双扩散信道下用于上行多址接入的多普勒频移键控调制

Xuehan Wang, *IEEE*研究生会员,Jintao Wang, *IEEE*会士, Hai Lin, *IEEE*高级会员,Jinhong Yuan, *IEEE*会士, Xu Shi, *IEEE*会员,Hengyu Zhang, *IEEE*研究生会员,andJian Song,*IEEE*会士

arXiv:2603.02721v1 [eess.SP] 3 Mar 2026

摘要—**时延-多普勒（DD）域调制被视为支持第六代移动网络中新兴高移动性应用无线通信的最具竞争力的候选方案之一。然而，现有大多数时延-多普勒域调制设计在上行传输中都面临峰均功率比（PAPR）较高和检测复杂度难以承受的问题，因为要保证较高的DD分辨率，需要较大的持续时间和带宽。为解决这些问题，本文提出了一种基于正交时延多普勒分复用调制器的多普勒移位键控（DSK）调制，并充分利用了其在时延-多普勒域中的输入输出特性。首先，针对点对点场景，构建了DSK收发机原理，其中包括独热映射器以及低复杂度迭代式串行干扰消除-最大比合并检测器。随后，将所提方案推广至基于零自相关序列的实现，以利于扩展多用户（MU）上行DSK框架。对于上行DSK传输，采用Zadoff-Chu（ZC）序列作为基序列。我们通过最小化最大用户间干扰，优化分配给不同用户设备（UE）的ZC根。该优化过程分析根分配，并为每个UE直接分配特定的ZC序列。最后，通过大量仿真结果验证了所提DSK调制搭配低复杂度检测器在双扩散信道下的峰均功率比和误码率性能，结果表明，DSK调制在双扩散信道上的上行多址接入中尤其具有优势。**

索引词—**多普勒频移键控（DSK）调制、上行多址接入、双扩展信道、正交时延多普勒分复用（ODDM）**

I. 引言

第六代（6G）移动网络旨在支持高移动性环境下的超可靠数据传输场景 [1]–[4], ，是智能交通系统 [5], [6]和非地面网络 [7]–[9]中最重要的技术之一。遗憾的是，现有第五代新空口（5G-NR）系统所采用的调制技术（例如正交频分复用（OFDM））会导致可靠性显著下降。其原因是多径环境和高移动性带来的双扩散信道，这会导致时频域出现严重的选择性衰落，并破坏子载波之间的正交性。

近年来，已有一些能够适应双扩展信道的调制方案创新被提出，例如文献 [10]–[13], 中的时延-多普勒（DD）域调制、文献 [14]中的正交时序复用（OTSM）调制，以及文献 [15]中的仿射频分复用（AFDM）调制。在各种方案中，时延-多普勒（DD）域调制方案（例如文献 [10]中的正交时频空（OTFS）调制和文献 [11]，[12] 中的正交时延多普勒分复用（ODDM）调制）更受青睐，因为它们与稀疏DD域信道的耦合更好，这为信道估计带来了显著便利，尤其是在涉及大规模多输入多输出（MIMO）的情况下 [16], [17]。另一方面，通过在DD域复用数据符号，每个分量都可以获得完整的时频分集，这为进一步提升无线通信网络的可靠性提供了思路 [18]。因此，DD域调制被广泛视为一种有前景的波形候选方案，可用于补充双扩展信道中的OFDM系统 [19]。

为发挥延迟-多普勒域调制系统的潜力，等效采样延迟-多普勒（ESDD）信道应当具有稀疏性 [12], [20], [21],，这意味着带宽和持续时间必须足够大，才能保证较高的DD分辨率。因此，若直接采用传统方案（例如线性最小均方误差（LMMSE）方法），DD域检测器的计算负担将极其沉重。为解决这一问题，文献 [10], [22]将基于置信传播的算法（MPA）应用于OTFS系统。然而，MPA的复杂度会随调制阶数显著增加 [23],，这表明迭代线性检测器具有优势 [23]–[27]。通过采用零填充（ZP）简化输入输出关系，并根据多载波符号索引将接收分量分组为向量，提出了一种低复杂度迭代最大比合并（MRC）检测器

本工作部分得到了北京市自然科学基金项目（项目编号：4254069）的资助，部分得到了中国博士后科学基金项目（项目编号：2024M761671）的资助，同时还部分得到了日本学术振兴会（JSPS）科学研究费助成事业（KAKENHI）（项目编号：22H01491）的资助。（通信作者：*Jintao Wang*。）

Xuehan Wang、Jintao Wang、Xu Shi 和 Hengyu Zhang 就职于清华大学电子工程系，北京 100084，中国（电子邮箱：wang-xh21@mails.tsinghua.edu.cn；wangjintao@tsinghua.edu.cn；shi-x@tsinghua.edu.cn；zhanghen23@mails.tsinghua.edu.cn）。

Hai Lin 任职于日本大阪府堺市大阪公立大学工学研究生院电气与电子系统工程系，邮编 599-8531（电子邮箱：hai.lin@ieee.org）。

Jinhong Yuan 任职于澳大利亚新南威尔士州悉尼市新南威尔士大学电气工程与电信学院，邮编 2052（电子邮箱：j.yuan@unsw.edu.au）。

Jian Song 任职于中国深圳市 518055 的清华大学深圳国际研究生院（电子邮箱：jsong@tsinghua.edu.cn）。

该检测器由文献 [24]提出。文献[26]在此基础上进一步发展了这一基本思路，采用涡轮式连续干扰消除（SIC）-LMMSE检测器，并对信道译码器进行了细致考量。与此同时，鉴于深度学习（DL）已被证明能够有效优化无线通信 [28]–[31],，基于DL的设计也已充分应用于DD域检测器 [32]–[34], ，显著改善了实现复杂度与检测可靠性之间的权衡。然而，由于DD域中更为复杂的多用户干扰（MUI）模式 [25]，上述方案几乎都无法在上行传输中取得令人满意的性能。因此，若要在上行多址接入（MA）系统中发挥延迟-多普勒域传输所带来的可靠性优势，就需要设计更为精细的传输方案。

另一方面，较高的峰均功率比（PAPR）也被广泛认为是阻碍延迟-多普勒域调制实际应用的未解难题之一[35]–[37] ，尤其是在上行传输中。值得庆幸的是，新兴的移位键控（SK）和索引调制（IM）技术能够显著降低峰均功率比 [38]–[40], ，相关研究已在延迟-多普勒域中开展 [41]–[44]。然而，这些方案未能充分考虑延迟-多普勒域中的输入输出关系，因此现有迭代线性检测器无法正常工作，因为数据分量无法像 [24]–[27], [45]那样按多载波符号索引分组。因此，在不显著增加检测复杂度的前提下降低峰均功率比，仍是延迟-多普勒域框架的核心问题。

受SK方案低峰均功率比 [38]以及迭代SIC-MRC检测器在复杂度与可靠性之间出色权衡的启发 [24], ，本文提出一种基于正交时延多普勒分复用调制器的多普勒频移键控（DSK）调制，通过充分利用延迟-多普勒域中的输入输出特性来应对上述挑战。具体而言，在每个多载波符号内，采用SK方法，利用与多普勒分辨率对应的子载波索引加载信息比特，从而实现低复杂度迭代检测器和极低的峰均功率比。通过采用优化的零自相关（ZAC）序列，该方案还可扩展至多用户（MU）上行链路系统，其性能优势已由仿真结果验证。本文的主要贡献总结如下：

- **DSK调制框架：** 考虑延迟-多普勒域中的输入输出特性，由于 ODDM 调制器/解调器的特性使得每个多载波符号内的输入输出关系可视为循环卷积，因此数据分量按照多载波符号索引分组为向量。信息比特根据相应的子载波索引映射为每个多载波符号对应的独热编码星座向量。在接收机端，提出了低复杂度的基于匹配追踪（MP）的检测器和迭代SIC-MRC检测器，从而构成了 DSK 调制系统的基本框架。
- **基于基序列的实现：** 随后将 DSK 调制的概念推广到基于基序列的方案，其中零自相关序列根据用于承载信息比特的相应索引进行循环移位。随后，通过为不同用户设备（UE）分配不同的零自相关序列，将所提方案扩展到多用户上行场景，并提出了多用户检测器。值得指出的是，所提出的迭代线性检测方案以并行方式实现了出色的性能，这与 [24], [26] 中的现有设计显著不同，并大幅降低了计算复杂度。
- **多用户上行链路基序列优化：** 考虑到 Zadoff-Chu（ZC）序列的优异特性，本文采用具有不同根的 ZC 序列作为不同用户设备的基序列。通过分析不同用户设备之间的互相关，并考察基站（BS）侧接收的信号，推导出序列根的闭式优化方案，从而确定多用户干扰（MUI）的程度。最后，通过在双扩展信道下进行数值实验，验证了所提出的 DSK 调制具有优异的峰均功率比（PAPR）和误码率（BER）性能。

由于多用户干扰的程度取决于多用户基序列之间的互相关，所提出的根优化方法能够有效抑制多用户干扰。因此，无需进行资源划分，每个用户设备都能近似保持其各自的传输速率。由此，与资源分配会降低每个用户设备吞吐量的传统 ODDM 系统相比，整体系统吞吐量几乎随用户设备数量线性增长。同时，减轻多用户干扰也有助于通过并行处理降低检测时延。

本文其余部分组织如下。系统模型首先在第二节中简要回顾。所提出的DSK调制的收发机设计在第 III 节中针对点对点系统进行说明。随后，讨论扩展至第四节中的上行链路DSK传输。性能评估在第五节中给出。最后，在第六节中简要得出结论。

符号： $\mathcal{A}$ 是一个集合，$\mathbf{A}$ 是一个矩阵，$\mathbf{a}$ 是一个列向量，a 是一个标量。$\mathbf{a}_i$ 表示$\mathbf{A}$ 的第 i列，而$\mathbf{A}(i,j)$表示$\mathbf{A}$的第(i,j)个分量。$\mathbf{A}^H$ 表示其共轭转置。$(\cdot)^*$ 表示共轭运算，而$(\cdot)_N$ 表示关于 N的模运算。最大公约数(a,b)表示 a 和 b的元素的最大公约数。最后，$\mathbf{I}_N$ 和$\mathbf{F}_N$ 分别表示 $N \times N$ 单位矩阵和归一化 N点离散傅里叶变换（DFT）矩阵。

II. 系统模型

在本节中，简要回顾了高移动性信道模型和ODDM调制/解调，它们是所提出的DSK框架的基础。令 τ_r 和ν_r 分别表示时延分辨率和多普勒

分辨率，这要求基带发射信号 $s(t)$的有效带宽 B_s 和持续时间 T_s 分别满足 $B_s > \frac{1}{\tau_r}$ 和 $T_s > \frac{1}{\nu_r}$。对于采用实际脉冲成形的无线通信， $\frac{1}{\tau_r}$ 等于奈奎斯特采样周期。 N 和 M 分别表示ODDM子载波和多载波符号的数量，由此总ODDM 帧持续时间为 $NM\tau_r$，因为将有 NM个时域采样。因此，上述DD分辨率可通过 $\nu_r = \frac{1}{NM\tau_r}$获得。最后，待调制的数据分量以及第 l个多载波符号内第 k 个子载波上的解调分量分别记为 $\{x[k,l]|k=0,\cdots,N-1,l=0,\cdots,M-1\}$和 $\{y[k,l]|k=0,\cdots,N-1,l=0,\cdots,M-1\}$。

A. 双扩展信道模型

在本小节中，给出了具有高移动性的多径信道模型，该模型揭示了双扩散特性。为便于说明，忽略了噪声的影响。上变频后，带通信号 $\tilde{s}(t) = \Re\left\{s(t)e^{j2\pi f_c t}\right\}$ 经由 P 条入射路径从发射机发送至接收机，其中 f_c 表示载波频率，而 $s(t)$表示连续时间基带波形。根据 [20], [47], [48], , 接收到的带通信号可推导为

$$\tilde{r}(t) = \Re\left\{\sum_{p=1}^{\tilde{P}} \tilde{h}_p' s(t-(\tilde{\tau}_p - \frac{\tilde{v}_p}{\mathrm{c}}t))e^{j2\pi f_c\left(t-(\tilde{\tau}_p-\frac{\tilde{v}_p}{\mathrm{c}}t)\right)}\right\}, \tag{1}$$

其中 $\tilde{v}_p$、 $\tilde{\tau}_p$ 和 h_p'分别表示路径长度缩短的速度、传播时延以及与第 p条路径相关的衰减。c表示光速。令 $\tilde{\nu}_p = \frac{v_p}{\mathrm{c}} f_c$ 表示与载波频率对应的第 p条路径的多普勒频移。去除载波后，基带接收信号可推导为

$$r(t) = \sum_{p=1}^{\tilde{P}} \tilde{h}_p e^{j2\pi\tilde{\nu}_p t} s\left(t-(\tilde{\tau}_p - \frac{\tilde{v}_p}{\mathrm{c}}t)\right), \tag{2}$$

