arXiv:2603.02750v1 [math.AG] 3 Mar 2026

具有有界不规则性的代数可积联络

Takuro Mochizuki

摘要

我们研究具有有界不规则性的代数平坦联络族的有界性。作为应用，我们研究具有受控特征循环的全纯椭圆 $\mathcal{D}$-模族的有界性。

MSC：14J60，14F10，53C07 关键词：亚纯平坦丛， $\mathcal{D}$-模，亚纯拉格朗日覆盖，亚纯拉格朗日不规则性，有界性，非阿贝尔霍奇理论

1 引言

1.1 有界性

1.1.1 凝聚层的有界性

我们回顾一类凝聚层的有界性概念。设 X 是一个复光滑连通射影簇。若存在一个复代数簇 S 和一个在 S 上平坦的凝聚 $\mathcal{O}_{S\times X}$-模 $\mathcal{E}$，使其具有以下性质，则称凝聚 $\mathcal{O}_X$-模的一类 $\mathcal{C}$ 是有界的。

- 对于任意 $E\in\mathcal{C}$，存在 一个闭点 $s\in S$，使得 $\mathcal{E}$ 在 $s\times X$ 上的限制同构于 E。

例如，我们可以考虑秩和陈类固定的局部自由 $\mathcal{O}_X$-模的一类 $\mathcal{C}_1$。我们也可以考虑其子类 $\mathcal{C}_2\subset\mathcal{C}_1$，即半稳定层。于是很容易看出，除非 $\dim X=0$，否则 $\mathcal{C}_1$ 是无界的。众所周知， $\mathcal{C}_2$ 是有界的。

这种有界性蕴含各种有限性。例如，若某个类 $\mathcal{C}$ 有界，则存在$C>0$，使得对于任意 $E\in\mathcal{C}$和任意 $j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\dim H^j(X,E)<C$。

1.1.2 亚纯平坦丛的有界性

本文关注某些亚纯平坦丛族的有界性。尽管我们将研究任意特征零代数闭域上的射影簇上的亚纯平坦丛，但在本引言中，我们仅讨论复数情形，并采用复解析语言。

设 H 是 X的一个超曲面。设 $\mathcal{E}$ 是一个带有可积联络 ∇的相干 $\mathcal{O}_X(*H)$-模。用 $\mathrm{Mero}(X,H)$ 表示这类带有可积联络的相干 $\mathcal{O}_X(*H)$-模所构成的范畴。对于正整数 r和 N，用 $\mathrm{Mero}(X,H,r,N)$ 表示 $\mathrm{Mero}(X,H)$ 的全子范畴，其中由满足秩 $(V)\leq r$ 及以下条件的 $(V,\nabla)\in\mathrm{Mero}(X,H)$ 构成。

- 存在一个格 $\mathcal{L}\subset V$，使得 $\nabla(\mathcal{L})\subset\mathcal{L}\otimes\Omega^1(\log H)\otimes\mathcal{O}_X(NH)$。这里， V的格是指一个相干的 $\mathcal{O}_X$-子模，它在 $\mathcal{O}_X(*H)$ 上生成 V。

$\mathrm{Mero}(X,H,r,N)$有两类有界性结果。首先，我们有以下关于亚纯可积联络的有界性，这是推论 6.21 的一个特殊情形。

定理 1.1 存在一个光滑复代数簇 $\mathcal{S}_1$，以及一个相干无挠 $\mathcal{O}_{\mathcal{S}_1\times X}$-模 $E_{\mathcal{S}_1}$，其上带有亚纯可积联络

$$\nabla_{\mathcal{S}_1}:E_{\mathcal{S}_1}\to E_{\mathcal{S}_1}\otimes\Omega^1_{\mathcal{S}_1\times X/\mathcal{S}_1}\big(\log(\mathcal{S}_1\times H)\big)\big(N(\mathcal{S}_1\times H)\big)$$

相对于 $\mathcal{S}_1$，使得以下结论成立。

- $E_{\mathcal{S}_1}$ 是一个反身 $\mathcal{O}_{\mathcal{S}_1\times X}$-模，在 $\mathcal{S}_1$上平坦。对于任意 $s\in\mathcal{S}_1$， $E_{\mathcal{S}_1|a\times X}$ 都是反身的。
- 对任意$(V,\nabla)\in\mathcal{C}(X,H,r,\boldsymbol{m})$，存在 $s\in\mathcal{S}_1$ 使得$(E_{\mathcal{S}_1},\nabla_{\mathcal{S}_1})_{|s\times X}\otimes\mathcal{O}_X(*H)\simeq(V,\nabla)$。

我们还得到作为定理 8.3 的特殊情形而得到的、作为 $\mathcal{D}$-模的有界性。一般地，对光滑复代数簇之间的任意光滑态射 $X_T \to T$，令 $\mathcal{D}_{X_T/T}$ 表示 X_T相对于 T的线性微分算子层。对任意在 T上平坦的 $\mathcal{D}_{X_T/T}$-模 $\mathcal{N}$，以及对任意闭点 $u \in T$，令$\mathcal{N}_u$ 表示 $\mathcal{N}$ 在 $X_T \times_T u$上的限制。

定理 1.2 存在一个复代数簇 $\mathcal{S}$ 和一个在 $\mathcal{S}$ 上平坦的相干 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}\times X/\mathcal{S}}$-模 $\mathcal{M}$，使得以下结论成立。

- 对于任意 $(V,\nabla) \in \mathrm{Mero}(X,H,r,N)$，存在 $s \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ 使得 $\mathcal{M}_s \simeq (V,\nabla)$。

注 1.3 $E_{\mathcal{S}_1}(*(\mathcal{S}_1 \times H))$ 在定理 1.1 中一般不一定是 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}_1\times X/\mathcal{S}_1}$-相干的 .

由定理 1.2 可得以下上同调有界性 .

推论 1.4 存在一个常值 $C(X,H,r,N) > 0$，使得对于任意$(V,\nabla) \in \mathrm{Mero}(X,H,r,N)$，$\dim H^j(X, V\otimes\Omega^\bullet) < C(X,H,r,N)$。

根据 [11, 16],，Mero(X， H， r， N)的有界性由Esnault和Langer提出。Hu和Teyssier[11] 证明了维数 $\dim X \le 2$情形下的上同调有界性。他们对常值 C(X， H， r， N)得到了更为精细的上界。在 $X = \mathbb{P}^1$的情形下，Sabbah [27] 利用Arinkin-Katz纲领研究了刚性亚纯平坦丛的有限性。

1.1.3 具有受控特征循环的全纯椭圆 $\mathcal{D}$-模的有界性

与定理1.1和定理1.2中的有界性相关，我们研究特征循环受控的全纯椭圆 $\mathcal{D}$-模族的有界性。

对任意全纯椭圆 $\mathcal{D}_X$-模 M，存在良滤过 F。我们得到凝聚 $\mathcal{O}_{T^*X}$-模$\mathrm{Gr}^F(M)$~。支集Ch(M)是 T^*X中的复拉格朗日锥，称为特征簇。设Ch(M)= $\bigcup_i$Ch(M)$_i$表示不可约分解。特征循环CC(M)= $\sum_i$CC(M)$_i$Ch(M)$_i$是一个更精细的不变量，其中CC(M)$_i$表示Ch(M)$_i$在$\mathrm{Gr}^F(M)$~中的重数。

设 $\Lambda_i (i = 1, \ldots\ldots, \ell)$ 是 T^*X 中的复拉格朗日锥。我们得到一个循环 $\Lambda = \sum_{i=1}^{\ell} m_i\Lambda_i$。若 CC($M$) $\le \Lambda$，且 CC(M) $= \sum_{i=1}^{\ell} a_i\Lambda_i$，其中 $a_i \le m_i$，则称 CC(M) $\le \Lambda$。令 $\mathcal{C}$(X， Λ) 表示满足 CC(M) $\le \Lambda$ 的全纯椭圆 $\mathcal{D}_X$-模 M 的族。

定理 1.5（定理 8.4，引理 8.10） 族 $\mathcal{C}$（X， Λ） 是有界的，具体而言，存在一个复代数簇 S 和一个相干 $\mathcal{D}_{S\times X/S}$-模 $\mathcal{M}$，使得下述结论成立。

- $\mathcal{M}$ 在 S 上是平坦的，并且对任意 $s \in S$，都有 $\mathcal{M}_s \in \mathcal{C}$（$X$， Λ）。
- 对于任意 $M \in \mathcal{C}$（X， Λ），存在 $s \in S$ 使得 $M \simeq \mathcal{M}_s$。

1.2 良好亚纯平坦丛

设 X 为一个带有正规交叉超曲面 H的复射影流形。我们回顾良好亚纯平坦丛的概念。

1.2.1 分歧不规则值的良好集

令 $\mathcal{O}_X$ 表示全纯函数层。令 $\mathcal{O}_X$(∗H)表示允许沿 H有极点的亚纯函数层。在 $P \in H$处的茎记为$\mathcal{O}_X$、$_P$和 $\mathcal{O}_X$(∗H)$_P$。$\mathcal{O}_X$、$_P$的完备化记为$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }\mathcal{O}_X$、$_P$。设 $\mathcal{O}_X(*H)_P = \mathcal{O}_X(*H)_P \otimes \mathcal{O}_X$、$_P$。设 $(z_1,\ldots,z_n)$ 是 P附近的一个局部坐标，使得$H = \bigcup_{j=1}^{\ell}\{z_j = 0\}$ 在 P附近成立。对于任意正整数 k，设 $\mathcal{O}_X^{(H,k)}$、$_P = \mathcal{O}_X$、$_P[z_1^{1/k},\ldots,z_\ell^{1/k}]$。这与坐标系的选择无关。我们还设 $\widehat{\mathcal{O}}_X^{(H,k)}$、$_P = \mathcal{O}_X^{(H,k)}$、$_P \otimes \widehat{\mathcal{O}}_X$、$_P$。我们类似地考虑 $\mathcal{O}_X^{(H,k)}(*H)_P$ 和$\widehat{\mathcal{O}}_X^{(H,k)}(*H)_P$。

我们回顾一下 $\mathfrak{a}$ of $\widehat{\mathcal{O}}_X^{(H,k)}(*H)_P$ 中元素的阶的概念。

- 若 $\mathfrak{a}$包含于 $\widehat{\mathcal{O}}_{(H,\,k)X,\,P}$，则在 $\mathbb{Z}^\ell$ 中令 ord($\mathfrak{a}$) $=(0,\ \ldots,\ 0)$。

- 对于任意 $\mathfrak{a} \in \widehat{\mathcal{O}}_{(H.k)X}(*H)_P \setminus \widehat{\mathcal{O}}_{(H,\ k)X,\ P}$，若存在 $\boldsymbol{m} \in (\frac{1}{k}\mathbb{Z})^{\ell}_{\leq 0}$，使得 $\prod_{i=1}^{\ell} z_i^{-m_i}\mathfrak{a}$ 是 $\widehat{\mathcal{O}}_{(H,\ k)X,\ P}$ 中的可逆元素，则令 $\mathrm{ord}(\mathfrak{a}) = \boldsymbol{m}$。

- 否则，$\mathrm{ord}(\mathfrak{a})$ 未定义。

例如，$\mathrm{ord}(z_1^{-1}z_2^{-1}) = (-1,\ -1)$。但是，$\mathrm{ord}(z_1^{-1}z_2)$ 和 $\mathrm{ord}(z_1^{-1} + z_2^{-1})$ 未定义。对于任意 $\mathfrak{a} \in \widehat{\mathcal{O}}_X^{(H,k)}(*H)_P/\widehat{\mathcal{O}}_{X\ P}^{(H,k)}$，，我们也可以考虑 $\mathrm{ord}(\mathfrak{a})$。

我们在 $(\frac{1}{k}\mathbb{Z})^{\ell}$ 上定义偏序如下：$-\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{m}' \Longleftrightarrow \forall i,\ \ m_i \leq m_i'$。

定义 1.6 设 $\mathcal{I} \subset \widehat{\mathcal{O}}_X^{(H,k)}(*H)_P/\widehat{\mathcal{O}}_{X\ P}^{(H,k)}$，为一个在伽罗瓦作用下不变的有限子集。若满足以下条件，则称其为良好。

- $\mathrm{ord}(\mathfrak{a})$ 对任意 $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}$ 均有定义，且 $\mathrm{ord}(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})$ 对任意 $\mathfrak{a}$、$\mathfrak{b} \in \mathcal{I}$ 均有定义。
- 集合 $\{\mathrm{ord}(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a} \in \mathcal{I}\}$ 和 $\{\mathrm{ord}(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) \mid \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathcal{I}\}$ 关于偏序 $\leq$ 在 $(\frac{1}{k}\mathbb{Z})^{\ell}$ 上是全序的。

例如，集合 $\{z_1^{-1}z_2^{-1}, z_1^{-1}, 0\}$ 是良好的，但 $\{z_1^{-1}z_2^{-1}, z_1^{-1}, z_2^{-1}, 0\}$ 则不是。

注 1.7 虽然这些概念是针对 $\mathbb{C}[\![z_1^{1/k}, \ldots, z_\ell^{1/k}, z_{\ell+1}, \ldots, z_n]\!][z_1^{-1}, \ldots, z_\ell^{-1}]$ 的有限子集进行解释的，但显然可以推广到任意环 R 的有限子集的情形。

1.2.2 良好亚纯平坦丛

设 $\mathcal{E}$ 是带有可积联络的局部自由 $\mathcal{O}_X(*H)$-模。对于 $P \in H$，我们令 $\widehat{\mathcal{E}}_P^{(H,k)} = \mathcal{E}_P \otimes \widehat{\mathcal{O}}_{X\ P}^{(H,k)}$，。我们称 $(\mathcal{E}, \nabla)$ 在 P 处是良好的，如果存在良好集合 $\mathcal{I}_P(\mathcal{E}, \nabla) \subset \widehat{\mathcal{O}}_X^{(H,k)}(*P)/\widehat{\mathcal{O}}_{X\ P}^{(H,k)}$，以及一个分解

$$(\widehat{\mathcal{E}}_P^{(H,k)}, \nabla) = \bigoplus_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}_P(\mathcal{E},\nabla)} ((\widehat{\mathcal{E}}_P^{(H,k)})_{\mathfrak{a}}, \nabla_{\mathfrak{a}})$$

使得每个 $(\widehat{\mathcal{E}}_P^{(H,k)})_{\mathfrak{a}}$ 都有一个格 $\widehat{\mathcal{L}}_{P,\mathfrak{a}}$，使得 $(\nabla_{\mathfrak{a}} - d\widetilde{\mathfrak{a}}\,\mathrm{id})\,\widehat{\mathcal{L}}_{P,\mathfrak{a}} \subset \widehat{\mathcal{L}}_{P,\mathfrak{a}} \otimes \Omega^1_X(\log\ H)$。这里，$\widetilde{\mathfrak{a}} \in \widehat{\mathcal{O}}_X^{(H,k)}(*H)_P$ 是 $\mathfrak{a}$ 的提升。我们称 $(\mathcal{E}, \nabla)$ 在 (X, H) 上是良好的，如果它在任意 $P \in H$ 处都是良好的。

备注 1.8 众所周知，$\mathcal{I}_P(\mathcal{E}, \nabla) \subset \mathcal{O}_X^{(H,k)}(*P)/\mathcal{O}_{X\ P}^{(H,k)}$，。

1.2.3 良好亚纯平坦丛作为亚纯对象的有界性

设 $\mathcal{X}_S \to S$ 是光滑复代数簇之间的光滑射影态射，且每个纤维均连通。设 $\mathcal{H}_S \subset \mathcal{X}_S$ 是相对正规交叉超曲面。

对于任意 $s \in S$，我们令 $(\mathcal{X}_s,\ \mathcal{H}_s) = (\mathcal{X}_S,\ \mathcal{H}_S) \times_S s$。令 $\mathrm{Mero}^{\mathrm{good}}(\mathcal{X}_s,\ \mathcal{H}_s,\ r,\ N)$ 表示 $\mathrm{Mero}(\mathcal{X}_s,\ \mathcal{H}_s,\ r,\ N)$ 的全子范畴，其中由包含在 $\mathrm{Mero}(\mathcal{X}_s,\ \mathcal{H}_s,\ r,\ N)$ 中的良好亚纯平坦丛构成。令 $S(\mathbb{C})$ 表示 S 的闭点集合。

定理 1.9（定理 6.18） 族 $\mathrm{Mero}^{\mathrm{good}}(\mathcal{X}_s, \mathcal{H}_s, r, N)\ (s \in S(\mathbb{C}))$ 在以下意义下是有界的。

- 存在一个光滑复代数簇 $\mathcal{S}$，其上方为 S。我们设定 $(\mathcal{X}_{\mathcal{S}}, \mathcal{H}_{\mathcal{S}}) := (\mathcal{X}_S, \mathcal{H}_S) \times_S \mathcal{S}$。
- 存在一个局部自由的 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathcal{S}}}$-模 $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$，其配备亚纯可积相对联络 $\nabla_{\mathcal{S}} : \mathcal{L}_{\mathcal{S}} \to \mathcal{L}_{\mathcal{S}} \otimes \Omega^1_{\mathcal{X}_{\mathcal{S}}/\mathcal{S}}$(对数 $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$)$(N\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$。
- 对于任意 $s \in S(\mathbb{C})$ 以及 $(V, \nabla) \in \mathrm{Mero}^{\text{良好}}(\mathcal{X}_s, \mathcal{H}_s, r, N)$，存在 $\widetilde{s} \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ 位于 s 上，使得 $(V, \nabla) \simeq (\mathcal{L}(*\mathcal{H}_{\mathcal{S}})\ \nabla)_{|\widetilde{s} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{X}_{\mathcal{S}}}$。此外，$\mathcal{L}_{|\widetilde{s} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{X}_{\mathcal{S}}}$ 等于 (V, ∇)的良好的 ***Deligne-Malgrange*** 格。

我们指出，定理 1.9 中的有界性，一旦我们在 §4 中得到良好的 Deligne-Malgrange 格的第一和第二陈类的估计，便可归结为 Maruyama [20] 关于无挠凝聚层的一个更为经典的有界性结果（见命题 5.30）。

1.2.4 转折点的消解

若维数为 $X = 1$，则由经典的 Hukuhara-Levelt-Turrittin 定理，任意亚纯平坦丛都是良好的。然而，若维数为 $X \geq 2$，则存在并非良好的亚纯平坦丛。下面的定理由 Sabbah 猜想，并由 Kedlaya 在 [14, 15] 以及作者在 [23, 24] 中证明。注意，Kedlaya 的结果更为一般，不仅适用于代数情形，也适用于复解析情形。

定理 1.10 存在一个射影态射 $\varphi\colon X' \to X$，使得 *(i)* $H' = \varphi^{-1}(H)$ 是正规交叉的，*(ii)* $X' \setminus H' \simeq X \setminus H$，*(iii)* $\varphi^*(\mathcal{E}, \nabla)$ 在 (X', H') 上是良好的。 ∎

