arXiv:2603.02749v1 [math.DG] 3 Mar 2026

特殊拉格朗日光滑化、Calabi 设定与稳定性条件

JACOPO STOPPA

Abstract. 作为研究具有孤立锥奇点的特殊拉格朗日子流形（*sLag*）的一部分，Joyce 证明了一个判据：对于两个相位相同、彼此连通、紧致且嵌入的特殊拉格朗日子流形，若它们横截相交，则沿复结构的小幅变化，其并集存在特殊拉格朗日平滑化。

本文构造了无穷多个例子：任意维数的非紧致嵌入特殊拉格朗日子流形对，二者相位相同，仅在无穷远处以非横截方式相交，并满足 Joyce 的判据：沿复结构的小幅变化，在全纯体积形式的周期满足斜率不等式的稳定轨迹上，其并集存在特殊拉格朗日平滑化。至少在一个自然的对称性假设下，这一斜率不等式也是此类平滑化存在的必要条件。我们的方法采用 Leung-Yau-Zaslow 变换，并分析了 Jacob 和 Sheu 基于 Calabi 设定的变形 Hermitian Yang-Mills 联络。在不稳定的情形下，我们证明，若一族拉格朗日光滑化在自然的 Calabi对称平均曲率流（由 Chan 和 Jacob 提出）下演化并存在极限，则该极限必为原始特殊拉格朗日子流形的并集。

作为一项应用，我们证明：在我们的例子中，于二维情形，特殊拉格朗日平滑存在的条件事实上等价于 Fukaya-Seidel 范畴中相应对象相对于一个由代数几何引入的已知 Bridgeland稳定性条件的稳定性；而在不稳定情形下，我们结果中 Calabi-对称平均曲率流的极限与 Harder-Narasimhan 分解相吻合，这与 Joyce 的一个一般性猜想相一致。一个类似（尽管较弱）的结果在三维情形下同样成立。

1. Introduction and main results

1.1. **特殊拉格朗日光滑化**。我们首先回顾 D. Joyce 关于特殊拉格朗日子流形之并在一种特殊情形下的平滑化存在性的一个基本结果，其阐述见 [15]，小节 9.3。

设 (M, J, ω, Ω) 表示一个维数为 n 的殆*Calabi-Yau*流形，即一个配备全纯体积形式 Ω 的 K¨ahler 流形 (M, ω)。

设 $L_1, L_2 \subset M$ 是紧致、嵌入的特殊拉格朗日（*sLag*）ˆ子流形，且具有相同的相位 $e^{\mathrm{i}\theta}$，即满足以下条件的连通嵌入子流形

$$\omega|_{L_i} = \operatorname{Im} e^{-\mathrm{i}\hat{\theta}} \Omega|_{L_i} = 0,$$

它们在单点 $p \in M$ 处横截相交。

Date：2026年3月4日。

注1.1。 我们假设所有嵌入的特殊拉格朗日子流形都是连通的。

固定一个光滑族 $\{(M^s, J^s, \omega^s, \Omega^s) : s \in \mathcal{F}\}$，它是 M 的变形，并满足上同调条件 $[\omega^s]|_{L_i} = 0$, $i = 1, 2$, $s \in \mathcal{F}$。记

$$\int_{[L_i]} \Omega^s = R_i^s e^{\mathrm{i}\hat{\theta}_i^s}, \int_{[L_1]+[L_2]} \Omega^s = R^s e^{\mathrm{i}\hat{\theta}^s}, \ i = 1, 2,$$

ˆˆ 其中 $R_i^s, R^s > 0$ 和 $\theta_i^s, \theta^s \in \mathbb{R}$ 的选取使它们关于 s 连续变化，且 ˆ $\theta_i^0 = \hat{}\theta^0 = \hat{}\theta$ （通过缩小 $\mathcal{F}$，这是可以做到的）。

注 1.2. 注意，实际上在这种情形下，特殊拉格朗日子流形 $L_i \subset M$ 变形为 $s \in \mathcal{F}$ 对应的特殊拉格朗日子流形 $L_i^s \subset M^s$，并且我们有

$$\int_{[L_i^s]} \Omega^s = \int_{[L_i]} \Omega^s.$$

假设交点 p 属于类型 *1*，也就是说，在 p 处的 Darboux 坐标中， L_1、L_2 处的切空间具有如下标准形式

$\Pi^0 = \{(x_1, \dots, x_m) : x_j \in \mathbb{R}\}$, $\Pi^\phi = \{(e^{\mathrm{i}\phi_1} x_1, \dots, e^{\mathrm{i}\phi_n} x_n) : x_j \in \mathbb{R}\}$,

其中 $\phi_1 \le \phi_2 \le \cdots \le \phi_n$ 满足

$$\phi_1 + \cdots + \phi_n = \pi$$

（这个概念取决于固定的顺序 $\{L_1, L_2\}$；反转顺序会产生一个 $n-1$ 型交点。）

定义稳定轨迹 $\mathcal{F}^+ \subset \mathcal{F}$ 为

$$\mathcal{F}^+ = \{s \in \mathcal{F} : \hat{\theta}_1^s > \hat{\theta}^s > \hat{\theta}_2^s\}.$$

定理 1.3 （Joyce [15], 定理 9.10）。 设 $n > 2$。存在一族光滑的嵌入特殊拉格朗日子流形 $L^s \subset M^s$，其相位为 ˙$e^{\mathrm{i}\theta^s}$，由 $s \in \mathcal{F}^+$ 参数化，使得

$$L^s \to L_1 \cup L_2$$

按流的意义， $s \to 0$。

Joyce 的构造实际上还提供了关于 L^s 的更多信息：它是通过将一个适当大小的典范局部模型（称为 Lawlor 颈）粘接到 $L_1 \cup L_2$ 在 p 处而得到的，因此其哈密顿同痕类由拉格朗日连通和 $X_2^s \# X_1^s$ 给出。

另一个关键点是，特殊拉格朗日子流形族 L^s 无法延拓到不稳定轨迹 $\mathcal{F}^-$: $= \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}^+$ 上；也就是说，对于 $s \in \mathcal{F}^-$，不存在 $X_2^s \# X_1^s$ 的特殊拉格朗日代表（见 [26], 第 3 节）。

1.2. **概要**。 本文旨在证明 Joyce 平滑定理1.3 在若干性质迥异的特定例子中的类似结果，并将这些例子与已知的代数几何稳定性概念联系起来。我们的结果陈述如下定理：1.4、1.7、1.8、1.10和1.11 。

ˇˇ 在我们的情形中，我们研究的特殊拉格朗日子流形 $L_1, L_2 \subset M$ 是非紧的，并且仅在无穷远处相交（非横截相交） M （这是在一种精确意义下而言）。然而，sLags ˇ $L_i \subset M$ 仍可延拓为复结构变形 M^s 参数化的特殊拉格朗日子流形的光滑族 ˇ$L_i^s \subset (M^s, \omega^s, \Omega^s)$，参数由

$s \in \mathcal{F}$给出，并且适当的周期积分 $\int_{[\check{L}_i^s]} \tilde{\Omega}^s$是良定义的；这些积分涉及快速衰减同调群中的类 $[\check{L}_i^s]$，以及修正体积形式 $\tilde{\Omega}^s$。引入稳定轨迹

$$\mathcal{F}^+ = \{s \in \mathcal{F} \colon \arg \int_{[\check{L}_2^s]} \tilde{\Omega}^s < \arg \int_{[\check{L}_1^s]} \tilde{\Omega}^s\},$$

我们仍然能够构造一族连通的、嵌入的特殊拉格朗日子流形 $\check{L}^s \subset M^s$，定义在 $\mathcal{F}^+$上，使得

（i）$\check{L}^s$ 在 M^s中于无穷远处渐近于 $\check{L}_1^s \cup \check{L}_2^s$；（$ii$）当 $s \to 0$时，我们有

$$\check{L}^s \to \check{L}_1 \cup \check{L}_2$$

在 M的紧子集上光滑地；

（iii）在一个自然的进一步对称性假设下，该族不能延拓到不稳定轨迹上

$$\mathcal{F}^- = \{s \in \mathcal{F} \colon \arg \int_{[\check{L}_2^s]} \tilde{\Omega}^s > \arg \int_{[\check{L}_1^s]} \tilde{\Omega}^s\}.$$

在我们的例子中，这些结果并非通过粘合来证明，而是通过使用镜像对称的论证来证明。

1.3. **与 Thomas-Yau 猜想的关系。** 定理 1.3自然地融入了这一系列思想之中，这些思想将特殊拉格朗日子流形的存在性与稳定性概念联系起来，具体而言就是 Thomas-Yau 猜想 [26, 27]，尤其是从 Joyce [16] 和 Li [19]的观点来看。事实上，这一结果是提出这些猜想的主要动机，特别参见 [26],第 3 节和 [19], 第 2.7 节。

特别地，人们预期，当 Fukaya 范畴 $D\mathrm{Fuk}(M^s, \omega^s)$ 定义良好时（即如果 M^s 在无穷远处具有适当的凸性，参见 [16], 猜想 3.2），那么对所有 $s \in \mathcal{F}$，都应存在一个正合三角

$$L_2^s \to \tilde{L}^s \to L_1^s \to \check{L}_2^s[1],$$

在 $D\mathrm{Fuk}(M^s, \omega^s)$ 中，使得对于 $s \in \mathcal{F}^+$，L^s 与特殊拉格朗日子流形 L^s 作为 $D\mathrm{Fuk}(M^s, \omega^s)$ 的对象同构；而对于 $s \in \mathcal{F}^-$，$\tilde{L}^s$ 则不能由特殊拉格朗日子流形表示。

在我们的情形中，得益于多位作者的工作（[8, 17, 22, 23, 28]），存在一个定义良好的 Fukaya-Seidel 范畴 $D\mathrm{FS}(T, W^s)$，与 M^s 相关联（更准确地说，正如我们将回顾的，它对应于一个 Landau-Ginzburg 模型$W^s \colon T \to \mathbb{C}$，$T$ 表示一个代数环面）；特殊拉格朗日子流形 $\check{L}_i^s$ 在$D\mathrm{FS}(T, W^s)$ 中定义对象，而我们预期存在一个正合三角形

$$\check{L}_2^s \to \widetilde{\check{L}^s} \to \check{L}_1^s \to \check{L}_2^s[1], \tag{1.1}$$

在 $D\mathrm{FS}(T, W^s)$ 中也具有相同的性质。然而，目前由于我们所依赖的 Fukaya-Seidel 范畴的实际构造（即 [8]的相干-可构造方法），尚不清楚我们的特殊拉格朗日平滑化 $\check{L}^s$ 是否定义了 $D\mathrm{FS}(T, W^s$中的对象：参见小节 4.4。

1.4. **环面镜像**。 我们的结果涉及几乎 Calabi-Yau 流形 M 作为环面 Fano 流形的镜像获得的情形。在这一背景下研究 Thomas-Yau 猜想的各种形式这一想法由 Collins 和 Yau 提出（参见 [5], 小节 9），并在例如 [24, 25]中得到进一步研究（另见 [6] ，其中给出了近期相关结果）。

令 X 表示一个环面 Fano 流形，并赋予一个环面不变的 K¨ahler 形式 ω，其 K¨ahler 势为 φ。我们用 x_i 表示环面边界补集上的全纯坐标的实部，该补集同构于 $(\mathbb{C}^*)^n$，并用 $[\omega] \in H^{1,1}(X)$ 表示 K¨ahler 类。

从微分几何视角来看，(X, ω) 的*Leung-Yau-Zaslow* 镜像由一个显式的近似 Calabi–Yau 流形 (M, ω_M, Ω_M) 给出，其中 $M \subset (\mathbb{C}^*)^n$ 是一个有界开域，ω_M 是一个 K¨ahler 形式，而 Ω_M是一个全纯体积形式，参见例如第 [5], 小节第 9 节。所有这些数据都依赖于作为微分形式的 ω ，并且 M 配备了一个以 (X, ω) 的动量多面体 $\Delta^o(\omega)$ 为底的特殊拉格朗日环面纤维化。

利用由矩映射诱导的自然识别 $M \cong (S^1)^n \times \Delta^o$ ，取坐标 $(\theta_i, y_i = \partial_{x_i}\varphi)$， M 上的复结构满足坐标 $\tilde{w}_i = y_i + \mathrm{i}\,\theta_i$ 为全纯坐标，而 K¨ahler 度量为

$$\tilde{g} = \sum_{i,j} u_{ij} \left(dy_i \otimes dy_j + d\tilde{\theta}_i \otimes d\tilde{\theta}_j \right),$$

其中 u_{ij} 表示辛势，即 K¨ahler 势 φ的勒让德变换。全纯体积形式为

$$\Omega_M = d\tilde{w}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{w}_n.$$

˜注意，令 $\tilde{z}_i = e^{w_i}$ 可定义一个双全纯映射，将 M 映到 $(\mathbb{C}^*)^n$中的一个有界开域。

从代数几何的角度看，镜像可视为代数环面$T = (\mathbb{C}^*)^n$，其上赋有正则函数 W（即朗道-金兹堡（*LG*）势）和全纯体积形式 Ω_T；二者均由 $(X, [\omega])$ 显式构造，且只依赖于 ω 的上同调类（见 [9]）。若 $\tilde{z}_i$表示 T上的标准全纯坐标，则有

$$\Omega_T = \frac{d\tilde{z}_1}{\tilde{z}_1} \wedge \cdots \wedge \frac{d\tilde{z}_n}{\tilde{z}_n}.$$

固定 X 的环面扇 Σ，并令 D_i、 $i = 1, \ldots, m$ 表示环面除子。然后，在镜像族的一个固定平凡化中，LG 势为

$$W = \sum_{i=1}^{m} a_i(\omega) \tilde{z}^{v_i},$$

其中， v_i 是 Σ 对偶于 D_i的射线的本原生成元，而系数 a_i 在环面变量重标度的意义下由以下条件唯一确定：对于任意整线性关系 $\sum d_i v_i = 0$，都对应唯一的曲线类 $[C]$ ，使得 $D_i.[C] = d_i$，我们有

$$\prod_i a_i^{d_i} = e^{-2\pi \int_C \omega}.$$

缩放参数 $k>0$ 在 K¨ahler 形式 $\omega \mapsto k\omega$中发挥着重要作用。相对于 $k\omega$，镜像（M_k， $\omega_{M,\,k}$， $\Omega_{M,\,k}$）和（T， W_k， Ω_T）趋近于 $k \gg 1$的大复结构极限。

我们研究定理1.3 对于适当的嵌入特殊拉格朗日子流形并集的类似结论

$$\check{L}_1 \cup \check{L}_2 \subset (M_k, \omega_{M,k}, \Omega_{M,k}).$$

ˇ所得平滑化 L^s 将由变形纤维化 $M^s \to \Delta^o$的特殊拉格朗日多截面给出。

1.5. **关于 $X = \mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^n$ 的主要结果**我们的第一类例子构造于点 p处的 $X = \mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^n$ 的胀开 $\mathbb{P}^n$ 上。在这种情况下，我们可以要求所有数据都具有一种称为 ***Calabi*** 设定的特殊对称性；粗略地说，也就是说，它们由单个动量坐标的实函数描述，并满足适当的边界条件：这是 K¨ahler 几何中的标准构造，我们将在小节2中回顾。

固定一个 K¨ahler 参数 $a>1$。定义 K¨ahler 锥 Ka(X) of X 的子集如下：

$$\mathcal{F}_k^a := \{kaH - k(1-s)E \colon s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\} \subset \mathrm{Ka}(X),$$

其中 H, E 分别表示拉回超平面和例外除子， $\varepsilon>0$足够小，且 $k>0$。子集 $\mathcal{F}_k^a$ 将作为我们变形的基空间。