其中 $\tilde{h}_p = \tilde{h}_p' e^{-j2\pi f_c\tilde{\tau}_p}$。本文始终满足窄带假设[1]，即 [12], , 时变时延 $\frac{v_p}{\mathrm{c}} t$ 在整个持续时间 $s(t)$ 内远小于时延分辨率 τ_r。因此，(2) 可重写为

$$r(t) = \sum_{p=1}^{\tilde{P}} \tilde{h}_p e^{j2\pi\tilde{\nu}_p t} s(t-\tilde{\tau}_p). \tag{3}$$

同时，带限滤波和采样产生了一个等效的栅格化信道，如 [11], [12], [49]所示

[51], 即 ESDD 信道模型。与式 (3) 对应的 ESDD 模型可推导为

$$r(t) = \int\int h(\tau,\nu)s(t-\tau)e^{j2\pi\nu t}d\tau d\nu. \tag{4}$$

h(4) 中的 τ,ν 是观测到的 ESDD[2] 信道，其特征如下

$$h(\tau,\nu) = \sum_{p=1}^{P} h_p\delta(\tau-\tau_p)\delta(\nu-\nu_p), \tag{5}$$

其中， $P \geq P$、 $\tau_p = l_p\tau_r$、 $\nu_p = k_p\nu_r$、 $l_p \in \mathbb{N}$ 和$k_p \in \mathbb{Z}$分别表示.....。为确保 (5) 的稀疏性，时延分辨率和多普勒分辨率需要足够小，这意味着 $s(t)$ 需要同时具有足够大的带宽和较长的持续时间。然而，由于上述推导是在平稳和窄带假设下得出的，例如 [12], [50],信号带宽和持续时间受到限制，这表明在确定信号参数[3]时存在权衡。令 $l_{\max} = \max_{p=1,\cdots,P} l_p$和 $k_{\max} = \max_{p=1,\cdots,P} |k_p|$ 分别表示最大采样时延和最大多普勒频移。

B. 基于 *ODDM* 的时延-多普勒域信号处理

在本小节中，回顾 ODDM 信号模型及其实现，以作为基础。ODDM 调制利用传统多载波处理 [12], [52]–[54] 构造波形。基带波形可生成为

$$s(t) = \sum_{l=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1} x[k,l]g(t-l\tau_r)e^{j2\pi k\nu_r(t-l\tau_r)}. \tag{6}$$

调制参数的选取使得多载波符号间隔 τ_r 与子载波间隔 ν_r 分别对应于 DD分辨率。该设计确保所合成的多载波波形与时延-多普勒域信道表示固有匹配。根据 ODDM 调制 [12], [53],的基本原理，式 (6) 中的原型滤波器$g(t)$应保证相对于 DD分辨率具有充分的正交性，即

$$\begin{aligned} A_{g,g}(l\tau_r,k\nu_r) &= \int g^*(t-l\tau_r)g(t)e^{-j2\pi k\nu_r(t-l\tau_r)}dt \\ &= \delta[l]\delta[k], \quad |l| \leq M-1, |k| \leq N-1. \end{aligned} \tag{7}$$

考虑到这一性质，原型滤波器 $g(t)$在 ODDM系统中亦称为时延-多普勒域正交脉冲（DDOP）。基于 [11] 中的分析， [55], $g(t)$可由下式推导得到

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1} a_s(t-nT), \tag{8}$$

[1]请注意，此条件并不意味着多普勒频移或时延是带限的。相反，这是推导典型双扩展信道的必要条件，因为在不满足窄带假设时，应以多普勒缩放效应来表征相对移动性。在延迟-多普勒域调制系统中，此条件也可以转化为 $\left|\frac{\tilde{v}_p}{\mathrm{c}}NM\right| \ll 1$，这也是采用双扩展域调制方案的必要条件。

[2]请注意，ESDD 信道并不意味着物理信道能够揭示网格对齐时延和多普勒频移。事实上，一般的物理信道会产生一个等效 ESDD 信道 [51] ，其具有 $P \geq P$，这已足以在一般通信系统中实现接收机设计 [11], [12], [49], [50]。因此，我们聚焦于 ESDD 信道下 DSK框架的基本原理，其性能已在 [34] 中得到验证。考虑初始物理参数可以进一步提升性能，这一点必将在我们未来工作中体现。

[3]当窄带假设不成立时，建议参考我们在 [20], [48] 中的先前工作，以获取相关分析。

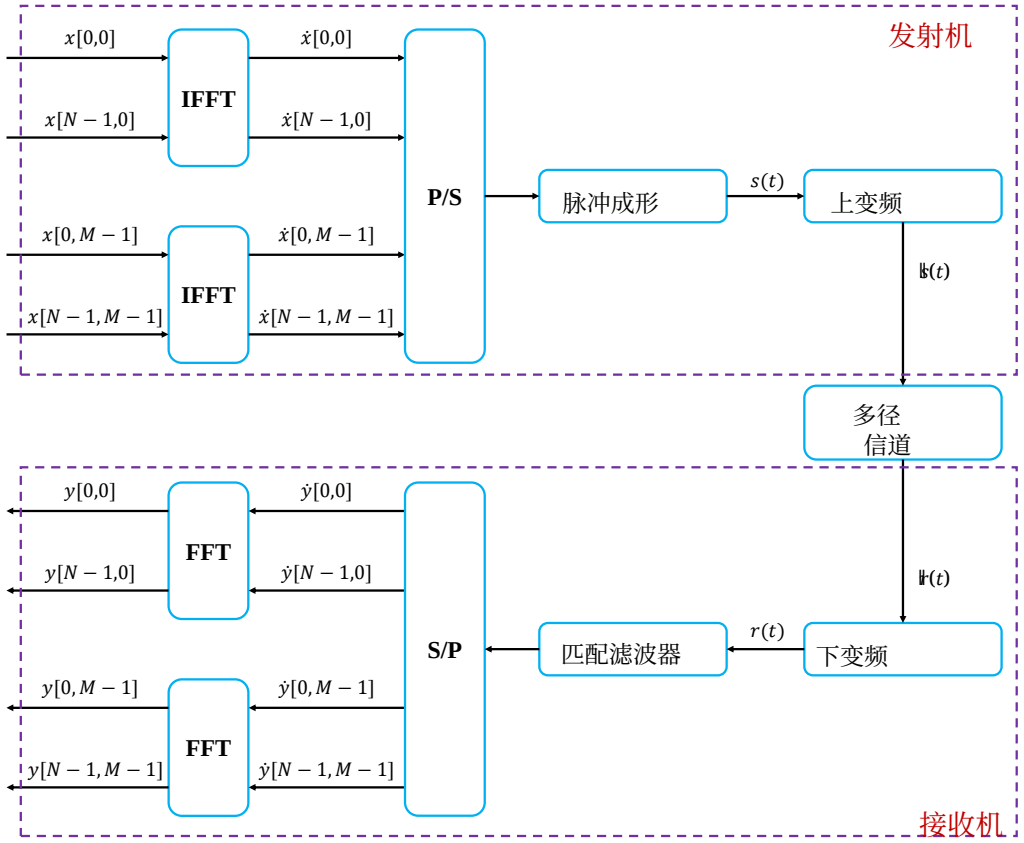


Fig. 1. 采用近似低复杂度实现的 ODDM 发射机和接收机框图。

其中， $a_s(t)$ 表示符号间隔为 τ_r 的截断平方根 Nyquist 脉冲， $T = M\tau_r$ 表示 DDOP 内两个脉冲之间的间隔。 $a_s(t)$ 的持续时间记为 $2Q\tau_r$，其中要求 $2Q \ll M$ ，以避免如 [11]，[12]，[54]，[55]所示的循环扩展带来的额外复杂度。与式 (6) 中发射机处的波形生成相对应，在接收机端可得到延迟-多普勒域分量，如下所示

$$y[k,l] = \int g^*(t - l\tau_r)e^{-j2\pi k\nu_r(t-l\tau_r)}r(t)dt. \tag{9}$$

然而，由于 DDOP 的形式复杂，式（6）和式（9）中的标准处理过程具有很高的计算复杂度。为降低实现复杂度，发射机端的基带波形 $s(t)$ 可通过快速傅里叶逆变换（IFFT）和逐样本脉冲成形生成，其中 $a_s(t)$ 如图 1 所示。具体而言，

式（6）可简化为

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{l=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1} x[k,l]g(t - l\tau_r)e^{j2\pi k\nu_r(t-l\tau_r)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{l=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} x[k,l]a_s(t - l\tau_r - nT)e^{j2\pi\frac{k(t-l\tau_r)}{NM\tau_r}} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{l=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} a_s(t - l\tau_r - nT)\sum_{k=0}^{N-1} x[k,l]e^{j2\pi\frac{knT}{NM\tau_r}} \\ &= \sum_{l=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} \dot{x}[n,l]a_s(t - l\tau_r - nT), \end{aligned} \tag{10}$$

其中，时域采样可通过采用归一化的 N 点逆快速傅里叶变换获得，表示为

$$\dot{x}[n,l] = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} x[k,l]e^{j2\pi\frac{kn}{N}}. \tag{11}$$

根据上述示意图，简化 ODDM 系统的基带波形可通过以下两个步骤生成。首先，根据式（11）生成时域采样。随后，通过逐样本脉冲成形获得发射波形，如下所示：

$$s(t) = \sum_{l=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} \dot{x}[n,l]a_s(t - l\tau_r - nT). \tag{12}$$

相应地，接收机首先执行匹配滤波，以获得时域采样，如下所示：

$$\dot{y}[n,l]=\int a_s^*(t-l\tau_r-nT)r(t)dt. \tag{13}$$

最后，采用归一化 N点快速傅里叶变换（FFT），以在接收机侧获得延迟-多普勒域分量，如下所示

$$y[k,l]=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1}\dot{y}[n,l]e^{-j2\pi\frac{nk}{N}}. \tag{14}$$

C. 延迟-多普勒域中的输入输出特性

基于式(11)至(14)的时延-多普勒域信号处理以及式(4)和(5)所示的双扩展信道模型，$y[k,l]$ 与 $x[k,l]$ 之间的输入输出关系可表征为 [11], [12]

$$y[k,l]=\sum_{p=1}^{P}H_p[k,l]x[(k-k_p)_N,(l-l_p)_M]+w[k,l], \tag{15}$$

其中 $w[k,l]$ 独立同分布$\sim$ $\mathcal{CN}(0,\ \sigma^2)$为加性高斯白噪声样本。基于ODDM的基本原理以及式(5)中的多径信道模型，$H_p[k,l]$ 可推导为

$$H_p[k,l]=h_pe^{j2\pi\frac{k_pl}{NM}}\times\begin{cases}1, & l\geq l_p\\ e^{-j2\pi\frac{k-k_p}{N}}, & \text{elsewhere}\end{cases}. \tag{16}$$

为简化系统设计，将最后 $l_{\max}$ 个多载波符号强制置零[4]，如 [24]–[26], ，即 $x[k,l]=0$ 对$l\geq M-l_{\max}$成立。因此，式(15)可改写为

$$y[k,l]=\sum_{p=1}^{P}h_pe^{j2\pi\frac{k_pl}{NM}}\mathbb{I}_{(l-l_p)}x[(k-k_p)_N,l-l_p]+w[k,l], \tag{17}$$

其中，$\mathbb{I}_l$ 是用于指示多载波符号索引 l 是否处于激活状态的函数。具体而言，我们有

$$\mathbb{I}_l=\begin{cases}1, & 0\leq l\leq M-l_{\max}-1\\ 0, & \text{elsewhere}\end{cases}. \tag{18}$$

(17)中的推导表明，按照多载波符号索引将数据分量组合成向量是合适的，这意味着可以将项 $e^{j2\pi\frac{k_pl}{NM}}$ 吸收到向量中，从而简化接收机设计。这启发了所提出的 DSK 调制设计，以下各节将对此进行详细说明。

III. 点对点 DSK 收发机

受 SSK 调制 [39], [40], [56] 在多输入多输出系统中显著提升可靠性的启发，本文首先针对点对点 ODDM 调制系统提出 DSK 框架，并采用第二节中介绍的 ODDM 系统模型。该讨论可推广至第四节所示的多用户上行场景。

[4]如式（17）所示，采用零填充（ZP）可确保子载波上的循环移位，从而简化分析。它也可理解为每个 ODDM 多载波符号内不存在采样间干扰。利用这一特性，可在每个 ODDM 多载波符号的 ODDM 子载波上放置零自相关序列，从而简化干扰抑制及相应的检测设计。

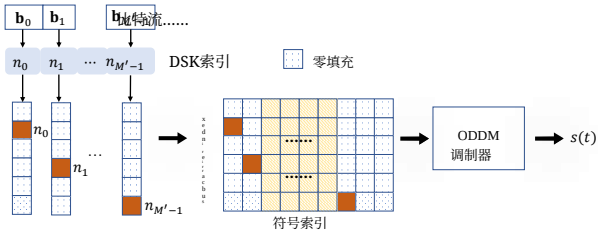


图2. 采用独热编码映射器的 DSK 发射机示意图。

表I DSK 映射规则示例（$N=4$）。

$\mathbf{b}_l$	n_l	独热编码 $\mathbf{x}_l$	基于序列的 $\mathbf{x}_l$
$(0,\ 0)^T$	0	$(1,0,0,0)^T$	$(z[0],z[1],z[2],z[3])^T$
$(0,\ 1)^T$	1	$(0,\ 1,\ 0,\ 0)^T$	$(z[3],z[0],z[1],z[2])^T$
$(1,\ 0)^T$	2	$(0,0,1,0)^T$	$(z[2],z[3],z[0],z[1])^T$
$(1,1)^T$	3	$(0,0,0,1)^T$	$(z[1],z[2],z[3],z[0])^T$