为了研究不一定良好的亚纯平坦丛族的有界性，我们必须控制这些消解。

1.2.5 消解与有界性

设 X 是一个带有简单正规交叉超曲面 H 的光滑射影不可约复代数簇。设 r 和 N 为正整数。作为定理 6.20 和定理 8.2 的特殊情形，我们得到以下关于 $\mathcal{C}(X, H, r, N)$ 的一个更实用的有界性定理。

定理 1.11 存在一个光滑复代数簇 $\mathcal{S}$、一个在上光滑射影的复代数簇及态射 $\rho_{\mathcal{S}}\colon X_{\mathcal{S}} \to \mathcal{S} \times X$（在 $\mathcal{S}$ 上）、一个相对于 $\mathcal{S}$ 正规交叉的超曲面 $H_{\mathcal{S}} \subset X_{\mathcal{S}}$、一个在 $(X_{\mathcal{S}}, H_{\mathcal{S}})$ 上相对于 $\mathcal{S}$ 良好的亚纯平坦丛 $(\mathcal{V}, \nabla)$，以及一个格 $E_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{V}$，使得以下结论成立。

- $\rho_{\mathcal{S}}^{-1}(\mathcal{S} \times H) = \widehat{H}_{\mathcal{S}}$，以及 $\widehat{X}_{\mathcal{S}} \setminus \widehat{H}_{\mathcal{S}} \simeq \mathcal{S} \times (X \setminus H)$。
- 对于任意的 $(V, \nabla) \in \mathcal{C}(X, H, r, N)$，存在 $s \in \mathcal{S}$ 使得 $\rho_s^*(V, \nabla) \simeq (\mathcal{V}, \nabla)_s$，并且 E_s 是 $\rho_s^*(V, \nabla)\widehat{\ }$ 的 *Deligne-Malgrange* 格。

还存在一个在 $\mathcal{S}$ 上平坦的相干 $\mathcal{D}_{\widehat{X}_{\mathcal{S}}/\mathcal{S}}$-模 $\mathcal{M}$，使得以下结论成立。

- $\mathcal{M}(*\widehat{H}_{\mathcal{S}}) = \mathcal{V}$。
- 对于任意的 $(V, \nabla) \in \mathcal{C}(X, H, r, N)$，存在 $s \in \mathcal{S}$ 使得 $\rho_s^*(V, \nabla) \simeq \mathcal{M}_s$。

通过推前，我们从定理 1.11 得到定理 1.1 和定理 1.2。我们还应用定理 1.11 来研究定理 1.5。

1.3 定理 1.11 的概要

1.3.1 亚纯拉格朗日覆盖

设 $\Sigma \subset T^*(X \setminus H)$ 是一个闭代数子集，其中每个不可约分支都支配 $X \setminus H$ 且在其上是真映射。我们还假设 Σ 的光滑部分是拉格朗日的。这样的 Σ 称为亚纯拉格朗日覆盖。我们引入一个条件，用于描述亚纯拉格朗日覆盖在边界附近的良好性质。

定义 1.12 设 $x \in H$。若存在一个良分歧不规则值集 $\mathcal{I}(\Sigma, x) \subset \mathcal{O}_X^{(H,k)}(*H)_x / \mathcal{O}_{X,x}^{(H,k)}$，以及一个覆盖 $\rho_x\colon X'_x \to X_x$，其分歧沿着 $H \cap X_x$，使得

$$\rho_x^*\Sigma = \bigsqcup_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\Sigma, x)} \left(d\mathfrak{a} + \Sigma_{\mathfrak{a}}\right),$$

其中 $\Sigma_{\mathfrak{a}}$ 是对数的，即在 $T^*X'_x(\log H'_x)$ 中的闭包在 X'_x 上是真映射。这里，$H'_x = \rho_x^{-1}(H_x)$。

我们称 Σ 在 (X, H) 上是良好的，如果 Σ 在任意 $x \in H$ 处是良好的。 ∎

对于正整数 r 和 N，令 $\mathrm{Lag}(X, H, r, N)$ 表示亚纯拉格朗日覆盖 Σ 的集合，使得 $T^*X(\log H)(NH)$ 中的闭包 Σ 在 X 上是真的，并且投影 $\Sigma \to X \setminus H$ 的次数小于 r。该族是有界的，我们可以以一致的方式取一个消解。

命题 1.13（推论 2.67） 存在一个复光滑簇 S、一个在 S 上平坦的闭子集 $\mathcal{Z} \subset S \times T^*(X \setminus H)$，以及一个射影态射 $\varphi\colon \mathcal{X}_S \to S \times X$，使得下列结论成立。

- $\mathcal{X}_S \to S$ 是光滑且射影的，并且 $\mathcal{H}_S = \varphi^{-1}(S \times H)$ 相对于 S 是正规交叉的。
- $\mathcal{X}_S \setminus \mathcal{H}_S \simeq S \times (X \setminus H)$，
- 对于任意 $\Sigma \in$ 拉格朗日(X, H, r, N)，存在 $s \in S(\mathbb{C})$ 使得 $\mathcal{Z} \times_S s = \Sigma$。此外，$\varphi_s^*(\Sigma)$ 在 $(\mathcal{X}_s, \mathcal{H}_s)$ 上是良好的，其中 $\varphi_s\colon \mathcal{X}_S \times_S s \to X$ 由 φ 诱导。 ∎

1.3.2 野调和丛

设 (E,θ) 是复流形 Y 上的 Higgs 丛。设 h 是 E 的埃尔米特度量。我们得到陈联络 ∇_h，以及 θ 的伴随 $\theta_h^\dagger$。如果联络 $\mathbb{D}_h^1=\nabla_h+\theta+\theta_h^{\dagger\sim}$ 是平坦的，则称 (E,θ,h) 为调和丛。对于 Higgs 丛 (E,θ)，我们有相应的 $\mathcal{O}_{T^*Y}$-模 E，其支集在 Y 上是有限的。支集 Σ_θ 称为谱覆盖。利用 Gabber 定理 [4], ，如果 (E,θ) 由调和丛 (E,θ,h) 诱导，则 Σ_θ 是拉格朗日的。

设 X 是一个光滑射影复代数簇，其上有一个正规交叉超曲面 H。设 $(E,\ \theta,\ h)$ 是 $X\setminus H$ 上的调和丛。如果 Σ_θ 是一个亚纯拉格朗日覆盖，即 Σ_θ 是 $T^*(X\setminus H)$ 的一个代数子集，则称 $(E,\ \theta,\ h)$ 在 $(X,\ H)$ 上是野的。如果 Σ_θ 在 $(X,\ H)$ 上是良好的，则称该调和丛在 $(X,\ H)$ 上是良好的。

1.3.3 相关亚纯对象

由 $X\setminus H$ 上的 $(E,\ \partial_E,\ \theta,\ h)$ 上的调和丛，我们得到 $X\setminus H$ 上的平坦丛 $(E,\ \mathbb{D}_h^1)$。其底层的全纯向量丛为 $\mathcal{E}^1=(E,\ \partial_E+\theta_h^\dagger)$。我们将其视为一个 $\mathcal{O}_{X\setminus H}$-模。令 $\iota:\ \overline{X}\setminus H\to X$ 表示包含映射。于是我们在 X 上得到层 $\iota_*(\mathcal{E}^1)$。

对于任意 $x\in H$，令 $(X_x,\ z_1,\ \ldots,\ z_n)$ 为一个坐标邻域，使得 $X_x\cap H=\bigcup_{j=1}^{\ell}\{z_j=0\}$。我们得到一个 $\mathcal{O}_X(*H)_x$-模

$$(\mathcal{P}^h\mathcal{E}^1)_x:=\Big\{s\in(\iota_*\mathcal{E}^1)_x\ \Big|\ |s|_h=O\Big(\prod_{i=1}^{\ell}|z_i|^{-C}\Big)\ \ \exists C>0\Big\}.$$

我们得到一个 $\mathcal{O}_X(*H)$-模 $\mathcal{P}^h\mathcal{E}^1\subset\iota_*\mathcal{E}^1$，其在 x 处的茎为 $(\mathcal{P}^h\mathcal{E}^1)_x$。我们回顾来自[24]的以下命题。

命题 1.14

- $\mathcal{P}^h\mathcal{E}^1$ 是一个相干 $\mathcal{O}_X(*H)$-模，且 $\mathbb{D}_h^1$ 是 $\mathcal{P}^h\mathcal{E}^1$ 的一个可积联络。此外，$(\mathcal{P}^h\mathcal{E}^1,\mathbb{D}_h^1)\in\mathrm{Mero}(X,H,r,N)$ 当且仅当 $\Sigma_\theta\in\mathrm{Lag}(X,H,r,N)$。
- $(E,\partial_E^-,\theta,h)$ 在 (X,H) 上是良好的，当且仅当 $(\mathcal{P}^h\mathcal{E}^1,\mathbb{D}_h^1)$ 在 (X,H) 上是良好的。对于任意 ., 我们有 $\mathcal{I}(\mathcal{P}^h\mathcal{E}^1,\mathbb{D}_h^1,$ $\{2\mathfrak{a}\,|\,\mathfrak{a}\in\mathcal{I}\ \Sigma_\theta\ x\ \}\qquad x\in H$) (,)

我们有如下定理 [24]。

定理 1.15 对于 (V,∇) 上的任意半单亚纯平坦丛，在 (X,H) 上存在一个野调和丛 (E,θ,h)，使得 $(\mathcal{P}^h\mathcal{E}^1,\mathbb{D}_h^1)\simeq(V,\nabla)$。

设 (V,∇) 是 (X,H) 上的亚纯平坦丛。存在一个 Jordan-H¨older 滤过，即每个分次部分都是简单的。由上述定理，我们得到与伴随分次亚纯平坦丛相对应的调和丛 (E,θ)。我们定义 $\Sigma(V,\nabla):=\Sigma_\theta$。

推论 1.16 设 $\varphi:\ X'\to X$ 是一个射影态射，使得 *(i)* $H'=\varphi^{-1}(H)$ 是正规交叉， *(ii)* $\varphi^*\Sigma(V,\nabla)$ 在 (X',H') 上是良好的。那么，$\varphi^*(V,\nabla)$ 在 (X',H') 上是良好的。

注记 1.17 我们将引入亚纯拉格朗日不规则性的概念，它是亚纯拉格朗日覆盖的等价类。我们将为一个亚纯平坦丛关联一个亚纯拉格朗日不规则性。

1.3.4 定理 1.11 证明概要

对于 (X,H,r,N)，存在一个光滑复代数簇 S 和一个射影态射 $\varphi:\ \mathcal{X}_S\to S\times X$ over S，以及一个正规交叉超曲面 $\mathcal{H}_S$，如命题 1.13 所述。存在 $N'>0$，使得 $\mathcal{Z}$ 在 $T^*(\mathcal{X}_S/S)(\log\mathcal{H}_S)(N'\mathcal{H}_S)$ 中的闭包在 $\mathcal{X}_S$ 上是真态射。存在 $\mathcal{S}\to S$ 和 $(\mathcal{L}_\mathcal{S},\nabla)$，如定理 1.9 所述，其中 N'。

我们有由 $\mathcal{X}_S\to S\times X$ 诱导的态射 $\varphi_\mathcal{S}:\ \mathcal{X}_\mathcal{S}\to\mathcal{S}\times X$。我们设

$$(\mathcal{V},\nabla)=\big((\varphi_\mathcal{S})_*\big(\mathcal{L}(*\mathcal{H}_\mathcal{S})\big),\nabla\big).$$

通过取一个分层，我们可以假设它在 $\mathcal{S}$ 上是平坦的。我们还可以假设 $(\mathcal{V},\nabla)$ 有一个相对于 $\mathcal{S}$ 的良格 $\mathcal{L}_1$。

令 $(V,\nabla)\in\mathrm{Mero}(X,H,r,N)$。我们有 $\Sigma(V,\nabla)\in\mathrm{Lag}(X,H,r,N)$。存在 $s\in S$，使得 $\varphi_s^*(\Sigma(V,\nabla))$ 在 $(\mathcal{X}_s,\mathcal{H}_s)=(\mathcal{X}_S,\mathcal{H}_S)_s$ 上是良好的。这意味着 $\varphi_s^*(V,\nabla)$ 在 $(\mathcal{X}_s,\mathcal{H}_s)$ 上是良好的。存在 $\widetilde{s}\in\mathcal{S}$ 在 s 上，使得 $(\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\mathcal{S}}(*\mathcal{H}_\mathcal{S})\ \nabla)_{\widetilde{s}}\simeq\varphi_s^*(V,\nabla)$。通过考虑由 $\mathcal{L}_1(N_1\mathcal{H}_\mathcal{S})$ 生成的 $\mathcal{D}_{\mathcal{X}_\mathcal{S}/\mathcal{S}}$-模（其中 N_1 充分大），我们可以构造具有所需性质的相干 $\mathcal{D}_{\mathcal{X}_\mathcal{S}/\mathcal{S}}$-子模 $\mathcal{M}$。

致谢 本研究部分受到了 Maxim Kontsevich 提出的算术支撑思想的启发。亚纯平坦丛的有界性是作者在 2024年9月 于高等科学研究所举办的“世纪交汇处的数学”会议报告中讨论的三个主题之一。作者还在 2025年11月 于越南科学技术翰林院数学研究所举办的代数—几何—数论会议上，以及 2026年1月 于曼海姆大学举办的积分斯托克斯结构及其应用研讨会上，就这一主题作了报告。感谢组织者提供这次机会。

感谢克洛德·萨巴在多次讨论中给予的帮助，以及他的友善。

我部分获得了日本学术振兴会的科学研究费补助金（A）（编号：21H04429）、科学研究费补助金（A）（编号：22H00094）、科学研究费补助金（A）（编号：23H00083）、科学研究费补助金（C）（编号：20K03609）和科学研究费补助金（C）（编号：25K06973）的资助。我还部分获得了数理科学研究所的资助。该研究所是位于京都大学的国际联合利用／研究中心。

2 拉格朗日亚纯覆盖

2.1 向量空间的对称积

2.1.1 Chow嵌入

设 $\mathbb{K}$ 为特征零的代数闭域。设 V 为有限维 $\mathbb{K}$-向量空间。我们也将 V 视为 $\mathbb{K}$-簇。设 r 为正整数。令 $\mathfrak{S}_r$ 表示作用于$_rV^r = V \times \cdots \times V$上的 r次对称群，其作用为置换各分量。令 $S^r(V)$表示商空间，即 $S^r(V) = V^r/\mathfrak{S}_r$。$(v_1, \ldots, v_r) \in V^r$ 在 $S^r(V)$ 中的像记为 $\prod_{i=1}^r v_i$。令 $\left[\prod_{i=1}^r v_i\right] \subset V$ 表示由元组 $v_1, \ldots, v_r$ 诱导的子集。

令 $\mathrm{Sym}^r(\mathbb{K} \oplus V)$ 表示由 $\mathbb{K} \oplus V$ 的第 r 次对称张量积得到的向量空间。我们也将其视为一个 $\mathbb{K}$-簇。设 $\iota : V \to \mathbb{K} \oplus V$ 由 $\iota(v) = 1 \oplus v$ 给出。由此得到 $\mathbb{K}$-簇之间的态射$S^r(V) \to \mathrm{Sym}^r(\mathbb{K} \oplus V)$，定义如下：

$$\prod_{i=1}^r v_i \longmapsto \prod_{i=1}^r \iota(v_i).$$

根据 Chow 和 van der Wearden 定理（见 [5, §4.1，定理 1.1]），它是代数 $\mathbb{K}$-簇的一个闭浸入。

2.1.2 分拆

对于任意闭点 $\alpha \in S^r(V)$，存在 $\alpha_i \in V$ 和 $m_i \in \mathbb{Z}_{>0} (i = 1, \ldots\ldots, \ell(\alpha))$，使得 $\alpha_i \neq \alpha_j (i \neq j)$、$m_i \geq m_j (i \leq j)$ 且 $\alpha = \prod_{i=1}^{\ell(\alpha)} \alpha_i^{m_i}$。元组 $(m_i \,|\, i = 1, \ldots\ldots, \ell(\alpha))$ 是 r 的一个分拆，记作 $\mathrm{P}(\alpha)$。数 $\ell(\alpha)$ 和分拆 $\mathrm{P}(\alpha)$ 对于 $\alpha \in S^r(V)$ 是良定义的。

2.1.3 按分拆分层

设 $\mathrm{P} = (m_1, \ldots, m_\ell)$ 是 r 的一个分拆，即 P 是一个递减的正整数序列，满足 $\sum m_i = r$。令 $I_m(\mathrm{P}) = \{1 \leq i \leq \ell \,|\, m_i = m\}$。我们得到分解 $\{1, \ldots, \ell\} = \bigsqcup I_m(\mathrm{P})$，据此 $V^\ell = \prod V^{I_m(\mathrm{P})}$。令$\mathfrak{S}_{I_m(\mathrm{P})}$ 表示有限子集 $I_m(\mathrm{P})$ 的自同构群，它同构于 $\mathfrak{S}_{|I_m(\mathrm{P})|}$。$V^{I_m(\mathrm{P})}$ 上的自然$\mathfrak{S}_{I_m(\mathrm{P})}$ 诱导了 $\prod \mathfrak{S}_{I_m(\mathrm{P})}$ 在 V^ℓ 上的作用。商自然同构于 $\prod S^{|I_m(\mathrm{P})|}(V)$。

我们得到有限态射 $\Psi_\mathrm{P} \colon V^\ell \to S^r(V)$，其定义为 $\Psi_\mathrm{P}(v_1, \ldots, v_\ell) = \prod_{i=1}^\ell v_i^{m_i}$。令 $S^r_\mathrm{P}(V)$ 表示 Ψ_P 的像，赋予约化结构。它也是诱导态射 $\prod S^{|I_m(\mathrm{P})|}(V) \to S^r(V)$ 的像。令 $(V^\ell)^\circ \subset V^\ell$ 表示 $(v_1, \ldots, v_\ell)$ 的 Zariski 开子集，使得 $v_i \neq v_j (i \neq j)$。令 $S^r_\mathrm{P}(V)^\circ$ 表示 $(V^\ell)^\circ$ 在 Ψ_P 下的像。它是 $S^r_\mathrm{P}(V)$ 中的一个 Zariski 开子集。我们有 $(V^\ell)^\circ / \prod \mathfrak{S}_{I_m(\mathrm{P})} \simeq S^r_\mathrm{P}(V)^\circ$。

令 $\mathrm{P}_1 = (m_i \,|\, i = 1, \ldots\ldots, \ell)$ 和 $\mathrm{P}_2 = (n_j \,|\, j = 1, \ldots\ldots, k)$ 为 r 的分拆。若满足以下条件，则称 $\mathrm{P}_1 \prec \mathrm{P}_2$。