对于每个 $s \in \mathcal{F}_k^a$，我们固定一个代表元 $k\omega_{a,\,s}$，它属于相应的 K¨ahler 类 $kaH - k(1-s)E$，其中 $\omega_{a,\,s}$具有 Calabi 对称性。然后，我们可以构造一族殆 Calabi-Yau 流形（M_k^s， $\omega_{M^s,\,k}$， $\Omega_{M^s,\,k}$），它们在 Leung-Yau-Zaslow 的意义下是 $(X, k\omega_{a,\,s})$ 的镜像；同时还可以构造一族代数几何镜像（T， W_k^s， Ω_T）；二者均由 $\mathcal{F}_k^a$ 参数化。

定理 1.4。存在一个 ***K¨ahler*** 参数 $K \subset (1,\infty)$的稠密子集，使得对于 $a \in K$ 以及某个充分大的固定 $k>0$，我们有

(i) 存在以 $s \in \mathcal{F}_k^a$ 为参数的特殊拉格朗日截面光滑族ˇ L_1^s、ˇ $L_2^s \subset M_k^s$，它们在 M_k^s 中仅在无穷远处相交（非横截相交，定义见 *2.2*），并且ˇ L_1^0、ˇL_2^0 具有ˆ相同的相位 $e^{\mathrm{i}\,\theta}$；

(ii) 存在以良定义的非空稳定轨迹为参数的嵌入、分级特殊拉格朗日子流形光滑族ˇ $L^s \subset M_k^s$

$$(\mathcal{F}_k^a)^+ = \Big\{ \arg \int_{[\check{L}_2^s]} e^{-W_k^s} \Omega_T < \arg \int_{[\check{L}_1^s]} e^{-W_k^s} \Omega_T \Big\} \subset \mathcal{F}_k^a,$$

（$[\check{L}_i^s]$表示自然积分循环，如小节*4.3*所示 [7, 11]，见小节*4.3*）

在 中渐近于ˇ $L_1^s \cup \check{L}_2^s$在无穷远处，且满足

$$\check{L}^s \to \check{L}_1^0 \cup \check{L}_2^0$$

随 $s \to 0$ 平滑变化，在 M_k^s 上局部成立；

(iii) 特殊拉格朗日子流形ˇL^s 通过具有 ***Calabi*** 对称性的多截面获得；在后一个假设下，不存在对

˘在定义良好且非空的不稳定轨迹上的族 L^s 的扩张

$$(\mathcal{F}_k^a)^- = \{\arg\int_{[\check{L}_2^s]} e^{-W_k^s}\Omega_T > \arg\int_{[\check{L}_1^s]} e^{-W_k^s}\Omega_T\} \subset \mathcal{F}_k^a;$$

(iv) 这些特殊拉格朗日截面 ˘ L_1^s, ˘L_2^s 还满足以下性质：它们对应于 D $\mathrm{FS}(T, W^s)$中定义良好的元素，并且 ***Floer*** 上同调群 $HF^1(\check{L}_1^s, \check{L}_2^s)$ 所参数化的正合三角 (1.1)非平凡。

˘注 1.5。 在定理L_i^s 的证明中构造的特殊拉格朗日子流形 1.4 具有一个特定的拉格朗日相位角 $\theta \in (0,\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$，它取决于 K¨ahler 参数 a。所有 $(0,\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$中的相位角都可通过选取适当的 a取得。我们预计，对证明作某种改造，或可证明：对于固定的 a，存在具有任意拉格朗日相位角的特殊拉格朗日截面，且满足定理1.4的结论。

注 1.6。 如 [15], 第 3.3 节所述，在粘合方法所需的分析中，情形 $n = 2$ 具有特殊性，因此定理1.3中施加了限制。这对我们的情形没有影响。

定理1.4 的证明在5节完成，所依赖的是3 节和4节中给出的特殊拉格朗日（多重）截面的构造。该构造基于两种主要工具：Calabi 设定（见 Jacob 和 Sheu 的工作 [13]）以及 Leung-Yau-Zaslow 变换；后者将在2节中简要回顾。另见 [21]，其中通过施加另一种（Gibbons-Hawking）设定，获得了关于维数为 $n = 2$的 Thomas-Yau 猜想的全局结果。

1.6. **与 $X = \mathrm{Bl}_p\mathbb{P}^n$ 上 $n = 2$的3维 Bridgeland 稳定性的关系。**我们构造定理1.4 所给出的例子的主要动机，是确立 sLags $L_1 \cup L_2$并之的平滑化结果（如 Joyce 定理1.3所示）与满足某个正合三角（L 1.1）的拉格朗日子流形的 Bridgeland 稳定性之间的精确关系，这正是 Joyce 版本的 Thomas-Yau 猜想所预言的（特别参见 [16], 猜想 3.2）。

研究 M 的镜像 $X = \mathrm{Bl}_p\mathbb{P}^n$ 时，采用 Calabi 设定极大地简化了特殊拉格朗日多截面的构造，以及在 $D\mathrm{FS}(T, W^s)$ 上构造稳定性条件的过程，其中 $n = 2,\ 3$（例如，可与 [21]利用 Gibbons-Hawking Ansatz 得到的全局结果作比较；对于后者，目前尚不清楚稳定性条件）。然而，施加 Calabi 设定迫使我们考虑无穷远处的非横截相交情形，如定理1.4所示。这种方法使我们能够解决这些例子在维数$n = 2$ 下的 Bridgeland 稳定性问题（见下文定理 1.7），并在维数 $n = 3$下取得进展（见定理 1.8）。

1.6.1. $n = 2$. 令 $X = \mathrm{Bl}_p\mathbb{P}^2$。根据射影曲面上 Bridgeland 稳定性条件的一般理论 [1], 对于任意 $[\omega] \in \mathrm{Ka}(X)$，在相干层有界导出范畴 $\mathcal{A}, Z$ 上存在特定的几何稳定性条件（ $D^b(X)$），其中 X，而 $\mathcal{A} \subset D^b(X)$ 表示某个适当有界 t-结构的心（由标准心

Coh(X) 经倾斜得到），而中心荷由下式给出

$$Z(E) = -\int_X e^{-\mathrm{i}\omega}\,\mathrm{ch}(E).$$

环面镜像对称 [8, 17, 22, 23, 28]给出一个等价关系

$$D^b(X) \cong D\mathrm{FS}(T, W^s),$$

因此，在 DFS(T, W^s) 上诱导出稳定性条件，我们将其记为 ($\check{\mathcal{A}}^s$, $\check{Z}^s$)。

定理 1.7。 设我们处于定理 *1.4*所述情形，维数为 $n = 2$。那么

(i) 特殊拉格朗日截面 $\check{L}_1^s$、$\check{L}_2^s \subset M_k^s$ 在与 *Kähler* 类 $[k\omega_{a,s}]$ 对应的稳定性条件 ($\check{\mathcal{A}}^s$, $\check{Z}^s$) 的心 $\mathcal{A}^s \subset D\mathcal{FS}(T, W^s)$ 中给出良定义对象，并且它们是 ($\check{\mathcal{A}}^s$, $\check{Z}^s$)-稳定的；*(ii)* 使特殊拉格朗日平滑 L^s *smoothing* 存在的复结构轨迹 $(\mathcal{F}_k^a)^+ \subset \mathcal{F}_k^a$，与使所有非平凡的、由 L_2^s 扩张 L_1^s 所得的扩张均为 ($\check{\mathcal{A}}^s$, $\check{Z}^s$)-稳定的复结构轨迹相重合；这些扩张对应于非平凡群 $Ext^1_{\check{\mathcal{A}}^s}(\check{L}_1^s, \check{L}_2^s)$ 中的非零元素。

定理1.7 在第5节中证明。

1.6.2. $n = 3$. 固定 $X = \mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^3$. 令 ($\mathcal{A}, Z^{0,\Gamma}$) 为在 $D^b(X$ 上构造的特征几何稳定性条件，见 [2], 第 4.B 节。这里 $\mathcal{A} \subset D^b(X)$ 表示一个合适的有界 t-结构的心（通过双重倾斜从标准心 Coh(X) 得到），而中心荷

$$Z^{0,\Gamma} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Num}_{\mathbb{Q}}(X), \mathbb{C})$$

由下式给出

$$Z^{0,\Gamma}(E) = -\int_X e^{-\mathrm{i}\omega_0}\,\mathrm{ch}(E) + \Gamma \cdot \mathrm{ch}_1(E),$$

对于合适的 Kähler 类 $[\omega_0]$ 和循环 $\Gamma \in A_1(X)_{\mathbb{R}}$。在构造 [2], 时，有

$$[\omega_0] = -\frac{1}{2}K_X = 2H - E,\ \Gamma = \frac{H^2 + E^2}{6} + C_0\omega^2,$$

对于合适的 $C_0 \in \mathbb{R}$。

根据 Bridgeland 稳定性的基本变形性质，存在邻近的稳定性条件 ($\mathcal{A}^s, Z^s$, Γ)，其中心荷为

$$Z^{s,\Gamma}(E) = -\int_X e^{-\mathrm{i}\omega_{a,s}}\,\mathrm{ch}(E) + \Gamma \cdot \mathrm{ch}_1(E)$$

对于充分接近 $[\omega_0]$ 的 $[\omega_{a,s}] = aH - (1-s)E$。

由环面镜像对称 $D^b(X) \cong D$FS(T, W^s) 可在 DFS(T, W^s) 上诱导出稳定性条件，记为 ($\check{\mathcal{A}}^s$, $\check{Z}^{s,\Gamma}$)。

定理 1.8。 假设我们处于定理 *1.4* 所述的情形，维数为 $n = 3$。那么

(i) 特殊拉格朗日截面 $\check{L}_1^s, \check{L}_2^s \subset M_k^s$ 在 $D\mathrm{FS}(T, W^s)$中给出良定义对象，因此特别地，存在相应的元素$k^{-1}\check{L}_i^s \in \mathrm{Num}_{\mathbb{R}}(X)$；

(ii) 假设 $\check{}\ L_i^0$ 的拉格朗日相位角 $\hat{}\theta$ 足够接近 0，或从上方接近 $\frac{\pi}{2}$，且 $\check{}\ L_1^0 \cup \check{}L_2^0$的特殊拉格朗日平滑 $\check{}L^s$ 存在。那么中心荷

$$\check{Z}^{s,\Gamma}(k^{-1}\check{L}_1^s), \check{Z}^{s,\Gamma}(k^{-1}\check{L}_2^s),$$

关于稳定性条件 $(\check{}\mathcal{A}^s, \check{}Z^{s,\ \Gamma})$ 在 $D\mathrm{FS}(T, W^s)$ 上，它们位于上半平面内并满足

$$\arg Z^{s,\Gamma}(k^{-1}\check{L}_2^s) < \arg Z^{s,\Gamma}(k^{-1}\check{L}_1^s).$$

我们将定理 1.8 视为定理 1.4 所给构造满足 Bridge- land 稳定性的一项非平凡相容性性质。事实上，若三角形 (1.1) 是由 $\mathcal{A}'$ 中任意 稳定性条件 $(\mathcal{A}',\ Z')$ 的心中的正合列所诱导，且 $\check{}L^s$ 是 $(\mathcal{A}',\ Z')$-稳定的，那么 $Z'(\check{}L_1^s)$ $Z'(\check{}L_2^s)$ 位于半闭上半平面内，并且有 arg $Z'(\check{}L_2^s)$ $<$arg $Z'(\check{}L_1^s)$；我们的结果针对已知稳定性条件 $(\check{}\mathcal{A}^s,\ \check{}Z^{s,\ \Gamma})$ 验证了这些较弱的条件（将 ω 和 $\check{}\ L_i^s$ 按 k^{-1} 缩放后，这不会改变中心荷的辐角）。

定理1.8 在第 5 节中得到证明。

备注 1.9。 文献 [25]表明，对于上述形式的某些环面三维簇的镜像，关于适当的 Bridgeland 稳定性条件的半稳定性蕴含其截面满足特殊拉格朗日条件。然而，这一结果不能应用于 $(\check{}\mathcal{A}^s,\ \check{}Z^{s,\ \Gamma})$。

1.7. 动量平均曲率流。 基于 Thomas 和 Yau 的工作， [27], Joyce（[16], 第 3.2 节）猜想：在 Calabi-Yau 流形中，从一类适当的拉格朗日子流形（称为 $\check{}$ 拉格朗日膜 L）出发的带手术平均曲率流对所有时间都存在，并收敛到一组特殊拉格朗日积分流；该组流与相对于适当 Bridgeland 稳定性条件的 LHarder-Narasimhan 分解同构。在我们的情境中，受这一普遍预期的启发，我们将证明一个简单的结果。

固定 $X = \mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^n$ 配备 Calabi 对称 K¨ahler 形式 $k\omega_{a,\ s}$ 如上所述。正如我们在小节 6 中回顾的，根据 Chan 和 Jacob [3] 关于线丛上的平均曲率流的工作 X，镜像空间（M_k^s，$\omega_{M^s,\ k}$，$\Omega_{M^s,\ k}$）上存在一种几何流，它是适配于 Calabi 设定的平均曲率流的自然类比，并且在拉格朗日多重截面上定义良好（见（6.3））；这里我们称之为（*Chan-Jacob*）动量平均曲率流。

定理 *1.10.* 假设我们处于定理 *1.4* 的情形，即不稳定区域 $s \in (\mathcal{F}_k^a)^-$ 中。固定一个拉格朗日子流形 $\check{}\ L \subset (M_k^s, \omega_{M^s,k}, \Omega_{M^s,k})$，其在 M_k^s 中于无穷远处渐近于 $L_1^s \cup L_2^s$，并且包含于由截面 L_1^s, L_2^s 所界定的 M_k^s 子集内。假设 L 是一个仅有一个临界点的多截面（这样的 $\check{}L$ 总是存在；从几何直观上说，我们的假设意味着 $\check{}L$ 应当能够拟合进 $DFS(T, W^s)$ 中的三角形 *(1.1)*）。若从 $\check{}L$ 出发的动量平均曲率流 $\check{}\ L_t$ 对所有时刻 $t \in [0, \infty$ 均存在，保持仅有一个临界点的条件，并且在 M_k^s 上局部光滑收敛，那么必有

$$\check{L}_t \to \check{L}_1^s \cup \check{L}_2^s$$

如 $t \to \infty$，在 M_k^s 上局部光滑收敛。特别地，在维数 $n = 2$ 中，$\check{}\check{}L_t$ 收敛到 *Harder-Narasimhan* 分解 $L_1^s \cup L_2^s$；相对于稳定性条件 $(\check{}\mathcal{A}^s, \check{}Z^s)$，该分解对应于任意非平凡的 $\check{}L_1^s$ 被 $\check{}L_2^s$ 扩张，而这些扩张对应于非平凡群 $\mathrm{Ext}^1_{\check{\mathcal{A}}^s}(\check{}L_1^s, \check{}L_2^s)$ 中的非零元素。

定理 1.10在第 6 小节中得到证明。已知动量平均曲率流会产生有限时间奇点（与拉格朗日平均曲率流一样），见 [3], 定理 1.1。因此，一般而言，应考虑带手术的动量平均曲率流版本。关于使用 Gibbons-Hawking Ansatz 的维数为 [20] 的带手术拉格朗日平均曲率流的整体结果，见 $n = 2$。

1.8. **分裂 Fano 丛的主要结果**。取 $r \geq 0$, $m \geq 1$。令

$$X_{r,m} = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m} \oplus (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-1))^{\oplus r+1})$$

表示分裂向量丛 $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-1))^{\oplus r+1}$ 在 $\mathbb{P}^m$ 上的射影完备化。当 $r < m$ 时，这是 Fano 的。注意，我们有 $X = \mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^n = X_{0,\, n-1}$。