A. 差分移位键控发射机

与多输入多输出系统中的 SSK 调制类似，采用相对于多普勒分辨率的子载波索引，为每个可用的多载波符号索引加载数据比特，其发射机模型如图 2 所示。比特流首先转换为并行比特序列$\mathbf{b}_l\in\{0,1\}^{N_b}$，其中 $\forall\ \mathbb{I}_l=1$，$N_b=\lfloor\log_2 N\rfloor$ 表示每个多载波符号索引可承载的最大比特数。随后，$\mathbf{b}_l$ 被映射为满足单位功率约束的星座向量$\mathbf{x}_l=(x[0,l],\ x[1,l],\ \cdots,\ x[N-1,l])^T$（即 $\mathbb{E}_{\mathbf{x}_l}\left(\mathbf{x}_l^H\mathbf{x}_l\right)=1$）。与 [40], [56], 类似，首先选用独热映射器来说明 DSK 调制的基本原理。具体而言，$\mathbf{b}_l$ 首先被编码为子载波索引，即 $n_l\in[0,2^{N_b}-1]\subseteq[0,N-1]$。随后，$\mathbf{x}_l$ 生成如下：

$$x[k,l]=\alpha_l\mathbb{I}_l\delta[k-n_l]=\begin{cases}\alpha_l, & k=n_l,\ 0\leq l\leq M'-1\\ 0, & \text{elsewhere}\end{cases}, \tag{19}$$

其中我们有 $|\alpha_l|=1$ 和 $M'=M-l_{\max}$。为便于说明，我们令[5] $\alpha_l=1$ 适用于 $\forall\ l$。

基于独热映射器的差分移位键控发射机示例如表I前三列所示，其中每个多载波符号仅激活一个子载波索引。根据 DSK 映射规则生成 $\{x[k,l]\}$ 后，通过 ODDM 调制器获得发射波形。如 [11], [50],所示，该波形可近似视为沿子载波索引进行的 N点逆离散傅里叶变换（IDFT），以及基于 $a_s(t)$的逐样本滤波。由于独热序列的 IDFT 具有恒定幅度，与传统的延迟-多普勒域传输方案相比，所提出的 DSK方案具有更优的峰均功率比性能。

[5]请注意，尽管 α_l 不包含信息，但可以对其进行设计以优化传输，这将在我们的未来工作中体现。

算法 1基于MP的检测器设计

输入： $\mathbf{y}$,$\mathbf{A}$

输出： $\hat{}n_l$ 和恢复比特

1: 初始化 $f_l = 0$，对于 $0 \le l \le M'-1$ 以及$\mathbf{r} = \mathbf{y}$

2: **对于** $i = 0:\ M'-1$ **执行**

3: $\mathbf{g} = \mathbf{A}^H\mathbf{r}$

4: $\hat{}q = \arg\max_{\lfloor q/N' \rfloor = 0} |\mathbf{g}(q)|$

5: $\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r} - \mathbf{a}_{\hat{}q}$

6: $l = \lfloor \frac{\hat{q}}{N'} \rfloor$

7: $\hat{}n_l = \hat{}q - lN'$

8: $f_l = 1$

9: **</style}结束循环**

10: 根据 $\hat{}n_l$ 恢复数据比特

B. 检测器设计

在接收机处，首先利用 ODDM 解调器获得 $y[k,l]$ 。结合式（17）的输入输出特性以及 DSK 发射机设计，可推导出 $y[k,l]$ ，如下所示:

$$y[k,l] = \sum_{p=1}^{P} h_p e^{j2\pi \frac{k_p l}{NM}} \mathbb{I}_{l-l_p} \delta[(k-k_p-n_{l-l_p})_N] + w[k,l]. \tag{20}$$

若不存在多径效应，则可直接采用基于阈值的检测来恢复 n_l 。考虑到双扩散信道，需要设计更复杂的检测器以保证可靠性。

首先，我们通过将检测器构建为稀疏信号恢复问题，提出一种基于 MP 的方案。式 (20) 中的输入输出关系可向量化为

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w}, \tag{21}$$

其中，$\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{NM\times 1}$ 表示接收符号向量$\mathbf{y}(k+lN) = y[k,l]$。$\mathbf{w} \in \mathbb{C}^{NM\times 1}$表示加性高斯白噪声$\mathbf{w}(k+lN) = w[k,l]$。$\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N'M'\times 1}$表示稀疏发射信号$\mathbf{x}(k+lN) = \delta[k-n_l]$，其中$N' = 2^{N_b}$ 表示可用的子载波索引。根据式 (20)，感知矩阵$\mathbf{A}$可表示为

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}(k+lN, k'+l'N')\\ &= \sum_{p=1}^{P} h_p e^{j2\pi \frac{k_p l}{NM}} \delta[l-l'-l_p]\delta[(k-k_p-k')_N]\end{aligned} \tag{22}$$

对于 $0 \le k \le N-1$、$0 \le l \le M-1$、$0 \le k' \le N'-1$ 和$0 \le l' \le M'-1$。

根据式（21）的表述，可以采用基于 MP 的方法执行信息恢复。用 $\hat{}n_l$ 表示 n_l 的估计结果，并用 $f_l \in \{0,1\}$ 标记是否已通过先前的计算获得 $\hat{}n_l$ ，即，$f_l = 1$表示已获得 $\hat{}n_l$。如**算法 1**所示，首先将残差向量$\mathbf{r}$ 初始化为$\mathbf{y}$。在每次迭代中，计算残差向量$\mathbf{r}$与测量矩阵$\mathbf{A}$ 每一列的内积，记为$\mathbf{g}$。然后，从尚未检测到的多载波符号索引中找出相关性最大的索引，记为 $\hat{}q = \text{argmax}_{f_{\lfloor q/N' \rfloor}=0} |\mathbf{g}(q)|$。之后，根据 $\hat{}q$恢复相应的多载波符号和子载波索引。最后，残差向量通过$\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r} - \mathbf{a}_{\hat{q}}$ 进行更新，同时考虑 DSK 调制的特性，并更新 f_l 。根据式（22）的表述，对于$\mathbf{A}$ 中索引记为 $k'+l'N'$的每一列，仅在第（$k+lN$）行有 P个非零元素，其中 $k = (k'+k_p)_N$，且 $l = l'+l_p$ 对于 $p = 1,\ 2,\ \cdots,\ P$。因此，每次迭代的复杂度可限定为 $\mathcal{O}$（$M'N'P$），总复杂度由此小于 $\mathcal{O}$（M^2NP）。

然而，根据式 (22) 的表述，每列中的非零元素可能会重叠；由于$\mathbf{A}$本身具有稀疏性，相应的相干性可能较大。例如，假设一个简单情形，其中 $P = 2$，(l_1，k_1) =(0，0)，(l_2，k_2) =(1，1)，$k_2 = 1$、$M' = N = 2$和 $M = 3$。感知矩阵$\mathbf{A}$ 可改写为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 e^{j\frac{\pi}{3}} & h_1 & 0 \\ h_2 e^{j\frac{\pi}{3}} & 0 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & h_2 e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ 0 & 0 & h_2 e^{j\frac{2\pi}{3}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

第一列与第四列之间的相关系数可计算为

$$\mu(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4) = \left| \frac{\mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_4}{||\mathbf{a}_1||_2 ||\mathbf{a}_4||_2} \right| = \frac{|h_1||h_2|}{|h_1|^2 + |h_2|^2}. \tag{26}$$

显然，当 $|h_1|$ 与 $|h_2|$趋于相似时，$\mu(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_4)$趋近于$1_2$。这可能会因列之间存在歧义而导致基于MP的方法恢复失败[57], [58]。为解决这一问题，受文献 [24], [26]中类似检测器成功应用的启发，本文提出一种迭代线性检测器以提高可靠性。令 $c[k,l]$和 $b_p[k,l]$分别表示针对DSK索引为 $k = n_l$ 的检测指示量，以及与第p条路径相关联的指示量。假设通过先前迭代已获得 n_l 的粗略估计值$\hat{}n_l$，则可通过移除干扰，按照下一页顶部的式 (23) 推导出 $b_p[k,l]$ 。随后可通过MRC获得指示量 $c[k,l]$ ，即

$$c[k,l] = \frac{\sum_{p=1}^{P} (h_p)^* e^{-j2\pi \frac{k_p(l+l_p)}{NM}} b_p[k,l]}{\sum_{p=1}^{P} |h_p|^2}. \tag{27}$$

此后，$\hat{}n_l$ 可更新为

$$\hat{n}_l = \underset{k=0,\cdots,N'-1}{\arg\max} |c[k,l]|. \tag{28}$$

最后，所提出的面向DSK 系统的迭代式 SIC-MRC 检测器设计如**算法 2**所示。在初始化[6] $\hat{}n_l$之后，针对 $0 \le l \le M'-1$迭代执行串行干扰消除-最大比合并处理，以计算指示量 $c[k,l]$。随后根据（28）更新$\hat{}n_l$。当满足停止准则时终止迭代，例如达到最大迭代次数（例如5次），且$\hat{}n_l$ 已经收敛，即在一次完整迭代之后$\hat{}n_l$ 在 $\forall l$ 内保持不变。值得指出的是，该迭代检测器也可以应用于

[6]在本文中，$\hat{n}_l$ 通过执行无SIC的MRC进行初始化。即，$c[k,l]$首先利用(27 $b_p[k,l]$ $y[k+)$计算，其中被替换为()，。此K_p $_N$ $l+l_p]$ 28 n_l后，将()用于初始化$\hat{}$。

$$b_p[k,l] = y[(k+k_p)_N, l+l_p] - \sum_{q=1,q\neq p}^{P} h_q e^{j2\pi\frac{k_q(l+l_p)}{NM}} \mathbb{I}_{l+l_p-l_q} \delta[(k+k_p-k_q-\hat{n}_{l+l_p-l_q})_N] \tag{23}$$

$$\begin{aligned} r[k,l] &= \sum_{k_y=0}^{N-1} z^*[(k_y-k)_N] y[k_y,l] \\ &= w_r[k,l] + \sum_{k_y=0}^{N-1} z^*[(k_y-k)_N] \left(\sum_{p=1}^{P} h_p e^{j2\pi\frac{k_p l}{NM}} \mathbb{I}_{l-l_p} x[(k_y-k_p)_N, l-l_p] \right) \\ &= w_r[k,l] + \sum_{k_y=0}^{N-1} \sum_{p=1}^{P} h_p e^{j2\pi\frac{k_p l}{NM}} \mathbb{I}_{l-l_p} z^*[(k_y-k)_N] z[(k_y-k_p-n_{l-l_p})_N] \\ &= w_r[k,l] + \sum_{p=1}^{P} h_p e^{j2\pi\frac{k_p l}{NM}} \mathbb{I}_{l-l_p} \left(\sum_{k_y=0}^{N-1} z^*[(k_y-k)_N] z[(k_y-k_p-n_{l-l_p})_N] \right) \\ &= \sum_{p=1}^{P} h_p e^{j2\pi\frac{k_p l}{NM}} \mathbb{I}_{l-l_p} \delta[(k-k_p-n_{l-l_p})_N] + w_r[k,l] \end{aligned} \tag{24}$$

算法 2迭代式 SIC-MRC 检测器设计

输入： $y[k,l]$, $\{h_p, l_p, k_p\}_{p=1}^{P}$

输出： $\hat{n}_l$ 和恢复比特

1: 初始化 $\hat{n}_l$

2: **重复**

3: **对于** $l=0:\ M'-1$ **执行**

4: 根据 (23) 计算 $b_p[k,l]$

5: 根据 (27) 计算 $c[k,l]$

6: 根据 (28) 更新 $\hat{n}_l$

7: **结束循环**

8: **直到**停止准则

9: 根据 $\hat{n}_l$ 恢复数据比特

泛洪方式，即令$\hat{n}_l^{(i)}$ 表示第 i次迭代之后的估计结果。在第（$i+1$）次迭代中，SIC处理对每个 l 采用$\hat{n}_l^{(i)}$，而不是已更新的$\hat{n}_l^{(i+1)}$。这在应对计算问题时能够实现更高效的实现。对于串行设计，由于主要复杂度在于 $b_p[k,l]$的计算，每次迭代的计算负载可近似由 $\mathcal{O}$（$N'M'P^2$）衡量。在实际实现中，若利用先前迭代得到的$\hat{n}_l$ 采用并行加速，时间占用可进一步降低。考虑到 $b_p[k,l]$和 $c[k,l]$ 的计算可针对每个子载波和多载波符号上的分量以并行方式进行，迭代SIC-MRC检测器的效率可进一步提高，其中每次迭代更新全部$\hat{n}_l$所需的时间复杂度为 $\mathcal{O}$（P^2+N'）。并行检测器与串行检测器的性能均在第五节中给出，这展示了其相对于经典ODDM调制系统的优越性，因为根据 [24]，并行迭代并不能获得令人满意的译码性能。