- 存在一个满射 $\varphi \colon \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, \ell\}$，使得 $m_i = \sum_{\varphi(j) = i} n_j$。

这在 r 的分拆集合上定义了一个偏序 $\prec$。我们有 $S^r_\mathrm{P}(V) = \bigsqcup_{\mathrm{P} \prec \mathrm{P}'} S^r_{\mathrm{P}'}(V)^\circ$。特别地，我们得到 $S^r(V)$ 按局部扎里斯基闭子集 $S^r(V) = \bigsqcup_\mathrm{P} S^r_\mathrm{P}(V)^\circ$ 的分层。

2.1.4 泛子集

对于 $j=1,\dots,r$，我们令 $\Delta_{0,j}(V)=\{(v_0,v_1,\dots,v_r)\mid v_0=v_j\}\subset V\times V^r$。我们令 $Z(V^r)=\bigcup_{j=1}^r\Delta_{0,j}(V)$。$\mathfrak{S}_r$ 对 V^r 的作用诱导出 $\mathfrak{S}_r$ 对 $Z(V^r)$ 的作用。令 $Z(S^r(V))$ 表示该商空间。它自然是 $V\times S^r(V)$ 的一个闭子簇。我们有自然定义的有限态射 $Z(S^r(V))\to S^r(V)$。

设 $\mathrm{P}=(m_1,\dots,m_\ell)$ 是 r 的一个分拆。我们得到

$$Z(S^r_{\mathrm{P}}(V)^\circ):=Z(S^r(V))\times_{S^r(V)}S^r_{\mathrm{P}}(V)^\circ,\qquad Z(S^r_{\mathrm{P}}(V)):=Z(S^r(V))\times_{S^r(V)}S^r_{\mathrm{P}}(V).$$

设 $Z(S^r_{\mathrm{P}}(V)^\circ)_{\mathrm{red}}$ 和 $Z(S^r_{\mathrm{P}}(V))_{\mathrm{red}}$ 表示 $Z(S^r(V))$ 中带有约化结构的子簇。投影$Z(S^r_{\mathrm{P}}(V)^\circ)_{\mathrm{red}}\to S^r_{\mathrm{P}}(V)^\circ$是次数为 ℓ 的真平展覆盖。投影 $Z(S^r_{\mathrm{P}}(V))_{\mathrm{red}}\to S^r_{\mathrm{P}}(V)$ 是有限态射。

2.1.5 诱导有限态射

设 Y 是一个不可约的 $\mathbb{K}$-簇，且有一个从代数 $\mathbb{K}$-簇 $Y\to S^r(V)$ 到 Y 的态射 ϕ:。设 $\Sigma(\phi)$ 表示 ϕ 与 $Z(S^r(V))\to S^r(V)$ 的纤维积。自然态射 $\Sigma(\phi)\to Y$ 是有限的。对于任意闭点 $y\in Y$， $\Sigma(\phi)\times_Y y$ 的闭点集合是由 $\phi(y)\in S^r(V)$ 给出的元组。

存在唯一的分拆 $\mathrm{P}(\phi)$，使得 $\phi(Y)\subset S^r_{\mathrm{P}(\phi)}(V)$，并且 $U(\phi)\colon=\phi^{-1}(S^r_{\mathrm{P}(\phi)}(V)^\circ)\neq\emptyset$。我们将 $\Sigma(\phi)_{\mathrm{red}}$ 定义为 $Z(S^r_{\mathrm{P}}(V))_{\mathrm{red}}$ 与 Y 的纤维积。令 $\Sigma(\phi)^\circ_{\mathrm{red}}$ 表示 $\Sigma(\phi)_{\mathrm{red}}$ 与$U(\phi)$ 的纤维积。投影 $\Sigma(\phi)^\circ_{\mathrm{red}}\to U(\phi)$ 是一个次数为 ℓ 的真平展覆盖。

2.2 向量丛的对称积

2.2.1 对称积与局部闭子集

设 X 是定义在 $\mathbb{K}$ 上的不可约正规代数簇。积丛 $X\times\mathrm{Spec}\ \mathbb{K}[t]$ 也记作 $\mathcal{O}_X$。

设 $\mathcal{E}$ 是 X 上的代数向量丛。令 $S^r(\mathcal{E})$ 为 $\mathcal{E}^r=\overbrace{\mathcal{E}\times_X\cdots\times_X\mathcal{E}}^{r}$ 在 $\mathfrak{S}_r$ 的自然作用下所得的商。与 §2.1.1 中一样，存在 Chow嵌入

$$S^r\big(\mathcal{E}\big)\longrightarrow\mathrm{Sym}^r\big(\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{E}\big).$$

我们将 $S^r(\mathcal{E})$ 视为 $\mathrm{Sym}^r\big(\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{E}\big)$ 的扎里斯基闭子集。

引理 2.1 设 $Z\subset X$ 为满足 $\dim Z\leq\dim X-2$ 的闭子集。 $X\setminus Z$上 $S^r(\mathcal{E})$ 的任意截面 ϕ 可唯一延拓为 X上 $S^r(\mathcal{E})$ 的截面。

证明 设 ϕ为 $X\setminus Z$上 $\mathrm{Sym}^r(\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{E})$ 的诱导截面。它可唯一延拓为 X上 $\mathrm{Sym}^r(\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{E})$ 的截面。由于 $S^r(\mathcal{E})$ 在 $\mathrm{Sym}^r(\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{E})$ 中是闭的，它经由 $S^r(\mathcal{E})$ 分解。∎

对 r 的任意分拆 P，我们如 §2.1.3 中那样得到闭子簇 $S^r_{\mathrm{P}}(\mathcal{E})\subset S^r(\mathcal{E})$，使得 $S^r_{\mathrm{P}}(\mathcal{E})$ 在 $x\in X$ 上的纤维为 $S^r_{\mathrm{P}}(\mathcal{E}_{|x})$。类似地，我们得到 Zariski 开子集 $S^r_{\mathrm{P}}(\mathcal{E})^\circ\subset S^r_{\mathrm{P}}(\mathcal{E})$，使得 $S^r_{\mathrm{P}}(\mathcal{E})^\circ$在 $x\in X$ 上的纤维为 $S^r_{\mathrm{P}}(\mathcal{E}_{|x})^\circ$。

根据§2.1.4中的构造，我们得到扎里斯基闭子集 $Z(S^r_{\mathrm{P}}(\mathcal{E}))_{\mathrm{red}}\subset\mathcal{E}\times_X S^r_{\mathrm{P}}(\mathcal{E})$，使得 $x\in X$ 上的纤维为 $Z(S^r_{\mathrm{P}}(\mathcal{E}_{|x}))_{\mathrm{red}}$。诱导态射 $Z(S^r_{\mathrm{P}}(\mathcal{E}))\to S^r_{\mathrm{P}}(\mathcal{E})_{\mathrm{red}}$ 是有限的。我们有闭子集 $Z(S^r_{\mathrm{P}}(\mathcal{E})^\circ)_{\mathrm{red}}\subset\mathcal{E}\times_X S^r_{\mathrm{P}}(\mathcal{E})^\circ$，使得 $x\in X$上的纤维为 $Z(S^r_{\mathrm{P}}(\mathcal{E}_{|x})^\circ)_{\mathrm{red}}$。诱导态射$Z(S^r_{\mathrm{P}}(\mathcal{E})^\circ)_{\mathrm{red}}\to S^r_{\mathrm{P}}(\mathcal{E})^\circ$是次数为 ℓ的适当且仿射平展，其中$\mathrm{P}=(m_1,\dots,m_\ell)$。

2.2.2 与截面相伴的有限覆盖

设 $\phi\colon X\to S^r(\mathcal{E})$为任意截面。对每个闭点 $x\in X$，我们得到由 $\phi(x)\in S^r(\mathcal{E}_{|x})$确定的 r 的分拆$\mathrm{P}(\phi(x))$。（见 §2.1.2。）由§2.1.3中的分层可知，下述引理是显然的。

引理 *2.2* 存在唯一的 r 的分拆 *P(ϕ)* 和非空*Zariski*开子集 $U(\phi)\subset X$，使得 *(i) P($\phi(x)$) =P(ϕ) ($x\in U(\phi)$)，(ii) P(ϕ) $\prec$ P($\phi(x)$)* 且 *P(ϕ) $\neq$P($\phi(x)$)*，对任意 $x\in X\setminus U(\phi)$ 均成立。

我们设 $\ell(\phi)=\ell(\phi(x))$ $(x\in U(\phi))$。我们得到 $\phi(U(\phi))\subset S^r_{\mathrm{P}(\phi)}(\mathcal{E})^\circ$。令 $\Sigma(\phi)_{\mathrm{red},U(\phi)}\subset\mathcal{E}_{|U(\phi)}$ 表示 $\phi\colon U(\phi)\to S^r_{\mathrm{P}(\phi)}(\mathcal{E})^\circ$ 与 $Z(S^r_{\mathrm{P}}(\mathcal{E})^\circ)_{\mathrm{red}}\to S^r_{\mathrm{P}(\phi)}(\mathcal{E})^\circ$ 的纤维积。投影 $\Sigma(\phi)_{\mathrm{red},U(\phi)}\to U(\phi)$ 是次数为 $\ell(\phi)$ 的真平展覆盖。

令 $\Sigma(\phi)_{\mathrm{red}}$ 表示 $\Sigma(\phi)_{\mathrm{red},U(\phi)}$ 在 $\mathcal{E}$ 中具有约化概形结构的闭包。注意， $\Sigma(\phi)_{\mathrm{red}}$ 在 X 上是有限的，因为它包含于 $\phi: X \to S^r(\mathcal{E})$ 与 $Z(S^r(\mathcal{E})) \to S^r(\mathcal{E})$ 的纤维积中。自然同构 $\Sigma(\phi)_{\mathrm{red},U(\phi)} \to U(\phi) \times_{S^r_{\mathbb{P}}(\phi)} (\phi)(\mathcal{E})$。$Z(S_{\mathbb{P}(\phi)}(\mathcal{E})^\circ)_{\mathrm{red}}$ 可延拓为概形态射 $\Sigma(\phi)_{\mathrm{red}} \to X \times_{S^r_{\mathbb{P}}(\phi)} (\phi)(\mathcal{E}) Z(S^r_{\mathbb{P}(\phi)}(\mathcal{E}))_{\mathrm{red}}$。它在闭点之间诱导出一个双射。特别地，以下结论成立。

引理 2.3 对于 任意闭点 $x \in X$， Σ 的闭点集合$(\phi)_{\mathrm{red}} \times_X x$ 等于 $[\phi(x)] \subset \mathcal{E}_{|x}$.

定义 2.4 有限覆盖 $Z \to X$ 定义为 $\mathbb{K}$-簇之间的态射，且 Z 的每个不可约分支在 X 上有限且支配。我们也称 Z 是 X 上的有限覆盖。

引理 2.5 $\Sigma(\phi)_{\mathrm{red}} \to X$ 是有限覆盖。

证明 令 $\Sigma(\phi)_{\mathrm{red},U(\phi)} = \bigsqcup_{j=1}^m \Sigma(\phi)_{\mathrm{red},U(\phi),j}$ 表示按连通分支的分解。令 $\Sigma(\phi)_{\mathrm{red},j}$ 表示 $\Sigma(\phi)_{\mathrm{red},U(\phi),j}$ 的闭包；该闭包不可约，且在 X 上有限并支配。由于 $\Sigma(\phi)_{\mathrm{red}} = \bigcup_{j=1}^m \Sigma(\phi)_{\mathrm{red},j}$，故得证。

2.2.3 与有限覆盖相关的截面

设 $\Sigma \subset \mathcal{E}$ 是一个闭子集，使得 $\Sigma \to X$ 是有限覆盖。我们考虑 Σ 的约化结构。注意，适当性蕴含有限性。存在一个 Zariski 开子集 $X_0 \subset X$，使得 $\Sigma_0 := \Sigma_{|X_0} \to X_0$ 有限且 étale。记次数为 d。

引理 2.6 存在唯一的截面 ϕ_Σ，属于 $S^d(\mathcal{E})$，使得对于任意闭点 $x \in X$， $\Sigma_{|x}$ 的闭点集合等于 $[\phi_\Sigma(x)]$。

证明 令 $\Sigma^d := \underbrace{\Sigma \times_X \cdots \times_X \Sigma}_{d}$，并令 $\Sigma_0^d := \Sigma_0 \times_X \cdots \times_X \Sigma_0$。我们考虑

$$A(\Sigma_0) = \left\{(x_1, \ldots, x_d) \in \Sigma_0^d \,\middle|\, x_i \neq x_j\right\}.$$

记 $\mathfrak{S}_d$ 为以自然方式作用于 Σ^d 上的 d 次对称群。它在 $A(\Sigma_0)$ 上诱导出 $\mathfrak{S}_d$ 作用，且有 $A(\Sigma_0)/\mathfrak{S}_d \simeq X_0$。记 $A(\Sigma)$ 为 $A(\Sigma_0)$ 在 Σ^d 中的闭包。它在 X 上是真态射。记 $Y(\Sigma)$ 为 $A(\Sigma)$ 的正规化。在 $Y(\Sigma)$ 上有自然的 $\mathfrak{S}_d$ 作用。注意， $Y(\Sigma)/\mathfrak{S}_d$ 是正规的，且 $X_0 = A(\Sigma_0)/\mathfrak{S}_d$ 自然地是 $Y(\Sigma)$ 的一个开子集。存在自然的有限态射 $Y(\Sigma)/\mathfrak{S}_d \to X$，满足：(i) 它在 X_0 上诱导恒等态射；(ii) 它诱导闭点之间的双射。因此，$Y(\Sigma)/\mathfrak{S}_d \simeq X$。

令 $\pi: Y(\Sigma) \to X$ 表示投影。令 $\varphi_i: Y(\Sigma) \to \Sigma$ 为由投影 $\Sigma^d \to \Sigma$到第 i 个分量诱导的态射。它诱导出 $\pi^*\mathcal{E}$ 的一个截面 s_i。我们得到 $\pi^* \mathrm{Sym}^d(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{E})$ 的截面 $\prod_{i=1}^d (1 \oplus s_i)$。该截面在 $\mathfrak{S}_d$ 下不变。因此，我们得到 $\mathrm{Sym}^d(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{E})$ 的截面 $\widetilde{\phi}_\Sigma$，使得 $\pi^*\widetilde{\phi}_\Sigma = \prod_{i=1}^d (1 \oplus s_i)$。根据构造，存在一个截面 $\phi_{\Sigma_0}: X_0 \to S^d(\mathcal{E})_{|X_0}$，使得 $\widetilde{\phi}_{\Sigma|X_0}$ 由 ϕ_{Σ_0} 诱导。由于 $S^d(\mathcal{E})$ 在 $\mathrm{Sym}^d(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{E})$ 中是闭的，存在 $S^d(\mathcal{E})$ 的截面 ϕ_Σ，它诱导出 $\widetilde{\phi}_\Sigma$。根据构造， Σ_x 的闭点集合由 $\phi_\Sigma(x)$ 给出。唯一性显然。

令 $Z \subset X$ 为闭子集，使得 $\dim Z \leq \dim X - 2$。令 $\Sigma_1 \subset \mathcal{E}_{|X\setminus Z}$ 为闭子集，使得$\Sigma_1 \to X \setminus Z$ 是有限覆盖。

引理 2.7 $\mathcal{E}$ 中 Σ_1 的闭包 $\overline{\Sigma_1}$ 是 X 上的有限覆盖。

证明 令 ϕ_{Σ_1} 为 Σ_1 诱导的 $S^d(\mathcal{E})_{|X\setminus Z}$ 的截面。根据引理 2.1，它唯一延拓为 X 上 $S^d(\mathcal{E})$ 的截面 ϕ'_{Σ_1}。我们得到闭子集 $\Sigma(\phi'_{\Sigma_1})_{\mathrm{red}} \subset S^d(\mathcal{E})$。由于 $\Sigma(\phi')_{\Sigma_1,\text{红色}}$ 在 $X \setminus Z$ 上等于 Σ_1，它是 Σ_1 的闭包，也是 X 上的有限覆盖。

2.3 对称积截面集上的分层

2.3.1 向量丛中闭子集截面的代数集

设 Y 是一个射影正规不可约的 $\mathbb{K}$-簇。设 $\mathcal{E}_Y$ 是一个相干反身 $\mathcal{O}_Y$-模。我们将有限维 $\mathbb{K}$-向量空间 $H^0(Y, \mathcal{E}_Y)$ 视为一个 $\mathbb{K}$-簇。设 Z 是 Y 的一个闭子集，且其余维为 $Z \geq 2$，满足：(i) $Y \setminus Z$ 正则；(ii) $\mathcal{E}_{Y|Y\setminus Z}$ 是一个局部自由层。令 $Y^\circ = Y \setminus Z$ 和 $\mathcal{E}_Y^\circ = \mathcal{E}_{Y|Y\setminus Z}$。我们有 $H^0(Y, \mathcal{E}_Y) = H^0(Y^\circ, \mathcal{E}_Y^\circ)$。我们将 $\mathcal{E}_Y^\circ$ 视为 Y° 上的一个向量丛。特别地，将其视为一个 $\mathbb{K}$-簇。令$Y^\circ(\mathbb{K})$ 表示 Y° 的 $\mathbb{K}$-值点集。

引理 2.8 对于任意扎里斯基闭子集 $C \subset \mathcal{E}_Y^\circ$，存在一个扎里斯基闭子集 $H^0(Y^\circ, C) \subset H^0(Y, \mathcal{E}_Y)$，由以下条件确定。

- 设 $\phi \in H^0(Y, \mathcal{E}_Y)$。则 $\phi(Y^\circ) \subset C$ 成立当且仅当 $\phi \in H^0(Y^\circ, C)$。

证明 对任意 $y \in Y^\circ(\mathbb{K})$，我们考虑由 $\Phi_y(\phi) = \phi(y)$ 所确定的态射 $\Phi_y\colon\ H^0(Y, \mathcal{E}_Y) \to \mathcal{E}^\circ_{Y|y}$。我们得到扎里斯基闭子集 $\Phi_y^{-1}(C) \subset H^0(Y, \mathcal{E}_Y)$。于是，$H^0(Y^\circ, C) = \bigcap_{y\in Y^\circ(\mathbb{K})} \Phi_y^{-1}(C)$ 具有所需的性质。 ∎

推论 2.9 截面 $Y^\circ \to C$ 与 $\mathbb{K}$-簇 $H^0(Y^\circ, C$ 的 $\mathbb{K}$-值点双射对应).