定义 $X_{r,\, m}$ 上的除子类 $[D_\infty]$、$[D_H]$，分别由 $c_1(\mathcal{O}_{X_{r,\, m}}(1))$ 以及 $\mathbb{P}^m$ 中超平面类的拉回给出。$X_{r,\, m}$ 的 K¨ahler 锥参数化为

$$[\omega_{\xi_1,b}] \in \xi_1[D_H] + b[D_\infty],\ \xi_1,\ b > 0.$$

固定一个 K¨ähler 参数 $\xi_1 > 0$。我们定义 K¨ähler 锥的子集如下

$$\mathcal{F}_k^{\xi_1,b} := \{k(\xi_1 + s)[D_H] + kb[D_\infty] : s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\} \subset \mathrm{Ka}(X_{r,m}),$$

其中 $\varepsilon > 0$ 足够小且 $k > 0$。

对于每个 $s \in \mathcal{F}^{\xi_1,\, b}_{k}$ 我们固定相应 K¨ähler 类 $k(\xi_1 + s)[D_H] + kb[D_\infty]$的一个代表元 $k\omega_{s,\, b}$，其中 $\omega_{s,\, b} := \omega_{\xi_1+s,\, b}$ 具有 Calabi 对称性。存在一族与 $(X_{r,\, m},\ k\omega_{s,\, b})$ 镜像的近似 Calabi-Yau 流形 $(M_k^s,\ \omega_{M^s,\, k},\ \Omega_{M^s,\, k})$，由 $\mathcal{F}_k^b$ 参数化；此外还有一族代数几何镜像 $(T,\ W_k^s,\ \Omega_T)$。

定理 1.11. 设分裂 *Fano* 丛 $X_{r,\, m}$ 的秩 $r + 2$ 为偶数。存在 *K¨ahler* 参数 $K \subset (0,\ \infty)$ 的一个稠密子集，使得对于 $\xi_1 \in K$，当 $b > 0$ 足够小时，并且对于某个足够大的 $k > 0$（取决于 ξ_1），我们有

(i) 存在由 $s \in \mathcal{F}^{\xi_1}_{,k}{}^{\,b}$ 参数化的特殊拉格朗日截面光滑族 $\check{}L_1^s, \check{}L_2^s \subset M_k^s$，它们仅在 M_k^s 的无穷远处相交（非横截相交），且 $\hat{}L_1^0\check{}, L_2^0\check{}$ 具有相同的相位 $e^{\mathrm{i}\theta}$；

(ii) 存在一个由定义良好且非空的稳定轨迹参数化的光滑族，其中包含嵌入的、分级的特殊拉格朗日 $\check{}$ 子流形 $L^s \subset M_k^s$

$$(\mathcal{F}_k^{\xi_1,b})^+ = \{\arg \int_{[\check{L}_2^s]} e^{-W_k^s}\Omega_T < \arg \int_{[\check{L}_1^s]} e^{-W_k^s}\Omega_T\} \subset \mathcal{F}_k^{\xi_1,b},$$

$\check{}$ $\check{}$它们在 M_k^s 的无穷远处渐近于 $L_1^s \cup L_2^s$，并且满足

$$\check{L}^s \to \check{L}_1^0 \cup \check{L}_2^0$$

在 M_k^s 的局部范围内，光滑地如 $s \to 0$；

(iii) 特殊拉格朗日子流形$\check{}L^s$ 是作为具有 *Calabi* 对称性的多截面获得的；在后述假设下，族 L^s 无法扩张$\check{}$到定义良好且非空的不稳定轨迹上

$$(\mathcal{F}_k^{\xi_1,b})^- = \{\arg\int_{[\check{L}_2^s]} e^{-W_k^s}\Omega^s > \arg\int_{[\check{L}_1^s]} e^{-W_k^s}\Omega^s\} \subset \mathcal{F}_k^{\xi_1,b}.$$

定理1.11 在第7小节中得到证明。

注记 1.12。 $X = \mathrm{Bl}_p\mathbb{P}^n = X_{0,\ n-1}$ 是作为一个特殊的分裂 Fano 丛得到的，但可以验证，定理 1.11 蕴含定理1.4 ，仅当出现在后者中的 K¨ahler 参数 $a > 1$ 取非常大的值时。

致谢。感谢 Soheyla Feyzbakhsh、Joel Fine、Sohaib Khalid、Jason Lotay、Helge Ruddat、Saverio Secci、Nicol`o Sibilla 以及 Richard Thomas 就本文相关内容进行的讨论。

2. Lagrangians with Calabi symmetry

设（M，ω_M，Ω_M）为由环面 Fano 流形 X（配有环面不变的 K¨ahler 形式 ω）经上文第1.4小节所回顾的构造得到的殆Calabi-Yau流形。

存在一种基本对应关系：相位为 $e^{\mathrm{i}\theta}$ 的 $M \to \Delta^o$ 的特殊拉格朗日子流形截面 $\mathcal{L} \subset M$，与满足 变形的 *Hermitian-Yang Mills(dHYM)* 方程的厄米全纯线丛（L，h） $\to X$ 相对应，其中 h

$$\mathrm{Im}\, e^{-\mathrm{i}\hat{\theta}}(\omega + F(h))^n = 0,$$

其中 $F(h)$ 表示 Chern 联络的曲率。这一结果归功于 Leung-Yau-Zaslow [18] (另见 [5], 第 9 小节)。使用第1.4小节中引入的记号，该对应关系可表示为

$$\tilde{\theta}_i(y) = u^{ij}\partial_{y_j}\log(h).$$

我们将这种对应关系称为*Leung-Yau-Zaslow (LYZ)* 变换。

Jacob 和 Sheu [13] 研究了一般的 dHYM 方程

$$\mathrm{Im}\, e^{-\mathrm{i}\hat{\theta}}(\omega + \mathrm{i}\,\alpha)^n = 0$$

在 $X = \mathrm{Bl}_p\mathbb{P}^n$ 上，求一个闭 (1，1)-形式 α，并采用广为人知的 Calabi 设定

$$\omega = \mathrm{i}\,\partial\bar{\partial}u(\log|z|^2),\ \alpha = \mathrm{i}\,\partial\bar{\partial}v(\log|z|^2) \text{ on } \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \cong X \setminus (H \cup E).$$

注 2.1. 这与 Harvey 和 Lawson 的经典例子密切相关，见 [10],第 III.3.B 小节以及引理2.3。

假设 K¨ähler 形式的上同调类固定为

$$[\omega] = aH - bE,\ a > b > 0.$$

将 $X \setminus (H \cup E)$ 视为 $\mathcal{O}(-1) \to \mathbb{C}^{n-1}$ 的全空间中零截面的补集，则旋转纤维的 $U(1)$ 作用相对于 ω 的动量映射为

$$u' \colon X \setminus (H \cup E) \to (b, a).$$

下文有时会写作 $\omega_{a,\ b}$，以强调 K¨ahler 参数。令$M_{a,\ b} \subset (\mathbb{C}^*)^n$ 表示与 $(X,\ \omega) = (\mathbb{P}^n,\ \omega_{a,\ b})$ 镜像的近似 Calabi-Yau 有界开域。其上赋有特殊拉格朗日纤维化$M_{a,\ b} \to \Delta^o_{a,\ b}$，底空间为 $(X,\ \omega_{a,\ b})$ 的动量多面体。

我们可以用相应的辛坐标表示量 $v'(\log|z|^2)$

$$x = u'(\log|z|^2)$$

as

$$f(x) = v'(\log|z|^2). \tag{2.1}$$

那么，$f(x)$ 上的边界条件为

$$\lim_{x\to b^+} f(x) = q,\ \lim_{x\to a^-} f(x) = p, \tag{2.2}$$

其中，α 的上同调类固定为

$$[\alpha] = pH - qE.$$

如 [13], 第 2 节所述，dHYM 方程等价于辛坐标下的常微分方程

$$\operatorname{Im} e^{-\mathrm{i}\hat{\theta}} \left(1 + \mathrm{i}\, x^{-1} f(x)\right)^{n-1} (1 + \mathrm{i}\, f'(x)) = 0,$$

其中 $f \in C^\infty(b,\ a)$ 满足边界条件 (2.2)。该常微分方程是恰当的，即等价于条件

$$\operatorname{Im} e^{-\mathrm{i}\hat{\theta}} (x + \mathrm{i}\, f(x))^n = c \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

因此，带有 $[\alpha] = pH - qE$ 的 dHYM 方程的解恰好对应于调和多项式水平集的图形部分，

$$\operatorname{Im} e^{-\mathrm{i}\hat{\theta}} (x + \mathrm{i}\, y)^n = c$$

位于 $[b, a]$ 之上，且

$$\operatorname{Im} e^{-\mathrm{i}\hat{\theta}} (a + \mathrm{i}\, p)^n = \operatorname{Im} e^{-\mathrm{i}\hat{\theta}} (b + \mathrm{i}\, q)^n = c.$$

若 $p, q \in \mathbb{Z}$，则对某个厄米全纯线丛 $(L, h) \to X$，我们有 $[\alpha] = -c_1(L)$、$\alpha = -\mathrm{i}\, F(h)$，因此将 f 的（逆）勒让德变换与 (L, h) 的 Leung-Yau-Zaslow 变换复合，表明满足边界条件（2.2）的函数 $f \in C^\infty(b, a)$（即动量剖面）对应于 $M_{a,b} \to \Delta^o_{a,b}$ 的拉格朗日截面 $\mathcal{L}$。

类似地，对于 $b < b' < a$，满足边界条件的函数 $f \in C^\infty(b', a)$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = p$$

对应于 $M_{a,b} \to \Delta^o_{a,b}$ 的拉格朗日截面 $\mathcal{L}'$，其边界位于一条特殊拉格朗日纤维上。

我们将 $\mathcal{L}$，$\mathcal{L}'$ 称为拉格朗日截面（带边界），且具有 *Calabi* 对称性。若（2.3）成立（对某个 $c \in \mathbb{R}$而言），则这些截面是特殊拉格朗日截面（带边界），且具有 *Calabi* 对称性。

定义2.2。设 $\mathcal{L}_1$、$\mathcal{L}_2 \subset M_{b、\ a}$ 表示具有 Calabi 对称性的拉格朗日截面。若 $\mathcal{L}_1$、$\mathcal{L}_2$ 在 $M_{a、b}$的无穷远处非横截相交，则称它们相交于 $(b、\ q)$，且相应的动量剖面 f_1、f_2 在该点具有垂直切线。

更一般地，若 p、$q \in \mathbb{Q}$，则上述 f 在重新缩放后仍对应一个特殊拉格朗日 $\mathcal{L}$（或 $\mathcal{L}'$）

$$\omega_{a,b} \mapsto k\omega_{a,b} = \omega_{ka,kb},\ [\alpha] \mapsto k[\alpha] = kpH - kqE$$

对于某个 $k > 0$，因为 dHYM 方程在这一共同重标度下保持不变。

引理 2.3. 水平集 $\{\operatorname{Im} e^{-\mathrm{i}\theta}(x+\mathrm{i}\,y)^n = c\}$ 包含于 $\{x > b\}$，对应于一个特殊拉格朗日多重截面 $\mathcal{L} \subset M_{a,b}$ 它可以分解为

$$\hat{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}'_1} \cup \overline{\mathcal{L}'_2}$$

其中 $\mathcal{L}'_i$ 是带边界且具有 *Calabi* 对称性的 *Calabi* 拉格朗日子流形，由动量剖面 $f_i \in C^\infty(b', a)$ 给出，对应于某个 $b' \in (b, a)$。

我们将这样的 $\mathcal{L}$称为具有 *Calabi* 对称性的特殊拉格朗日多截面。

证明。根据 Harvey 和 Lawson [10]，小节 III.3.B，轨迹$\{\operatorname{Im} e^{-\mathrm{i}\theta}(x+\mathrm{i}\,y)^n = c\} \subset (b,a) \times \mathbb{R}$包含于唯一的特殊拉格朗日子流形 $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$中，该子流形在 $SO(n)$ 的对角作用下保持不变，其中我们将 $(b,a) \times \mathbb{R}$ 视为包含于第一个复坐标轴平面 $\times\{0\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$。

显然，$\mathcal{L} := \overline{\mathcal{L}'_1} \cup \overline{\mathcal{L}'_2} \subset M_{a,b}$ 除了可能在临界轨迹 $\mathcal{L}'_1 \cap \mathcal{L}'_2$ 上之外，是一个拉格朗日子流形；通过为 $\omega_{M_{a,b}}$ 在点 $p \in \mathcal{L}'_1 \cap \mathcal{L}'_2$ 处选取全纯法坐标，我们发现 $\mathcal{L}$ 在 p 附近渐近地接近临界点 $\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n$ 附近的 Harvey-Lawson 特殊拉格朗日子流形 $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}^n$。因此，$\mathcal{L}$ 实际上在所有点处都是特殊拉格朗日子流形。□

注记 2.4。$\mathcal{L}'_i$ 的拉格朗日相位角 $\theta \in \mathbb{R}$，$\mathcal{L}$ 仅由水平集确定，且相差整数倍的 π。回顾一下，一般而言，如果 $\mathcal{L}$ 的拉格朗日相位角为 $\theta \in \mathbb{R}$，那么 $\mathcal{L}[1]$ 的拉格朗日相位角为 $\theta + \pi$。

3. Construction of distinguished sLag multi-sections $\mathcal{L}^b$

3.1. 构造 $\mathcal{L}^b$。 我们考虑对所有 n，$X = \mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^n$ 的情形。我们在 X 上赋予一族光滑的 K¨ahler 形式 $\omega_{a,b}$，它们具有 Calabi 对称性，且满足 $[\omega_{a,b}] = aH - bE$。记 $M_{a,b} \subset (\mathbb{C}^*)^n$ 为其近似 Calabi-Yau 镜像。

在本小节中，对于固定的 K¨ahler 参数 $a \in (1, \infty)$，我们构造一族由 $b \in (0, 1)$ 参数化的特殊拉格朗日多截面光滑族 $\mathcal{L}^b \subset M_{a,b}$。关键之处在于，$\mathcal{L}^b$ 在动量坐标中是常数。

拉格朗日相位角为 $\theta \in \mathbb{R}$、关于 $\omega_{a,b}$ 具有 Calabi 对称性的特殊拉格朗日多截面，在动量坐标 x 中对应于水平集 $\mathcal{C}$ 的连通分支

$$\{\operatorname{Im} e^{-\mathrm{i}\hat{\theta}}(x+\mathrm{i}\,y)^n = c\} \subset (b,a) \times \mathbb{R}.$$

只要边界条件满足适当的有理性假设，这一点至少就成立；我们将在下文的小节 3.3 中检验在我们的构造中能否实现这一点。我们将相位角限制为 $\theta \in (-\pi, \pi)$.

