathcal{O}_{\delta\text{-CRIS}}$。

参考文献

[AI12] Fabrizio Andreatta 和 Adrian Iovita，半稳定情形下的半稳定层与比较同构，《帕多瓦大学数学研讨会报告》**138** (2012)，131–285。[AI13] ，光滑形式概形的比较同构，J. Inst. Math. Jussieu**12** (2013)，第 1 期，77–151。MR 3001736[BdJ11] Bhargav Bhatt 和 Aise Johan de Jong，晶体上同调与德拉姆上同调，2011，arXiv:1110.5001。[Bei11] Alexander Beilinson，关于晶体周期映射，2011，arXiv:1111.3316。[Bei13] A. Beilinson，关于晶体周期映射，《剑桥数学杂志》**1** (2013)，第 1 期，1–51。MR 3272051[Bha12] Bhargav Bhatt，*p-adic* 导出德拉姆上同调，2012，arXiv:1204.6560。

[BMS18] Bhargav Bhatt、Matthew Morrow 和 Peter Scholze，整 p-adic Hodge 理论，Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 128 (2018)，219–397。[BO78] Pierre Berthelot 和 Arthur Ogus，《晶体上同调札记》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州；东京大学出版社，东京，1978。MR 491705[BS15] 概形的 pro-平展拓扑，Astérisque (2015)，第 369 期，99–201。MR 3379634[BS22] ，棱柱与棱柱上同调，Ann. of Math. (2) 196 (2022)，1135–1275。[BS23] ———，棱柱 F-晶体与晶体Galois表示，《剑桥数学杂志》11 (2023)，第 2 期，507–562。MR 4600546[Bun13] Ulrich Bunke，微分上同调，2013，arXiv:1208.3961。[ČK19] Kęstutis Česnavičius 和 Teruhisa Koshikawa，半稳定情形下的 A_{inf}-上同调，Compos. Math. 155 (2019)，第 11 期，2039–2128（英文）。[CL19] Bryden Cais 和 刘同，通过晶体上同调构造 Breuil-Kisin模，Trans. Amer. Math. Soc. 371 (2019)，第 2 期，1199–1230。MR 3885176[CN17] Pierre Colmez 和 Wiesława Nizioł，合痕复形与 p-adic 附近循环，Invent. Math. 208 (2017)，1–108。[DLMS24] HENG DU、刘同、YONG SUK MOON 和 KOJI S HIMIZU，完备棱柱 F-晶体与晶体 Z$_p$-局部系统，Compos. Math. 160 (2024)，1101–1166。[DLMS26] HENG DU、刘同、YONG SUK MOON 和 KOJI SHIMIZU，对数棱柱 F-晶体与纯性，2026，arXiv:2404.19603v2。[DMS26] HENG DU、YONG SUK MOON 和 KOJI SHIMIZU，关于对数晶体高阶直接像，2026，arXiv:2603.00559。[DY24] Hansheng Diao 和 Zijian Yao，对数 A_{inf}-上同调，2024，arXiv:2402.15154。[Fal89] Gerd Faltings，晶体上同调与 p-adic Galois 表示，代数分析、几何与数论：JAMI 创立大会论文集，1988 年 5 月 16–19 日于美国马里兰州巴尔的摩举行，巴尔的摩：约翰斯·霍普金斯大学出版社，1989，第 25–80 页（英文）。[Fal02] ，几乎平展扩张，Astérisque (2002)，第 279 期，185–270，《上同调p-adiques 与算术应用，II》。MR 1922831[FK18] Kazuhiro Fujiwara 和 Fumiharu Kato，《刚性几何基础 I》，EMS 数学专著，欧洲数学学会（EMS），苏黎世，2018。MR 3752648[Fon94a] Jean-Marc Fontaine，《 p-adic 周期域》，第 223 期，1994，附 Pierre Colmez 的附录，《 p-adic 周期》（Bures-sur-Yvette，1988），第 59–111 页。MR 1293971[Fon94b] ， p-adic 半稳定表示，第 223 期，1994，附 Pierre Colmez 的附录，《 p-adic 周期》（ Bures-sur-Yvette，1988），第 113–184 页。MR 1293972[GL23] Haoyang Guo 和 李世章，带系数棱柱上同调的 Frobenius 高度，2023，arXiv:2309.06663。[GR24] Haoyang Guo 和 Emanuel Reinecke，晶体局部系统的棱柱方法，Invent. Math. 236 (2024)，17–164。[Guo] Haoyang Guo，刚性解析空间的晶体上同调，Bull. Soc. Math. France.，即将出版。arXiv: 2112.14304。[HK94] Osamu Hyodo 和 加藤和也，带对数极点的半稳定约化与晶体上同调，第 223 期，1994，《 p-adic 周期》（Bures-sur-Yvette，1988），第 221–268 页。MR 1293974[Jan89] Uwe Jannsen，数域上簇的 l-adic 上同调及其 Galois上同调，《 $\mathbb{Q}$上的 Galois 群》，Springer-Verlag，1989，第 315–360 页。[Kat89] 加藤和也，Fontaine-Illusie 的对数结构，《代数分析、几何与数论》（美国马里兰州巴尔的摩，1988），约翰斯·霍普金斯大学出版社，巴尔的摩，马里兰州，1989，第 191–224 页。MR 1463703[Kat94] ，专题报告 VI：半稳定约化与 p-adic étale 上同调，Astérisque (1994)，第 223 期，269–293，《 p-adic 周期》（ Bures-sur-Yvette，1988）。MR 1293975