设 Z_1 是 Y的另一个余维 $Z_1 \geq 2$ 的闭子集，使得 (i) $Y \setminus Z_1$ 是正则的，(ii) $\mathcal{E}_{Y|Y\setminus Z_1}$ 是局部自由层。我们令 $Y_1^\circ = Y \setminus Z_1$ 与 $\mathcal{E}_1^\circ = \mathcal{E}_{Y|Y_1^\circ}$。下述引理是显然的。

引理 2.10 设 $C \subset \mathcal{E}^\circ$ 和 $C_1 \subset \mathcal{E}_1^\circ$ 为闭子集，且 $C = C_1$ 属于 $\mathcal{E}^\circ \cap \mathcal{E}_1^\circ$。那么，我们有 $H^0(Y^\circ, C) = H^0(Y_1^\circ, C_1)$ 属于 $H^0(Y, \mathcal{E})$。

存在一个局部自由的 $\mathcal{O}_Y$-模 $\mathcal{G}$，并有一个满态射 $\mathcal{G}^\vee \to \mathcal{E}_Y^\vee$，其中 $\mathcal{F}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y)$。我们得到一个 $\mathcal{O}_Y$-模的态射 $\mathcal{E}_Y \to \mathcal{G}$。令 $\overline{C}$ 表示 C 在 $\mathcal{G}$中的闭包。

引理 2.11 我们有 $H^0(Y^\circ, C) = H^0(Y, \overline{C})$。

2.3.2 对称积的截面集合

设 X 为一个射影正规 $\mathbb{K}$-簇。设 $\mathcal{E}$ 为一个相干反身 $\mathcal{O}_X$-模。设 Z 为闭子集 X，其余维为 $Z \geq 2$，且满足：(i) $X^\circ = X \setminus Z$ 正则；(ii) $\mathcal{E}^\circ = \mathcal{E}_{|X^\circ}$ 局部自由。由相干 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathrm{Sym}^r(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{E})$，我们得到 X上的反身层 $(\mathrm{Sym}^r(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{E})^\vee)^\vee$，其中 $\mathcal{F}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$。我们得到闭子集 $S^r(\mathcal{E}^\circ) \subset \mathrm{Sym}^r\left(\mathcal{O}_{X^\circ} \oplus \mathcal{E}^\circ\right)$。我们得到 $\mathbb{K}$-簇

$$H^0(X, S^r(\mathcal{E})) := H^0(X^\circ, S^r(\mathcal{E}^\circ))$$

如 §2.3.1 所示。它与 Z 的选择无关。

推论 2.12

- 任意一个 $\phi \in H^0(X, S^r(\mathcal{E}))$ 都对应于一个截面 $X^\circ \to S^r(\mathcal{E}^\circ)$，因而有与之关联的闭子集$\Sigma(\phi)_{\mathrm{red}} \subset \mathcal{E}^\circ$，满足 *(i)* $\Sigma(\phi)_{\mathrm{red}}$ 在 X° 上有限，*(ii)* $\Sigma(\phi)_{\mathrm{red}}$ 的任意不可约分支都支配 X°。

- 设 $\Sigma \subset \mathcal{E}^\circ$ 是一个闭子集，满足 *(i)* $\Sigma \to X$ 是有限的，*(ii)* Σ 的任意不可约分支都支配 X。设 $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ 是 Σ 在 X 上的次数。那么，存在一个闭点 $\phi \in H^0(X, S^d(\mathcal{E}))$，使得 $\Sigma = \Sigma(\phi)_{\mathrm{red}}$。

2.3.3 按分拆进行分解

引理 2.13 设 $T \subset H^0(X, S^r(\mathcal{E}))$ 是任意一个非空不可约扎里斯基闭子集。那么，存在一个分拆 $\mathtt{P}_T$ 和一个非空 *Zariski* 开子集 $U \subset T$，使得对于任意闭点 $\phi \in U$，$\mathtt{P}(\phi) = \mathtt{P}_T$。

证明 存在泛截面 $\phi_T\colon\ T \times X^\circ \to (T \times X^\circ) \times_{X^\circ} S^r(\mathcal{E}^\circ)$。存在非空Zariski开子集 $U' \subset T \times X^\circ$ 以及分拆 P_T，使得对任意 $\phi \in U'$ 有 $\mathrm{P}(\phi) = \mathrm{P}_T$。存在 T 的 Zariski 开子集 U，它包含于 $U' \to T$ 的像中。元组 (P_T, U) 满足所需条件。 ∎

利用诺特归纳，我们得到如下推论。

推论 2.14 存在分解 $H^0(X, S^r(\mathcal{E})) = \bigsqcup_{i\in\Lambda} T_i$，由局部扎里斯基闭的不可约光滑仿射子集给出，使得 $\mathtt{P}(\phi)$ $(\phi \in T_i)$ 为常值。

注 2.15 在推论 2.14 中，即使 $T_i \neq T_j$，我们也不对 $\phi_i \in T_i$ 和 $\phi_j \in T_j$ 施加 $\mathtt{P}(\phi_i) \neq \mathtt{P}(\phi_j)$。

2.3.4 精细分解

存在一个定义在 X 上的局部自由层 $\mathcal{G}$，并带有一个满态射 $\mathcal{G}^\vee \to \mathcal{E}^\vee$。我们得到单态射 $\mathcal{E} \to \mathcal{G}$。每个 $\phi \in H^0(X,\ S^r(\mathcal{E}))$ 都诱导出 $\phi_{\mathcal{G}} \in H^0(X,\ S^r(\mathcal{G}))$，并且我们得到闭子集 $\Sigma(\phi_{\mathcal{G}})_{\mathrm{red}} \subset \mathcal{G}$，它在 X 上是有限的。它是 $\Sigma(\phi)_{\mathrm{red}}$ 的闭包，并且我们有 $\Sigma(\phi)_{\mathrm{red}} = \Sigma(\phi_{\mathcal{G}})_{\mathrm{red}} \cap \mathcal{G}_{|X^\circ}$。

引理 2.16 存在由局部扎里斯基闭不可约光滑仿射子集构成的分解 $T_i = \bigsqcup_{j\in\Gamma(i)} T_{i,j}$，使得对任意 i, j，以下结论成立。

- 存在一个闭子概形 $\Sigma(T_{i,j})_{\mathrm{red}} \subset T_{i,j} \times \mathcal{G}$，使得 $\Sigma(T_{i,j})_{\mathrm{red}} \to T_{i,j}$ 是平坦的，且其在 $\phi \in T_{i,j}$ 上的纤维等于 $\Sigma(\phi_{\mathcal{G}})_{\mathrm{red}} \subset \mathcal{G}$。

证明 令 $T_i' \subset T_i$ 为任意非空不可约扎里斯基闭子集。令 R_i' 表示 T_i'上的代数函数环，它是 $\mathbb{K}$上的有限生成代数。令 $\mathbb{K}'$为 R_i'的分式域的代数闭包。我们在 $X_{\mathbb{K}'} = X \times_{\mathbb{K}} \mathbb{K}'$ 上定义，从而得到诱导向量丛 $\mathcal{G}_{\mathbb{K}'}$。我们有开子集 $X^\circ_{\mathbb{K}'} = X^\circ \times_{\mathbb{K}} \mathbb{K}'$，在其上得到诱导向量丛 $\mathcal{E}^\circ_{\mathbb{K}'}$。泛截面 $T_i' \times X^\circ \to T_i' \times S^r(\mathcal{E}^\circ)$ 在 $X^\circ_{\mathbb{K}'}$上诱导出 $S^r(\mathcal{E}^\circ_{\mathbb{K}'})$ 的截面 $\phi_{\mathbb{K}'}$。我们得到 $\Sigma(\phi_{\mathbb{K}',\mathcal{G}})_{\mathrm{red}} \subset \mathcal{G}_{\mathbb{K}'}$。

设 $R_i' \subset R \subset \mathbb{K}'$ 是环的一个扩张，使得 R 在 $\mathbb{K}$ 上正则且有限生成。令 $\phi_R : X^\circ \times \mathrm{Spec}(R) \to S^r(\mathcal{E}^\circ) \times \mathrm{Spec}(R)$ 表示诱导截面。那么，$\Sigma(\phi_{\mathbb{K}',\ \mathcal{G}})_{\mathrm{red}}$ 是由 $\Sigma(\phi_{R,\ \mathcal{G}})_{\mathrm{red}}$ 和扩张 $R \to \mathbb{K}'$ 诱导的。根据一般自由定理 [6, 定理 6.9.1], ，我们可以假设 $\Sigma(\phi_{R,\ \mathcal{G}})_{\mathrm{red}}$ 在 $\mathrm{Spec}(R)$ 上平坦。它在 $X \times \mathrm{Spec}(R)$ 上有限。根据 [7, 定理 12.2.4], ，我们可以假设对于任意闭点 $y \in \mathrm{Spec}(R)$，纤维 $\Sigma(\phi_{R,\ \mathcal{G}})^{\mathrm{red}} \times_{\mathrm{Spec}(R)} y$ 是既约的。

对于任意闭点 $y \in \mathrm{Spec}(R)$，令 $\phi_y : X^\circ \to S^r(\mathcal{E}^\circ)$ 表示由 ϕ_R 诱导的截面。对于任意闭点 $x \in X^\circ$，$\Sigma(\phi_R,\mathcal{G})_{\mathrm{red}} \times_{X^\circ\times\mathrm{Spec}(R)} (x, y)$ 的闭点集等于 $[\phi_{y,\mathcal{G}}(x)]$。因此，$\Sigma(\phi_R,\mathcal{G})^{\mathrm{red}} \times_{\mathrm{Spec}(R)} y$ 的闭点与 $\Sigma(\phi_y,\mathcal{G})_{\mathrm{red}}$ 的闭点相同。由于 $\Sigma(\phi_R,\mathcal{G})^{\times_{\mathrm{Spec}(R)} y}$ 和 $\Sigma(\phi_y,\mathcal{G})_{\mathrm{red}}$ 都赋有约化结构，我们得到 $\Sigma(\phi_R,\mathcal{G})_{\mathrm{red}} \times_{\mathrm{Spec}(R)} y = \Sigma(\phi_y,\mathcal{G})_{\mathrm{red}}$。

存在 T_i'的一个非空仿射开子集 U'，它包含在谱$(R) \to T_i'$的像中。通过缩小谱(R)，我们可以假定 U'等于该像。我们有泛截面$\phi_{U'}$：$U' \times X \to U' \times S^r(\mathcal{E}^\circ)$。我们得到 $\Sigma(\phi_{U'},\mathcal{G})_{\mathrm{red}} \subset U' \times \mathcal{G}$。我们可以假定它在 U'上是平坦的。因为谱$(R) \to U'$是光滑的，$\Sigma(\phi_{U'},\mathcal{G})_{\mathrm{red}} \times_{U'}$ 谱(R)是既约的，从而我们得到 $\Sigma(\phi_{U'},\mathcal{G})_{\mathrm{red}} \times_{U'}$ 谱$(R) = \Sigma(\phi_R,\mathcal{G})_{\mathrm{red}}$。对任意 $\phi \in U'$，存在被映到 ϕ的 $y \in$ 谱(R)。我们有 $\phi_y = \phi$。在 $\mathcal{G}$中，我们有 $\Sigma(\phi_{U'},\mathcal{G})_{\mathrm{red}} \times_{U'} z = \Sigma(\phi_R,\mathcal{G})_{\mathrm{red}} \times_{\mathrm{Spec}(R)} y = \Sigma(\phi_{\mathcal{G}})_{\mathrm{red}}$。

利用这一考量并通过诺特归纳法，我们可以构造所需的分解。 ∎

存在一个 Zariski稠密开子集 $\Sigma(T_{i,j})^{\mathrm{sm}}_{\mathrm{red}} \subset \Sigma(T_{i,j})_{\mathrm{red}} \cap (\mathcal{E}^\circ \times T_{i,j})$，使得 (i) $\Sigma(T_{i,j})^{\mathrm{sm}}_{\mathrm{red}} \to T_{i,j}$ 光滑；(ii) 对每个 $y \in T_{i,j}$, $\Sigma(T_{i,j})^{\mathrm{sm}}_{\mathrm{red}} \times_{T_{i,j}} y$ 都与 $\Sigma(\phi_y,\mathcal{G})_{\mathrm{red}}$ 的每个不可约分支相交，其中 ϕ_y 表示对应于 y 的截面。令 $\iota_0 : \mathcal{E}^\circ \times T_{i,j} \to \mathcal{G} \times T_{i,j}$, $\iota_1 : \Sigma(T_{i,j})_{\mathrm{red}} \to \mathcal{G} \times T_{i,j}$ 和 $\iota_2 : \Sigma(T_{i,j})^{\mathrm{sm}}_{\mathrm{red}} \to \mathcal{G} \times T_{i,j}$ 表示这些包含映射。

引理 2.17 在 $\Sigma(T_{i,j})_{\mathrm{red}}$ 上存在无挠层 $\mathcal{F}^k$ $(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$，使得以下结论成立。

- $\mathcal{F}^k$ 到 $\Sigma(T_{i,j})_{\mathrm{smred}}$ 的限制等于代数相对 k-形式层 $\Omega^k_{\Sigma(T_{i,j})_{\mathrm{smred}}/T_{i,j}}$。特别地，存在自然态射 $\iota_{1*}(\mathcal{F}^k) \to \iota_{2*}\Omega^k_{\Sigma(T_{i,j})_{\mathrm{smred}}/T_{i,j}}$。
  存在一个态射 $\iota_{0*}\left(\Omega^k_{(\mathcal{E}^\circ\times T_{i,j})/T_{i,j}}\right) \to \iota_{1*}(\mathcal{F}^k)$，使得诱导态射 $\iota_{0*}\left(\Omega^k_{(\mathcal{E}^\circ\times T_{i,j})/T_{i,j}}\right) \to \iota_{2*}\Omega^k_{\Sigma(T_{i,j})_{\mathrm{smred}}/T_{i,j}}$ 等于由拉回相对 k-形式所诱导的态射。

通过细化分解，我们还可以假设 $\mathcal{F}^k$ 在 $T_{i,j}$上是平坦的。

证明 我们令 $\Sigma(T_{i,j})^\circ_{\mathrm{red}} = \Sigma(T_{i,j})_{\mathrm{red}} \cap (\mathcal{E}^\circ \times T_{i,j})$。令 $j_1 : \Sigma(T_{i,j})^{\mathrm{sm}}_{\mathrm{red}} \to \Sigma(T_{i,j})^\circ_{\mathrm{red}}$ 和 $j_2 : \Sigma(T_{i,j})^\circ_{\mathrm{red}} \to \mathcal{E}^\circ \times T_{i,j}$ 表示这些包含映射。我们得到拟凝聚层 $j_2^*\Omega^k_{(\mathcal{E}^\circ\times T_{i,j})/T_{i,j}} \to j_{1*}\Omega^k_{\Sigma(T_{i,j})^{\mathrm{sm}}_{\mathrm{red}}}$ 在 $\Sigma(T_{i,j})^\circ_{\mathrm{red}}$ 上的态射。存在一个凝聚层 $\mathcal{F}_1^k$，定义在 $\Sigma(T_{i,j})^\circ_{\mathrm{red}}$ 上，其在 $\Sigma(T_{i,j})^{\mathrm{sm}}_{\mathrm{red}}$ 上的限制等于 $\Omega^k_{\Sigma(T_{i,j})^{\mathrm{sm}}_{\mathrm{red}}/T_{i,j}}$（例如，参见问题 II.5.15],）。将 $\mathcal{F}_1^k$ 与 $j_2^*\Omega^k_{(\mathcal{E}^\circ\times T_{i,j})/T_{i,j}}$ 在 $j_{1*}\Omega^k_{\Sigma(T_{i,j})^{\mathrm{sm}}_{\mathrm{red}}/T_{i,j}}$ 中的像相加，我们得到定义在 $\Sigma(T_{i,j})^\circ_{\mathrm{red}}$ 上的凝聚层 $\mathcal{F}_2^k$，以及一个态射 $j_2^*\Omega^k_{\mathcal{E}^\circ\times T_{i,j}/T_{i,j}} \to \mathcal{F}_2^k$。我们将 $\mathcal{F}_2^k$ 延拓为定义在 $\Sigma(T_{i,j})_{\mathrm{red}}$ 上的凝聚层 $\mathcal{F}^k$。

∎

2.3.5 k型亚纯微分形式（定义于 $\mathcal{E}$ 上）

令 H 为 X 的一个超曲面。令 τ 为 $\mathcal{E}^\circ$ 上的一个亚纯 k-形式，其在 $\mathcal{E}^\circ_{|X^\circ\setminus H}$ 上的限制是一个正则 k-形式。令 $T_{i,j}(\tau)$ 表示满足以下条件的闭点 ϕ 的集合： τ 在 $\Sigma(\phi)_{U(\phi),\mathrm{red}}$ 上的限制为 0。

引理 2.18 $T_{i,\ j}(\tau)$ 是 $T_{i,\ j}$ 的扎里斯基闭子集。

证明 不妨设 H 是丰沛的，且 $X\setminus X^\circ\subset H$。令 $\pi\colon \Sigma(T_{i,\ j})\to X^\circ$ 和 $p\colon \Sigma(T_{i,\ j})\to T_{i,\ j}$ 表示投影。设 $\mathcal{F}^k$ 是 $\Sigma(T_{i,\ j})$ 上的一个无挠层，如引理 2.17 所述。于是，对充分大的整数 N， τ 诱导出局部自由层 $p_*\Big(\mathcal{F}^k\otimes\pi^*\mathcal{O}_X(NH)\Big)$ 的一个截面 Φ_τ。由于 $T_{i,\ j}(\tau)$ 等于 Φ_τ 的零点集，我们得出该引理的结论。 ∎

2.4 亚纯有限覆盖的条件

2.4.1 一般情形

设 X 是一个正规 .....上的代数簇。设 H 是 X 的超曲面，且 $X\setminus H$ 光滑 h.