例 3.1。 对于 $n = 3$, $\mathcal{C}$ 是实三次曲线的一个连通分支

$$\{x\sin(\hat{\theta})\left(x^2 - 3y^2\right) - y\cos(\hat{\theta})\left(y^2 - 3x^2\right) = c\} \subset \mathbb{R}^2.$$

ˆ ˆ图 1 显示了以下参数对应的三次多项式 $c = 3$ 和 $\theta = 1$, $\theta = 0.1$。

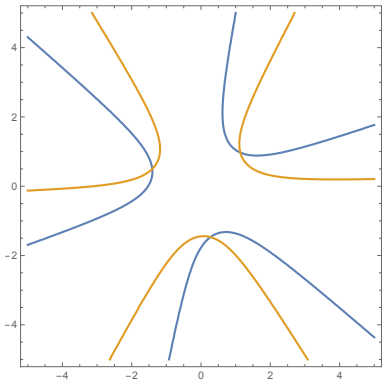

FIGURE 1. 一些水平集 $\mathcal{C}$。

引理 3.2。 存在 $c \in \mathbb{R}$ 的显式取值，使得相应的具有 *Calabi* 对称性的特殊拉格朗日截面 $\mathcal{L}$ 的临界值，在相位角为ˆ$\theta \in (-\pi, \pi)$、采用动量坐标时，由 $x = 1$给出。

证明。 临界值 x 和临界点 y 满足

$$\partial_y \operatorname{Im} e^{-\mathrm{i}\hat{\theta}}(x + \mathrm{i}\, y)^n = 0,\ \operatorname{Im} e^{-\mathrm{i}\hat{\theta}}(x + \mathrm{i}\, y)^n = c.$$

求解 y, c可得

$$\operatorname{Im} e^{-\mathrm{i}\hat{\theta}}\,\mathrm{i}\, n(1 + \mathrm{i}\, y)^{n-1} = 0,\ \operatorname{Im} e^{-\mathrm{i}\hat{\theta}}(1 + \mathrm{i}\, y)^n = c.$$

记 $1 + \mathrm{i}\ y = \rho e^{\mathrm{i}\,\psi}$, 我们有

$$\rho = (1 + y^2)^{\frac{1}{2}},\ \cos(\psi) = (1 + y^2)^{-\frac{1}{2}},\ \sin(\psi) = y(1 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

而我们需要求解

$$\operatorname{Im} e^{\mathrm{i}((n-1)\psi + \frac{\pi}{2} - \hat{\theta})} = 0,\ \operatorname{Im} \rho^n e^{\mathrm{i}(n\psi - \hat{\theta})} = c$$

对于 ψ、 c。这给出

$$\psi = \frac{\hat{\theta} - \frac{\pi}{2} + m\pi}{n - 1},\ m = 1 - n,\ \ldots,\ n - 2,$$

以及

$$c = c_m = \rho^n \sin\left(n\psi - \hat{\theta}\right) = (\cos(\psi))^{-n} \sin\left(n\psi - \hat{\theta}\right)$$
$$= \frac{\sin\left(\frac{n}{n-1}(\hat{\theta} - \frac{\pi}{2} + m\pi) - \hat{\theta}\right)}{\left(\cos\left(\frac{\hat{\theta}-\frac{\pi}{2}+m\pi}{n-1}\right)\right)^n} = \frac{\sin\left(\frac{\hat{\theta}-\frac{\pi}{2}+m\pi}{n-1} - \frac{\pi}{2} + m\pi\right)}{\left(\cos\left(\frac{\hat{\theta}-\frac{\pi}{2}+m\pi}{n-1}\right)\right)^n}$$
$$= \frac{(-1)^m \sin\left(\frac{\hat{\theta}-\frac{\pi}{2}+m\pi}{n-1} - \frac{\pi}{2}\right)}{\left(\cos\left(\frac{\hat{\theta}-\frac{\pi}{2}+m\pi}{n-1}\right)\right)^n} = (-1)^{m+1}\left(\cos\left(\frac{\hat{\theta} - \frac{\pi}{2} + m\pi}{n-1}\right)\right)^{1-n},$$

$m = 1-n, \dots, n-2.$

这些解并不全都不同，但我们会在构造中适当地选定 m 的取值。

相应的临界点为

$$q = q_m = \rho \sin(\psi) = \tan(\psi) = \tan\left(\frac{\hat{\theta} - \frac{\pi}{2} + m\pi}{n-1}\right).$$

□

例 3.3. 当 $n = 3$时，我们可以等价地要求关于 y 的三次多项式 $\mathcal{C}$ 的判别式Δ为零。计算得

$$\Delta = -\frac{27}{2}\left(c^2\cos(2\hat{\theta}) + c^2 - 8c\sin(\hat{\theta}) - 8\right).$$

ˆ对固定的拉格朗日相位 θ，关于 c 求解 $\Delta = 0$，得到

$$c = c_\pm = \frac{2}{\pm 1 - \sin(\hat{\theta})}.$$

我们将相应的一个连通分支记为 $\mathcal{C}_\pm$。交点 $\mathcal{C}_\pm \cap \{1\} \times \mathbb{R}$ 是以下方程的解:

$$\left(3y^2 - 1\right)\sin(\hat{\theta}) - y\left(y^2 - 3\right)\cos(\hat{\theta}) = c_\pm,$$

重数为 2 的解 q 显式给出如下:

$$q_\pm(\hat{\theta}) = \frac{\sin\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right) \pm \cos\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right) \mp \sin\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right)}. \tag{3.1}$$

ˆ图 2 展示了 $\mathcal{C}_+$ 在 $\theta = 3$处的切线。

引理3.4. 固定 $c \in \mathbb{R}$ 如引理 *3.2*中所述。存在显式选取的ˆ*K¨ahler* 参数 $a > 0$ 和拉格朗日相位角 $\theta \in (-\pi, \pi)$，使得多项式

$$\operatorname{Im} e^{-\mathrm{i}\hat{\theta}}(a + \mathrm{i}\, y)^n - c$$

的常数项为零。

这一步极大地简化了我们证明定理 1.4时的若干计算，而且正如我们马上就会看到的，它有一种自然的上同调诠释。

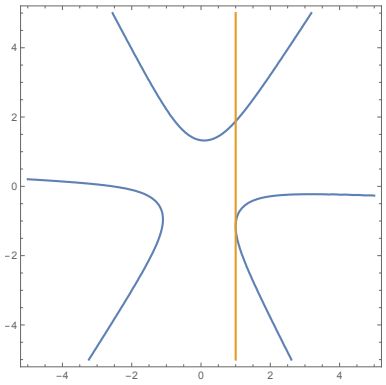

FIGURE 2. 分解为 $\mathcal{C}_+$ 图像分支。

证明。 采用引理证明中引入的记号 3.2，我们施加

$$-\sin(\hat{\theta})a_m^n = c_m,$$

给出

$$a_m = \left(-\frac{c_m}{\sin(\hat{\theta})}\right)^{\frac{1}{n}} = \left((-1)^m \sin(\hat{\theta})\left(\cos\left(\frac{\hat{\theta}-\frac{\pi}{2}+m\pi}{n-1}\right)\right)^{n-1}\right)^{-\frac{1}{n}}.$$

ˆ对于每个 θ，我们固定一个 m 值，使得必要且充分条件

$$a_m > 1$$

关于 K¨ahler 参数 a得以满足（即 $\omega_{a,\,1}$ 是 K¨ahler）。除某些奇异值外，这一选择局部恒定。

特别地，我们可以挑出“主分支” $m = 0$，对于它

$$a = \left(\sin(\hat{\theta})\left(\cos\left(\frac{\hat{\theta}-\frac{\pi}{2}}{n-1}\right)\right)^{n-1}\right)^{-\frac{1}{n}}.$$

一项初等的研究随后表明，对于 $n \geq 2$ 我们有

$$\hat{\theta} \in (0,\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \Rightarrow 0 < \sin(\hat{\theta})\left(\cos\left(\frac{\hat{\theta}-\frac{\pi}{2}}{n-1}\right)\right)^{n-1} < 1$$

（见图3 所示的情形 $n = 4$）。 □

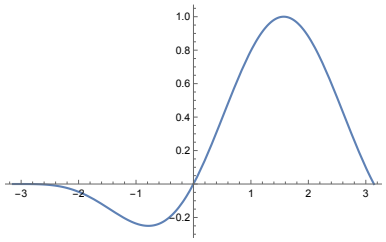

FIGURE 3

定义3.5。固定 c 如引理3.2 中所述，并取 a， θ 如引理3.4中所述。我们将 $\mathcal{L}^b \subset M_{a,\,b}$ 定义为特殊拉格朗日多截面族，其参数为$b \in (0,\ 1)$，对应于水平集$\mathrm{Im}\ e^{-\mathrm{i}\theta}(x+\mathrm{i}\ y) = c$的连通分支 $\mathcal{C}$ ，该分支包含点 $(a,\ 0)$。 $\mathcal{L}^b$ 的拉格朗日相位角为 $\theta \in (0,\ \pi)$。

3.2. **边界条件**。 我们需要理解 $\mathcal{L}^b$ 所满足的边界条件。这些条件由解 $y = y(a, c, \theta)$ 决定，其中

$$\mathrm{Im}\, e^{-\mathrm{i}\hat{\theta}}(a+\mathrm{i}\, y)^n = c,\ (a, y) \in \mathcal{C}.$$

回顾一下，根据构造我们有 $\mathrm{Im}\ e^{-\mathrm{i}\theta}a^n = c$，将其写成如下形式

$$\mathrm{Im}\, e^{-\mathrm{i}\hat{\theta}}a^n\,(1+\mathrm{i}\, p)^n = c,\ p := \frac{y}{a}.$$

一般而言，给定 $z \in \mathbb{C}^*$，条件

$$\mathrm{Im}(z\lambda) = \mathrm{Im}\, z$$

等价于

$$\frac{\bar{\lambda}-1}{\lambda-1} = \frac{z}{\bar{z}},$$

因此

$$\lambda = 1 - re^{-\mathrm{i}\arg(z)},\ r > 0.$$

因此，我们的辅助参数 p（它决定了 $\mathcal{L}^b$ 满足的边界条件）满足

$$(1+\mathrm{i}\, p)^n = 1 - re^{-\mathrm{i}\arg\left(e^{-\mathrm{i}\hat{\theta}}a\right)} = 1 - re^{\mathrm{i}\hat{\theta}},$$

或者等价地

$$\hat{\theta} = \arg\left(1-(1+\mathrm{i}\, p)^n\right) \in (-\pi, \pi).$$

我们注意到，通过简单计算，区间

$$p \in \left(-\tan\left(\frac{\pi}{n}\right), 0\right)$$

对应于

$$\hat{\theta} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ \hat{\theta} = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left(1-(1+\mathrm{i}\, p)^n\right)}{\mathrm{Re}\left(1-(1+\mathrm{i}\, p)^n\right)}\right)$$

而

$$p \in \left(0, \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$$

对应于

$$\hat{\theta} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),\ \hat{\theta} = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left(1-(1+\mathrm{i}\, p)^n\right)}{\mathrm{Re}\left(1-(1+\mathrm{i}\, p)^n\right)}\right) + \pi.$$

我们断言，对于 $p \in \left(-\tan\left(\frac{\pi}{n}\right), \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$，我们有

$$a + \mathrm{i}\, ap \in \mathcal{C},$$

也就是说，点 a， $a + \mathrm{i}\, ap$ 位于轨迹$\mathrm{Im}\ e^{-\mathrm{i}\theta}(x+\mathrm{i}\ y)^n = c$的同一个连通分支中。

事实上，正如 Jacob 和 Sheu 所解释的， [13], 的连通分支

$$\{\mathrm{Im}\, e^{-\mathrm{i}\hat{\theta}}(x+\mathrm{i}\, y)^n = c\} \subset \mathbb{R}^2$$

是渐近于射线并集的解析曲线

$$\{\operatorname{Im} e^{-\mathrm{i}\hat{\theta}}(x+\mathrm{i}y)^n = 0\} \subset \mathbb{R}^2,$$

此外，它们还位于交替楔形区域中。对于4 所示的情形 $n = 4, \hat{}\theta = 1, c = 1$。由此可知，若有

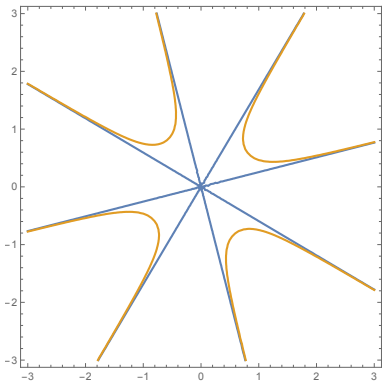

FIGURE 4. $n = 4$的水平集结构。

$$|\arg(a+\mathrm{i}ap)| < \frac{\pi}{n},$$

那么 $a+\mathrm{i}ap$ 必然位于连通分支 $\mathcal{C}$中。由于 a 为实数且为正，辐角条件等价于

$$|\arg(1+\mathrm{i}p)| < \frac{\pi}{n},$$

对于 $p \in \left(-\tan\left(\frac{\pi}{n}\right), \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$，该条件显然成立。

我们的计算结果表明， $\mathcal{L}^b$ 满足的边界条件用动量坐标表示为

$$\mathcal{C} \cap \{a\} \times \mathbb{R} = \{a, a(1+\mathrm{i}p)\}, p \in \left(-\tan\left(\frac{\pi}{n}\right), \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right).$$

例 3.6. 当 $n = 3$ 时，根据我们的构造， $y = ap$是三次方程 $\operatorname{Im} e^{-\mathrm{i}\theta}(a+\mathrm{i}y)^3 = c$ 的一个非零解，其中 c的选取恰好使得 $\hat{}$ 该三次多项式的常数项为零。因此 p, θ 求解

$$p^2 = 3\tan(\hat{\theta})p + 3.$$

对于 $\hat{}\,\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$，唯一解 $p \in \left(-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right), \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ 由下式给出

$$p = \frac{1}{2}\left(3\tan(\hat{\theta}) - \left(9\tan^2(\hat{\theta}) + 12\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

$\hat{}$ 图 5 展示了 $\mathcal{C}$ 以及直线 $x = 1, x = a$ 对于 $\theta = 0.1$。

例 3.7. 类似地，在最简单的情形 $n = 2$ 中， $y = ap$ 满足二次方程

$$\operatorname{Im} e^{-\mathrm{i}\hat{\theta}}(a+\mathrm{i}y)^2 = c$$

用于消去常数项， c 由此我们可以直接计算

$$p = -2\cot(\hat{\theta}),$$

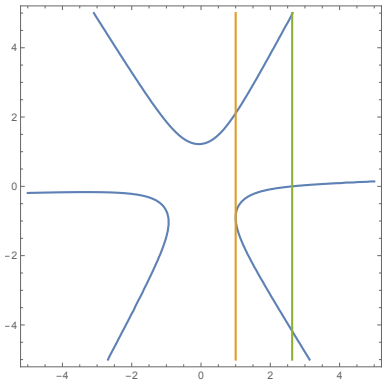

FIGURE 5. 施加边界条件。

它与以下关系式一起

$$a = \left(\sin(\hat{\theta})\cos\left(\hat{\theta} - \frac{\pi}{2}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{\sin^2(\hat{\theta})},$$
$$q = \tan\left(\hat{\theta} - \frac{\pi}{2}\right),$$

ˆ根据角度 θ确定我们的全部参数。

3.3. 缩放作用与有理性。 在我们的整个构造上存在一个自然的缩放作用，它只是对任意 $k > 0$，将所有ˆ$b \in (0,1)$中的$\omega_{a,b}$ 替换为$\omega_{ka,kb}$ 。这使拉格朗日相位角 θ 保持不变。我们的多截面的临界点现位于临界动量值 $x = k$之上，由下式给出

$$kq = k\tan\left(\frac{\hat{\theta}(p) - \frac{\pi}{2}}{n-1}\right),\ \hat{\theta} = \arg\left(1 - (1 + \mathrm{i}\,p)^n\right) \in (0,\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}.$$

类似地，动量K¨ahler参数上的边界值

$$ka = k\left(\sin(\hat{\theta})\left(\cos\left(\frac{\hat{\theta}(p) - \frac{\pi}{2}}{n-1}\right)\right)^{n-1}\right)^{-\frac{1}{n}}$$

由下式给出

$$\{0, kap\},\ p \in \left(-\tan\left(\frac{\pi}{n}\right), \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right).$$

因此，只要临界点和边界条件满足 $\mathcal{L}^b$ ，特殊拉格朗日多截面便定义良好

$$kq,\ kap \in \mathbb{Z}.$$

我们将这样的值称为 $k > 0$ 可容许的。显然，通过适当地缩放即可满足后一个条件， $k > 0$ 当且仅当

$$\frac{a(p)p}{q(p)} \in \mathbb{Q}.$$

函数 $^{a}{}_{(q\,p}{}^{p\;p}{}_{)()}$ 是连续的，并且满足

$$\lim_{p\to\mp\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\pm}}\frac{a(p)p}{q(p)}=+\infty,\ \lim_{p\to 0}\frac{a(p)p}{q(p)}=0,$$

因此，$^{a}{}_{(q\,p}{}^{p\;p}{}_{)()}\in\mathbb{Q}$ 在 $\left(-\tan\left(\frac{\pi}{n}\right),\ \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$ 的一个稠密子集上成立。此外，我们有

$$\lim_{p\to\mp\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\pm}}a(p)=+\infty,\ \lim_{p\to 0}a(p)=1,$$