显然，只能传输 $M'\log\ N$比特在点对点场景下的 ODDM帧中，这表明频谱效率会显著降低。然而，通过将 DSK框架扩展为基序列实现，系统吞吐量可以随上行用户设备数量线性增长。

C. 扩展至基序列式*DSK*系统

在本小节中，我们将所提出的DSK框架推广到基序列式框架，该框架是多用户上行传输的基础。令 $\{z[k]|k = 0、1，\cdots，N-1\}$ 表示一个单位功率的ZAC序列[7]，即有

$$\sum_{k_z=0}^{N-1} z^*[(k_z-k)_N] z[k_z] = \delta[(k)_N]. \tag{29}$$

$x[k,l]$ 随后可生成为

$$x[k,l] = \begin{cases} z[(k-n_l)_N], & 0 \le l \le M'-1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}. \tag{30}$$

例如，表I的最后一列展示了基于 $N=4$的序列式传输。

在接收机处，首先利用 $y[k,l]$ 与基序列之间的互相关对其进行预处理，具体如下:

$$r[k,l] = \sum_{k_y=0}^{N-1} z^*[(k_y-k)_N] y[k_y,l]. \tag{31}$$

得益于 $z[k]$的性质，可以推导出本页顶部的式 (24)，其中 $w_r[k,l] \overset{\text{独立同分布}}{\sim} \mathcal{CN}(0,\ \sigma^2)$ 是等效加性噪声。显然，$r[k,l]$ 与 n_l 之间的关系与式 (20) 中的关系保持不变。因此，

[7]考虑到 IDFT 与自相关之间的关系，$z[k]$ 的 IDFT 是一个恒幅序列。它仍能像独热序列一样保证较低的峰均功率比。

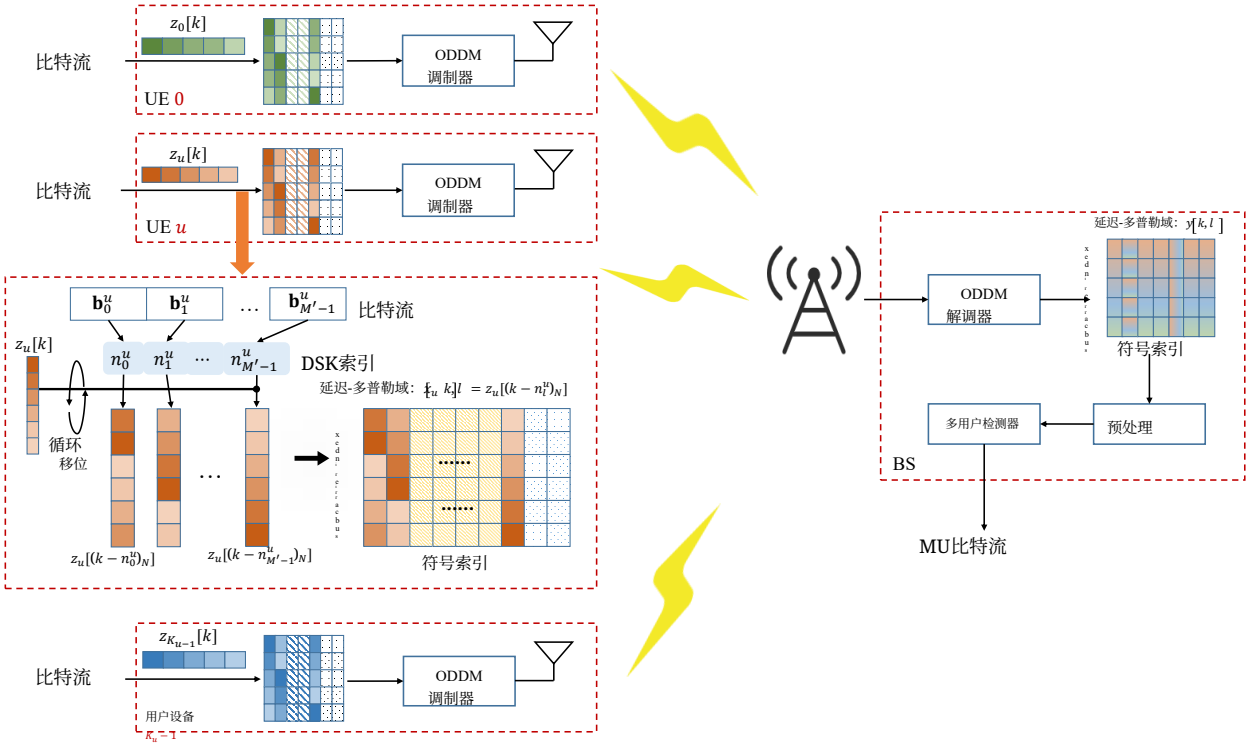


图 3. 上行链路DSK系统示意图。

既可以使用**算法 1** 中的基于 MP 的检测器，也可以使用**算法 2** 中的迭代SIC-MRC检测器，从 $r[k,l]$ 中恢复数据比特。

IV. 高机动用户设备上行 DSK 系统

本节将点对点 DSK 系统的讨论扩展到多用户上行场景，其中采用基序列式 DSK 实现，且每个用户设备均具有唯一的基序列，如图 3 所示。本文还推导了迭代检测器，以便在基站恢复数据比特。最后，为提高可靠性，本文讨论了 DSK 所用基序列的选择。高移动性上行用户设备的数量记为 K_u。为便于说明，本文忽略噪声的影响[8]。

A. 收发机设计

令 $z_u[k]$ 表示第 u 个用户设备的基序列。如图 3 所示，第 u 个用户设备的比特流首先分为 M' 个比特向量，表示为 $\{\mathbf{b}_l^u\}_{l=0}^{M'-1}$。随后，$\mathbf{b}_l^u$被转换为 DSK 索引 n_l^u。之后，第 u 个用户设备的数据分量可按照式 (30) 的方式生成，即

$$x_u[k,l]=\begin{cases} z_u[(k-n_l^u)_N], & 0\le l\le M'-1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}, \tag{32}$$

[8]为便于说明，此处未考虑噪声的影响，因为本节的系统设计仅利用了数据间干扰的特性。不过，在仿真中会考虑噪声。未来的研究可以考虑噪声特性，并推导出更完善的设计。

利用 ODDM 调制器生成基带波形 $s_u(t)$。

在基站端，首先使用 ODDM 解调器恢复解调分量，如 $y[k,l]$。令 h_p^u、l_p^u、k_p^u分别表示第 u 个用户设备的第 p 条路径对应的信道参数。根据式 (17)，可推导得

$$y[k,l]=\sum_{u=0}^{K_u-1}\left(\sum_{p=1}^{P_u}h_p^u e^{j2\pi\frac{k_p^u l}{NM}}\mathbb{I}_{l-l_p^u}z_u[(k-k_p^u-n_{l-l_p^u}^u)_N]\right), \tag{33}$$

其中，P_u 表示第 u 个用户设备的路径数量。令 $\psi_{u,v}(k_u,k_v)$ 表示第 u 个与第 v 个用户设备的基序列之间的互相关[9]，其定义为

$$\psi_{u,v}(k_u,k_v)=\sum_{k=0}^{N-1}z_u^*[(k-k_u)_N]z_v[(k-k_v)_N], \tag{34}$$

其中，需要使用 $\psi_{u,u}(0,0)=1$ 进行功率归一化。在

[9]得益于循环移位的性质，$\psi_{u,v}(k_u,k_v)$ 仅与 u、v 和 $(k_u-k_v)_N$ 有关，这有助于降低实际存储复杂度。本文仅为便于说明而采用 $\psi_{u,v}(k_u,k_v)$。

经过类似于式（31）的预处理后，可得到 $r_u[k,l]$

$$\begin{aligned} r_u[k,l] &= \sum_{k_y=0}^{N-1} z_u^*[(k_y-k)_N]y[k_y,l] \\ &= \sum_{k_y=0}^{N-1} z_u^*[(k_y-k)_N] \\ &\times \sum_{v=0}^{K_u-1}\sum_{p=1}^{P_v} h_p^v e^{j2\pi\frac{k_p^v l}{NM}}\mathbb{I}_{l-l_p^v} z_v[(k_y-k_p^v-n_{l-l_p^v}^v)_N] \\ &= \sum_{v=0}^{K_u-1}\sum_{p=1}^{P_v} h_p^v e^{j2\pi\frac{k_p^v l}{NM}}\mathbb{I}_{l-l_p^v} \\ &\times \sum_{k_y=0}^{N-1} z_u^*[(k_y-k)_N] z_v[(k_y-k_p^v-n_{l-l_p^v}^v)_N] \\ &= \sum_{v=0}^{K_u-1}\sum_{p=1}^{P_v} h_p^v e^{j2\pi\frac{k_p^v l}{NM}}\mathbb{I}_{l-l_p^v}\psi_{u,v}(k,(k_p^v+n_{l-l_p^v}^v)_N). \end{aligned} \tag{35}$$

与第二节中围绕式 (25) 的分析类似，感知矩阵各列之间的相关性可能较强，从而损害基于MP的方法的性能。因此，我们考虑改用迭代检测器，如**算法3**所示。假设$\psi_{u,u}(k_1,k_2) = \delta[(k_1-k_2)_N]$ 对所有用户设备均成立。首先，将 n_l^u 的估计初始化为[10]

$$\begin{aligned} (\hat{n}_l^u)^{(1)} &= \underset{k=0,1,\cdots,N'-1}{\arg\max} |c_u[k,l]|, \\ c_u[k,l] &= \frac{\sum_{p=1}^{P_u}(h_p^u)^* e^{-j2\pi\frac{k_p^u(l+l_p^u)}{NM}} r_u[(k+k_p^u)_N, l+l_p^u]}{\sum_{p=1}^{P_u}|h_p^u|^2}, \end{aligned} \tag{36}$$

其中， $c_u[k,l]$ 与点对点场景类似，充当 $n_l^u = k$ 的MRC 指示量。令 $(\hat{n}_l^u)^{(i)}$ 表示第 i次迭代的检测结果。在第（$i+1$）次迭代中，由于 $n_l^u = k$的指示量仅与 P_u 个变量有关，即 $\{r_u[(k+k_p^u)_N, l+l_p^u]\}_{p=1}^{P_u}$，因此，可通过消除干扰，得到 $n_l^u = k$对应的 P_u 个元素$\{b_p^u[k,l]\}_{p=1}^{P_u}$，如下一页顶部的式 (37) 所示，该式根据式 (35) 中的特性推导而来。之后，按照 MRC 规则合并这些 P_u 个变量，得到

$$c_u[k,l] = \frac{\sum_{p=1}^{P_u}(h_p^u)^* e^{-j2\pi\frac{k_p^u(l+l_p^u)}{NM}} b_p^u[k,l]}{\sum_{p=1}^{P_u}|h_p^u|^2}, \tag{38}$$

它作为判断 $k = n_l^u$是否成立的最终指标。换言之， n_l^u的估计更新为

$$(\hat{n}_l^u)^{(i+1)} = \underset{k=0,1,\cdots,N'-1}{\arg\max} |c_u[k,l]|. \tag{39}$$

当满足停止准则时，迭代终止，例如，达到最大迭代次数（如10次）或数据恢复结果已收敛，即，对于 $\forall l,\ u$，$(\hat{n}_l^u)^{(i)} = (\hat{n}_l^u)^{(i-1)}$。值得指出的是

[10]考虑到初始化的计算负载，在下文（包括仿真）中将其视为一次迭代。

算法3 并行方式的迭代SIC-MRC检测器
用于上行链路DSK系统

输入： $r_u[k,l]$，相关信道参数
输出： $\hat{n}_l^u$ 和恢复比特

```
初始化 (n̂_l^u)^(1) 根据 (36)
将迭代次数初始化为 i = 1
重复
    对于 l = 0 : M' − 1，执行
        对于 u = 0 : K_u − 1，执行
            根据 (37) 计算 b_p^u[k,l]
            根据（38）计算 c_u[k,l]
            根据（39）更新 (n̂_l^u)^(i+1)
        结束循环
    结束循环
    i ← i + 1
直到 满足停止准则
令 n̂_l^u = (n̂_l^u)^(i)，并根据 n̂_l^u恢复数据比特
```

算法3 中的所提方案以并行方式执行，即$(\hat{n}_l^u)^{(i+1)}$ 的更新彼此不相关，其中 l 和 u，从而可以显著降低复杂度。考虑并行执行时，总复杂度[11] 可界定为 $\mathcal{O}(N_{\text{iter}}(P_{\text{s}}+N'))$，其中$P_{\text{s}} = \sum_{u=0}^{K_u-1} P_u$ 表示多用户信道路径的总数，而 N_{iter} 表示最大迭代次数。对于具有相同频谱效率的传统ODDM系统，典型的线性最小均方误差和基于消息传递算法的检测方案所需的复杂度量级分别为 $\mathcal{O}\left((K_uN_bM')^3\right)$ 和 $\mathcal{O}(N_{\text{iter}}K_uN_bP_sM')$。因此，所提并行串行干扰消除-最大比合并检测的DSK框架具有低得多的复杂度开销，因为 $N' < M'$在大多数ODDM系统中均得到满足 [11], [12], [21]。未来的研究可以考虑将DSK调制与ODDM系统中的传统检测设计相结合，以实现更好的复杂度与性能的权衡。