定义 2.19 在 (X,H) 上的亚纯有限覆盖是一个闭子集 $\Sigma\subset T^*(X\setminus H)$，满足 $\Sigma\to X\setminus H$ 是有限覆盖。 ∎

为便于后续使用，我们还引入以下条件。

定义 2.20 若亚纯有限覆盖 Σ 在 (X,H) 上满足： Σ 的光滑部分相对于 $T^*(X\setminus H)$ 的自然辛结构是拉格朗日的，则称其为拉格朗日。

2.4.2 形式条件

我们假设 X 光滑，且 H 正规交叉。设 $x\in H$。令 $\mathfrak{m}_x$ 表示 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ 局部环 $\mathcal{O}_{X,x}$ 的极大理想。令 $\mathcal{O}_{X,x}$ 表示 $\mathcal{O}_{X,x}$ 关于 $\mathfrak{m}_x$ 的完备化。对于任意 $\mathcal{O}_{X,x}$-模 $\mathcal{M}$，我们定义 $\mathcal{M}(*H):=\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_{X,x}}\mathcal{O}_X(*H)_x$。对于任意仿射态射 $Z\to X$，令 $\mathcal{O}_{X,x}(Z)$ 表示 $Z\times_X \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ 上的代数函数环 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$。我们定义 $\mathcal{O}_{X,x}(Z):=\mathcal{O}_{X,x}(Z)\otimes_{\mathcal{O}_{X,x}}\mathcal{O}_{X,x}$。特别地，我们得到 $\mathcal{O}_{X,x}(*H)$-代数 $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}(T^*(X\setminus H))$。对于任意 $N\in\mathbb{Z}$，有 $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}(T^*(X\setminus H))=\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}\big(T^*X(\log\ H)(NH)\big)(*H)$。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$定义 *2.21* 若存在 $N\in\mathbb{Z}_{>0}$ 以及一个 $\mathcal{O}_{X,x}$-代数满射 $\mathcal{O}_{X,x}(T^*X(\log\ H)(NH))\to\mathcal{B}_{N,H}$，使得 *(i)* $\mathcal{B}_{N,H}$ 在 $\mathcal{O}_{X,x}$ 上有限，*(ii)* $\mathcal{B}=\mathcal{B}_{N,H}(*H)$，*(iii)* $\mathcal{B}_{N,H}$ 作为 $\mathcal{O}_{X,x}$-模是无挠的，则称 $\mathcal{O}_{X,x}(*H)$-代数 $\mathcal{O}_{X,x}(T^*(X\setminus H))\to\mathcal{B}$ 的满射态射为 x 处的形式亚纯覆盖。 ∎

$\widehat{\ }$定义 *2.22* 若存在一个 $\mathcal{O}_{X,x}$-代数满射 $\mathcal{O}_{X,x}(T^*X(\log\ H))\to\mathcal{B}_0$，使得 *(i)* $\mathcal{B}_0$ 在 $\mathcal{O}_{X,x}$ 上有限，*(ii)* $\mathcal{B}_0(*H)=\mathcal{B}$ 作为 $\mathcal{O}_{X,x}(T^*X(\log\ H))$- 代数同构，则称形式亚纯覆盖 $\mathcal{O}_{X,x}(T^*(X\setminus H))\to\mathcal{B}$ 为对数的。 ∎

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$任意的 $\mathfrak{a}\in\mathcal{O}_{X,x}(*H)$ 都会诱导出 $d\mathfrak{a}\in(T^*X(\log\ H)(NH))_x\otimes_{\mathcal{O}_{X,x}}\mathcal{O}_{X,x}$，其中某个 $N\in\mathbb{Z}_{>0}$ 存在。 $d\mathfrak{a}\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$的加法会诱导出 $T^*X(\log\ H)(NH)\times_X \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ 的自同构。它会诱导出 $\mathcal{O}_{X,x}$-代数 $\frown$ $\widehat{\ }$ $\frown\mathcal{O}_{X,x}(T^*X(\log\ H)(NH))$ 的自同构，以及 $\mathcal{O}_{X,x}(*H)$-代数 $\mathcal{O}_{X,x}(T^*(X\setminus H))$ 的自同构。这些代数的自同构记为 $\kappa^*_{d\mathfrak{a}}$。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$设 $\mathcal{O}_{X,x}(T^*(X\setminus H))\to\mathcal{B}$ 是在 x 处的形式亚纯覆盖。我们将 $\kappa^*_{d\mathfrak{a}}\mathcal{B}:=\mathcal{B}$ 视为一个 $\mathcal{O}_{X,x}(*H)$-代数，并考虑态射 $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}(T^*(X\setminus H))\to\kappa^*_{d\mathfrak{a}}\mathcal{B}$，它由 $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}(T^*(X\setminus H))\xrightarrow{\kappa^*_{d\mathfrak{a}}}\frown\mathcal{O}_{X,x}(T^*(X\setminus H))\longrightarrow\mathcal{B}$ 的复合得到。

$\widehat{\ }$**定义 2.23** 一个形式亚纯覆盖 $\mathcal{O}_{X,\ x}(T^*(X\setminus H))\to\mathcal{B}$ 是非分歧良好的，如果存在不规则值 $\mathcal{I}(\mathcal{B})\subset\mathcal{O}_{X,\ x}(*H)/\mathcal{O}_{X,\ x}$ 的良好集合$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，以及 $\mathcal{O}_{X,\ x}(*H)$-代数 $\mathcal{B}=\prod_{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}(\mathcal{B})}\mathcal{B}_{\mathfrak{a}}$ 的分解，使得对任意 $\mathfrak{a}\in\mathcal{I}(\mathcal{B})$下列条件成立。

- *Let* $\widetilde{\mathfrak{a}}\in\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}(*H)$ *be a lift of* $\mathfrak{a}$*. Then,* $\kappa^*_{d\widetilde{\mathfrak{a}}}\mathcal{B}_{\mathfrak{a}}$ *is logarithmic.*

参见§1.2.1，特别是备注1.7 ，了解不规则值良好集合的概念。 ∎

设 $n=$维 X。设 $(z_1,\dots,z_n)$ 为极大理想 $\mathfrak{m}_x$ 的一个生成元，该理想属于 $\mathcal{O}_{X,x}$，且 H在 x 处的理想层由 $\prod_{i=1}^{\ell} z_i$ 生成，其中 $1\le \ell \le n$。对于任意 $e\in\mathbb{Z}_{>0}$，我们得到如下环的平坦扩张

$$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^{(e,H)} = \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}[z_j^{1/e} \mid j=1,\dots,\ell].$$

Let $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}(T^*(X\setminus H)) \to \mathcal{B}$ 是一个形式亚纯覆盖。我们得到 $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^{(e,H)}$-代数 s

$$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^{(e,H)}(T^*(X\setminus H)) = \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}(T^*(X\setminus H)) \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}} \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^{(e,H)}, \qquad \mathcal{B}^{(e,H)} = \mathcal{B}\otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}} \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^{(e,H)},$$

以及自然的满射态射 $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^{(e,H)}(T^*(X\setminus H)) \to \mathcal{B}^{(e,H)}$。注意，存在一个 $\mathbb{K}$-簇的态射 $f\colon X'\to X$，其上有一点 $x'\in X'$满足 $f(x')=x$，使得以下结论成立。

- f 诱导出一个同构 $\widehat{\mathcal{O}}_{(e,H}_{x} \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{X'})_{X,,x'}$。
- $T^*X'(\log H') \simeq f^*T^*X(\log H)$以及 $T^*X'(\log H')(eNH') \simeq f^*T^*X(\log H)(NH)$在 x'附近。

因此，$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^{(e,H)}(T^*(X\setminus H)) \to \mathcal{B}^{(e,H)}$ 可视为一个形式亚纯覆盖。

定义 2.24 形式亚纯覆盖 $\mathcal{O}_{X,x}(T^*(X\setminus H)) \to \mathcal{B}$ 称为良好的，如果存在 $e\in\mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^{(e,H)}(T^*(X\setminus H)) \to \mathcal{B}^{(e,H)}$ 是非分歧良好的。

在定义 2.24 中，指标集 $\mathcal{I}(\mathcal{B}^{(e,H)}) \subset \widehat{\mathcal{O}}_{X}^{(e,H)}(*H)_x/\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^{(e,H)}$，也记作 $\mathcal{I}(\mathcal{B})$。它在伽罗瓦作用下保持不变。我们设

$$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^{(H)} = \varinjlim \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^{(e,H)}.$$

如果形式亚纯覆盖 $\mathcal{O}_{X,x}(T^*(X\setminus H)) \to \mathcal{B}$ 是良好的，则自然地将 $\mathcal{I}(\mathcal{B})$ 视为$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^{(H)}(*H)/\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^{(H)}$的子集。

2.4.3 不规则值的代数良好集

设 $U=\mathrm{Spec}\ R$ 是一个 n 维光滑连通仿射 $\mathbb{K}$ 簇，带有一个正规交叉超曲面 H_U。闭点集分别记为 $U(\mathbb{K})$ 和 $H_U(\mathbb{K})$。设 $x\in H_U(\mathbb{K})$。假设存在一个 étale 态射 $\psi: U\to \mathbb{K}^n$，使得下述条件成立。

- $H_U=\psi^{-1}\big(\bigcup_{i=1}^{\ell}\{z_i=0\}\big)$ 对某个 $1\le\ell\le n$ 成立。
- $\psi(x)=(0,\dots,0)$。
- $\psi^{-1}\{z_i=0\}$ 是连通的。

函数 $\psi^*(z_j)$ 也记作 z_j。我们定义 $R(*H_U) := H^0(U,\mathcal{O}_U(*H_U))$。

定义 2.25 这样的函数元组$(z_1$、……、$z_n)$ 称为 U 上的 *étale* 坐标系。

对于任意闭点 $y\in H_U$，令 R_y 表示 R 在 y 处的完备化。令 $R_y(*H_U)$ 表示 $R(*H_U)$ 在 y 处的形式完备化。我们有自然诱导的映射 $R(*H_U)/R \to R_y/R_y(*H_U)$。

定义 2.26 若有限子集 $\mathcal{I}$ *of* $R(*H_U)/R$ 所诱导的元组 $\mathcal{I}_{|\widehat{y}}\subset R_y(*H_U)/R_y$ 对任意 $y\in H_U$ 都是良好的，则称其为良好。

引理 2.27 设 $\mathcal{I}\subset R(*H_U)/R$ 是一个有限子集。假设 $\mathcal{I}_{|\widehat{x}}\subset R_x(*H_U)/R_x$ 是良好的。令 Z 为满足 $\mathcal{I}$ 在 $R_y(*H_U)/R_y$ 中不是良好的闭点 $y\in H_U$ 的集合。那么，Z 是 H_U 的扎里斯基闭子集，且 $H_U\setminus Z$ 包含 x。特别地，$H_U\setminus Z$ 是 H_U 的 *Zariski* 稠密开子集。

证明 令 $\widetilde{\mathcal{I}}\subset R(*H_U)$ 为 $\mathcal{I}$ 的一个提升。由于 $\mathcal{I}$ 在 x 处诱导出一个不规则值良好集合，我们有 $\mathrm{ord}(\mathfrak{a})\in\mathbb{Z}^{\ell}_{\le 0}$且 $\mathrm{ord}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\in\mathbb{Z}^{\ell}_{\le 0}$。我们有 $z^{-\mathrm{ord}(\mathfrak{a})}\mathfrak{a}\in\widehat{R}_x$ 且 $z^{-\mathrm{ord}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\in\widehat{R}_x$。令 R_x 表示 x 处的局部环。由于 $\widehat{R}_x$ 在 R_x 上忠实平坦，$R_x(*H_U)/R_x\to\widehat{R}_x(*H_U)/\widehat{R}_x$ 是单射。由此得到 $z^{-\mathrm{ord}(\mathfrak{a})}\mathfrak{a}\in R_x$且 $z^{-\mathrm{ord}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})\in R_x$。由此得到 $z^{-\mathrm{ord}(\mathfrak{a})}\mathfrak{a}$ 和 $z^{-\mathrm{ord}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})$ 都包含于 H 的泛点处的局部环中。因此，我们得到 $z^{-\mathrm{ord}(\mathfrak{a})}\mathfrak{a}$ 和 $z^{-\mathrm{ord}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})$ 都包含于 R 中。

令 $\mathrm{ord}(\mathfrak{a})_i$ $(1 \le i \le \ell)$ 表示 $\mathrm{ord}(\mathfrak{a}) \in \mathbb{Z}^{\ell}_{\le 0}$ 的第 i 个分量。我们得到如下闭子集：

$$Z(z^{-\mathrm{ord}(\mathfrak{a})}\mathfrak{a}) := \{z^{-\mathrm{ord}(\mathfrak{a})}\mathfrak{a} = 0\} \cap \bigcup_{\mathrm{ord}(\mathfrak{a})_i < 0} \{z_i = 0\}.$$

类似地，令 $\mathrm{ord}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})_i$ 表示 $\mathrm{ord}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) \in \mathbb{Z}^{\ell}_{\le 0}$ 的第 i 个分量。我们设

$$Z(z^{-\mathrm{ord}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})) := \{z^{-\mathrm{ord}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) = 0\} \cap \bigcup_{\mathrm{ord}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})_i < 0} \{z_i = 0\}.$$

我们得到

$$Z(\mathcal{I}) := \bigcup_{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}\setminus\{0\}} Z(z^{-\mathrm{ord}(\mathfrak{a})}\mathfrak{a}) \cup \bigcup_{\mathfrak{a}\neq\mathfrak{b}} Z(z^{-\mathrm{ord}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})).$$

那么，$\mathcal{I}$ 在 y 处诱导不规则值良好集合，当且仅当 $y \in H_U \setminus Z(\mathcal{I}) \neq \emptyset$。

2.4.4 代数局部条件

令 $\Sigma_U \subset T^*(U \setminus H_U)$ 是在 (U, H_U) 上的亚纯有限覆盖。

定义 2.28 如果 Σ_U 在 T^*U(对数 H_U) 中的闭包在 U 上是真，则称 Σ_U 在 (U, H_U) 上是对数的。

对任意 $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}$，设 $\widetilde{\mathfrak{a}} \in R(*H_U)$ 为一个提升。我们得到 $\Omega^1_U(\log H_U)(*H_U)$ 的截面 $d\widetilde{\mathfrak{a}}$。我们通过加法得到 $T^*(U \setminus H_U)$ 的自同构 $\kappa_{d\widetilde{\mathfrak{a}}}$。对任意闭子集 $Z \subset T^*(U \setminus H_U)$，我们得到 $\kappa^*_{d\widetilde{\mathfrak{a}}} Z \subset T^*(U \setminus H_U)$。

定义 2.29 Σ_U 在 (U, H_U) 上是非分歧良好的，如果存在一个良好有限集 $\mathcal{I}(\Sigma_U) \subset R(*H_U)/R$ 以及 $\mathbb{K}$-簇的一个分解

$$\Sigma_U = \bigsqcup_{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}(\Sigma_U)} \Sigma_{U,\mathfrak{a}}$$

使得 $\kappa^*_{d\widetilde{\mathfrak{a}}}\Sigma_{U,\mathfrak{a}}$ 是对数的。

对一个正整数 e，我们令 $R^{(e)} = R[z_i^{1/e} \mid i = 1, \ldots, \ell]$。我们得到 $U_{(e)}$=谱 $R^{(e)}$，带有有限态射 φ_{e,H_U}: $U^{(e)} \to U$。

定义 2.30 如果对于某个正整数 e，Σ_U 在 (U, H_U) 上是良好的，即 $\varphi^*_{e,H_U}\Sigma_U$ 是非分歧良好的，那么我们得到 $\mathcal{I}(\Sigma_U) := \mathcal{I}(\varphi^*_{e,H_U}(\Sigma_U))$。

2.4.5 代数局部条件与形式条件的比较

设 X 是定义在 $\mathbb{K}$ 上的 n 维光滑代数簇。设 H 是 X 的一个正规交叉超曲面。

$x \in X$ 的一个 étale 坐标邻域是由以下对象组成的元组（U, x', φ, ψ）：一个光滑仿射 $\mathbb{K}$-簇 U、一个闭点 $x' \in U$、一个 étale 态射 $\varphi\colon (U, x') \to (X, x)$，以及一个满足以下条件的 étale 态射 $\psi\colon U \to \mathbb{K}^n$。

- $H_U := \varphi^{-1}(H)$ 等于某个 $1 \le \ell \le n$。
- $\psi(x') = (0、\ldots\ldots、0)$。
- $\psi^{-1}(\{z_i = 0\})$ 是连通的。

命题 2.31 亚纯有限覆盖 $\Sigma \subset T^*(X \setminus H)$ 在 $x \in X$ 处形式良好，当且仅当存在 x 的一个 *étale* 邻域 (U, x', φ, ψ)，使得 $\varphi^*\Sigma \subset T^*(U \setminus H_U)$ 在 (U, H_U) 上良好。

证明 “仅当”部分显然。假设 Σ 在 x 处形式良好。我们可以假设 X 是仿射的，并且存在一个 étale 态射 $\psi\colon X \to \mathbb{K}^n$，使得 (i) $H = \psi^{-1}\big(\bigcup_{j=1}^{\ell}\{z_j = 0\}\big)$，(ii) $\psi(x) = (0,\dots,0)$，(iii) $\psi^{-1}(\{z_j = 0\})$ 是连通的。我们令 $R^{(e)} = R[z_i^{1/e} \mid i = 1,\dots,\ell]$ 和 $X^{(e)} =$ 谱 $R^{(e)}$。我们有分歧覆盖 $\rho_e\colon X^{(e)} \to X$。令 $H^{(e)} = \rho_e^{-1}(H)$ 和 $\Sigma^{(e)} = \rho_e^*\Sigma \subset T^*(X^{(e)} \setminus H^{(e)})$。存在 $x^{(e)} \in X^{(e)}$ 使得 $\rho_e(x^{(e)}) = x$。于是，$\Sigma^{(e)}$ 在 $x^{(e)}$ 处形式非分歧良好。

对于任意 $N \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们设 $\mathcal{E}_N^{(e)} := T^*X^{(e)}(\log H^{(e)})(NH^{(e)})$。存在 $N > 0$，使得 $\Sigma^{(e)}$ 的 $\Sigma_N^{(e)} \subset \mathcal{E}_N^{(e)}$ 的闭包在 $X^{(e)}$ 上是真态射。令 d 为 $\Sigma^{(e)} \to X^{(e)} \setminus H^{(e)}$ 的一般纤维的数目。我们设

$$A(\Sigma^{(e)}) := \big\{(x_1,\dots,x_d) \in \overbrace{\Sigma^{(e)} \times_{X^{(e)}\setminus H^{(e)}} \cdots \times_{X^{(e)}\setminus H^{(e)}} \Sigma^{(e)}}^{d} \;\big|\; x_i \neq x_j \ (i \neq j)\big\}.$$

令 $A(\Sigma_N^{(e)})$ 表示 $A(\Sigma^{(e)})$ 在 $\overbrace{\mathcal{E}_N^{(e)} \times_{X^{(e)}} \cdots \times_{X^{(e)}} \mathcal{E}_N^{(e)}}^{d}$ 中的闭包。令 $Y(\Sigma_N^{(e)})$ 表示 $A(\Sigma_N^{(e)})$ 的正规化。投影 $Y(\Sigma_N^{(e)}) \to X^{(e)}$ 是一个仿射态射。令 $\mathfrak{S}_d$ 表示第 d 个对称群。存在 $\mathfrak{S}_d$ 在 $Y(\Sigma_N^{(e)})$ 上的自然作用。我们有 $Y(\Sigma_N^{(e)})/\mathfrak{S}_d \simeq X^{(e)}$。令 $\pi\colon Y(\Sigma_N^{(e)}) \to X^{(e)}$ 表示该投影，它是一个有限态射。