因此，所需的有理性条件对 K¨ahler 参数 $a\in(1,\ \infty)$ 的一个稠密子集成立。

4. Construction of sLag sections $\mathcal{L}_i^b$

在前一小节中，我们构造了一个由 $\mathcal{L}^b\subset M_{a,\ b}$ 参数化的特殊拉格朗日多截面族，其中 $b\in$ 取值于 $(0,\ 1)$，而 $a>1$ 固定。该族在动量坐标中为常值，并对应于轨迹 $\mathrm{Im}\ e^{-\mathrm{i}\,\theta}(x+\mathrm{i}\ y)^n=c$ 的一个特殊连通分支 $\mathcal{C}\subset(b,\ a)\times\mathbb{R}$。

在 $M_{a,\ b}$ 的紧子集上，当 $b\to 1$ 时，该族 $\mathcal{L}^b$ 的光滑极限由对应于以下水平集并集的非连通特殊拉格朗日给出

$$\mathcal{C}\cap(1,a)\times\mathbb{R}=\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2,$$

其中，我们用 $\mathcal{C}_1$ 表示包含 $a\ (1+\mathrm{i}p)$ 的连通分支。这是特殊拉格朗日截面 $\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2$ 与 $\mathcal{L}_i\subset M_{a,1}$的不交并。

注 4.1. 在动量坐标中，$\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2$ 对应于动量区间 $[1,a)$ 上的截面，它们在 $(1,q)$ 处相交，且具有垂直切线。因此，$\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2$ 按照定义 2.2 的意义，在无穷远处非横截相交。

我们考虑 X 上由下式给出的全纯线丛

$$L_1=\mathcal{O}(-kapH+kqE),\ L_2=\mathcal{O}(kqE)$$

其中 $k>0$ 满足 $kap,kq\in\mathbb{Z}$。回忆一下，对于 $(-$ 中稠密子集内的 p，存在这样的 k：$\tan\left(\frac{\pi}{n}\right),\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$，它们对应于 K¨ahler 参数 $a\in(1,\infty)$ 的一个稠密子集。

线丛 $L_i,\ i=1,\ 2$ 的选取恰好使得，对对偶 $L_i^{\vee}$ 上的 dHYM 方程，其边界条件与上文构造的特殊拉格朗日 $\mathcal{L}_i$ 在 b接近 1 时的边界条件一致。

引理 4.2. 特殊拉格朗日截面 $\mathcal{L}_i\subset M_{a,\ 1}$ 可延拓为一族特殊拉格朗日截面，其参数取遍所有充分接近1的 b，并满足以动量坐标表示的下列边界条件

$$\mathcal{C}_1\cap\{b\}\times\mathbb{R}=b+\mathrm{i}\,q,\ \mathcal{C}_1\cap\{a\}\times\mathbb{R}=a+\mathrm{i}\,ap,$$

分别

$$\mathcal{C}_2\cap\{b\}\times\mathbb{R}=b+\mathrm{i}\,q,\ \mathcal{C}_2\cap\{a\}\times\mathbb{R}=0.$$

这由 Jacob 和 Sheu 的一个结果推出。

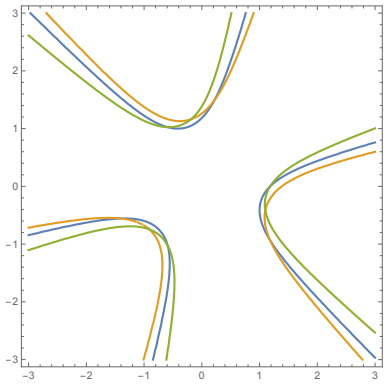

FIGURE 6

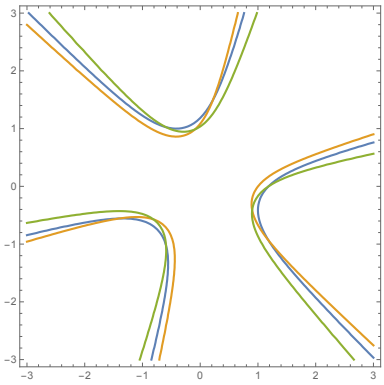

FIGURE 7.

定理 4.3 （[13], 定理 1）。 在 $X = \mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^n$上，一般 *dHYM* 方程存在解

$$\mathrm{Im}\, e^{-\mathrm{i}\hat{\theta}}(\omega + \mathrm{i}\,\alpha)^n = 0,$$

具有 *Calabi* 对称性等价于以下数值条件：对于所有不可约解析子簇 $V \subset X$，均有

$$\varepsilon_V \,\mathrm{Im}\, \frac{\int_V e^{-\mathrm{i}\omega+\alpha}}{\int_X e^{-\mathrm{i}\omega+\alpha}} > 0,$$

其中 $\varepsilon_V = \pm 1$ 仅以局部常值的方式依赖于 维数V, $[\omega]$, $[\alpha]$。

因此，对于固定的 $[\alpha]$，dHYM 方程解的存在性在改变 $[\omega]$ 时是一个开条件。

在我们的情形中，将此结果应用于线丛 L_i ，可知对于所有充分接近 1 的 b，关于 $\omega_{ka},\ _{kb}$ 的 dHYM 方程在 $L_i^\vee$ 和 L_i 上可解。因此，对于充分接近 1 的 b，特殊拉格朗日截面 $\mathcal{L}_i$ 可延拓为特殊拉格朗日截面 $\mathcal{L}_i^b$ ，如所声称的。

图 6、7 分别展示了 $\mathcal{C}_i$ 对应于 $n = 3$、 $b = 1.1$、 $b = 0.9$ ，其中取适当的 K¨ahler 参数 $a \approx 1.2$，背景常数为 $\mathcal{C}$；在每幅图中， $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}_i$ 是最右侧的分支，相关的动量区间由交点 $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$、 $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}$在正实轴上的投影给出。

小节3.3 中描述的缩放作用同样适用于这些截面，从而得到特殊拉格朗日子流形$\mathcal{L}_{i,k} \subset M_{ka,kb}$；我们在记号中省略 k ，因为这不会引起混淆。

4.1. **拉格朗日相位角**。 我们计算特殊拉格朗日截面 $\mathcal{L}_i$的拉格朗日相位角，即 $b = 0$ 时 $\mathcal{L}_i^b$ 的拉格朗日相位角。

引理 4.4. 设 $p \in \left(-\tan\left(\frac{\pi}{n}\right), 0\right)$，对应于$\hat{}$ $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$。则$\hat{}$ $\hat{}$特殊拉格朗日截面 $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ 的拉格朗日相位角分别为 $-\theta + \pi$, $-\theta$。类似地，对于 $p \in \left(0,\ \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$, $\hat{}$ $\hat{}\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ 的拉格朗日相位角为$-\theta$, $-\theta + \pi$。

证明。 根据 Jacob 和 Sheu [13], 唯一的提升角 ϑ_i 对于 $L_i^\vee$上的 dHYM 方程可以根据动量剖面计算得出

$y_i = y_i(x)$ 由

$$\vartheta_i = (n-1)\arctan\frac{y_i(x)}{x} + \arctan\frac{dy_i}{dx}.$$

假设 $p \in \left(-\tan\left(\frac{\pi}{n}\right),\ 0\right)$。那么，在我们的构造中，点 $a + \mathrm{i}\,ap \in \mathcal{C}_1$ 位于点 $a \in \mathcal{C}_2$ 下方，因此沿着分支 $\mathcal{C}_1$ 朝向临界点 $b + \mathrm{i}\,q$ 在 $x = b$ 上移动时，我们有

$$\lim_{b\to 1}\left(\lim_{x\to b^+}\frac{dy_1}{dx}\right) = -\infty,\ \lim_{b\to 1}\left(\lim_{x\to b^+}\frac{dy_2}{dx}\right) = +\infty.$$

因此我们可以计算

$$\begin{aligned}\vartheta_1|_{b=1} &= \lim_{x\to b^+}\left((n-1)\arctan y_i(x) + \arctan\frac{dy_i}{dx}\right)\\ &= (n-1)\arctan q + \arctan(-\infty)\\ &= (n-1)\arctan\tan\left(\frac{\hat\theta(p)-\frac{\pi}{2}}{n-1}\right) - \frac{\pi}{2}\\ &= \hat\theta - \pi,\end{aligned}$$

对于 $\hat\theta \in (0, \pi)$，使用 $\frac{\hat\theta(p)-\frac{\pi}{2}}{n-1} \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$。类似地，

$$\vartheta_2|_{b=1} = (n-1)\arctan\tan\left(\frac{\hat\theta(p)-\frac{\pi}{2}}{n-1}\right) + \frac{\pi}{2} = \hat\theta.$$

由此可知，L_1、L_2 的 LYZ 镜像，即特殊拉格朗日截面 $\mathcal{L}_1$、$\mathcal{L}_2$，分别具有拉格朗日相位角 $-\theta+\pi$、$-\theta$。对于 $p \in \left(0,\ \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$ 的情形，类似的论证同样适用。□

4.2. **族的性质 $\mathcal{L}^b$。** 现在可以总结在小节 $\mathcal{L}^b$ 中构造的特殊拉格朗日多截面族的主要性质 3。

引理 4.5。 在小节 $\mathcal{L}^b$ 中构造的特殊拉格朗日子流形族3具有以下性质：

(i) 它对所有充分接近 1 的 $b < 1$ 均有定义，且每个 $\mathcal{L}^b$ 都具有 *Calabi* 对称性；(ii) 在 $b = 0$ 处，其相位 $e^{-\mathrm{i}\theta}$ 等于 $\mathcal{L}_1^b$、$\mathcal{L}_2^b[1]$ 或 $\mathcal{L}_1^b[1]$、$\mathcal{L}_2^b$ 的相位（取决于 p 的符号）；(iii) 对于固定的 b，它在 $M_{a,b}$ 中于无穷远处渐近于 $\mathcal{L}_1^b \cup \mathcal{L}_2^b$；$(iv)$ 当 $b \to 1^-$ 时，我们在 $M_{a,b}$ 的紧子集上有 $\mathcal{L}^b \to \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ 光滑收敛；(v) 它无法以相同性质延拓到任何 $b > 1$ 值。

证明。性质（i）、（iv）可直接由第3节中的构造得出。对于固定的 $b < 1$，特殊拉格朗日子流形 $\mathcal{L}^b \subset M_{a,b}$、$\mathcal{L}_1^b \cup \mathcal{L}_2^b \subset M_{a,b}$ 是对定义在 C^∞（b、a）上的函数依次进行 Leung-Yau-Zaslow 变换和勒让德变换得到的；这些函数在 a 上满足相同的边界条件，对应于 $\mathcal{L}^b$ 的非紧端。这说明性质（iii）成立。性质（ii）由引理4.4以及移位函子对相位角的作用得出。最后，性质（v）源于这样一个事实：唯一可能的、具有 Calabi 对称性且渐近于 $\mathcal{L}_1^b \cup \mathcal{L}_2^b$ 的特殊拉格朗日多截面将

在 LYZ 变换和勒让德变换下，对应于第 节中构造的轨迹 Im $\mathcal{C}(e^{-\mathrm{i}\theta}(x+\mathrm{i}\, y)^n = c$的特定连通分支3。然而，对于 $b > 1$，连通分支 $\mathcal{C}$ 并不包含于轨迹（b、a）$\times\mathbb{R}$中，因此无法在 $M_{a,b}$中得到拉格朗日多重截面。□

图 6、7展示了 $\mathcal{L}^b$存在的区域（图 7、$b < 1$）与不存在的区域（图 7、$b > 1$）之间的过渡。

4.3. **积分**。令 $W_{a,b}$ 表示与 K¨ahler 类 $\omega_{a,b}$对应的朗道-金兹堡势，回顾见小节 1.4。环面同调镜像对称给出一个等价

$$D^b(X) \cong D\mathrm{FS}(T, W_{a,b}).$$

对于所有充分接近 1 的 b，我们都有特殊拉格朗日截面 $\mathcal{L}_i^b$，其 LYZ 变换由固定线丛 L_i 给出。因此，通过上述等价，我们可以将良定义对象与特殊拉格朗日截面 $\mathcal{L}_i^b \subset M_{a,b}$ 关联起来，这些对象属于 Fukaya-Seidel 范畴 $D\mathrm{FS}(T, W_{a,b})$，仍以 $\mathcal{L}_i^b$ 表示，沿用这一记号。

我们引入 T 上的全纯体积形式，其定义为

$$\Omega_{T,k}^b = e^{-W_{ka,kb}}\Omega_T.$$

根据 Iritani 的一般结果（例如见 [11]）以及 Fang 的结果（见 [7]），存在一个同态

$$\Gamma\colon K^0(X) \to H_n(T, \{\mathrm{Re}\, W(k\omega_{a,b}) \gg 0\}; \mathbb{Z})$$

取决于 $[\omega_{a,b}]$ 和 k的某个合适的快速衰减同调群，使得对于 $i = 1, 2$，积分

$$\int_{[\mathcal{L}_i^b]} \Omega_{T,k}^b, \int_{[\mathcal{L}_i^b[1]]} \Omega_{T,k}^b$$

有良好定义，其中我们令

$$[\mathcal{L}_i^b] = \Gamma(L_i), [\mathcal{L}_i^b[1]] = \Gamma(L_i[1]).$$

4.4. 正合三角。设 $p \in \left(-\tan\left(\frac{\pi}{n}\right), 0\right)$。则存在一个非平凡的态射空间

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{L}_2^b, \mathcal{L}_1^b) \cong \mathrm{Hom}(L_2, L_1) \cong H^0(X, \mathcal{O}(-kapH)).$$

根据锥构造关于连通和的几何解释，自然可以预期，对于 $b < 1$，特殊拉格朗日多截面 $\mathcal{L}^b$应当适合于一个正合三角

$$\mathcal{L}_2^b \xrightarrow{\varphi} \mathcal{L}_1^b \to \mathcal{L}^b \cong \mathrm{Cone}(\varphi) \to \mathcal{L}_2[1]$$

对于某个合适的态射 $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{L}_2^b, \mathcal{L}_1^b)$。这与引理4.4所述的事实十分吻合：$\mathcal{L}_1^b$和 $\mathcal{L}_2^b[1]$具有相同的拉格朗日相位角。

那么，Thomas-Yau 猜想所预言的正确斜率不等式应为

$$\arg \int_{[\mathcal{L}_1^b]} \Omega_{T,k}^b < \arg \int_{[\mathcal{L}_2^b[1]]} \Omega_{T,k}^b,$$

这也与定理1.3 以及我们的定理 1.4相吻合。类似地，当 $p \in \left(0,\ \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$ 时，存在一个非平凡的态射空间

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{L}_1^b, \mathcal{L}_2^b) \cong \mathrm{Hom}(L_1, L_2) \cong H^0(X, \mathcal{O}(kapH)),$$

并且对于 $b<1$，特殊拉格朗日 $\mathcal{L}^b$ 应当纳入某个正合三角

$$\mathcal{L}_1^b \xrightarrow{\varphi} \mathcal{L}_2^b \to \mathcal{L}^b \cong \mathrm{Cone}(\varphi) \to \mathcal{L}_1[1]$$

对于某个 $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{L}_2^b,\ \mathcal{L}_1^b)$，因此正确的 Thomas-Yau 斜率不等式应为

$$\arg \int_{[\mathcal{L}_2^b]} \Omega_{T,k}^b < \arg \int_{[\mathcal{L}_1^b[1]]} \Omega_{T,k}^b.$$

然而，我们注意到，先验地，$\mathcal{L}^b \subset M_{a,\ b}$ 在微分几何模型 $M_{a,\ b}$中只是一个多截面，因此显然无法将其关联到 $D\mathrm{FS}(T,\ W_{a,\ b})$中的一个对象，也不清楚它在何种意义上代表某个适当的 $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{L}_2^b,\ \mathcal{L}_1^b)$所对应的（定义良好的）对象 $\mathrm{Cone}(\varphi)$。