B. 基序列的选择

本小节讨论多用户上行链路DSK系统的基序列选择。根据式（35）中的表征，满足 $\psi_{u,v}(k_u,k_v) = \delta[u-v]\delta[(k_u-k_v)_N]$ 的序列是理想的DSK实现方案。然而，这无法实现，因为 $\mathbb{C}^N$ 中标准正交向量的最大数量为 N，只要 $K_u \geq 2$，就远小于K_uN'。因此，对于 $u \neq v$ 和 $k_u \neq k_v$，我们只能尽量减小$|\psi_{u,v}(k_u,k_v)|$ 的值，而不能强行将其置为零。另一方面，若 $\psi_{u,u}(k_1,k_2)$ 对于 $(k_1-k_2)_N \neq 0$非零，则 $c_u[k,l]$ 不能用作 $k = n_l^u$的合格指示符。因此，首先要求基序列满足 $\psi_{u,u}(k_1,k_2) = \delta[(k_1-k_2)_N]$，即 $z_u[k]$ 必须是 $\forall\ u$的ZAC序列。随后选择基序列，使最大互相关最小，即 $\psi_{\max} = \max_{u\neq v, 0\leq k_u, k_v\leq N'-1}|\psi_{u,v}(k_u,k_v)|$。令 $\psi_{\max}^{(u,v)} = \max_{0\leq k_u,k_v\leq N'-1}|\psi_{u,v}(k_u,k_v)|$ 表示第 u个用户设备与

[11]这是因为主要的复杂度在于式（37）和式（39）。

$$b_p^u[k,l] = r_u[(k+k_p^u)_N, l+l_p^u] - \sum_{q=1,q\neq p}^{P_u} \mathbb{I}_{l+l_p^u-l_q^u} h_q^u e^{j2\pi \frac{k_q^u(l+l_p^u)}{NM}} \psi_{u,u}\left((k+k_p^u)_N, \left(k_q^u + (\hat{n}^u_{l+l_p^u-l_q^u})^{(i)}\right)_N\right) - \sum_{v=0,v\neq u}^{K_u-1}\sum_{q=1}^{P_v} \mathbb{I}_{l+l_p^u-l_q^v} h_q^v e^{j2\pi \frac{k_q^v(l+l_p^u)}{NM}} \psi_{u,v}\left((k+k_p^u)_N, \left(k_q^v + (\hat{n}^v_{l+l_p^u-l_q^v})^{(i)}\right)_N\right) \tag{37}$$

v个用户设备之间在 $u \neq v$条件下的互相关最大值。如果两个选项的 $\psi_{\max}$ 值相同，则应尽量减少满足 $\psi_{\max}^{(u,v)} = \psi_{\max}$ 的用户设备对（u，v）的数量。

鉴于上述分析，具有不同根的Zadoff–Chu序列[46]适合作为基序列，其可推导为

$$z_u[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \times \begin{cases} e^{j\pi m_u \frac{k^2}{N}}, & N \text{ is even} \\ e^{j\pi m_u \frac{k(k+1)}{N}}, & N \text{ is odd} \end{cases}, \tag{40}$$

其中，$0 < m_u < N$ 是分配给第 u个用户设备的根。根据 [46]，为满足零自相关性质，m_u 必须与 N 互素。于是，序列选择问题转化为对 m_u的优化，以实现 $u = 0, \cdots, K_u - 1$。由于每个多载波符号索引对应的数据比特数为 $N_b = \lfloor \log_2 N \rfloor$，我们重点分析$N = 2^n$ 在 $n \in \mathbb{N}^+$ 下的情况，以最大限度地提高延迟-多普勒域子载波的利用效率。不同于 [59],中的分析，下面的引理对$\psi_{u,\,v}(k_u,\ k_v)$ 给出了更简洁的推导，作为后续讨论的基础。

引理1。$|\psi_{u,\,v}(k_u,\ k_v)|^2$ 可推导为

$$|\psi_{u,v}(k_u,k_v)|^2 = \begin{cases} \frac{c}{N}, & ((k_u m_u - k_v m_v)_N)_c = 0 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}, \tag{41}$$

其中，$c = \gcd(m_v - m_u, N)$。

证明：证明见附录A。 ■

根据**引理1**的结论，$\psi_{\max}$ 由 $\gcd(m_v - m_u, N)$ 的最大值决定。因此，所提出的优化准则可以转化为最小化 $\gcd(m_v - m_u, N)$ 的最大值以及可访问对的数量。不失一般性地，假设 $0 < m_0 < m_1 < \cdots < m_{K_u-1}$ 成立。于是可以得到以下定理。

定理1。在所提出的准则下，m_u 的最优选择为 $m_u = 2u + m_0$，即序列 $\{m_u | u = 0,\ 1,\ \cdots, K_u - 1\}$ 构成一个公差为 2 的等差数列。为满足 $\gcd(m_u, N) = 1$ for $\forall\, u$，m_0 必须为奇数。

证明：证明见附录B。 ■

定理1通过给出分配给各用户设备的最优根，提供了多用户基序列的设计方案，从而完善了上行链路DSK系统的框架。然而，所提出的分配方案可能导致用户设备之间存在不平衡，因为根据**定理1** 和**引理1**中的分析，不同用户设备对之间可能承受不同程度的干扰，以最大公约数$(m_v - m_u, N)$ N = 最大公约数$(2(v-u)$ $N)$ N表示。例如，考虑一个包含3个用户设备且$m_0 = 1$的简单情形，第一个和第三个用户设备之间的峰值干扰功率可计算为 $\frac{4}{N}$，而第一个和第二个用户设备之间的峰值干扰功率为 $\frac{2}{N}$。由此很容易推断，第二个用户设备承受的干扰较低。这种不平衡可能导致用户设备之间的性能差异。针对用户设备间不平衡的进一步系统优化与评估需要更精细的系统设计，这超出了本文的讨论范围，将作为未来工作加以研究。

得益于**定理1**中通过优化多用户基序列实现的多用户干扰抑制，上行链路DSK系统的总吞吐量随用户设备数量线性增长[13]，而误比特率性能几乎与点对点传输相同，如第五节所示。ODDM帧内传输的数据比特数可表示为 $K_u M' \log_2 N$，而采用二进制相移键控（BPSK）的ODDM系统的数据比特数少于 $M'N$，这是因为需要预留保护间隔以抑制多用户干扰 [60]。因此，当 K_u趋近于$\frac{N}{\log_2 N}$时，例如对于$N = 64$，所提出的DSK框架可保持与传统ODDM系统相近的传输效率。另一方面，由于ZAC序列的逆快速傅里叶变换具有恒定模值，DSK信号的峰均功率比远低于BPSK系统；此外，考虑到**算法3**中的并行迭代串行干扰消除-最大比合并方案，其检测时间复杂度也低于传统ODDM系统。因此，显然，所提出的DSK框架可作为双扩散信道上行传输的合适方案。

V. 性能评估

本节通过仿真结果评估所提出的DSK调制的性能。相关参数的典型值在表 II中给出，与 [11], [34]中的取值类似。按照 [34], 中的设置，每条路径的多普勒和时延索引在每次信道实现中从$[-k_{\max}, k_{\max}]$ 和 $[0, l_{\max}]$ 中随机选取，其中 $k_{\max}$ 由用户设备的最大移动速度决定。例如，$k_{\max} = 8$ 可根据最大移动速度 $v_{\max} = 360$ 千米/小时推导得到。每条路径的复增益为

[12]如果 N 是素数，则可以随机选择多用户根。研究 N 的其他取值或可进一步提升其实用性，这将在我们未来的研究中体现。

[13]通过结合采用实用字母表的索引调制技术，有望进一步提高频谱效率，即令 $x_u[k,l] = \alpha_l^u z_u[(k - n_l^u)_N]$ 表示延迟-多普勒域中的传输帧，其中采用 α_l^u加载数据比特，这将必然成为我们未来研究的重点。

表 II 仿真参数

参数	典型值
载波频率（f_c）	5 GHz
子载波数量（N）	64
多载波符号数量（M）	256
采样频率（$f_s = 1/\tau_r$）	$3840 = 256 \times 15$ 千赫兹
用户设备速度（千米/小时）	360，500
信道的最大时延索引（$l_{\max}$）	10
信道抽头数	4，5

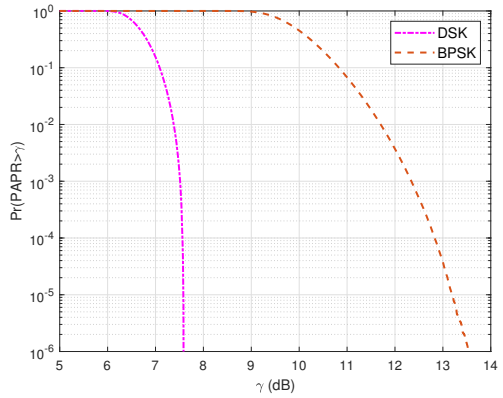


图 4. DSK 与采用 BPSK 的延迟-多普勒域调制系统的互补累积分布函数对比。

随机生成为 $h_p^u \overset{\text{独立同分布}}{\sim} \mathcal{CN}(0, \frac{1}{P_u})$。由于基序列已按照式（40）进行归一化，信噪比（SNR）定义为$\rho = \frac{1}{N_b\sigma^2}$。最后，差分移位键控的仿真基于以Zadoff–Chu序列为基础的实现。

A. 点对点场景

首先针对点对点场景评估性能，并以采用二进制相移键控星座的传统延迟-多普勒域框架作为比较基准。对于基于 BPSK 的 ODDM 方案，采用交织模式以减少干扰，并使其频谱效率与 DSK 系统一致，其中 N_d 表示每个 ODDM 多载波符号内相邻两个 BPSK 符号之间的空子载波数。换言之，BPSK 符号插入在 $\{x[k,l]|l = 0, 1, \cdots, M'-1, k = i(N_d+1)$ $i = 0, 1, \cdots, N_b - 1\}$处；考虑表 II 中的参数取值，我们有 $N_b = \lfloor \log_2 N \rfloor = 6$ 和$N_d = \lfloor \frac{N}{N_b} \rfloor - 1 = 9$。其余空子载波作为保护间隔，以减少数据分量之间的干扰，同时也可改善采用 BPSK 的 ODDM 系统的误码率。对于采用 BPSK 的 ODDM 系统，接收机处使用 [61]中的线性最小均方误差检测器。

首先在图 4 中给出了互补累积分布函数（CCDF）对比，以展示我们提出的 DSK 系统的优越性。PAPR γ 通过过采样 $s(t)$ 进行近似，其中 $8f_s$采用升余弦滤波器进行脉冲成形，滚降因子为 $\alpha = 0.1$。尽管采用了 ZAC 序列，但由于零填充和脉冲成形，PAPR 并非 0 分贝，然而，

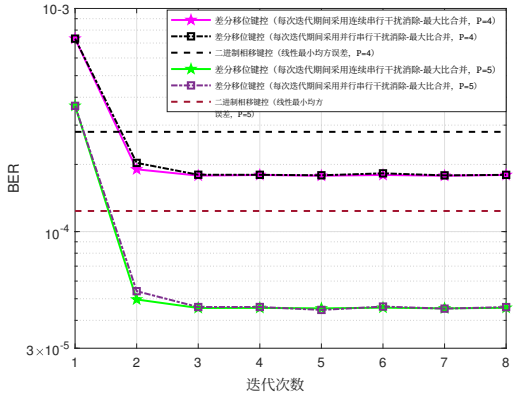


图 5. 在 $\rho = 12$ 分贝和 $v_{\max} = 360$ 千米/小时条件下，误码率随迭代次数的变化。

所提出的 DSK 调制仍显著优于 BPSK 方案。当 CCDF 阈值为 10^{-3}时，可观察到约 5 分贝的降幅。然而，对于 DSK-ODDM 系统，$\gamma = 7.6$分贝处的 CCDF 值约为 10^{-5}；而 BPSK-ODDM 方案的 PAPR 几乎始终高于 8 分贝。因此，我们认为，在解决 PAPR 问题时，DSK 是一种更优的延迟-多普勒域传输实现技术。

随后，在图 5 中绘制 $\rho = 12$ 分贝和 $v_{\max} = 360$ 千米/小时条件下误码率性能随迭代次数的变化，以验证**算法 2**中所提出的迭代式串行干扰消除-最大比合并检测器的收敛性。随着路径数量 P 增加，性能有所提升，这与 [18], [62] 中的结果一致。这是因为潜在的多径分集会随着路径数量增加，从而有助于提高可靠性。经过两次迭代后，我们提出的检测器的误码率性能已优于采用线性最小均方误差[14] 检测器的二进制相移键控 ODDM 调制系统。经过约 5 次迭代后，我们提出方案的误码率收敛至低于 2×10^{-4}（在$P = 4$ 条件下）；当 $P = 5$时，误码率可降至低于5×10^{-5}。另一方面，并行检测器的性能几乎达到串行设计的水平，这表明我们提出的方案具有显著的计算优势。