设 $\mathcal{O}_{X,x}^h$ 是 $\mathcal{O}_{X,x}$ 的亨泽尔化。根据 [21, 推论 4.3], $\mathcal{O}_{X^{(e)},x^{(e)}}^h := \mathcal{O}_{X,x}^h[z_i^{1/e} \mid i = 1,\dots,\ell]$ 是一个亨泽尔环，也是 $\mathcal{O}_{X^{(e)},x^{(e)}}$ 的亨泽尔化。根据 [21, 定理 I.4.2], , 我们有如下局部环分解：

$$\mathcal{O}_{X^{(e)},x^{(e)}}(Y(\overline{\Sigma}_N^{(e)})) \otimes \mathcal{O}_{X^{(e)},x^{(e)}}^h = \bigoplus_{y \in \pi^{-1}(x^{(e)})} \Big(\mathcal{O}_{X^{(e)},x^{(e)}}(Y(\overline{\Sigma}_N^{(e)})) \otimes \mathcal{O}_{X^{(e)},x^{(e)}}^h\Big)_y.$$

将 X 替换为 x 的一个 étale 坐标邻域后，我们可以假设存在如下 $\mathbb{K}$-簇分解

$$\overline{Y}(\overline{\Sigma}_N^{(e)}) = \bigsqcup_{y \in \pi^{-1}(x^{(e)})} \overline{Y}(\overline{\Sigma}_N^{(e)})_y$$

其中 $Y(\Sigma_N)_y \times_{X^{(e)}} x^{(e)} = \{y\}$。令 $G_y \subset \mathfrak{S}_d$ 表示稳定子。我们有 G_y 在 $Y(\Sigma_N^{(e)})_y$ 上的自然作用，以及 $Y(\Sigma_N^{(e)})_y/G_y \simeq X^{(e)}$。

令 $p_j\colon Y(\Sigma_N^{(e)}) \to \Sigma_N^{(e)} \subset \mathcal{E}_N^{(e)}$ 表示由投影到第 j 个分量所诱导的态射。它在 $Y(\Sigma_N^{(e)})$ 上诱导出 $\pi^*\mathcal{E}_N^{(e)}$ 的一个截面 s_j。

设 $y \in \pi^{-1}(x^{(e)})$。设 $\mathcal{Z}(s_i - s_j)_y$ $(i \neq j)$ 表示 $s_i - s_j$ 在 $Y(\Sigma_N^{(e)})_{y|X^{(e)}\setminus H^{(e)}}$ 中的零点集。设 $\mathcal{Z}(s_i - s_j)_y$ 表示 $\mathcal{Z}(s_i - s_j)_y$ 在 $Y(\Sigma_N^{(e)})_y$ 中的闭包。我们考虑由以下条件定义的 $\{1,\dots,d\}$ 上的等价关系 $\sim_y$。

- 若存在序列 $i = p(0)\ p(1)\dots,p(m) = j$，使得对 $k = 1,\dots,m$ 有 $y \in \mathcal{Z}(s_{p(k)} - s_{p(k-1)})$，则我们有 $i \sim_y j$。

设 S_y 表示商集。我们得到分解 $\{1,\dots,d\} = \bigsqcup_{I \in S_y} I$。

设 $\Psi_{y,i}\colon Y(\Sigma_N^{(e)})_y \to \Sigma_N^{(e)}$ 是由 s_i 诱导的有限态射。因为 $\dim \mathrm{Im}\Psi_{y,i} = \dim X$，

$$(\overline{\Sigma}_N^{(e)})_{y,I} := \bigcup_{i \in I} \mathrm{Im}\,\Psi_{y,i}$$

是 $\Sigma_N^{(e)}$ 的某些不可约分支的并。我们得到分解 $\Sigma_N^{(e)} = \bigcup_{I \in S_y} (\Sigma_N^{(e)})_{y,I}$。我们令 $\Sigma_{y,I}^{(e)} := (\Sigma_N^{(e)})_{y,I|X^{(e)}\setminus H^{(e)}}$。通过缩小 X，我们可以假设 $\Sigma_{y,I_1}^{(e)} \cap \Sigma_{y,I_2}^{(e)} = \emptyset$。我们得到 $\mathbb{K}$-簇的分解：

$$\Sigma^{(e)} = \bigsqcup_{I \in S_y} \Sigma_{y,I}^{(e)}.$$

设 $A(\Sigma^{(e)})_y \subset A(\Sigma^{(e)})$ 表示 $(x_1,\dots,x_d) \in A(\Sigma^{(e)})$ 中满足以下条件的闭子集。

- 对于任意的 $I \in S_y$ 和 $i \in I$，我们有 $x_i \in \Sigma_{y,I}^{(e)}$。

我们得到 $\mathbb{K}$-簇的分解:

$$A(\Sigma^{(e)}) = \bigsqcup_{y\in\pi^{-1}(x^{(e)})} A(\Sigma^{(e)})_y.$$

设 $Y(\Sigma_N^{(e)})'_y$ 表示 $A(\Sigma^{(e)})_y$ 在 $A(\Sigma_N^{(e)})$ 中的闭包的正规化。我们得到分解

$$\overline{Y}(\overline{\Sigma}_N^{(e)}) = \bigsqcup_{y\in\pi^{-1}(x^{(e)})} \overline{Y}(\overline{\Sigma}_N^{(e)})'_y.$$

由于 $y \in Y(\Sigma_N^{(e)})$，我们得到 $Y(\Sigma_N^{(e)})'_y = Y(\Sigma_N^{(e)})_y$。由此可得如下引理。

引理 2.32 对于 $g \in \mathfrak{S}_d$，我们有 $gY(\Sigma_N^{(e)})_y = Y(\Sigma_N^{(e)})_{g(y)}$。因此，我们得到 $g(I) = I$ 对任意 $g \in G_y$ 与 $I \in S_y$。

由于 $\widehat{\mathcal{O}}_{X^{(e)},x^{(e)}}$ 的形式覆盖 $\widehat{\mathcal{O}}_{X^{(e)},x^{(e)}}(T^*(X^{(e)} \setminus H^{(e)})) \to \widehat{\mathcal{O}}_{X^{(e)},x^{(e)}}(\Sigma^{(e)})$ 是非分歧良好的，存在 $\mathfrak{a}_j \in \widehat{\mathcal{O}}_{X^{(e)},x^{(e)}}(*H^{(e)})$ 使得 $s_j - \pi^* d\mathfrak{a}_j \in \pi^*(\mathcal{E}_{H^{(e)},0}) \otimes \widehat{\mathcal{O}}_{X^{(e)},x^{(e)}}$。由于 $\{\mathfrak{a}_j\}$ 是良好的，若对某个 I 有 $i, j \in I$，则我们可以假设 $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_j$。因此，通过令

$$\mathfrak{Q}_1(s_i) = \frac{1}{|G_y|} \sum_{g\in G_y} g^*(s_i),$$

我们得到 $\widehat{\text{th}}$ at $\mathfrak{Q}_1(s_i) - \pi^* d\mathfrak{a}_i \in \pi^*(\mathcal{E}_{H^{(e)},\,0}) \otimes \mathcal{O}_{X^{(e)},\,x^{(e)}}$。由于 $\mathfrak{Q}_1(s_i)$ 是 G_y-不变的，存在 s

$$\mathfrak{Q}(s_i) \in H^0(X^{(e)} \setminus H^{(e)}, \Omega^1_{X^{(e)}\setminus H^{(e)}})$$

使得 $\pi^*(\mathfrak{Q}(s_i)) = \mathfrak{Q}_1(s_i)$。我们得到诱导截面 $[\mathfrak{Q}(s_i)]$，它属于 $\Omega^1_{X^{(e)}}(*H^{(e)})/\Omega^1_{X^{(e)}}(\log H^{(e)})$。注意，$\mathfrak{Q}(s_i) - d\mathfrak{a}_i \in \Omega^1_{X^{(e)}}(\log H^{(e)})_{x^{(e)}} \otimes \widehat{\mathcal{O}}_{X^{(e)},\,x^{(e)}}$。因此，我们得到 $d[\mathfrak{Q}(s_i)] = 0$，作为以下空间的截面

$$\Omega^2_{X^{(e)}}(*H^{(e)})/\Omega^2_{X^{(e)}}(\log H^{(e)}).$$

注意，帽 $\Omega^\bullet_{X^{(e)}}(\log H^{(e)})_{x^{(e)}} \to \Omega^\bullet_{X^{(e)}}(*H^{(e)})_{x^{(e)}}$ 是拟同构。因此，存在

$$\mathfrak{b}_i \in \mathcal{O}_{X^{(e)},x^{(e)}}(*H^{(e)})/\mathcal{O}_{X^{(e)},x^{(e)}}$$

$\widetilde{\text{使得}}$ $d\mathfrak{b}_i = [\mathfrak{Q}(s_i)]$。对于每个 $i,\ j \in I$，我们有 $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}_j$。我们将 $\mathfrak{b}_I := \mathfrak{b}_i\,(i \in I)$ 记作。令 $\mathfrak{b}_I \in \mathcal{O}_{X,\,x}$ 为 $\mathfrak{b}_I$ 的一个提升。根据前述讨论，我们得到 $\kappa^*_{d\widetilde{\mathfrak{b}}_I}\Sigma_I^{(e)}$ 是对数的。因此，得到命题 2.31。

2.4.6 平展局部良好亚纯有限覆盖

设 $\Sigma \subset T^*(X \setminus H)$ 为 (X, H) 上的亚纯有限覆盖。对任意 $x \in X$，我们得到 $\mathcal{O}_{X,x}$ 上的局部亚纯

$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{\text{有限覆盖}}$ $\mathcal{O}_{X,x}(T^*(X \setminus H)) \to \mathcal{O}_{X,x}(\Sigma)$。

定义 2.33

若诱导形式覆盖 $\mathcal{O}_{X,x}(T^*(X \setminus H)) \to \mathcal{O}_{X,x}(\Sigma)$ 是良好的，则称 $\widehat{\bullet}\ \Sigma$ 在 x 处形式良$\widehat{\text{好}}$。此时，令 $\mathcal{I}(\Sigma, x) \subset \widehat{\mathcal{O}}_{(H)\,X,x}(*H)/\widehat{\mathcal{O}}_{(H)\,X,x}$ 表示作为该分解的指标集而出现的分歧不规则值的集合。（见 §2.4.2。）

若 $\bullet\ \Sigma$ 在任意 $x \in H$ 处形式良好，则称其在 (X, H) 上形式良好。此时，令 $\boldsymbol{\mathcal{I}}(\Sigma) = (\mathcal{I}(\Sigma, x) \mid x \in H)$. 表示分歧不规则值集合的元组。

定义 2.34 Σ 称在 x 处平展局部好，如果存在一个 *étale* 坐标邻域 (U, x', φ, ψ) 属于 $x \in X$，使得 $\varphi^*\Sigma$ 在 (U, H_U) 上良好。若 Σ 在 (X, H) 的任意 $x \in H$ 处都平展局部好，则称其在该处平展局部好。

由命题 2.31，我们得到以下命题。

命题 2。35 Σ 在 (X, H) 上形式良好，当且仅当它在 (X, H) 上平展局部良好。在此情形下，存在一个有限 *Étale* 坐标覆盖 $\{(U_i, \varphi_i, \psi_i) \mid i = 1, \ldots, k\}$，使得 $\varphi_i^*\Sigma$ 在 (U_i, H_{U_i}) 上良好。

2.4.7 经双有理射影态射进行拉回与推前

设 $\varphi: X' \to X$ 是一个双有理射影态射，使得 $H' = \varphi^{-1}(H)$ 是正规交叉，且$X' \setminus H' \simeq X \setminus H$。我们有自然同构 $T^*(X' \setminus H') \simeq T^*(X \setminus H)$。对于 (X, H) 上的任意亚纯有限覆盖$\Sigma \subset T^*(X \setminus H)$，我们得到在 (X', H') 上诱导的亚纯有限覆盖 $\varphi^*(\Sigma) \subset T^*(X' \setminus H')$。反过来，对于 (X', H') 上的任意亚纯有限覆盖 $\Sigma' \subset T^*(X' \setminus H')$，我们得到在 (X, H) 上诱导的亚纯有限覆盖 $\varphi_*(\Sigma') \subset T^*(X \setminus H)$。

命题 2.36

- 设 $\Sigma \subset T^*(X \setminus H)$ 是定义在 (X, H)上的形式良好的亚纯有限覆盖。那么， $\varphi^*(\Sigma)$ 在 (X', H')上形式良好，并且满足 $\boldsymbol{\mathcal{I}}(\varphi^*\Sigma) = \varphi^*(\boldsymbol{\mathcal{I}}(\Sigma))$。
- 设 $\Sigma' \subset T^*(X' \setminus H')$ 是定义在 (X', H')上的形式良好的亚纯有限覆盖。假设分歧不规则值集合 $\boldsymbol{\mathcal{I}} = (\mathcal{I}_x \mid x \in H)$ 中存在一个元组，使得 $\boldsymbol{\mathcal{I}}(\Sigma') \subset \varphi^*\boldsymbol{\mathcal{I}}$。那么， $\varphi_*(\Sigma') \subset T^*(X \setminus H)$ 在 (X, H)上形式良好，并且有 $\boldsymbol{\mathcal{I}}(\varphi_*\Sigma) \subset \boldsymbol{\mathcal{I}}$。

证明 令 $U = \mathrm{Spec}(R)$ 为带有闭点 x 的仿射 $\mathbb{K}$-簇。令 $\psi: U \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{K}[z_1, \ldots, z_n]$ 为 étale 态射，使得 $\psi(x) = (0, \ldots, 0)$，且 $\{\psi^*(z_i) = 0\}$ 连通。对某个 $1 \leq \ell \leq n$，设 $H = \psi^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\ell}\{z_i = 0\})$。令 $U' = \mathrm{Spec}(R')$ 为带有闭点 x' 的仿射 $\mathbb{K}$-簇。令 $\psi': U' \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{K}[z_1, \ldots, z_n]$ 为 étale 态射，使得 $\psi'(x') = (0, \ldots, 0)$，且 $\{(\psi')^* z_i = 0\}$ 连通。设 $H' = (\psi')^{-1}\big(\bigcup_{i=1}^{m}\{z_i = 0\}\big)$。设 $\psi_i = \psi^*(z_i)$，且 $\psi_i' = (\psi')^*(z_i)$。令 $\varphi: U' \to U$ 为双有理态射，使得 (i) $\varphi(x') = x$，(ii) $\varphi^*(\psi_i) = \prod_{j=1}^{m}(\psi_j')^{k_i}$，$_j\widetilde{g}_i$ 使得 $\widetilde{g}_i(x') \neq 0$。

设 $R^{(e)} = R[\psi_1^{1/e}, \ldots, \psi_\ell^{1/e}]$ 与 $(R')^{(e)} = R[(\psi_1')^{1/e}, \ldots\ldots, (\psi_m')^{1/e}]$ 对任意 $e \in \mathbb{Z}_{>0}$。设 $U^{(e)} =$ 谱 $R^{(e)}$ 与 $(U')^{(e)} =$ 谱$(R')^{(e)}$。对任意 $e \in \mathbb{Z}_{>0}$，存在 $e' \in \mathbb{Z}_{>0}$，具有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} (U')^{(e')} & \longrightarrow & U^{(e)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U' & \longrightarrow & U. \end{array}$$

一个好的有限 $R^{(e)}(*H^{(e)})/R^{(e)}$ 的子集诱导出 $(R')^{(e')}(*(H')^{(e')})/(R')^{(e')}$的一个好的有限子集 .

设 $\mathfrak{a} \in R^{(e)}(*H^{(e)})$。若 $\Sigma = \kappa_{d\mathfrak{a}}^*\Sigma_1$ 对对数 Σ_1成立，则 $\varphi^*\Sigma = \kappa_{d\varphi^*\widetilde{\mathfrak{a}}}^*(\varphi^*\Sigma_1)$ 对对数$\varphi^*\Sigma_1$成立。若 $\Sigma' = \kappa_{d\widetilde{\mathfrak{a}}}^*\Sigma_1'$ 对对数 Σ_1'成立，则 $\varphi_*(\Sigma') = \kappa_{d\widetilde{\mathfrak{a}}}^*(\varphi_*\Sigma_1')$ 对对数 $\varphi_*\Sigma_1'$成立。于是，我们由命题 2.35 得到命题 2.36 的结论。 ∎

2.5 族情形

2.5.1 局部代数条件

设 S是 $\mathbb{K}$上的正则整环。设 R是一个 $S[x_1, \ldots, x_n]$-代数，且在$S[x_1, \ldots, x_n]$上有限且 étale。设 $U = \mathrm{Spec}(R)$。我们得到 U的正规交叉超曲面 $H = \bigcup_{i=1}^{\ell}\{x_i = 0\}$。令$U^\circ = U \setminus H$。设 $T^*(U^\circ/S)$表示 U°在 $\mathrm{Spec}(S)$ 上的相对余切丛。设 $T^*(U/S)(\log H)$ 表示 (U, H) 在 $\mathrm{Spec}(S)$ 上的相对对数余切丛。

设 $\Sigma \subset T^*(U^\circ/S)$ 是 U°的一个有限覆盖，且在 S上平坦。

定义 2.37 我们称 Σ 相对于 S 是对数的，如果 Σ 在 $T^*(U/S)(\log H)$ 中的闭包在U上是真。 ∎

对于任意 $f \in R(*H)$，通过相对于谱(S)取外微分，我们得到 $T^*(U^\circ/S)$ 的截面 df。通过加上 df，我们得到 $T^*(U^\circ/S)$ 的自同构 κ_{df}。

定义 2.38 我们称 Σ 在 (U, H) 上相对于 S 是非分歧良好的，若存在不规则值良好集合 $\mathcal{I} \subset R(*H)/R$ 以及一个分解

$$\Sigma = \bigsqcup_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}} \Sigma_{\mathfrak{a}}$$

使得每个 $\kappa_{d\widetilde{\mathfrak{a}}}^*\Sigma_{\mathfrak{a}}$ 都是对数的。这里， $\widetilde{\mathfrak{a}} \in R(*H)$ 表示 $\mathfrak{a}$ 的一个提升。 ∎

~ ~ ~ ~令 Spec(S) $\to$ Spec(S) 为仿射概形的 étale 覆盖。我们令 $R = S \otimes_S R$ 和 $U = R$。对于 $e \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们令 $\widetilde{R}^{(e)} = \widetilde{R}[x_1^{1/e}, \ldots, x_n^{1/e}]$ 和 $\widetilde{U}^{(e)} =$Spec($\widetilde{R}^{(e)}$)。我们得到态射 ρ_e： $\widetilde{U}$ $_{(e)} \to U$。我们令 $\widetilde{H}^{(e)} = \rho_e^{-1}(H)$ 和 $\widetilde{\Sigma}^{(e)} = \rho_e^*(\Sigma)$。

定义 2.39 我们称 Σ 关于 S 在(U, H) 上是良好的，如果存在仿射概形的一个 *étale* 覆盖谱($\widetilde{S}$) $\to$谱(S) 以及 $e \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得 $\rho_e^*(\Sigma)$关于 $\widetilde{S}$在($\widetilde{U}^{(e)}$, $\widetilde{H}^{(e)}$) 上是非分歧良好的。 ∎