5. 斜率不等式的证明

在本小节中，我们将完成以下定理的证明：1.4、1.7和1.8。

命题 5.1。 设 $p \in \left(-\text{正切}\left(\frac{\pi}{n}\right), 0\right)$。那么，对于可容许且充分大的 $k>0$，所有充分接近 1 的 b，条件

$$\arg \int_{[\mathcal{L}_1^b]} \Omega_{T,k}^b < \arg \int_{[\mathcal{L}_2^b[1]]} \Omega_{T,k}^b$$

是良定义的，且等价于条件 $b<1$。类似地，对于 $p \in \left(0,\ \text{正切}\left(\frac{\pi}{n}\right), 0\right)$，条件

$$\arg \int_{[\mathcal{L}_2^b]} \Omega_{T,k}^b < \arg \int_{[\mathcal{L}_1^b[1]]} \Omega_{T,k}^b$$

是良定义的，且等价于条件 $b<1$。

我们先证明一个预备结果。令 L 表示 X 上的移位 $\mathbb{R}$-线丛。我们引入中心荷

$$Z(L) = \int_X (\omega_{a,b} + \mathrm{i}\, c_1(L))^n$$

以及相应的 Z-斜率

$$\lambda(L) = \frac{\mathrm{Im}\, Z(L)}{\mathrm{Re}\, Z(L)}.$$

我们研究这些 $\mathbb{R}$-除子

$$L_1 = -apH + qE,\ L_2 = qE.$$

命题 5.2. 假设 $p \in \left(-\tan\left(\frac{\pi}{n}\right), 0\right)$。对于所有充分接近1的 b，条件 $b<1$ 等价于斜率不等式

$$\lambda(L_1) < \lambda(L_2),$$

以及对相位不等式

$$\arg Z(L_1) < \arg Z(L_2[1]),$$

其中 $Z(L_1)$、 $Z(L_2[1])$ 位于上半平面。类似地，对于 $p \in \left(0,\ \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$，条件 $b<1$ 等价于斜率不等式

$$\lambda(L_2) < \lambda(L_1),$$

以及相位不等式

$$\arg Z(L_2) < \arg Z(L_1[1])$$

其中 $Z(L_2)$、 $Z(L_1[1])$ 位于上半平面。

证明。只需对 $p \in \left(-\tan\left(\frac{\pi}{n}\right),\ 0\right)$ 证明该结果即可，p为正的情形完全类似。

注意，根据构造，我们有

$$\lambda(L_1)|_{b=1} = \lambda(L_2)|_{b=1},$$

因此命题 5.2 便成立，若我们能证明

$$\partial_b \lambda(L_1)|_{b=1} > 0,\ \partial_b \lambda(L_2)|_{b=1} < 0.$$

我们对 $i=1,2$ 进行计算

$$\begin{aligned}\partial_b \lambda(L_i)|_{b=1} &= \left(\frac{\partial_b \operatorname{Im} Z(L_i)}{\operatorname{Re} Z(L_i)} - \frac{(\partial_b \operatorname{Re} Z(L_i))\operatorname{Im} Z(L_i)}{(\operatorname{Re} Z(L_i))^2}\right)|_{b=1} \\ &= \left(\frac{\operatorname{Im} \partial_b Z(L_i)}{\operatorname{Re} Z(L_i)} - \frac{(\operatorname{Re} \partial_b Z(L_i))\operatorname{Im} Z(L_i)}{(\operatorname{Re} Z(L_i))^2}\right)|_{b=1}.\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}\partial_b Z(L_i)|_{b=1} &= \int_X n(\omega_{a,b} + \mathrm{i}\, c_1(L_i))^{n-1} \cdot (-[E]) \\ &= -n\int_E (\omega_{a,1} + \mathrm{i}\, c_1(L_i))^{n-1} = -n\int_E (-[E] + \mathrm{i}\, q[E])^{n-1} \\ &= -n(-1)^{n-1}(-1+\mathrm{i}\, q)^{n-1},\end{aligned}$$

so

$$\begin{aligned}&\partial_b \lambda(L_i)|_{b=1} \\ &= \left(\frac{n(-1)^n \operatorname{Im}(-1+\mathrm{i}\, q)^{n-1}}{\operatorname{Re} Z(L_i)} - \frac{(n(-1)^n \operatorname{Re}(-1+\mathrm{i}\, q)^{n-1})\operatorname{Im} Z(L_i)}{(\operatorname{Re} Z(L_i))^2}\right)|_{b=1}.\end{aligned}$$

回顾

$$q = \tan\left(\frac{\hat{\theta} - \frac{\pi}{2}}{n-1}\right).$$

然后，一个初等的研究表明，在我们当前的范围内

$$p \in \left(-\tan\left(\frac{\pi}{n}\right), 0\right),\ \hat{\theta} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

我们有

$$(-1)^n \operatorname{Im}(-1+\mathrm{i}\, q)^{n-1} < 0,\ (-1)^n \operatorname{Re}(-1+\mathrm{i}\, q)^{n-1} < 0.$$

我们研究 $\operatorname{Im} Z(L_i)|_{b=1}$、$\operatorname{Re}\ Z(L_i)|_{b=1}$ 对于 $i=1,\ 2$ 的符号。根据我们在上一小节中的计算，我们有

$$Z(L_1)|_{b=1} \in \mathbb{R}_{>0} e^{\mathrm{i}(-\hat{\theta}+\pi)},\ Z(L_2)|_{b=1} \in \mathbb{R}_{>0} e^{-\mathrm{i}\,\hat{\theta}}.$$

Thus

$$\operatorname{Re} Z(L_1)|_{b=1} \in -\mathbb{R}_{>0}\cos(\hat{\theta}) < 0,\ \operatorname{Im} Z(L_1)|_{b=1} \in \mathbb{R}_{>0}\sin(\hat{\theta}) > 0,$$

同理

$$\operatorname{Re} Z(L_2)|_{b=1} \in \mathbb{R}_{>0}\cos(\hat{\theta}) > 0,\ \operatorname{Im} Z(L_2)|_{b=1} \in -\mathbb{R}_{>0}\sin(\hat{\theta}) < 0.$$

由此可得

$$\frac{n(-1)^n \operatorname{Im}(-1+\mathrm{i}\,q)^{n-1}}{\operatorname{Re} Z(L_1)}\Big|_{b=1} > 0,$$
$$\frac{(n(-1)^n \operatorname{Re}(-1+\mathrm{i}\,q)^{n-1})\operatorname{Im} Z(L_1)}{(\operatorname{Re} Z(L_1))^2}\Big|_{b=1} < 0$$

so

$$\begin{aligned}&\partial_b\lambda(L_1)|_{b=1}\\ &= \left(\frac{n(-1)^n \operatorname{Im}(-1+\mathrm{i}\,q)^{n-1}}{\operatorname{Re} Z(L_1)} - \frac{(n(-1)^n \operatorname{Re}(-1+\mathrm{i}\,q)^{n-1})\operatorname{Im} Z(L_1)}{(\operatorname{Re} Z(L_1))^2}\right)\Big|_{b=1}\\ &> 0.\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\frac{n(-1)^n \operatorname{Im}(-1+\mathrm{i}\,q)^{n-1}}{\operatorname{Re} Z(L_2)}\Big|_{b=1} < 0,$$
$$\frac{(n(-1)^n \operatorname{Re}(-1+\mathrm{i}\,q)^{n-1})\operatorname{Im} Z(L_2)}{(\operatorname{Re} Z(L_2))^2}\Big|_{b=1} > 0$$

so

$$\begin{aligned}&\partial_b\lambda(L_2)|_{b=1}\\ &= \left(\frac{n(-1)^n \operatorname{Im}(-1+\mathrm{i}\,q)^{n-1}}{\operatorname{Re} Z(L_2)} - \frac{(n(-1)^n \operatorname{Re}(-1+\mathrm{i}\,q)^{n-1})\operatorname{Im} Z(L_2)}{(\operatorname{Re} Z(L_2))^2}\right)\Big|_{b=1}\\ &< 0.\end{aligned}$$

请注意，我们的计算表明，事实上 $Z(L_1)$ $Z(L_2[1]) = -Z(L_2)$ 位于上半平面中，因此条件 $\lambda(Z_1) < \lambda(Z_2)$ 等价于

$$\arg Z(L_1) < \arg Z(L_2[1]).$$

这就完成了命题5.2的证明。 □

现在我们可以证明命题5.1。

命题 *5.1* 的证明。 设 L 是任意一个平移线丛。直接计算可得

$$Z(L) = -e^{\mathrm{i}(n-2)\frac{\pi}{2}}\int_X e^{-\mathrm{i}\,\omega}\operatorname{ch}(L).$$

正如在更一般的背景下所观察到的，在 [24], 第 5.2 节（特别参见其中的式（5.4））， 存在一个展开式

$$\int_X e^{-\mathrm{i}\,k\omega}\operatorname{ch}(L^{\otimes k}) = \left(\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\right)^n k^{-n}\int_{\Gamma(L^{\otimes k})} e^{-W(k\omega)}\Omega_0\left(1+O(k^{-1})\right),$$

其中

$$\Gamma\colon K^0(X) \to H_n(T, \{\operatorname{Re} W(k\omega) \gg 0\}; \mathbb{Z})$$

表示到适当的快速衰减同调群的同态（依赖于 $[\omega]$），如4.3小节所述。这是 Iritani 的结果的推论，参见例如 [11], 第 7 节的阐述。因此我们得到如下展开式

$$\arg Z(L) = \arg \int_{\Gamma(L^{\otimes k})} e^{-W(k\omega)}\Omega_0 \left(1 + O(k^{-1})\right).$$

我们可以 ω 和 L_1, L_2 通过适当的共同缩放来替换，并将上述恒等式应用于这些缩放，即可得到所需结果（因为左侧保持不变）。其中，自然积分循环的定义与小节 4.3中一样，分别为 $[\mathcal{L}_i^b] = \Gamma(L_i)$ 和 $[\mathcal{L}_i^b[1]] = \Gamma(L_i[1])$（关于自然性，即与线丛的 LYZ 变换的相容性，见 [7]）。□

定理 *1.4* 的证明。假设 $p \in \left(-\tan\left(\frac{\pi}{n}\right),\ 0\right)$。那么我们将定理 1.4中出现的分次特殊拉格朗日子流形对 $\check{}$ 定义为L_i^s

$$(\check{L}_1^s, \check{L}_2^s) := (\mathcal{L}_2^{1-s}[1], \mathcal{L}_1^{1-s}).$$

类似地，对于 $p \in (0,\ \tan\left(\frac{\pi}{n}\right),\ 0)$，我们设

$$(\check{L}_1^s, \check{L}_2^s) := (\mathcal{L}_1^{1-s}[1], \mathcal{L}_2^{1-s}).$$

根据小节 4.4，群 $HF^1(\check{}L_1^s,\ \check{}L_2^s)$ 非平凡。因此，根据引理4.5，定理 1.4 的结论可由命题5.1立即推出。□

我们还可以补全定理 1.4、1.7 和 1.8 的证明。

$\check{}\check{}$ 定理 1.7 的证明。按构造，我们的特殊拉格朗日截面 L_1^s, L_2^s 是厄米结构在真正线丛（$\mathbb{R}$-线丛 L_1, L_2 的缩放）上的 LYZ 变换，因此给出了 $D\mathrm{FS}(T, W^s) \cong D^b(X)$ 中定义良好的对象。接下来，只需证明 $\check{}$ L_1^s、$\check{}L_2^s$ 的适当平移属于由 $(\mathcal{A}, Z)$ 在 $D^b(X)$ 上诱导的 $D\mathrm{FS}(T, W^s)$ 上稳定性条件 $(\check{}\mathcal{A}^s, \check{}Z^s)$ 的心 $\check{}\mathcal{A}^s$，并且它们是 $(\check{}\mathcal{A}^s, \check{}Z^s)$-稳定的，即可直接得到结论。

我们首先考察当 b充分接近 1 时，$\mathbb{R}$-线丛 L_1, L_2 关于 $\omega_{a,\ b}$ 的次数符号。我们有

$$L_1 \cdot \omega_{a,b} = (-apH + qE) \cdot (aH - bE) = -a^2 p + bq,$$
$$L_2 \cdot \omega_{a,b} = (qE) \cdot (aH - bE) = bq.$$

根据例 3.7，我们有

$$p = -2\cot(\hat{\theta}),\ a = \frac{1}{\sin^2(\hat{\theta})},\ q = \tan\left(\hat{\theta} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(\hat{\theta}),$$

so

$$L_1 \cdot \omega_{a,b} = \cot(\hat{\theta})\left(\frac{2}{\sin^4(\hat{\theta})} - b\right),\ L_2 \cdot \omega_{a,b} = -b\cot(\hat{\theta}).$$

$\hat{}$ 假设 $p \in (-\tan(\frac{\pi}{2}),\ 0) = (-\infty,\ 0)$，因此 $\theta = (0,\ \frac{\pi}{2})$。那么上述表达式表明，当 b充分接近 1 时，我们有

$$L_1 \cdot \omega_{a,b} > 0,\ L_2 \cdot \omega_{a,b} < 0.$$

由于心 $\mathcal{A}$ 在 [1]中定义为 $\mathrm{Coh}(X)$ 在挠对 $(\mathrm{Coh}^{>0}(X), \mathrm{Coh}^{\leq}(X))$ 处的倾斜，因此在此情形下 $L_1,\ L_2[1] \in \mathcal{A}$, 并且

由于在这个范围内我们定义了 $(\check{}L_1^s, \check{}L_2^s) := (\mathcal{L}_2^{1-s}[1], \mathcal{L}_1^{1-s})$，因此可得 $\check{}\check{}\check{}L_1^s$, $L_2^s \in \mathcal{A}^s$。

$\hat{}$ 同理，对于 $p \in (0, \tan(\frac{\pi}{2})) = (0, \infty)$，我们有 $\theta = (\frac{\pi}{2}, \pi)$，我们有 $\hat{}\cot(\theta) < 0$，因此

$$L_1 \cdot \omega_{a,b} < 0,\ L_2 \cdot \omega_{a,b} > 0,$$

由此得到 $L_1[1]$, $L_2 \in \mathcal{A}$，并且由于 $(\check{}L_1^s, \check{}L_2^s) := (\mathcal{L}_1^{1-s}[1], \mathcal{L}_2^{1-s})$ 在 $\check{}\check{}\check{}$ 此范围内，我们仍可得出结论 L_1^s, $L_2^s \in \mathcal{A}^s$。

根据这些包含关系，声称 $\check{}L_1^s$, $\check{}L_2^s$ 是 $(\check{}\mathcal{A}^s, \check{}Z^s)$-稳定的结论，源于以下事实：$L_1$, $L_2[1] \in \mathcal{A}$分别 $L_1[1]$, $L_2 \in \mathcal{A}$ 是 $(\mathcal{A}, Z)$-稳定的，因为 dHYM 方程在 L_1, L_2 上可解，且根据 [24], 定理 1.10（该定理又由 Collins-Shi 的一项结果推出 [4]）。□

定理的证明 *1.8*。如上所述，我们可以通过适当的缩放，将 L_1, L_2 替换为，使相应的 $(\mathcal{L}_2^{1-s}[1], \mathcal{L}_1^{1-s})$ 和 $(\mathcal{L}_1^{1-s}[1], \mathcal{L}_2^{1-s}$ 分别成为 $D\mathrm{FS}(T, W^s) \cong D^b(X)$ 中定义良好的一对对象，从而证明断言 (i)。