图 6 展示了在 $v_{\max} = 360$千米/小时条件下，迭代 SIC-MRC 检测器最多进行 5 次迭代时，误码率随信噪比变化的曲线。当 $\rho = 11$ 分贝时，采用迭代检测器的 DSK 误码率接近 1×10^{-4}，且 $P = 5$。然而，BPSK 系统的误码率约为 3×10^{-4}，这验证了所提出的 DSK框架的优越性。在 4 条路径条件下，当误码率约为 10^{-3} 时，DSK 相较于 BPSK 的性能优势超过 0。2 分贝；若采用 5 条路径，这一优势则扩大到超过 1 分贝。最后，无论信噪比取值如何，MP 检测器的误码率都是最高的，这与第三节中的分析相符。另一方面，在所模拟的方案中，采用迭代检测器的 DSK 具有最低的复杂度和误码率，再次证明了我们工作的价值。

[14]我们考虑线性最小均方误差检测器，因为它不会产生错误传播[21], [63]。然而，由于非线性移位键控操作，所提出的DSK框架无法进行LMMSE 检测。

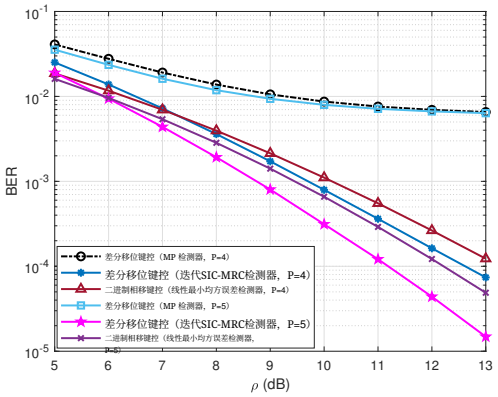


图 6. ρ 在 $v_{\max}=360$ 千米/小时条件下的误码率。

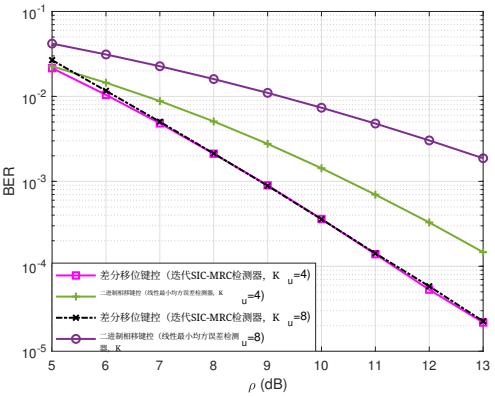


图 8. 在 $P_u=5$ 和 $v_{\max}=360$ 千米/小时下，误码率随 ρ 的变化。

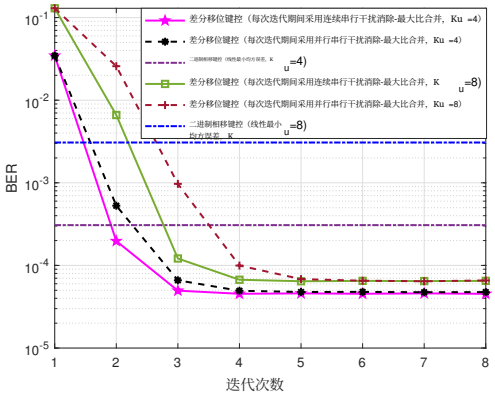


图 7. 在 $\rho=12$ 分贝、 $P_u=5$ 和 360 千米/小时下，误码率随迭代次数的变化。

$v_{\max}=$

B. 上行场景

在本小节中，我们评估了高移动性用户设备上行场景下的性能。作为对比基准，不同用户设备被分配到互不重叠的ODDM子载波上，如 [60], [64], 所示；每个用户设备使用的子载波构成一个子带。就多普勒分辨率而言，这可视为一种频域多址（FDMA）策略。具体而言，令 $N_s=\lfloor \frac{N}{K_u} \rfloor$表示分配给每个用户设备的子载波数。第$u$个用户设备的BPSK符号被插入到 $k=uN_s,\ uN_s+1,\ \cdots,\ uN_s+N_b-1$中，其中 $0\le l\le M'-1$，且 $N_s\ge N_b$。其余空子载波用作保护间隔，以减轻不同子载波之间的多用户干扰（MUI）。因此，在整个仿真过程中，DSK和BPSK方案的每个ODDM帧均承载 K_uN_bM' 比特。在基站侧，采用与[25], [64] 类似的线性最小均方误差检测器，用于上行BPSK-ODDM系统。本小节中的所有仿真结果均取自超过10000个ODDM帧的平均值。

首先，在图7中$\rho=12$ 分贝、 $P_u=5$ 和 $v_{\max}=360$ 千米/小时的条件下进行收敛测试，以验证**算法3**中所提出的迭代SIC-MRC检测器的可靠性。与点对点场景相比，由于存在多用户干扰，收敛速度较慢。然而，经过约5次迭代后，并行和串行迭代检测器均可达到出色的误比特率性能，此时误码率低于 7×10^{-5}，且满足 $K_u=8$。然而，采用二进制相移键控的延迟-多普勒域上行方案的误码率高于 2×10^{-3}，即使在 $K_u=8$条件下采用最优线性最小均方误差检测器也是如此，这证明了所提出的差分移位键控框架的优越性。同时，对于基于二进制相移键控的方案，误码率显著上升，其中$K_u=8$ 的误码率是 $K_u=4$的十倍。得益于迭代SIC-MRC检测器以及多用户基序列的优化，随着 K_u 增加，所提出的差分移位键控框架表现出更强的鲁棒性；当 K_u 从4增加到8时，误码率仅增加约 2×10^{-5}。最后，由于在任何场景下经过5次迭代后均可获得出色的误比特率性能，因此在后续仿真中将迭代次数上限设为5。

图 8 展示了误码率随信噪比的变化，其中设置 $P_u=5$ 和 $v_{\max}=360$ 千米/小时。显然，随着 K_u 增大，所提出的DSK 框架表现出更强的鲁棒性。当 $\rho=11$ 分贝时，在 8 个上行用户设备的情况下，所提出的 DSK 方案的误码率接近 10^{-4}，不到采用二进制相移键控的延迟-多普勒域系统误码率的 3%。当误码率达到 10^{-3} 时，在 4 个上行用户设备的情况下，DSK 比二进制相移键控的性能约好 1.5 分贝；若 $K_u=8$，这一优势将扩大到 4 分贝以上。因此，与基于二进制相移键控的延迟-多普勒域系统相比，DSK 能够保证更可靠的性能，尤其是在多用户上行场景中，这对于实际的高速移动应用至关重要。

随后，在图9中绘制误码率随路径数量 P_u 变化的曲线，以验证性能优势，其中我们设定 $K_u=8$ 和 $v_{\max}=500$ 千米/小时。得益于多径信道的分集增益，随着 P_u增加，误码率会降低，DSK方案的性能优势也因此进一步凸显。当每个用户设备有6条入射路径时，在 $\rho=10$ 分贝下，DSK的误码率接近 10^{-4}，不到相同条件下BPSK系统误码率的2.3%。所提出的DSK框架的误码率低于 10^{-5}，条件为$\rho=12$ 分贝且 $P_u=7$。然而，在这些条件下，基于BPSK的ODDM调制系统的误码率仍高于 10^{-3}，这再次证明了所提出的DSK调制的价值。

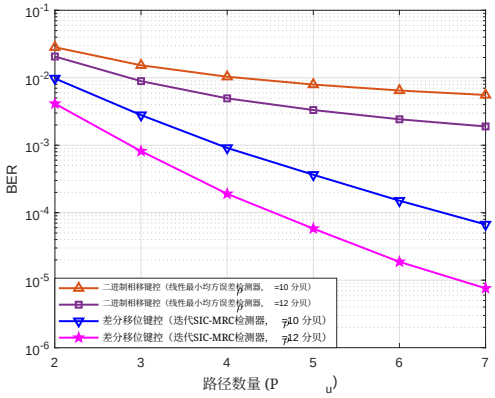


图9. P_u 下的误码率，其中 $K_u = 8$。

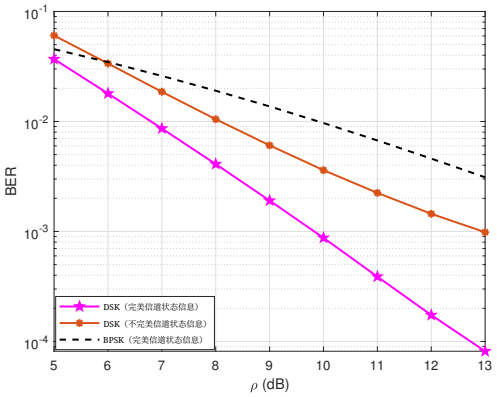


图11. 在不完美信道状态信息和 $K_u = 8$条件下的误码率，其中 ρ 。

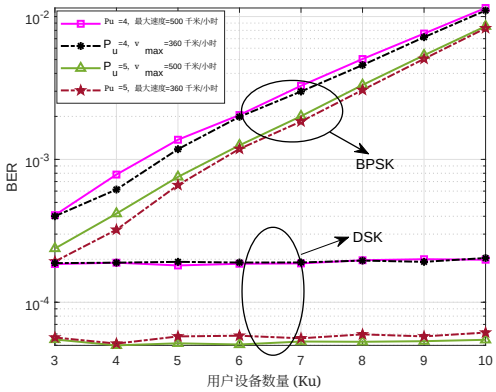


图10. $\rho = 12$ 分贝下的误码率，其中 K_u 。

图10展示了在 $\rho = 12$ 分贝下误码率随 K_u 变化的情况，同时也体现了 P_u 和 $v_{\max}$ 的影响。显然，最大速度增加时，性能差异非常小。这表明，得益于ODDM调制[12]的特性，BPSK和DSK方案都能保证对移动性的鲁棒性。然而，随着 K_u 增加，BPSK的误码率迅速上升；在 $P_u = 4$ 和 $K_u = 10$ 条件下，即使采用线性最小均方误差检测器，其误码率仍高于 1×10^{-2} 。其原因是，随着接入的用户设备增多，保护间隔不断缩短，由此造成的多用户干扰日益严重。值得庆幸的是，采用DSK后可显著缓解这一问题；在 $K_u = 10$条件下，其误码率不到基于BPSK的ODDM系统的2%。这再次证明，在上行传输中采用DSK的价值：既能确保峰均功率比和可靠性，又不损失效率，而这对用户设备而言是两个关键问题。同时，在不牺牲可达速率的前提下，基于BPSK的ODDM系统所能支持的用户设备最大数量为$\lfloor \frac{N}{\log_2 N} \rfloor = 10$，而DSK系统则不受此限制，因为可用序列数量为32。这表明，考虑到在 $K_u = 10$下的超高可靠性性能，上行差分移位键控框架具有支持大规模连接的潜力。最后，我们提出的上行差分移位键控这些框架在图10的任意参数选择下均优于启用二进制相移键控的差分移位键控系统，这最终验证了差分移位键控有能力应对6G通信网络中新兴高移动性应用的上行链路方案。

最后，图11给出了在不完美信道状态信息（CSI）下的性能评估，其中我们分别设置$K_u = 8$、 $P_u = 4$和 $v_{\max} = 360$ 千米/小时。与 [10], [65],中的配置类似，我们将估计误差取为$(h_p^u)' = h_p^u + \Delta_p^u$，其中有 $\Delta_p^u \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_e^2)$，且为 $\sigma_e^2 = -20$分贝。显然，当 $\rho \geq 6$分贝时，具有不完美信道状态信息的DSK 系统优于具有完美信道状态信息的二进制相移键控方案。当 $\rho = 13$ 分贝时，即使考虑信道估计误差，所提出的DSK系统仍可实现低于 10^{-3} 的误码率。总之，图11中的结果可以证明所提出的DSK框架的适用性，而进一步考虑信道估计的优化与评估有望在未来研究中开展。

C. 讨论

在本小节中，我们简要讨论了本研究的主要局限性，并据此提出了未来潜在的研究方向。首先，我们旨在研究DSK调制的基本原理和序列优化，以降低上行链路DD域传输中的峰均功率比和多用户干扰。因此，为简化分析，本文始终考虑网格信道，即假设归一化时延 $l_p^u = \frac{\tau_p^u}{\tau_r}$ 和多普勒频移 $k_p^u = \frac{\nu_p^u}{\nu_r}$ 均为整数。我们承认，一般的物理信道可能包含非网格分量，这可能会严重破坏ESDD信道的稀疏性 [51]。显然，只要设置合适的零填充范围 [63]，使沿ODDM子载波的循环卷积得以满足，所提出的DSK框架仍然适用。然而，为避免ESDD信道稀疏性降低所导致的错误传播，相应的检测方案需要进行调整，例如，将一个ODDM多载波符号内的子载波合并，以减少因子图中的传播路径，如 [63] 所示。我们将在未来的研究中进一步验证所提出的DSK方案在实际信道中的优越性。

另一方面，我们重点研究上行链路双重扩展信道中的传输帧及相应的检测设计。为便于系统分析和说明，我们假设通信中的其他处理均为理想情况。我们承认，尽管图11展示了存在信道估计误差时的性能，但其他一些实际因素仍可能影响可靠性，例如不完美同步，以及硬件限制带来的其他非理想效应。毫无疑问，考虑这些因素能够更好地表征系统，并使其更适用于实际实现；我们可能会在未来的研究中对此进行探讨。