令 $\mathbb{K}'$ 为任意特征零的代数闭域。令 $S \to \mathbb{K}'$ 为 $\mathbb{K}$-代数的一个态射。我们由 (U, H, Σ) 和 $S \to \mathbb{K}'$ 得到 ($U_{\mathbb{K}'}$, $H_{\mathbb{K}'}, \Sigma_{\mathbb{K}'}$)。下面的引理显然。

引理 2.40 若 Σ 关于 S 在(U, H) 上是良好的，则 $\Sigma_{\mathbb{K}'}$ 在$(U_{\mathbb{K}'}, H_{\mathbb{K}'})$上是良好的。 ∎

引理 2.41 令 $\mathbb{K}_1$ 为包含 S 的代数闭域。假设 $\Sigma_{\mathbb{K}_1}$ 在$(U_{\mathbb{K}_1}, H_{\mathbb{K}_1})$上是良好（分别地，对数良好、非分歧良好）的。那么，存在 $\mathbb{K}_1$ 中正则 $\mathbb{K}$-代数的一个扩张 $S \subset S_1$，使得 Σ_{S_1} 关于 S_1 在(U_{S_1}, H_{S_1}) 上是良好（分别地，对数良好、非分歧良好），其中$(U_{S_1}, H_{S_1}, \Sigma_{S_1})$ 由(U, H, Σ) 和扩张 $S \subset S_1$ 诱导。

证明 只需考虑 $\Sigma_{\mathbb{K}_1}$ 非分歧良好的情形。令 $R_{\mathbb{K}_1} = R \otimes_S \mathbb{K}_1$。存在不规则值良好集合 $\mathcal{I} \subset R_{\mathbb{K}_1}(*H_{\mathbb{K}_1})\Big/R_{\mathbb{K}_1}$ 以及分解 $\Sigma_{\mathbb{K}_1} = \bigsqcup_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}} \Sigma_{\mathbb{K}_1, \mathfrak{a}}$，使得 $\kappa_{d\widetilde{\mathfrak{a}}}^* \Sigma_{\mathbb{K}_1, \mathfrak{a}}$ 是对数的。通过扩大 $\mathbb{K}_1$ 中的 S，我们可以假设存在一个有限子集 $\mathcal{I} \subset R(*H)\Big/R$，它诱导出$\mathcal{I}$。根据引理 2.27，我们可以假设 $\mathcal{I}_S$ 是不规则值良好集合，因为 $\mathcal{I}$ 是不规则值良好集合。

存在一个分解 $\Sigma = \bigcup_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}} \Sigma_{\mathfrak{a}}$，使得 $\Sigma_{\mathbb{K}_1, \mathfrak{a}} = \Sigma_{\mathfrak{a}} \times_S \mathbb{K}_1$。对于 $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$，由于 $\Sigma_{\mathbb{K}_1, \mathfrak{a}} \cap \Sigma_{\mathbb{K}_1, \mathfrak{b}} = \emptyset$，$\Sigma_{\mathfrak{a}} \cap \Sigma_{\mathfrak{b}}$ 并不支配 Spec(S)。通过扩大 S，我们可以假设 $\Sigma_{\mathfrak{a}} \cap \Sigma_{\mathfrak{b}} = \emptyset$。

对于 $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}$，$\mathcal{I}_S$ 中相应的元素也记作 $\mathfrak{a}$。令 $\widetilde{\mathfrak{a}} \in R(*H)$ 为 $\mathfrak{a}$ 的一个提升。考虑$\kappa_{d\widetilde{\mathfrak{a}}}^* \Sigma_{\mathfrak{a}}$。令 $\mathbb{P}$ 为 $T^*(U/S)$（对数 H）的射影完备化。令 $\mathbb{P}_\infty$ 表示 $\mathbb{P}$ 中 $T^*(U/S)$（对数 H）的补充。令 $\kappa_{d\widetilde{\mathfrak{a}}}^* \Sigma_{\mathfrak{a}}$ 表示 $\kappa_{d\widetilde{\mathfrak{a}}}^* \Sigma_{\mathfrak{a}}$ 在 $\mathbb{P}$ 中的闭包。由于 $\kappa_{d\widetilde{\mathfrak{a}}}^* \Sigma_{\mathbb{K}_1, \mathfrak{a}}$ 是对数的，$\kappa_{d\widetilde{\mathfrak{a}}}^* \Sigma_{\mathfrak{a}} \cap \mathbb{P}_\infty$ 不支配谱(S)。通过扩大 S，我们可以假设 $\kappa_{d\widetilde{\mathfrak{a}}}^* \Sigma_{\mathfrak{a}} \cap \mathbb{P}_\infty = \emptyset$。这意味着 $\kappa_{d\widetilde{\mathfrak{a}}}^* \Sigma_{\mathfrak{a}}$ 是对数的。 ∎

令 $\Sigma^{(i)} \subset T^*(U^\circ/S)$（$i = 1, 2$）为 U° 的良覆盖。对于谱(S) 的任意闭点 z，我们设 (U_z, H_z, $\Sigma_z^{(i)}$) =(U, H, $\Sigma^{(i)}$) $\times_{\mathrm{Spec}(S)} z$。我们在 ($U_z$, H_z) 上得到良好的亚纯覆盖 $\Sigma_z^{(i)}$，以及相应的元组 $\boldsymbol{\mathcal{I}}(\Sigma_z^{(i)})$ =($\mathcal{I}(\Sigma_z^{(i)})$, x) $| \, x \in H_z$)。

引理 2.42 存在一个闭子集 $Z \subset$ 谱(S)，使得当且仅当 $z \in Z$ 时，$\boldsymbol{\mathcal{I}}(\Sigma_z^{(1)}) =\boldsymbol{\mathcal{I}}(\Sigma_z^{(2)})$ 成立。

证明 只需考虑 $\Sigma^{(i)}$ 均为非分歧良好的情形。令 $\mathcal{I}^{(i)} \subset R(*H)/R$ 为定义 2.38 中的指标集。对于每个 $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}^{(i)}$ 和 $z \in$ 谱(S)，令 $\mathfrak{a}_z \in \mathcal{I}_z^{(i)} \subset R_z(*H_z)/R_z$ 表示诱导元素。只需考虑超曲面 $\{z_i = 0\} \subset U$ 连通的情形，并且存在一个截面$\frown\alpha$: 谱(S) $\to \bigcap\{z_i = 0\} \subset U_\alpha$。令 R_α 表示沿着 α 的像对 R 作完备化。我们得到诱导子集 $\widehat{\mathcal{I}}_\alpha^{(i)} \subset \widehat{R}_\alpha(*H)/\widehat{R}_{\alpha\circ}$ 对于 $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^\ell$，令 $x^{\boldsymbol{m}} = \prod_{i=1}^\ell x_i^{m_i}$。

对于 $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}^{(i)}$，我们有展开式 $\mathfrak{a} = \sum \mathfrak{a}_{\boldsymbol{m}} x^{\boldsymbol{m}}$，其中 $\mathfrak{a}_{\boldsymbol{m}} = 0$ 对于 $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^\ell_{\geq 0}$。我们可以将 $\mathfrak{a}_{\boldsymbol{m}}$ 视为 Spec(S) 上的函数。

对于 $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}_\alpha^{(2)}$ 和 $\mathfrak{b} \in$ 我们得到以下闭子集 $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \bigcap_{\boldsymbol{m}} \{\mathfrak{a}_{\boldsymbol{m}} = \mathfrak{b}_{\boldsymbol{m}}\} \subset$ Spec(S)。那么，$\mathfrak{a}_z = \mathfrak{b}_z$ 成立当且仅当 $z \in Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$。我们有 $\mathfrak{a}_z \in \mathcal{I}_z^{(2)}$ 当且仅当 $z \in \bigcup_{\mathfrak{b} \in \mathcal{I}^{(2)}} Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$。因此，$\mathcal{I}_z^{(1)} \subset \mathcal{I}_z^{(2)}$ 当且仅当 $z \in \bigcap_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}^{(1)}} \bigcup_{\mathfrak{b} \in \mathcal{I}^{(2)}} Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$。类似地，$\mathcal{I}_z^{(2)} \subset \mathcal{I}_z^{(1)}$ 当且仅当 $z \in \bigcap_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}^{(2)}} \bigcup_{\mathfrak{b} \in \mathcal{I}^{(1)}} Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$。于是，我们得到引理的结论。 ∎

2.5.2 局部良好的亚纯有限覆盖族

设 X 是一个在谱（S）上光滑的 $\mathbb{K}$-簇。设 $H \subset X$ 是 X 的一个超曲面，它相对于 S 是正规交叉的，具体含义如下。

- H 是正规交叉的。
- 设 $H = \bigcup_{j \in \Lambda} H_j$ 表示不可约分解。对任意有限子集 $I \subset \Lambda$，$H_I := \bigcap_{j \in I} H_j$ 在谱 S上光滑。

我们还假设 H 的单值化在下述意义下是平凡的。

- 令 $H_I = \bigcup_{j\in\Lambda(I)} H_{I,j}$ 表示其不可约分解。那么，$H_{I,j} \to \mathrm{Spec}(S)$ 的任意几何纤维都是不可约的。

令 $T^*(X/S)$ 表示 X 在 $\mathrm{Spec}(S)$ 上的相对余切丛。令 $T^*(X/S)(\log H)$ 表示 (X,H) 在 S 上的相对余切丛。

令 $\Sigma \subset T^*((X\setminus H)/S)$ 为 $X\setminus H$ 的一个有限覆盖，且在 S 上平坦。令 x 为 H 的任意闭点。对于 X 中意义如 §2.4.5 所述的 x 的任意 étale 坐标邻域 (U,x',φ,ψ)，我们定义 $H_U = \varphi^{-1}(H)$ 和 $\Sigma_U = \varphi^*\Sigma \subset T^*((U\setminus H_U)/S)$。

定义 2.43 我们称 Σ 相对于 S 在 x 处平展局部好（分别为对数、非分歧良好），如果存在 x 的一个 *étale* 坐标邻域 (U,x',φ,ψ)，使得 $\varphi^*\Sigma_U$ 在 (U,H_U) 上良好（对数、非分歧良好）。

定义 2.44 我们称 Σ 在相对于S 的(X,H) 上是平展局部好（分别为对数、非分歧良好）的，如果它在相对于 S的任意 $x\in X$ 处都是平展局部好（对数、非分歧良好）。

设 $\mathbb{K}'$ 是任意特征零代数闭域。设 $S\to\mathbb{K}'$ 是 $\mathbb{K}$-代数的一个态射。我们通过$S\to\mathbb{K}'$从(X,H,Σ)得到$(X_{\mathbb{K}'},H_{\mathbb{K}'},\Sigma_{\mathbb{K}'})$。由引理 2.40 可得以下引理。

引理 2.45 若 Σ 在相对于 S的(X,H) 上是良好（分别为对数、非分歧良好）的，则 $\Sigma_{\mathbb{K}'}$ 在$(X_{\mathbb{K}'},H_{\mathbb{K}'})$上是良好的（分别为对数、非分歧良好的）。

引理 2.46 设 $\mathbb{K}_1$ 是一个包含 S的代数闭域。假设 $\Sigma_{\mathbb{K}_1}$ 在$(X_{\mathbb{K}_1},H_{\mathbb{K}_1})$上是良好（分别为对数、非分歧良好）的。那么，存在 $\mathbb{K}_1$ 中的正则 $\mathbb{K}$-代数 $S\subset S_1$ 的一个扩张，使得Σ_{S_1} 在相对于 S_1的(X_{S_1},H_{S_1}) 上是良好（分别为对数、非分歧良好）的，其中$(X_{S_1},H_{S_1},\Sigma_{S_1})$ 由(X,H,Σ) 和扩张 $S\subset S_1$诱导。

证明 存在一组有限的平展态射元组 $\varphi_j : U_{\mathbb{K}_1,j}\to X_{\mathbb{K}_1}$，其中有一个平展态射 $\psi_j : U_{\mathbb{K}_1,j}\to$谱 $\mathbb{K}_1[x_1,\dots,x_n]$，使得以下结论成立。

- $X_{\mathbb{K}_1} = \bigcup_{j=1}^m \mathrm{Im}\,\varphi_j$。
- $H_{U_{\mathbb{K}_1,j}} := \varphi_j^{-1}(H_{\mathbb{K}_1}) = \bigcup^{\ell(j)}{}_{i=1}\{\psi_j^*(x_i)=0\}$。此外，$\{\psi_j^*(x_i)=0\}$ 是连通的。
- $\Sigma_{U_{\mathbb{K}_1,j}} = \varphi_j^*\Sigma_{\mathbb{K}_1}$ 在 $(U_{\mathbb{K}_1,j},H_{U_{\mathbb{K}_1,j}})$ 上是良好的。

通过扩大 S，我们可以假设存在一组平展态射元组 $\varphi_{S,j} : U_{S,j}\to X_S$，其中有一个平展态射 $\psi_{S,j}: U_{S,j}\to$谱 $S[x_1,\dots,x_n]$，它们诱导出 (φ_j,ψ_j) $(j=1,\dots,m)$。

我们令 $H_{U_S,j} = \varphi_{S,j}^{-1}(H_S)$ 以及 $U_{S,j}^\circ = U_{S,j}\setminus H_{U_S,j}$。我们得到 $T^*(U_{S,j}^\circ/S)$ 的闭子集 $\Sigma_{U_S,j} = \varphi_{S,j}^*(\Sigma_{\mathbb{K}_1})$。根据 [6,定理 6.9.1],，通过扩大 S，我们可以假定 $\Sigma_{U_S,j}$ 在 S 上平坦。根据引理 2.41，通过扩大 S，我们可以假定 $\Sigma_{U_S,j}$ 在 $(U_{S,j},H_{U_S,j})$ 上相对于 S 是良好的（相应地，为对数的、非分歧良好的）。因此，我们得到引理 2.46 的断言。

2.5.3 拉格朗日覆盖族

设 $\Sigma\subset T^*((X\setminus H)/S)$ 为 $X\setminus H$ 的有限覆盖，它在谱(S)上平坦。设 Σ^{sm} 表示 Σ 的光滑部分。我们还作如下假定。

- $\Sigma\to$谱(S)的每个几何纤维都是既约的。
- 对谱(S)的任意闭点 s，$\Sigma_{S,s} = \Sigma_S\times_{\text{谱}(S)} s$ 的任意不可约分支与 Σ_{sm}有非空交。

定义2.47 Σ 称为拉格朗日的，如果对谱(S)的任意闭点s，$\Sigma_{S,s}$ 在定义2.20 的意义下是拉格朗日的。

令 ω 表示 $T^*(X/S)$ 的相对辛结构。令 $T^*(\Sigma^{\mathrm{sm}}/S)$ 表示 Σ^{sm} 在 S 上的相对余切丛。我们得到由 ω 诱导的 $\bigwedge^2 T^*(\Sigma^{\mathrm{sm}}/S)$ 的诱导截面 Ψ_ω。

引理 2。48 Σ 是拉格朗日的，当且仅当 $\Psi_\omega = 0$。 ∎

下面的引理显然。

Le引理 2.49 如果 Σ 是拉格朗日的，那么 $\Sigma_S \to$谱(S) 的任意几何纤维都是拉格朗日的 n. ∎

引理 2.50 假设对于从 S 到代数闭域 $\mathbb{K}_1$ 的单射， $\Sigma_{\mathbb{K}_1}$ 是拉格朗日的。那么， Σ 是拉格朗日的。 ∎

2.5.4 好亚纯覆盖的比较

设 $\Sigma^{(i)} \subset T^*((X \setminus H)/S)$ $(i = 1, 2)$ 是 $X \setminus H$ 的有限覆盖，并且在 (X, H) 上平展局部良好。对于 Spec(S) 的每个闭点 z，我们得到 (X_z, H_z) 上的好亚纯覆盖 $\Sigma_z^{(i)}$。我们得到元组 $\boldsymbol{\mathcal{I}}(\Sigma_z^{(i)})$。由引理 2.42，我们得到以下命题。

命题 2.51 存在 存在一个闭子集 $Z \subset$谱(S)，使得 $\boldsymbol{\mathcal{I}}(\Sigma_z^{(1)}) = \boldsymbol{\mathcal{I}}(\Sigma_z^{(2)})$ 当且仅当 $z \in Z$。 ∎

2.6 亚纯有限覆盖的模型

2.6.1 初步内容

设 $\mathbb{K}_1$ 是一个包含 $\mathbb{K}$的代数闭域。设$X_{\mathbb{K}_1}$ 是一个不可约射影正规 $\mathbb{K}_1$-簇。设 $\boldsymbol{Z}_{\mathbb{K}_1} = (Z_{\mathbb{K}_1,j} \mid j = 1, \dots, m_1)$ 是 $X_{\mathbb{K}_1}$ 的闭子集元组，使得 $X^\circ_{\mathbb{K}_1} := X_{\mathbb{K}_1} \setminus \bigcup_{j=1}^{m_1} Z_{\mathbb{K}_1,j}$是光滑的。设 $\boldsymbol{W}_{\mathbb{K}_1} = (W_{\mathbb{K}_1,k} \mid k = 1, \dots, m_2)$ 是 $T^*X^\circ_{\mathbb{K}_1}$的闭子集元组，使得每个$W_{\mathbb{K}_1,k}$在 $X^\circ_{\mathbb{K}_1}$上都是有限且支配的。对于每个 $J \subset \{1, \dots, m_1\}$，我们设 $Z_{\mathbb{K}_1,J} = \bigcap_{j\in J} Z_{\mathbb{K}_1,j}$。我们有不可约分解 $Z_{\mathbb{K}_1,J} = \bigcup_{p\in\Lambda(J,1)} Z_{\mathbb{K}_1,J,p}$。

令 $S \subset \mathbb{K}_1$ 为一个在 $\mathbb{K}$上有限生成的正则子环。

定义 2。 52 一个关于 S的 *{style id='3'}*$(X_{\mathbb{K}_1}, \boldsymbol{Z}_{\mathbb{K}_1}, \boldsymbol{W}_{\mathbb{K}_1})$ 模型由以下数据 (,,) 组成。