假设 $p \in (-\tan(\frac{\pi}{n}), 0)$，因此相应的相位角满足 $\hat{}\,\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 且我们有 $q < 0$。我们计算

$$\begin{aligned}\check{Z}^{s,\Gamma}(k^{-1}\check{L}_1^s) &= Z(L_2[1]) + \Gamma \cdot \mathrm{ch}_1(L_2[1]) \\ &= Z(L_2[1]) - \left(\frac{H^2+E^2}{6} + C_0\omega_{a,1}^2\right) \cdot (qE),\end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned}\check{Z}^{s,\Gamma}(k^{-1}\check{L}_2^s) &= Z(L_1) + \Gamma \cdot \mathrm{ch}_1(L_1) \\ &= Z(L_1) + \left(\frac{H^2+E^2}{6} + C_0\omega_{a,1}^2\right) \cdot (-apH + qE).\end{aligned}$$

Thus

$$\arg \check{Z}^{s,\Gamma}(k^{-1}\check{L}_1^s) = \arg\left(\frac{Z(L_2[1])}{-ap} + \left(\frac{H^2+E^2}{6} + C_0\omega_{a,1}^2\right) \cdot (\frac{q}{ap}E)\right),$$

$$\arg \check{Z}^{s,\Gamma}(k^{-1}\check{L}_2^s) = \arg\left(\frac{Z(L_1)}{-ap} + \left(\frac{H^2+E^2}{6} + C_0\omega_{a,1}^2\right) \cdot (H - \frac{q}{ap}E)\right).$$

根据我们在小节3.3中的计算，我们有

$$\lim_{p \to -\tan(\frac{\pi}{n})^+} \frac{q}{ap} = 0,$$

因此，当 $\hat{}\,\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 充分接近 0 时，只需证明

$$\frac{Z(L_2[1])}{-ap},\ \frac{Z(L_1)}{-ap} + \left(\frac{H^2+E^2}{6} + C_0\omega_{a,1}^2\right) \cdot H$$

位于上半平面并满足

$$\arg \frac{Z(L_2[1])}{-ap} > \arg\left(\frac{Z(L_1)}{-ap} + \left(\frac{H^2+E^2}{6} + C_0\omega_{a,1}^2\right) \cdot H\right).$$

根据命题5.2，我们知道

$$\frac{Z(L_2[1])}{-ap},\ \frac{Z(L_1)}{-ap}$$

位于上半平面并满足

$$\arg \frac{Z(L_2[1])}{-ap} > \arg \frac{Z(L_1)}{-ap},$$

因此，只需证明我们有

$$\left(\frac{H^2+E^2}{6} + C_0\omega_{a,1}^2\right) \cdot H > 0.$$

根据 [2], 第 4.B 节，常数 C_0 由下式明确给出

$$C_0 = \frac{10\sqrt{30}}{1323} - \frac{3}{98} \approx 0.01 > 0,$$

so

$$\left(\frac{H^2+E^2}{6} + C_0\omega_{a,1}^2\right) \cdot H = \frac{1}{6} + C_0 a^2 > 0.$$

另一方面，对于 $p \in \left(0, \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$，相应的相位角满足 $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$，且我们有 $q > 0$。我们计算

$$\check{Z}^{s,\Gamma}(k^{-1}\check{L}_1^s) = Z(L_1[1]) - \left(\frac{H^2+E^2}{6} + C_0\omega_{a,1}^2\right) \cdot (-apH + qE),$$
$$\check{Z}^{s,\Gamma}(k^{-1}\check{L}_2^s) = Z(L_2) + \left(\frac{H^2+E^2}{6} + C_0\omega_{a,1}^2\right) \cdot (qE),$$

so

$$\arg \check{Z}^{s,\Gamma}(k^{-1}\check{L}_1^s) = \arg\left(\frac{Z(L_1[1])}{q} - \left(\frac{H^2+E^2}{6} + C_0\omega_{a,1}^2\right) \cdot \left(-\frac{ap}{q}H + E\right)\right),$$
$$\arg \check{Z}^{s,\Gamma}(k^{-1}\check{L}_2^s) = \arg\left(\frac{Z(L_2)}{q} + \left(\frac{H^2+E^2}{6} + C_0\omega_{a,1}^2\right) \cdot E\right).$$

根据第 3.3 节，我们有

$$\lim_{p\to 0} \frac{a(p)p}{q(p)} = 0,$$

因此，对于与 $\frac{\pi}{2}$ 足够接近的 $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$，只需证明

$$\frac{Z(L_1[1])}{q} - \left(\frac{H^2+E^2}{6} + C_0\omega_{a,1}^2\right) \cdot E,\ \frac{Z(L_2)}{q} + \left(\frac{H^2+E^2}{6} + C_0\omega_{a,1}^2\right) \cdot E$$

位于上半平面并满足

$$\arg\left(\frac{Z(L_1[1])}{q} - \left(\frac{H^2+E^2}{6} + C_0\omega_{a,1}^2\right) \cdot E\right)$$
$$> \arg\left(\frac{Z(L_2)}{q} + \left(\frac{H^2+E^2}{6} + C_0\omega_{a,1}^2\right) \cdot E\right).$$

根据命题5.2，我们知道

$$\frac{Z(L_1[1])}{q},\ \frac{Z(L_2)}{q}$$

位于上半平面并满足

$$\arg \frac{Z(L_1[1])}{q} > \arg \frac{Z(L_2)}{q},$$

因此只需证明我们有

$$\left(\frac{H^2+E^2}{6}+C_0\omega_{a,1}^2\right)\cdot E>0,$$

这可由 $C_0>0$ 轻易推出。 □

6. Momentum mean curvature flow

我们沿用第 2 小节的记号。将端同态 $\omega^{-1}\alpha$ 的特征值记为 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$。考虑一族代表元 α_t，它们属于 $[\alpha]$，并参数化为 $\alpha_t=\alpha_0+\mathrm{i}\partial\bar\partial\phi_t$。一般的线丛平均曲率流（平均曲率流）由 [14], 引入，是势函数的抛物流

$$\dot\phi_t=\sum_{i=1}^n\arctan(\lambda_i)-\hat\theta.$$

ˆ线丛平均曲率流的不动点具有常相位角，等于 θ。

我们专门考虑 $X=\mathrm{Bl}_p\mathbb{P}^n$ 的情形。Chan 和 Jacob [3] 证明， X 上采用 Calabi 设定的线丛平均曲率流可用动量坐标 $x=u'(\log|z|^2)$ 表示为

$$\dot v=(n-1)\arctan\left(\frac{f}{x}\right)+\arctan(f')-\hat\theta. \tag{6.1}$$

通过对（6.1）关于 $\rho=\log|z|^2$求导，他们得到了关于动量剖面 f（x）（而非 $K\ddot{}ahler$ 势函数）的流，其形式为

$$\dot f=u''(x)\left(\frac{f''}{1+(f')^2}+(n-1)\frac{xf'-f}{x+f^2}\right), \tag{6.2}$$

其中 $\dot f=\partial_t f$， $f'=\partial_x f$， $u''=\partial^2_{\rho,\ \rho}u$。注意，由于辛势满足 u''（1）（a）$=0$，该流保持边界条件不变，即保持上同调类不变。由于流（6.2）是通过对（6.1）求导得到的，其不动点具有常相位角，而不是预先规定的相位角。这一点对我们尤其重要，因为在我们的应用中，拉格朗日相位角只会是局部常数。

正如 Chan 和 Jacob 所观察到的， （6.2）可以扩展为参数曲线 γ_t（s）$=$（x_t（s） y_t（s））： $[0,1]\to[1,a]\times\mathbb{R}$， s其中弧长根据以下量定义

$$\kappa_t=\frac{d}{ds}\arctan\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right),\ \xi_t=\frac{d}{ds}\arctan\left(\frac{y_t}{x_t}\right),\ \mathrm{N}_t=e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\gamma_t'$$

as

$$\dot\gamma_t=u''(x_t)\left(\kappa_t+(n-1)\xi_t\right)\mathrm{N}_t\,. \tag{6.3}$$

注意， κ_t 是通常所说的平面曲率，因此在此记号下，曲线缩短流为 $\dot\gamma_t=\kappa_t\mathrm{N}_t$。

我们将 (6.3) 称为动量平均曲率流（平均曲率流）。

定理 *1.10* 的证明。 固定 $b>1$。为证明起见，我们将给定的特殊拉格朗日截面记作 ˇL_i^b，而 s 表示如上所述的弧长参数。

ˇ设 $L_t\subset M_{a,\ b}$ 是一个具有唯一临界点、在无穷远处渐近于 ˇ$L_1^b\cup$ ˇL_2^b 的 Calabi对称拉格朗日子流形多截面，在

˘$M_{a,\ b}$ 并按动量平均曲率流演化。根据我们上面的讨论 L_t可由曲线族 $\gamma_t\ (\ s\ )\ =\ (\ x_t,\ y_t\ )$构成：其端点为（$a$，0）、（$a$，$p$），并按流（6.3）演化；这些曲线是投影$[b,a]\times\mathbb{R}\to[b,a]$的多截面，且具有唯一临界点。我们将后者记为 γ_t（s_t），并考察其演化。我们为 γ_t 选择一个定向，使得 $\gamma_t'>0$（结果与该选择无关）。

由于其为临界点，γ_t 在 $\gamma_t(s_t)$处具有垂直切线；根据我们对方向的选择，并利用将 $\kappa(s)$通常刻画为某个密切圆半径的性质，可得 $\kappa_t(s_t)>0$。类似地，我们计算得

$$\xi_t(s_t)=\frac{d}{ds}\arctan\left(\frac{y_t}{x_t}\right)\Big|_{s_t}=\frac{x_ty_t'-y_tx_t'}{x_t^2+y_t^2}\Big|_{s_t}=\frac{x_ty_t'}{x_t^2+y_t^2}\Big|_{s_t}>0,$$

注意到 $x'(s_t)\ =0$，因为 $x(s)$在 s_t处取得最小值，而 $x_t,y_t'>0$。另一方面，由于该临界点位于内部（b,a）$\times\mathbb{R}$，我们有 $u''(x(s_t))>0$。于是，流（6.3）表明，在临界点处，$\dot\gamma_t(s_t)$是$\mathrm{N}_t(s_t)\ =(-1,0)$的严格正倍数。

˘由此可知，若 L_t 对所有时刻均存在，且在$M_{a,b}$上局部光滑收敛，使得 $\gamma_t(s)\ =(x_t,y_t):\ [0,1]\to[b,a]\times\mathbb{R}$也成立，那么临界点族必满足$\lim_{t\to\infty}x_t(s_t)\ =x_\infty\in[b,a)$，并且 γ_t收敛到两个剖面函数图像的并集 f_i，它们定义在 $[x_\infty,a)$上；每个剖面函数都是流（6.2）的不动点，具有固定相位角 θ_i 以及一个固定边界条件 $f_1(a)\ =p,\ f_2(a)\ =0$。

若有 $x_\infty>b$，那么根据 (6.2) 的光滑收敛，对应于剖面函数 $f_i\in C^\infty[x_\infty,a)$ 的极限拉格朗日子流形 $L_{\infty,i}$ 的并集 ˘˘˘$L_{\infty,1}\cup L_{\infty,1}$ 给出一个连通的嵌入拉格朗日子流形 ˘ L_∞，其相位角为 ˆˆˆ$\theta_\infty\ =\theta_1\ =\theta_2$，具有 Calabi 对称性，并满足边界条件$f_1(a)\ =p,\ f_2(a)\ =0$。然而，˘ L_∞ 必须与第3节构造的Calabi对称特殊拉格朗日多截面 $\mathcal{L}^b$ 重合；但这与我们处于不稳定情形 $b>1$ 相矛盾，因为此时 $\mathcal{L}^b$ 不包含于 $M_{a,b}$。

˜因此，必有 $x_\infty\ =\ b$。设 $f_i,\ i\ =\ 1,2$ 为第 4 节构造的特殊拉格朗日截面 $\mathcal{L}_i^b$ 的动量剖面。剖面函数 $\tilde f_i$ 是抛物流 (6.2) 的解，并且根据最大值原理，它们充当障碍。因此，若 ˘L 包含于由 ˘L_1^b、˘L_2^b 围成的区域内，则 $\gamma_t(s)$ 的演化被限制在 $[b,a]\times\mathbb{R}$ 中由 f_i 的图像所界定的凸区域内。这意味着必有 $(x_\infty,y_\infty)\ =(b,q)$，因此˜$\gamma_t(s)$ 局部光滑收敛至 f_i 的图像，至多相差一个常数平移；通过比较相位角可知，L_∞ 由不连通并集 ˘$L_1^b\cup$ ˘L_2^b 给出，如所述。□

7. Split Fano bundles

我们考虑 $X_{r,m}$ 上关于 ω 的 Calabi 设定下的 dHYM 方程，以及一个辅助的 (1,1) 类

$$[\alpha]\in\xi_2[D_H]+q[D_\infty].$$

根据 Jacob 的结果 [12], 第 6 节，与我们在第 2 节回顾的情形类似，解对应于以下函数水平集的图形部分：

调和多项式 Im $w(z)$，其中 $z = x + \mathrm{i}\, y$,

$$w(z) = e^{-\mathrm{i}\,\hat{\theta}} \int_0^z (\xi + s)^m s^r ds$$

for

$$\xi = \xi_1 + \mathrm{i}\,\xi_2, \int_X (\omega + \mathrm{i}\,\alpha)^{m+r+1} \in \mathbb{R}_{>0} e^{\mathrm{i}\,\hat{\theta}}.$$

更准确地说，令 $\mathcal{C}_0$ 表示轨迹 $\{\mathrm{Im}\, w(z) = 0\}$。那么，dHYM 解对应于定义在修正后的动量区间$[0, b]$上的函数 f，使得 $f([0, b]) \subset \mathcal{C}_0$，并满足边界条件

$$f(0) = 0,\ f(b) = q.$$

请注意，与 $X = \mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^n \cong X_0$ 的方法不同，$n-1$ 该方法在小节 2中有所描述。现在，调和多项式 Im $w(z)$ 取决于 K¨ahler 参数 $\xi_1 > 0$。

我们可以通过变量替换 $z = \xi_1 \tilde{z}$ 将这种依赖吸收到定义区间中。令

$$\tilde{w}(\tilde{z}) = e^{-\mathrm{i}\,\hat{\theta}} \int_0^{\tilde{z}} (1 + \mathrm{i}\,\eta + s)^m s^r ds,\ \eta \in \mathbb{R},$$

˜ ˜并令 $\mathcal{C}_0$ 表示轨迹 $\{\mathrm{Im}\ \tilde{w}(\tilde{z}) = 0\}$。我们考虑定义在 $[0, \xi_1^{-1} b]$ 上的函数 f，使得 $\tilde{f}([0, \xi_1^{-1} b]) \subset \tilde{\mathcal{C}}_0$，并满足边界条件

$$\tilde{f}(0) = 0,\ \tilde{f}(\xi_1^{-1} b) = q.$$

˜根据我们的讨论，上述函数 f与具有 Calabi 设定、上同调类为

$$[\alpha] \in (\xi_1 \eta)[D_H] + (\xi_1 q)[D_\infty],$$

且相对于类中的 Calabi 构造度量的 dHYM 解之间存在双射对应

$$[\omega_{\xi_1, b}] \in \xi_1 [D_H] + b[D_\infty].$$

注意，对于 $\xi_1' < \xi_1$，存在一个包含关系

$$[0, \xi_1^{-1} b] \subset [0, (\xi_1')^{-1} b]$$

它对应于动量多面体的一个包含关系

$$\Delta(\omega_{\xi_1, b}) \subset \Delta(\omega_{\xi_1', b}).$$

因此，对于固定的 $\eta \in \mathbb{R}$，随着 K¨ahler 参数 $\xi_1 > 0$ 变化，包含于 (0, $\xi_1^{-1} b$) 中的连通子集 $\tilde{\mathcal{C}}_0' \subset \tilde{\mathcal{C}}_0$ 给出近似 Calabi–Yau 流形 $M_{\xi,\ b} \to \Delta^o(\omega_{\xi_1,\ b})$ 的一个特殊拉格朗日多截面 $\times\, \mathbb{R}\, \mathcal{L}^{\xi_1'}$；它定义为由相对于 $\omega_{\xi_1,\ b}$、作为其各分支的 LYZ 变换的特殊拉格朗日截面之并的闭包。