[Kos22] Teruhisa Koshikawa, 《对数棱柱上同调 I》, 2022, arXiv:2007.14037。[KY25] Teruhisa Koshikawa 和 Zijian Yao, 《对数棱柱上同调 II》, 《Adv. Math.》479（2025）, 论文编号 110446, 123。MR 4937354[Lur] Jacob Lurie, 《高阶代数》, 可访问 https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/ HA.pdf。[Lur09] , 《高阶拓扑斯理论》, 第 170 卷, 普林斯顿, 新泽西州: 普林斯顿大学出版社, 2009（英文）。[Mat22] Akhil Mathew, 《刚性几何中几乎完美复形的忠实平坦下降》, 《J. Pure Appl. Algebra》226（2022）, 第 5 期, 论文编号 106938, 31。MR 4332074[MW22] Yu Min 和 Yupeng Wang, 《半稳定形式概形的对数棱柱位点上的 Hodge–Tate 晶体》, 2022, arXiv:2205.08895v1。[MW23] Lucas Mann 和 Annette Werner, 《钻石上的局部系统与 p-进向量丛》, 《Int. Math. Res. Not.》2023（2023）, 第 15 期, 12785–12850（英文）。[Niz08] Wiesława Nizioł, 《通过 K-理论研究半稳定猜想》, 《Duke Math. J.》141（2008）, 151–178。[Ogu18] Arthur Ogus, 《对数代数几何讲义》, 《剑桥高等数学研究丛书》第 178 卷, 剑桥: 剑桥大学出版社, 2018。MR 3838359[Sch13] Peter Scholze, 《刚性解析簇的 p-进 Hodge 理论》, 《Forum Math. Pi》1（2013）, e1, 77。[Sch16] , 《刚性解析簇的 p-进 Hodge 理论——勘误》, 《Forum Math. Pi》4（2016）, e6, 4。MR 3535697[Sch22] Peter Scholze, 《钻石的 étale 上同调》, 2022, arXiv:1709.07343。[Shi02] Atsushi Shiho, 《晶体基本群 II: 对数收敛上同调与刚性上同调》, 《J. Math. Sci. Univ. Tokyo》9（2002）, 第 1 期, 1–163。MR 1889223[Sta21] Stacks 项目作者, 《Stacks 项目》, https://stacks.math.columbia.edu, 2021。[Tia23] Yichao Tian, 《棱柱晶体上同调的有限性与对偶》, 《J. Reine Angew. Math.》2023（2023）, 第 800 期, 217–257。[Tia25] , 半稳定情形下的棱柱-étale 比较定理, 2025, arXiv:2507.08451。[Tsu99] Takeshi Tsuji, 《半稳定约化情形下的 p-进 étale 上同调与晶体上同调》, 《Invent. Math.》137（1999）, 第 2 期, 233–411。MR 1705837[Tsu24] Takeshi Tsuji, 《棱柱晶体与 q-Higgs 场》, 2024, arXiv:2403.11676。[TT19] Fucheng Tan 和 Jilong Tong, 《 p-进 Hodge 理论中的晶体比较同构: 绝对非分歧情形》, 《Algebra Number Theory》13（2019）, 第 7 期, 1509–1581。MR 4009670[Yek18] Amnon Yekutieli, 《重新探讨平坦性与完备化》, 《Algebr. Represent. Theory》21（2018）, 717–736。

丘成桐数学科学中心, 清华大学, 北京 100084, 中国电子邮箱: hengdu@mail.tsinghua.edu.cn

北京数学科学与应用研究院, 北京 101408, 中国电子邮箱: ysmoon@bimsa.cn

丘成桐数学科学中心, 清华大学, 北京 100084, 中国; 北京数学科学与应用研究院, 北京 101408, 中国电子邮箱: shimizu@tsinghua.edu.cn