最后，所提出的DSK框架的主要创新在于如何将信息比特映射到延迟-多普勒域分量，而非如何将延迟-多普勒域分量转换为连续时间波形。因此，该框架可以轻松集成到任何类型的延迟-多普勒域调制系统中。鉴于文献 [11], [12], [51],报道 ODDM 相较于 OTFS 具有更低的带外辐射和实现复杂度，我们选择 ODDM 来实现延迟-多普勒域调制。未来的研究可以全面比较 ODDM 和 OTFS 系统，并考虑 Zak-OTFS 的最新进展 [66], [67]。

VI. 结论

本文提出了一种基于 ODDM 调制的 DSK 框架，以应对双扩展信道中的峰均功率比和可靠性-复杂度权衡问题。首先，针对点对点传输建立了 DSK 收发机框架。随后，通过将 DSK 调制推广至基于 ZAC 序列的调制，将讨论扩展到采用迭代 SIC-MRC 检测器的上行链路场景。接着，通过采用 Zadoff–Chu 序列并分析分配给各用户设备的根的特性，优化了多用户基序列。仿真结果表明，所提出的框架在采用低复杂度检测器时具有超低峰均功率比和更优的误比特率性能，显示出 DSK 在高移动性场景下提升传输性能的潜力。未来的研究方向包括相应的分集分析以及多输入多输出系统的集成，以提升系统吞吐量。

附录A 引理1的证明

首先，$\psi_{u,v}(k_u,k_v)$ 可计算为

$$\begin{aligned}\psi_{u,v}(k_u,k_v)&=\sum_{k=0}^{N-1}z_u^*[(k-k_u)_N]z_v[(k-k_v)_N]\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{-j\pi\frac{m_u(k-k_u)^2}{N}}e^{j\pi\frac{m_v(k-k_v)^2}{N}}\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{j\pi\frac{(m_v-m_u)k^2+2(k_um_u-k_vm_v)k+m_vk_v^2-m_uk_u^2}{N}}\\&=e^{j\pi\frac{m_vk_v^2-m_uk_u^2}{N}}\times\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}F[k]e^{j2\pi\frac{(k_um_u-k_vm_v)k}{N}},\end{aligned}\tag{42}$$

其中，我们有 $F[k]=\frac{1}{\sqrt{N}}e^{j\pi(m_v-m_u\frac{k^2}{N}}$ $k=0\ 1\cdots N-1$ 对于,,,。令 $f[n]$ 表示$F[k]$的归一化逆离散傅里叶变换，则 (42) 可简化为

$$|\psi_{u,v}(k_u,k_v)|^2=|f[(k_um_u-k_vm_v)_N]|^2.\tag{43}$$

因此，主要任务可以转化为寻找 $|f[n]|^2$。为解决这一问题，令 $R_F[m]=\sum_{k=0}^{N-1}F^*[(k-m)_N]F[k]$表示 $F[k]$的自相关，它与 $|f[n]|^2$ 有密切关系[15] ，如下所示

$$|f[n]|^2=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}R_F[m]e^{j2\pi\frac{mn}{N}}.\tag{44}$$

因此，首先将自相关简化为

$$\begin{aligned}R_F[m]&=\sum_{k=0}^{N-1}F^*[(k-m)_N]F[k]\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{j\pi(m_v-m_u)\frac{k^2-(k-m)^2}{N}}\\&=\frac{e^{-j\pi(m_v-m_u)\frac{m^2}{N}}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{j2\pi\frac{km(m_v-m_u)}{N}}\\&=e^{-j\pi(m_v-m_u)\frac{m^2}{N}}\delta[(m(m_v-m_u))_N].\end{aligned}\tag{45}$$

当 $((m_v-m_u)m)_N\neq 0$ 时，可直接推得$R_F[m]=0$。当 $m=0$ 或 $m_u=m_v$时，(45) 可计算为 1。对于其他情况，有 $((m_v-m_u)m)_N=0$，其中 $m\neq 0$ 和 $m_v\neq m_u$，即 $(m_v-m_u)=\frac{\gamma N}{m}$ 满足 $\gamma\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$。另一方面，$((m_v-\overline{m_u})m)_N=0$ 等价于 $\gcd((m_v-m_u)m,N)=N=2^n$。由于 $m_u\in[1,N-1]$对 $\forall\ u$ 成立，我们可以推得 $\gcd(m_v-m_u,N)\leq 2^{n-1}$，这表明必须满足 $\gcd(m,N)\geq 2$。考虑到 N的所有因子可表示为 $2^{n'}$，其中 $n'\in\mathbb{Z}$和 $0\leq n'\leq n$， m 必定为偶数。因此，可推得

$$e^{-j\pi(m_v-m_u)\frac{m^2}{N}}=e^{-j\pi\gamma m}=1,\tag{46}$$

结合式 (45) 中的分析，可得 $R_F[m]=\delta[(m(m_v-m_u))_N]$。为便于说明，采用记号 $c=$最大公约数(m_v-m_u,N) 和 $\lambda=\frac{N}{c}$。于是 $R_F[\overline{m}]$ 可进一步简化为

$$R_F[m]=\begin{cases}1, & (m)_\lambda=0\\0, & \text{elsewhere}\end{cases}.\tag{47}$$

因此，可推导出 $|f[n]|^2$

$$\begin{aligned}|f[n]|^2&=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}R_F[m]e^{j2\pi\frac{mn}{N}}\\&=\frac{1}{N}\sum_{c_1=0}^{c-1}e^{j2\pi\frac{c_1\lambda n}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{c_1=0}^{c-1}e^{j2\pi\frac{c_1n}{c}}\\&=\begin{cases}\frac{c}{N}, & (n)_c=0\\0, & \text{elsewhere}\end{cases}.\end{aligned}\tag{48}$$

[15]利用离散傅里叶变换和 IDFT 的性质即可轻松得到该关系。

最后，结合式 (43) 中的推导，$|\psi_{u,\ v}(k_u,\ k_v)|^2$ 可表示为

$$|\psi_{u,v}(k_u,k_v)|^2 = \begin{cases} \frac{c}{N}, & ((k_u m_u - k_v m_v)_N)_c = 0 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}. \tag{49}$$

至此，引理1的证明完成。

附录B 定理1的证明

鉴于自相关的性质，需要满足 $\gcd(m_u, N) = 1$，因此 m_u 必须为奇数，且 $\forall\ u$。本附录首先分析解 $m_u = 2u + m_0$，随后证明其他任何解都无法优于该解。由于 $K_u \leq 2$时的情形显而易见，我们重点推导 $2 < K_u \leq 2^{n-1} = \frac{N}{2}$ 时的情况，并采用记号 $m = \lceil \log_2 K_u \rceil - 1$，其中 $1 \leq m < n-1$ 且$Q = K_u - 2^m$。

根据等差数列的性质，$u \neq v$时的 $|m_u - m_v|$可以是 $[2, 2K_u - 2]$范围内的任意偶数，这表明 $\gcd(m_u - m_v, N)$ 的最大值为 2^{m+1}，因为 $2^{m+1} \leq 2K_u - 2 < 2^{m+2}$。同时，这意味着当 $u - v = 2^m$时，$\gcd(m_u - m_v, N)$ 达到 2^{m+1}。因此，有 Q 对用户设备对应于 $\gcd(m_u - m_v, N)$ 的最大值，分别为 $(0, 2^m), (1, 2^m + 1) \cdots, (Q-1, 2^m + Q - 1)$。总之，对于所提出的选择，$\gcd(m_u - m_v, N)$ 的最大值为 2^{m+1}，对应 Q 个可访问对。

接下来，我们证明所提方案的最优性。对于每种选择，令 $m_u = \sum_{t=0}^{n-1} \mathrm{b}_u^t 2^t$ 表示 m_u 的二进制表示，其中 $\mathrm{b}_u^t \in \{0, 1\}$。为保证 m_u 与 $N = 2^n$互素，需要满足 $\mathrm{b}_u^0 = 1$。由于我们有 $2^m < K_u$，根据鸽巢原理，至少存在一对 $(u,\ v)$，使得$u \neq v$ 且 $\mathrm{b}_u^t = \mathrm{b}_v^t$，其中 $\forall\ 0 \leq t \leq m$。对于这对 $(u,\ v)$，可以推导出 $(m_u - m_v)_{2^{m+1}} = 0$，这表明对于 $\{m_u | u = 0, 1, \cdots, K_u - 1\}$ 的任何可能取值，$\max_{u,\ v} \gcd(m_u - m_v,\ N) \geq 2^{m+1}$ 均成立。由于所提选择满足 $\max_{u,\ v} \gcd(m_u - m_v,\ N) = 2^{m+1}$，因此就 $\gcd(m_u - m_v,\ N)$ 的最大值而言，它是最优方法。

假设存在一种策略 $\{m_u | u = 0, \cdots, K_u - 1\}$，使得仅有 $Q_1 < Q$ 个用户设备对[16]达到最大公约数$(m_u - m_v,\ N) = 2^{m+1}$。这表明存在一个包含 $K_u - Q_1 > 2^m$ 个元素的子集，记为 $\mathcal{U} \subsetneq \{0, 1, \cdots, K_u - 1\}$，其中 $\{\mathrm{b}_u^t = \mathrm{b}_v^t, \forall\ 0 \leq t \leq m\}$ 对 $\forall\ u \neq v$和$u,\ v \in \mathcal{U}$不成立。然而，根据鸽巢原理，必然存在一对 $u,\ v \in \mathcal{U}$，使得 $\mathrm{b}_u^t = \mathrm{b}_v^t$ 对$\forall\ 0 \leq t \leq m$ 成立，因为 $|\mathcal{U}| > 2^m$。这与 $\mathcal{U}$的基本假设矛盾，说明不存在一种策略，能够仅凭 $Q_1 < Q$ 对 $(u,\ v)$ 达到最大公约数 $(m_u - m_v,\ N) = 2^{m+1}$。另一方面，所提出的策略 $m_u = 2u + m_0$只有 Q 对可达，这已经是度量界。

基于上述分析，成功证明了所提出的根选取方案 $m_u = 2u + m_0$ 的最优性，从而完成了**定理1**的证明。

[16] $Q = 1$ 的情形很简单，因此不在讨论范围内。

参考文献

[1] A. Mehrotra、S. Srivastava、S. Asifa、A. K. Jagannatham 和 L. Hanzo，《面向超高多普勒场景的OTFS调制多输入多输出系统中基于在线贝叶斯学习的稀疏信道状态信息估计》，IEEE通信汇刊，第72卷，第4期，第2182–2200页，2024年。[2] A. Shafie、J. Yuan、N. Yang 和 H. Lin，《时延-多普勒平面正交脉冲的时频局域化特性》，IEEE通信汇刊，第73卷，4120，2025年6，4105 no. pp. – 。[3] Z. Zhang、Y. Wu、X. Lei、L. Lei 和 Z. Wei，《迈向6G多小区正交时频空间系统：干扰协调与协作通信》，IEEE Veh. Technol. Mag.，第19卷，第1期，第55–64页，2024年。[4] J. Li、Y. Niu、H. Wu、B. Ai、S. Chen、Z. Feng、Z. Zhong 和 N. Wang，《毫米波通信的移动性支持：机遇与挑战》，IEEE Commun. Surveys Tuts.，第24卷，第3期，第1816–1842页，2022年。[5] H. Zhang、X. Wang、J. Tan、J. Wang、Z. Yang 和 B. Ai，《近孪生模型：高移动性场景下调制解调方案与信道估计的一致性设计》，IEEE Trans. Wireless Commun.，第24卷，第6期，第4564–4580页，2025年。[6] X. Wang、H. Zhang、J. Wang、Z. Yang、H. Lin 和 J. Song，《面向高移动性大规模连接的灵活时延-多普勒域多址接入》，IEEE Trans. Wireless Commun.，第24卷，5065，2025年6，5050no. pp. – 。[7] W. Shi、J. Xu、W. Xu、C. Yuen、A. Lee Swindlehurst 和 C. Zhao，《空间随机窃听者条件下莱斯信道中智能超表面辅助多输入单输出系统的保密性能》，IEEE Trans. Wireless Commun.，第23卷，第8期，第8357–8371页，2024年。[8] W. Shi、J. Yao、W. Xu、J. Xu、X. You、Y. C. Eldar 和 C. Zhao，《应对空口联邦学习中的干扰：一种基于智能超表面的统计方法》，IEEE Trans. Signal Process.，第73卷，953，2025年936pp. – 。[9] S. Mahboob 和 L. Liu，《变革未来连接：人工智能赋能的卫星非地面网络当代综述》，IEEE Commun. Surveys Tuts.，第6 1321，2024年26，2，1279 g，第no.卷，pp. – 。[10] P. Raviteja、K. T. Phan、Y. Hong 和 E. Viterbo，《正交时频空间调制的干扰消除与迭代检测》，IEEE Trans. Wireless Commun.，第17卷，第10期，第6501–6515页，2018年。[11] H. Lin 和 J. Yuan，《正交时延-多普勒分复用调制》，IEEE Trans. Wireless Commun.，第21卷，第12期，第11 024–11 037页，2022年。[12] H. Lin、J. Yuan、W. Yu、J. Wu 和 L. Hanzo，《多载波调制：从时频域到时延-多普勒域的演进》，2023, [在线]。地址：https://arxiv.org/abs/2308.01802。[13] W. Yuan、S. Li、Z. Wei、Y. Cui、J. Jiang、H. Zhang 和 P. Fan，《6G时代全新的时延-多普勒通信范式：正交时频空（OTFS）综述》，China Commun.，第20卷，第6期，第1–25页，2023年。[14] T. Thaj、E. Viterbo 和 Y. Hong，《正交时序复用调制：分析与低复杂度接收机设计》，IEEE Trans. Wireless Commun.，第20卷，第12期，第7842–7855页，2021年。[15] A. Bemani、N. Ksairi 和 M. Kountouris，《面向下一代无线通信的仿射频分复用》，IEEE Trans. Wireless Commun.，第22卷，第11期，第8214–8229页，2023年。[16] S. Srivastava、R. K. Singh、A. K. Jagannatham、A. Chockalingam 和 L. Hanzo，《模拟与混合波束成形辅助毫米波多输入多输出系统中的OTFS收发机设计与稀疏双选择性信道状态信息估计》，IEEE Trans. Wireless Commun.，第21卷，第12期，第10 902–10 917页，2022年。[17] X. Shi、J. Wang、Z. Sun 和 J. Song，《基于空间啁啾码本的超大规模海量多输入多输出分层波束训练》，IEEE Trans. Wireless Commun.，第23卷，第4期，第2824–2838页，2024年。[18] S. Li、J. Yuan、W. Yuan、Z. Wei、B. Bai 和 D. W. K. Ng，《高移动性信道中编码OTFS系统的性能分析》，IEEE Trans. Wireless Commun.，第20卷，第9期，第6033–6048页，2021年。[19] X. Huang、A. Farhang 和 R.-R. Chen，《编码OTFS与OFDM的信道估计和Turbo均衡：比较》，IEEE Wireless Commun. Lett.，第12卷，第9期，第1613–1617页，2023年。[20] X. Wang、X. Shi、J. Wang 和 J. Song，《双扩散信道中OTFS系统的多普勒斜视效应：建模与评估》，IEEE Trans. Wireless Commun.，第22卷，第12期，第8781–8796页，2023年。