根据这种对应关系，我们回到更方便的坐标z。按照构造，$z = 0$ 附近的轨迹 $\{\mathrm{Im}\, w(z) = 0\}$ 是若干解析分支 $\mathcal{B}_1$，……，$\mathcal{B}_\ell$的并集；我们通过要求某个特定分支 $\mathcal{B}$在 $z = 0$处有垂直切线来将其选出。我们有一个级数展开

$$w(\mathrm{i}\, t) = \frac{\mathrm{i}^{r+1}\, \xi^m e^{-\mathrm{i}\,\hat{\theta}}}{r+1} t^{r+1} + O(t^{r+2}).$$

因此，写成 $\xi = \rho e^{\mathrm{i}\psi}$ 的形式，$\{\mathrm{Im}\ w(z) = 0\}$的一个解析分支在 $z = 0$ 处有垂直切线的条件为

$$\hat{\theta} = m\psi + \frac{r+1}{2}\pi \mod \pi\mathbb{Z}.$$

图8 展示了 $m = r = 2$, $\xi = 2 - \mathrm{i}$ 的构型，其中 $\hat{\theta} = \arctan(\frac{3}{4}) + h\pi$。我们需要恰当地选择构型，使得

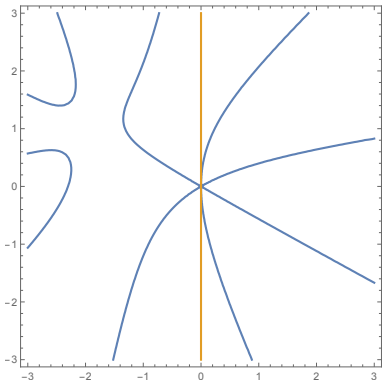

FIGURE 8. 选择一个分支 $\mathcal{B} \subset \{\mathrm{Im}\, w(z) = 0\}$。

$\mathcal{B} \cap [0,b] \times \mathbb{R}$的各个分支对应于线丛 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$，相差一个 $k > 0$ 的缩放因子。记

$$\mathcal{B} \cap \{x = b\} = \{b + \mathrm{i}\, q, b + \mathrm{i}\, q'\},$$

当且仅当上同调参数 ξ_2, q, q' 可公度时，后一条件成立；也就是说，一般而言，当且仅当

$$\frac{q}{\xi_2}, \frac{q}{q'} \in \mathbb{Q}.$$

$\hat{}$ 请注意，对于固定的 θ，量 $\frac{q}{\xi_2}$, $\frac{q}{q'}$ 一般是定义良好的、局部满射的 K¨ahler 参数 ξ_1, b 的光滑函数。因此，有理性条件必须在 K¨ahler 参数集合 $(\xi_1, b) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ 的稠密子集上成立（因而也在拉格朗日子流形 $\hat{}$ 相位角的稠密子集上成立）。

现在我们可以完成定理1.11的证明。

定理 *1.11*的证明。 稍微滥用一下记号，对于所有$0 < k\xi_1' < k\xi_1$，我们仍将 $\mathcal{L}^{\xi_1'}$ 记作对应于解析分支 $\mathcal{B}$ 的特殊拉格朗日多截面$M_{k\xi_1',\, kb}$；通常，$k > 0$ 是缩放参数，用 $k\omega$, $k\alpha$替换 ω, α。

固定记号如下：$q > 0, q' < 0$。引入 $\mathbb{R}$-线丛

$$L_1 = \mathcal{O}(k\xi_2 D_H + kqD_\infty),\ L_2 = \mathcal{O}(k\xi_2 D_H + kq' D_\infty).$$

根据上述讨论，我们可以选择 $k > 0$，使得 L_1、L_2 是真正的线丛。根据小节4中的相同论证，对于所有ξ_1' 充分接近参考参数 ξ_1的情形，线丛 L_i关于 $k\omega_{\xi_1',\, b}$ 均存在唯一的 dHYM 方程解。这就是我们陈述中的结论（i）。

我们将特殊拉格朗日截面 $\mathcal{L}_i^{\xi_1'}$定义为关于这些厄米度量的 L_i 的 LYZ 镜像。

让我们计算 $\mathcal{L}_i^{\xi}$ 的拉格朗日相位角$'$。根据 [12],第 6 节，形变埃尔米特-杨-米尔斯解的提升角 ϑ 可用其动量剖面 f 表示为

$$\vartheta = m\arctan\left(\frac{\xi_2+f}{\xi_1+x}\right) + r\arctan\left(\frac{f}{x}\right) + \arctan\frac{df}{dx}.$$

在我们的情形中应用这一结果，可知在 ξ_1 处， $\vartheta_i|_{\xi_1}$ 的拉格朗日相位角为$\mathcal{L}_i$

$$\vartheta_1|_{\xi_1} = m\psi + \frac{r+1}{2}\pi,\ \vartheta_2|_{\xi_1} = m\psi - \frac{r+1}{2}\pi = m\psi + \frac{r+1}{2}\pi - (r+1)\pi.$$

我们一般性地选取 K¨ahler 参数 ξ_1 ，使得相应的相位角满足

$$\vartheta_1|_{\xi_1} = m\psi + \frac{r+1}{2}\pi \neq (2r'+1)\pi,\ r' \in \mathbb{Z}.$$

于是我们有

$$m\psi + \frac{r+1}{2}\pi \in (-\pi, 0) \mod 2\pi, \text{ or } m\psi + \frac{r+1}{2}\pi \in (0,\pi) \mod 2\pi.$$

我们声称，对于 b 充分小且 ξ_1' 充分接近 ξ_1的情形，条件 $\xi_1' < \xi_1$ 等价于相位不等式

$$\arg\int_{[\mathcal{L}_1^{\xi_1'}]} \Omega_{T,k}^b < \arg\int_{[\mathcal{L}_2^{\xi_1'}[1]]} \Omega_{T,k}^b$$

在第一种情形下，以及

$$\arg\int_{[\mathcal{L}_2^{\xi_1'}]} \Omega_{T,k}^b < \arg\int_{[\mathcal{L}_1^{\xi_1'}[1]]} \Omega_{T,k}^b$$

在第二种情形下。显然，只需分别在两种情形下取

$$(\check{L}_1^s, \check{L}_2^s) := (\mathcal{L}_2^{\xi_1+s}[1], \mathcal{L}_1^{\xi_1+s}),\ (\check{L}_1^s, \check{L}_2^s) := (\mathcal{L}_1^{\xi_1+s}[1], \mathcal{L}_2^{\xi_1+s})$$

即可由此证明我们陈述中的（{v1}）。

我们按照第 5 节中的方法进行。令

$$Z(L) = \int_{X_{r,m}} (\omega_{\xi_1,b} + \mathrm{i}\, c_1(L))^{m+r+1}.$$

假设 L 是任意一个满足 $c_1(L) = \xi_2[D_H] + q_L[D_\infty]$的线丛。根据 [12], 第 6 节（引理 12 的证明），有如下恒等式

$$Z(L) = \int_{X_{r,m}} (\omega_{\xi_1,b} + \mathrm{i}\, c_1(L))^{m+r+1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{vol}(S_{m,r}, \omega_{\xi_1,b}) P_\xi(b + \mathrm{i}\, q_L)$$

其中 $S_{m,\ r} \to \mathbb{P}^m$ 是 $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-1))^{\oplus r+1} \to \mathbb{P}^m$ 中的单位球面丛，其度量由诱导 Calabi形式 $\omega_{\xi_1,\ b}$ 的厄米度量给出，而 $P(z)$ 是满足以下条件的唯一复多项式

$$P_\xi'(z) := \partial_z P_\xi(z) = (\xi+z)^m z^r,\ P(0) = 0,$$

i.e.

$$P_\xi(z) = \int_0^z (\xi+s)^m s^r ds.$$

注意，当 $z \to 0$ 时，$P_\xi(z) = \frac{\xi^m z^{r+1}}{r+1} + O(z)$。

对于我们的线丛 L_i，其对应的上同调参数为 b, q, q'，由于 $b \to 0$ 我们也有 $q,\ q' \to 0$ 根据构造，因此存在如下展开式

$$P_\xi(b + \mathrm{i}\, q) = \frac{\xi^m (b + \mathrm{i}\, q)^{r+1}}{r+1} + O(b),\ P_\xi(b + \mathrm{i}\, q') = \frac{\xi^m (b + \mathrm{i}\, q')^{r+1}}{r+1} + O(b)$$

如 $b \to 0$。

假设 $\xi = \rho e^{\mathrm{i}\,\psi}$ 的相位 ψ 满足 $m\psi + \frac{r+1}{2}\pi \in (-\pi,\ 0) \bmod 2\pi$。那么，根据上述展开式以及下半平面中的初等几何，对于足够小的 b，$P_\xi(b + \mathrm{i}\, q)$ 的辐角随 $\xi_1 = \mathrm{Re}\,\xi$ 的微小变化而递增，即

$$\partial_{\xi_1} \arg P_\xi(b + \mathrm{i}\, q) > 0$$

对于 $|\xi_1|,\ b < \varepsilon$ 当 $\varepsilon > 0$ 足够小时。类似地，由于我们假设 r 为偶数，因此有 $m\psi - \frac{r+1}{2}\pi = m\psi + \frac{r+1}{2} - (r+1)\pi \in (0,\ \pi) \bmod 2\pi$，并且利用上半平面中的初等几何可得

$$\partial_{\xi_1} \arg P_\xi(b + \mathrm{i}\, q') < 0.$$

由此可知，在这些假设下，不等式 $\xi_1' < \xi_1$（它取决于参数 ξ_1 的微小变化 ξ_1'，其中 ¨ 表示 Kähler）等价于

$$\arg Z(L_1) < \arg Z(L_2[1]).$$

当 $m\psi + \frac{r+1}{2}\pi \in (0,\ \pi) \bmod 2\pi$ 时，同样的论证也适用，这表明在这种情况下，$\xi_1' < \xi_1$ 等价于 $\arg Z(L_2) < \arg Z(L_1[1])$。

最后，我们可以将这些关于中心荷的不等式转化为关于周期的不等式，方法与定理1.4的证明中相同。

性质（iii）可由引理4.5证明中给出的同一论证推出。□

References

[1] D. Arcara 和 A. Bertram. K-平凡曲面的 Bridgeland 稳定模空间.

J. , ( ): – . [2]

Eur. Math. Soc. (JEMS) 15 1 1 38, 2013

M. Bernardara、E. Macrì、B. Schmidt 和 X. Zhao. Fano 三维簇上的 Bridgeland 稳定性条件.

Épijournal Géom. Algébrique, 1:Art. 2, 24, 2017. [3] Y. H. Chan 和 A. Jacob. 线丛平均曲率流中的奇点形成. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2025(5):1–20, 2025年. [4] T. C. Collins 和 Y. Shi. 稳定性与变形 Hermitian-Yang-Mills 方程. 载于

Surveys in differential geometry 2019. Differential geometry, Calabi-Yau theory, and general relativity. Part 2 24 *Surv. Differ. Geom.* 1 38 , 第 卷，页码 – . Int. Press, 波士顿 , MA, [2022] ©2022. [5] T. C. Collins 和 S.-T. Yau. 镜像对称中的矩映射、非线性偏微分方程与稳定性. arXiv:1811.04824 [math.DG]. [6] Y.-W. Fan. 超越几何稳定性条件的特殊拉格朗日子流形与 Bridgeland 稳定对象：乘积情形. arXiv:2602.03041[math.SG]. [7] B. Fang. 环簇的 T-对偶膜的中心荷.

Trans. Amer. Math. , ( ): – . [8]

Soc. 373 6 3829 3851, 2020

B. Fang、C.-C. M. Liu、D. Treumann 和 E. Zaslow. 环簇的 T-对偶与同调镜像对称. *Adv. Math.*, 229(3):1875–1911, 2012年. [9] A. Givental. 环面完全交的镜像定理. 载于 *Topological field theory primitive forms and related topics (Kyoto, 1996)* 160 *Progr. Math.* , , 第 卷，页码 141–175. Birkh¨auser Boston, 波士顿, MA, 1998年。

[10] R. Harvey 和 H. B. Lawson, Jr. 校准几何. *Acta Math.*, 148 157, 1982 47: – . [11] H. Iritani. 环簇的量子D模与振荡积分. 载于 *Hand-book for mirror symmetry of Calabi-Yau & Fano manifolds* 47 , 第 *Adv. Lect.* 卷, 页码 – . *Math. (ALM)* 131 147 [2020] 2020 Int. Press, Somerville, MA, © . [12] A. Jacob. 变形 Hermitian-Yang-Mills 方程与调和多项式的水平集. arXiv:2204.01875 [math.DG]. [13] A. Jacob 和 N. Sheu. $\mathbb{P}^n$ 的胀开上的变形 Hermitian-Yang-Mills 方程. *Asian J. Math.*, 26(6):847–864, 2022年. [14] A. Jacob 和 S.-T. Yau. 全纯线丛的特殊拉格朗日型方程. *Math. Ann.*, 369(1-2):869–898, 2017年. [15] D. Joyce. 具有孤立锥奇点的特殊拉格朗日子流形. V. 综述与应用. *J. Differential Geom.*, 63(2):279–347, 2003年. [16] D. Joyce. 关于 Calabi-Yau 流形的 Fukaya范畴的 Bridgeland 稳定性、特殊拉格朗日子流形与拉格朗日平均曲率流的猜想. *in Mathematical Sciences* 2 1 62, 2015 *EMS Surveys* , ( ): – . [17] T. Kuwagaki. 环叠的非等变凝聚 - 可构造对应 . *Duke Math. J.*, 169(11):2125–2197, 2020年. [18] N. C. Leung、S.-T. Yau 和 E. Zaslow. 从特殊拉格朗日子流形到埃尔米特-杨-米尔斯：经由 Fourier-Mukai. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 4(6):1319–1341, 2000. [19] Y. Li. Thomas-丘猜想与全纯曲线. EMS Surv. Math. Sci. (2025年), 已在线优先发表, DOI 10.4171/EMSS/96. [20] J. Lotay 和 G. Oliveira. 具有圆周对称的拉格朗日平均曲率流中的颈缩奇点与 Joyce猜想. arXiv:2305.05744[math.DG]. [21] J. Lotay 和 G. Oliveira. 特殊拉格朗日子流形、拉格朗日平均曲率流与 Gibbons-Hawking Ansatz. *J. Differential Geom.*, 126(3):1121–1184, 2024年. [22] S. Scherotzke 和 N. Sibilla. 非等变凝聚-可构造对应与 King 的一个猜想. *Selecta Math. (N.S.)*, 22(1):389–416, 2016. [23] V. Shende. 重新探讨环面镜像对称. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 360:751– 759, 2022年. [24] J. Stoppa. Nakai-Moishezon准则与环簇Thomas-丘猜想. arXiv:2505.07228 [math.DG]. [25] J. Stoppa. 三维流形上的特殊拉格朗日截面与稳定性条件. arXiv:2508.17709 [math.AG]. [26] R. P. Thomas. 矩映射、单值与镜像流形. 载于 *Symplectic ge-ometry and mirror symmetry (Seoul, 2000)* 467 498 , 页码 – . World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001. [27] R. P. Thomas 和 S.-T. Yau. 特殊拉格朗日子流形、稳定丛与平均曲率流. *Comm. Anal. Geom.*, 10(5):1075–1113, 2002. [28] P. Zhou. 环簇的扭曲多面体层与凝聚-可构造对应. *Selecta Math. (N.S.)*, 25(1):Paper No. 1, 23, 2019. SISSA, via Bonomea 265, 34136 的里雅斯特, 意大利；几何与物理研究所（IGAP）, via Beirut 2, 34151 的里雅斯特, 意大利 jstoppa@sissa.it