[21] Y. Ma、A. Shafie、J. Yuan、G. Ma、Z. Zhong 和 B. Ai，《采用 Tomlinson-Harashima 预编码的正交时延-多普勒分复用调制》，IEEE《通信汇刊》，第 73 卷，第 7 期，第 5391–5407 页，2025年。[22] X. Li 和 W. Yuan，《基于高斯混合分布的 OTFS 检测：一种广义消息传递方法》，IEEE《通信快报》，第 28 卷，第 1 期，第 178–182 页，2024年。[23] P. Priya、Y. Hong 和 E. Viterbo，《超大时延扩展信道中的 OTFS 信道估计与检测》，IEEE《无线通信汇刊》，第 23 卷，第 9 期，第 11 920–11 930 页，2024年。[24] T. Thaj 和 E. Viterbo，《用于零填充OTFS系统的低复杂度迭代式 rake 判决反馈均衡器》，IEEE《车辆技术汇刊》，第 69 卷，第 12 期，第 15 606–15 622 页，2020年。[25] B. V. S. Reddy、C. Velampalli 和 S. S. Das，《上行链路中多用户 OTFS、OTSM 和单载波的性能分析》，IEEE《通信汇刊》，第 72 卷，第 3 期，第 1428–1443 页，2024年。[26] Q. Li、J. Yuan、M. Qiu、S. Li 和 Y. Xie，《用于正交时频空间调制的低复杂度 Turbo SIC-MMSE 检测》，IEEE《通信汇刊》，第 72 卷，第 6 期，第 3169–3183 页，2024年。[27] P. Priya、E. Viterbo 和 Y. Hong，《采用过采样的 OTFS 接收机低复杂度最大比合并检测》，IEEE《无线通信汇刊》，第 23 卷，第 2 期，第 1459–1473 页，2024年。[28] Y. Zuo、J. Guo、N. Gao、Y. Zhu、S. Jin 和 X. Li，《面向6G无线通信的区块链与人工智能综述》，IEEE《通信调查与教程》，第 25 卷，第 4 期，第 2494–2528 页，2023年。[29] R. Zeng、Z. Lu、X. Zhang 和 J. Wang，《基于深度学习的无导频传输：时变信道下低分辨率接收的纠错编码》，IEEE《车辆技术汇刊》，第 72 卷，第 12 期，第 16 031–16 041 页，2023年。[30] X. Zhang、Z. Lu、R. Zeng 和 J. Wang，《用于基于比特级深度学习的大规模多输入多输出信道状态信息反馈的量化适配器》，IEEE《车辆技术汇刊》，第 73 卷，第 4 期，第 5443–5453 页，2024年。[31] N. Ye、S. Miao、J. Pan、Q. Ouyang、X. Li 和 X. Hou，《无线物理层技术中的人工智能（AI4PHY）：全面综述》，IEEE《认知通信与网络汇刊》，第 10 卷，第 3 期，第 729–755 页，2024年。[32] Q. Cheng、Z. Shi、J. Yuan 和 H. Lin，《多输入多输出 ODDM 信号检测：一种基于空间的生成对抗网络方法》，IEEE《无线通信汇刊》，第 23 卷，第 9 期，第 12 499–12 512 页，2024 年。[33] Z. Zhou 、 L. Liu 、 J. Xu 和 R. Calderbank，《学习均衡 OTFS》，IEEE《无线通信汇刊》，第 21 卷，第 9 期，第 7723–7736 页，2022 年。[34] Q. Cheng 、 Z. Shi 、 J. Yuan、P. G. Fitzpatrick 和 T. Sakurai，《一种利用对比学习实现环境鲁棒 ODDM 检测的新方法》，IEEE《通信汇刊》，第 71 卷，第 9 期，第 5274–5286 页，2023年。[35] P. Raviteja、K. T. Phan 和 Y. Hong，《时延-多普勒信道中用于 OTFS 的嵌入式导频辅助信道估计》，IEEE《车辆技术汇刊》，第 68 卷，第 5 期，第 4906–4917 页，2019年。[36] P. Wei、Y. Xiao、W. Feng、N. Ge 和 M. Xiao，《OTFS 信号峰均功率比特性分析：大系统分析》，IEEE《无线通信汇刊》，第 21 卷，第 6 期，第 3705–3720 页，2022年。[37] N. V. Kalpage、P. Priya 和 Y. Hong，《降低峰均功率比的基于离散余弦变换的OTFS》，IEEE《通信快报》，第 28 卷，第 1 期，第 158–162 页，2024年。[38] A. A. Amin、G. Gao、X. Chen、A. Li 和 W. Shieh，《正交频移键控自适应光传输的性能》，IEEE《光子技术快报》，第 24 卷，第 13 期，第 1079–1081 页，2012年。[39] J. Wang、X. Zhang、X. Shi 和 J. Song，《提升毫米波多输入多输出频谱效率：使能技术与预编码器设计》，IEEE《通信杂志》，第 59 卷，第 4 期，第 116–122 页，2021年。[40] Z. Sui、H. Zhang、S. Sun、L.-L. Yang 和 L. Hanzo，《用于正交多址接入的空时移位键控辅助 OTFS 调制》，IEEE《通信汇刊》，第 71 卷，第 12 期，第 7393–7408 页，2023年。[41] Y. Liang、L. Li、P. Fan 和 Y. Guan，《基于索引调制的多普勒鲁棒正交时频空（OTFS）系统》，载于 IEEE 第 91 届车辆技术会议（VTC-Spring）论文集，2020年，第 1–5 页。[42] H. Zhao、D. He、Z. Kang 和 H. Wang，《采用双模索引调制的正交时频空（OTFS）》，IEEE《无线通信快报》，第 10 卷，第 5 期，第 991–995 页，2021年。[43] S. Do˘gan-Tusha、A. Tusha、S. Althunibat 和 K. Qaraqe，《采用索引调制的正交时频空多址接入》，IEEE《车辆技术汇刊》，第 72 卷，第 12 期，第 15 858–15 866 页，2023年。[44] Y. I. Tek 和 E. Basar，《用于正交时频空间调制的联合时延-多普勒索引调制》，IEEE《通信汇刊》，第 72 卷，第 7 期，第 3985–3993 页，2024年。[45] Q. Tao、T. Xie、Z. Yang 和 Z. Zhang，《高移动性信道中采用正交时频空间调制的共生无线电》，IEEE《无线通信汇刊》，第 23 卷，第 12 期，第 18 070–18 082 页，2024年。

[46] D. Chu，“具有良好周期相关特性的多相码（通信），”《IEEE信息论汇刊》，第18卷，第4期，第531–532页，1972年。[47] D. Tse和P. Viswanath，《无线通信基础》，剑桥大学出版社，2005年。[48] X. Wang、X. Shi、J. Wang和J. Song，“存在多普勒斜视的循环前缀正交时频空系统的输入输出关系与低复杂度接收机设计”，见2023年IEEE全球通信大会研讨会（GC Wkshps），2023年，第539–544页。[49] P. Bello，“随机时变线性信道的表征”，《IEEE通信系统汇刊》，第11卷，第4期，第360–393页，1963年。[50] J. Tong、J. Xi、J. Yuan和H. Lin，“一般物理信道上 ODDM 调制的输入输出关系”，见IEEE国际通信会议研讨会论文集（ICC Workshops），2023年，第289–294页。[51] J. Tong、J. Yuan、H. Lin和J. Xi，“一般物理信道上的正交时延-多普勒分复用（ODDM）”，《IEEE通信汇刊》，第72卷，第12期，第7938–7953页，2024年。[52] G. Matz、H. Bolcskei和F. Hlawatsch，“通信的时频基础：概念与工具”，《IEEE信号处理杂志》，第30卷，第6期，第87–96页，2013年。[53] A. Sahin、I. Guvenc和H. Arslan，“多载波通信综述：原型滤波器、格结构与实现问题”，《IEEE通信综述与教程》，第16卷，第3期，第1312–1338页，2014年。[54] H. Lin，“正交时延-多普勒分复用（ODDM）入门”，见IEEE无线通信信号处理进展研讨会论文集（SPAWC），2025年，第1–5页。[55] H. Lin和J. Yuan，“时延-多普勒平面上的多载波调制：以精细分辨率实现正交性”，见IEEE国际通信会议论文集（ICC），2022年，第2417–2422页。[56] J. Jeganathan、A. Ghrayeb、L. Szczecinski和A. Ceron，“面向多输入多输出信道的空移键控调制”，《IEEE无线通信汇刊》，第8卷，第7期，第3692–3703页，2009年。[57] J. Tropp、I. Dhillon、R. Heath和T. Strohmer，“基于交替投影法设计结构化紧框架”，《IEEE信息论汇刊》，第51卷，第1期，第188–209页，2005年。[58] J. A. Tropp和A. C. Gilbert，“基于正交匹配追踪从随机测量中进行信号恢复”，《IEEE信息论汇刊》，第53卷，第12期，第4655–4666页，2007年。[59] J. W. Kang、Y. Whang、B. H. Ko和K. S. Kim，“Chu序列的广义互相关特性”，《IEEE信息论汇刊》，第58卷，第1期，第438–444页，2012年。[60] V. Khammammetti和S. K. Mohammed，“高多普勒与时延扩展无线信道中基于OTFS的多址接入”，《IEEE无线通信快报》，第8卷，第2期，第528–531页，2019年。[61] Z. Wei、W. Yuan、S. Li、J. Yuan和D. W. K. Ng，“正交时频空间调制的发射机与接收机窗设计”，《IEEE通信汇刊》，第69卷，第4期，第2207–2223页，2021年。[62] S. Li、W. Yuan、Z. Wei和J. Yuan，“正交时频空间调制的跨域迭代检测”，《IEEE无线通信汇刊》，第21卷，第4期，第2227–2242页，2022年。[63] Q. Li、J. Yuan、M. Qiu、S. Li和Y. Xie，“正交时频空间调制的低复杂度Turbo SIC-MMSE检测”，《IEEE通信汇刊》，第72卷，第6期，第3169–3183页，2024年。[64] Y. Ge、Q. Deng、P. C. Ching和Z. Ding，“面向异构移动性用户上行非正交多址的OTFS信令”，《IEEE通信汇刊》，第69卷，第5期，第3147–3161页，2021年。[65] K. Huang、M. Qiu、J. Tong、J. Yuan和H. Lin，“信道估计不完美条件下正交时延-多普勒分复用调制的性能”，《IEEE通信汇刊》，第73卷，第5期，第3637–3654页，2025年。[66] S. K. Mohammed、R. Hadani、A. Chockalingam和R. Calderbank，“OTFS——时延-多普勒域中通信与雷达感知的数学基础”，《IEEE BITS信息论杂志》，第2卷，第2期，第36–55页，2022年。[67] M. Ubadah、S. K. Mohammed、R. Hadani、S. Kons、A. Chockalingam和R. Calderbank，“Zak-OTFS：融合输入输出关系感知与数据通信”， 2025，[在线]。可获取于：https://arxiv.org/abs/2404.04182。