- X_S 表示一个不可约的 $\mathbb{K}$-簇，其在Spec(S) 上平坦，且满足：*(i)* X_S 在Spec(S)上是射影的；*(ii)* $X_S \to \mathrm{Spec}(S)$ 的每个几何纤维均正规且不可约；*(iii)* $X_S \times \mathbb{K}_1 = X_{\mathbb{K}_1}$。
- $\boldsymbol{Z}_S = (,_j \mid j = 1, \dots, m_1)$ 表示 X_S 的一个不可约闭子集元组，满足：*(i)* $Z_{S,j}$ 在Spec S上平坦；*(ii)* $Z_{S,j} \to \mathrm{Spec}(S)$ 的每个几何纤维均不可约且既约；*(iii)* $Z_{S,j} \times \mathbb{K}_1 = Z_{\mathbb{K}_1,j}$；*(iv)*$X^\circ_S = X_S \setminus \bigcup_{j=1}^{m_1} Z_{S,j}$ 在 S上光滑。
- 对于任意非空子集 $J \subset \{1, \dots, m_1\}$，都有分解 $\bigcap_{j\in J} Z_{S,\ j} = \bigcup_{p\in\Lambda(J,\ 1)} Z_{S,\ J,\ p}$，使得 *(i)* $Z_{S,\ J,\ p}$ 在 谱(S) 上是平坦的，*(ii)* $Z_{S,\ J,\ p} \to$谱(S) 的每个几何纤维都是不可约且既约的，*(iii)* $Z_{S,\ J,\ p} \times \mathbb{K}_1 = Z_{\mathbb{K}_1,\ J,\ p}$。
- $\boldsymbol{W}_S = (W_{S,\ k} \mid k = 1, \dots, m_2)$ 表示 $T^*(X^\circ_S/S)$ 的一个不可约闭子集元组，满足 *(i)* $W_{S,\ k}$ 在 谱 S 上是平坦的，*(ii)* $W_{S,\ k} \to$ 谱(S) 的每个几何纤维都是不可约且既约的，*(iii)* $W_{S,\ k} \times \mathbb{K}_1 = W_{\mathbb{K}_1,\ k}$，*(iv)* $W_{S,\ k}$ 在 X°_S 上是有限且支配的。这里， $T^*(X^\circ_S/S)$ 表示 X°_S 在 谱 S 上的相对余切丛。

我们将施加以下附加条件。

- 令 $I \subset \{1, \dots, m_1\}$ 为任意子集。若 $\bigcap_{j\in I} Z_{\mathbb{K}_1,\ j}$ 在 $\mathbb{K}_1$上光滑，则 $\bigcap_{j\in I} Z_{S,\ j}$ 在 谱 S上光滑。（我们形式上设定 $Z_\emptyset = X$。） ∎

以下引理是标准的。

引理 2.53 存在一个在 $\mathbb{K}$上有限生成的正则子环 $S \subset \mathbb{K}_1$，以及一个在 S上的模型 $(X_S, \boldsymbol{Z}_S, \boldsymbol{W}_S)$，它是$(X_{\mathbb{K}_1}, \boldsymbol{Z}_{\mathbb{K}_1}, \boldsymbol{W}_{\mathbb{K}_1})$ 的模型。

证明 取一个嵌入 $X_{\mathbb{K}_1} \subset \mathbb{P}^N_{\mathbb{K}_1}$，其中 N 足够大，我们将 $X_{\mathbb{K}_1}$ 和 $Z_{\mathbb{K}_1、\ j}$ 视为 $\mathbb{P}^N_{\mathbb{K}_1}$ 的子簇。令 $\mathfrak{I}$、 $\mathfrak{I}_j$、 $\mathfrak{I}_{J、\ p}$ 分别表示 $\mathbb{K}_1[y_0, \dots, y_N]$ 中对应于 $X_{\mathbb{K}_1}$、 $Z_{\mathbb{K}_1}$、 $_j$ 和 $Z_{\mathbb{K}_1}$、 $_I$、 $_p$ 的齐次理想。存在一个在 $\mathbb{K}$ 上有限生成的正则子环 $S_1 \subset \mathbb{K}_1$，使得 $\mathfrak{I}$、 $\mathfrak{I}_j$ $\mathfrak{I}_{J、\ p}$ 分别由 $S_1[y_0, \dots, y_N]$的齐次理想 $\mathfrak{I}_{S_1}$、 $\mathfrak{I}_{S_1、\ j}$ 和 $\mathfrak{I}_{S_1、\ J.p}$ 诱导得到。令 X_{S_1}、 $Z_{S_1、\ j}$、 $Z_{S_1、\ J、\ p}$ 表示 $\mathbb{P}^N_{S_1}$ 中相应的闭子簇。我们可以假设它们在 Spec S_1 上支配。我们可以假设 $Z_{S_1、\ j} \subset X_{S_1}$ 和 $Z_{S_1、\ J、\ p} \subset \bigcap_{j\in J} Z_{S_1、\ j}$。由一般自由定理 [6, 定理 6.9.1], ，我们可以假设 X_{S_1}、 $Z_{S_1、\ j}$ 和 $Z_{S_1、\ J、\ p}$ 在 Spec(S_1) 上平坦。由 [7, 定理 12.2.4], ，我们可以作如下假设。

- X_{S_1} →Spec(S_1) 的每个几何纤维都是正规且不可约的。我们还可以假设 $X^\circ_{S_1}$ 是光滑的 oth 在 Spec(S_1) 上。
- $Z_{S_1,j}$ →Spec(S_1) 的每个几何纤维都是不可约且既约的。
- $Z_{S_1,J,p}$ →Spec(S_1) 的每个几何纤维都是不可约且既约的。

特别地， X_{S_1}、 Z_{S_1}、 $_j$ 和 Z_{S_1}、 $_J$、 $_p$ 都是不可约的。我们有 $\bigcup_{p\in\Lambda(J,1)} Z_{S_1}$、 $_{J.p} \subset \bigcap_{j\in J} Z_{S_1}$、 $_{j_0}$ 设 Z'_{S_1} 是 $\bigcap_{j\in J} Z_{S_1}$、 $_j$ 的一个不可约分支，它不包含于 $\bigcup_{p\in\Lambda(J,1)} Z_{S_1}$、 $_{J.p}$。由于 $\bigcup_{p\in\Lambda(J,1)} Z_{\mathbb{K}_1}$、 $_J$、 $_p = \bigcap_{j\in J} Z_{\mathbb{K}_1}$、 $_j$、 Z'_{S_1} 在 Spec(S_1) 上不是支配的。因此，我们可以假设 $\bigcup_{p\in\Lambda(J,1)} Z_{S_1}$、 $_{J.p} = \bigcap_{j\in J} Z_{S_1}$、 $_{j_0}$

令 $U_{S_1} =$ Spec R_{S_1} 为 $X^\circ_{S_1}$的一个仿射开子集。令 $T^*(U_{S_1}/S_1)$ 表示 ~ U_{S_1} 在 Spec S_1上的相对余切丛。令 R_{S_1} 表示 $T^*(U_{S_1}/S_1)$ 的代数函数环。我们有 $T^*(U_{S_1}/S_1) =$ Spec R_{S_1}。 ~ ~令 $R_{\mathbb{K}_1} = R_{S_1} \otimes \mathbb{K}_1$ 和 $R_{\mathbb{K}_1} = R_{S_1} \otimes \mathbb{K}_{1_0}$ 我们得到 $X^\circ_{\mathbb{K}_1}$的诱导仿射开子集 $U_{\mathbb{K}_1} =$ Spec $R_{\mathbb{K}_1}$。我们~ ~有 $T^*U_{\mathbb{K}_1} =$ Spec $R_{\mathbb{K}_1}$。我们有与 $T^*U_{\mathbb{K}_1} \cap W_{\mathbb{K}_1}$、 $_k$相对应的 $R_{\mathbb{K}_1}$的理想 $\mathfrak{I}'_k$。我们可以假设存在 R_{S_1} 的一个理想 $\mathfrak{I}'_{S_1}$、 $_k$，它诱导出 $\mathfrak{I}'_k$。令 $W_{U_{S_1}}$、 $_k \subset T^*($ U_{S_1}/S_1) 表示相应的闭子集。根据 [6, 定理 6.91] 和 [7, 定理 12.24], ，我们可以作如下假设。

(a1) $W_{U_{S_1,\ k}}$ 在 Spec S_1 上平坦。**(a2)** $W_{U_{S_1}}$ 的每个几何纤维， $_k$ →Spec(S_1) 都是不可约且既约的。**(a3)** $W_{U_{S_1,\ k}}$ 诱导 $W_{\mathbb{K}_1,\ k} \cap T^*(U_{\mathbb{K}_1})$。

由于 $W_{U_{S_1,\ k}}$ 在 Spec(S_1) 上平坦，以下态射是单射。

$$\widetilde{R}_{S_1}/\mathfrak{I}'_{S_1,k} \to \left(\widetilde{R}_{S_1}/\mathfrak{I}'_{S_1,k}\right) \otimes_{S_1} \mathbb{K}_1 = \widetilde{R}_{\mathbb{K}_1}/\mathfrak{I}'_k.$$

因此，上述条件 (a1,a2,a3) 刻画了 $W_{U_{S_1,\ k}}$。

设 $X_{S_1} = \bigcup_{q=1}^{M} U_{S_1,}$ $_q$ $W_{U_{S_1\ q}\ k} \subset$ $T^*\ U_{S_1\ q}/S_1 \quad k = 1\ \ldots\ m_2 \quad q = 1\ \ldots\ M$ 1, 2, 3 是由仿射开子集构成的覆盖。我们得到闭子集 . . (.) (, , , , ,)。根据条件 (a a a) 的刻画，我们得到

$$W_{U_{S_1,q(1)},k} \cap T^*(U_{S_1,q(1)}/S_1) \cap T^*(U_{S_1,q(2)}/S_1) = W_{U_{S_1,q(2)},k} \cap T^*(U_{S_1,q(1)}/S_1) \cap T^*(U_{S_1,q(2)}/S_1)$$

在 $T^*(U_{S_1,\ q(1)}/S_1) \cap T^*(U_{S_1,\ q(2)}/S_1)$ 中。因此，存在闭子集 $W_{S_1,\ k}$，使得

$$W_{S_1,k} \cap T^*(U_{S_1,q}/S_1) = W_{U_{S_1,q},k}.$$

由该构造，下列结论成立。

- $W_{S_1,k}$ 在谱(S_1)上平坦。
- $W_{S_1,k}$ →谱(S_1)的每个几何纤维都是不可约且既约的。
- $W_{S_1,k}$ 诱导$W_{\mathbb{K}_1,k_0}$

显然，$W_{S_1,k} \to X^\circ_{S_1}$ 是支配的。我们可以假设$W_{S_1,k} \to X^\circ_{S_1,k}$ 是真的。事实上，设 $T^*(X^\circ_{S_1}/S_1) \subset \mathbb{P}$表示射影完备化。设 $\mathbb{P}_\infty$ 表示 $T^*(X^\circ_{S_1}/S_1)$的补充。设$W_{S_1,k}$表示$W_{S_1,k}$ 在 $\mathbb{P}$中的闭包。设 $T \subset X^\circ_{S_1}$ 表示$W_{S_1,k} \cap \mathbb{P}_\infty$ 在投影 $\mathbb{P} \to X^\circ_{S_1}$下的像。它是一个闭子集。因为$W_{\mathbb{K}_1,k} \to \overline{X}^\circ_{\mathbb{K}_1}$ 是真的，我们得到 $T \to$ 谱(S_1)不是支配的。因此，我们可以假设$T = \emptyset$，即$W_{S_1,k} \to X^\circ_{S_1}$ 是真的。 ∎

设 $(X_S, \boldsymbol{Z}_S, \boldsymbol{W}_S)$ 是定义在 S 上的模型。对于 S 的任意闭点 s，取在 s 上的纤维，我们得到 $\mathbb{K}$-簇 X_S， $_s$，其带有 X_S， $_s$ 的闭子集元组 $\boldsymbol{Z}_S$， $_s$ = (Z_S， $_s$， $_j \,|\, j = 1$， ... ， m_1) 以及 $T^*X^\circ_S$， $_s$的闭子集元组 $\boldsymbol{W}_S$， $_s$ = (W_S， $_s$， $_k \,|\, k = 1$， ... ， m_2) ，其中 X°_S， $_s = X_S$， $_s \setminus \bigcup_{j=1}^{m_1} Z_S$， $_s$， $_{j_0}$

引理 2。54 $W_{S,\ s,\ k} \to X^\circ_{S,\ s}$ 在 $X^\circ_{S,\ s}$ 上是有限且支配的。

证明 由于 $W_{S,\ k} \to X^\circ_S$ 是一个真态射，我们得到 $W_{S,\ s,\ k} \to X^\circ_{S,\ s}$ 是一个真态射，这意味着它是有限的。利用赋值判别准则，我们得到态射 $W_{S,\ k} \to X^\circ_S$ 在闭点上诱导出一个满射。特别地，$W_{S,\ s,\ k} \to X^\circ_{S,\ s}$ 是支配的。 ∎

2.6.2 亚纯覆盖的模型

设 $X_{\mathbb{K}_1}$ 是一个带有超曲面 $H_{\mathbb{K}_1}$ 的正规不可约射影 $\mathbb{K}_1$-簇。令 $H_{\mathbb{K}_1}=\bigcup_{j=1}^{m_1}H_{\mathbb{K}_1,\,j}$ 表示其不可约分解。设 $\Sigma_{\mathbb{K}_1}\subset T^*(X_{\mathbb{K}_1}\setminus H_{\mathbb{K}_1})$ 是定义在 $(X_{\mathbb{K}_1},\ H_{\mathbb{K}_1})$ 上的亚纯有限覆盖。令$\Sigma_{\mathbb{K}_1}=\bigcup_{k=1}^{m_2}\Sigma_{\mathbb{K}_1,\,k}$ 表示其不可约分解。我们得到元组 $\boldsymbol{H}_{\mathbb{K}_1}=(H_{\mathbb{K}_1,\,j})$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbb{K}_1}=(\Sigma_{\mathbb{K}_1,\,k})$。

设 $S\subset\mathbb{K}_1$ 是一个在 $\mathbb{K}$ 上有限生成的正则环。设 $(X_S,\ \boldsymbol{H}_S,\ \boldsymbol{\Sigma}_S)$ 是 $(X_{\mathbb{K}_1},\ \boldsymbol{H}_{\mathbb{K}_1},\ \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbb{K}_1})$ 的一个模型。我们得到 X_S 的超曲面 $H_S=\bigcup_{j=1}^{m_1}H_{S,\,j}$，以及 $T^*(X_S^\circ/S)$ 的闭子集 $\Sigma_S=\bigcup_{k=1}^{m_2}\Sigma_{S,\,k}$，其中 $X_S^\circ=X_S\setminus H_S$。

定义 2.55 这样的 $(X_S,\ H_S,\ \Sigma_S)$ 称为 $(X_{\mathbb{K}_1},\ H_{\mathbb{K}_1},\ \Sigma)$ 在 S 上的一个模型。 ∎

由引理 2.46 可得以下命题。

命题 2.56 设 $X_{\mathbb{K}_1}$ 光滑，$H_{\mathbb{K}_1}$ 为简单正规交叉，且 Σ 在$(X_{\mathbb{K}_1},\ H_{\mathbb{K}_1})$上良好。则存在一个在 $\mathbb{K}_1$ 上有限生成的正则子环 $S\subset\mathbb{K}_1$，以及一个$(X_S,\ H_S,\ \Sigma_S)$ 模型，它是$(X_{\mathbb{K}_1},\ H_{\mathbb{K}_1},\ \Sigma_{\mathbb{K}_1})$ 在 S 上的模型，并满足以下条件。

- X_S 是光滑的 $o\ \ ver\ \ S$，且 H_S 相对于 S 是正规交叉的，并具有平凡单值。（参见 §2.5.2。）

按照定义 2.44 的含义，- Σ_S 在 (X_S,H_S) 上相对于 S 是良好的。

- 若 Σ 是拉格朗日的，我们可以附加条件：Σ_S 也是拉格朗日的。 ∎

2.7 基域变换

2.7.1 陈述

设 $X_{\mathbb{K}}$ 是一个光滑的 $\mathbb{K}$-簇，其上有一个正规交叉超曲面 $H_{\mathbb{K}}$。令 $H_{\mathbb{K}}=\bigcup_{i\in\Lambda}H_{\mathbb{K},\,i}$ 表示其不可约分解。对于任意 $I\subset\Lambda$，我们设 $H_{\mathbb{K},\,I}=\bigcap_{i\in I}H_{\mathbb{K},\,i}$，并令 $H^\circ_{\mathbb{K},\,I}=H_{\mathbb{K},\,I}\setminus\bigcup_{i\notin I}H_{\mathbb{K},\,i}$。

设 $\mathbb{K}\subset\mathbb{K}_1$ 是特征为零的代数闭域的一个扩张。令 $(X_{\mathbb{K}_1},\ H_{\mathbb{K}_1})$ 表示由 $(X_{\mathbb{K}},\ H_{\mathbb{K}})$ 和扩张 $\mathbb{K}\to\mathbb{K}_1$ 诱导的簇对。以下命题显然成立。

命题 2.57 在 $(X_{\mathbb{K}},\ H_{\mathbb{K}})$ 上的亚纯覆盖 $\Sigma_{\mathbb{K}}\subset T^*(X_{\mathbb{K}}\setminus H_{\mathbb{K}})$ 是平展局部好的，当且仅当诱导的亚纯覆盖 $\Sigma_{\mathbb{K}}\times\mathbb{K}_1$ 在 $(X_{\mathbb{K}_1},\ H_{\mathbb{K}_1})$ 上是平展局部好的。

证明 “仅当”部分是显然的。假设 $\Sigma_{\mathbb{K}}\times\mathbb{K}_1$ 是平展局部好的。设 $S\subset\mathbb{K}_1$ 是在 $\mathbb{K}$上有限生成的正则 $\mathbb{K}$-代数。设 (X_S,H_S,Σ_S) 由 $(X_{\mathbb{K}},H_{\mathbb{K}},\Sigma_{\mathbb{K}})$ 通过 $\mathbb{K}\to S$ 诱导。根据引理 2.46，若 S 充分大，我们可以假设 Σ_S 是平展局部好的。通过对谱(S)的任意闭点取纤维，我们得到 $\Sigma_{\mathbb{K}}$ 是平展局部好的。 ∎

设 $\Sigma_{\mathbb{K}_1}\subset T^*(X_{\mathbb{K}_1}\setminus H_{\mathbb{K}_1})$ 是 $(X_{\mathbb{K}_1},H_{\mathbb{K}_1})$ 上的形式好的亚纯覆盖。$X_{\mathbb{K}}$的任意闭点 x 诱导 $X_{\mathbb{K}_1}$的闭点 x_1。我们有自然包含

$$\widehat{\mathcal{O}}^{(H_{\mathbb{K}})}_{X_{\mathbb{K}},x}(*H_{\mathbb{K}})/\widehat{\mathcal{O}}^{(H_{\mathbb{K}})}_{X_{\mathbb{K}},x}\subset\widehat{\mathcal{O}}^{(H_{\mathbb{K}_1})}_{X_{\mathbb{K}_1},x_1}(*H_{\mathbb{K}_1})/\widehat{\mathcal{O}}^{(H_{\mathbb{K}_1})}_{X_{\mathbb{K}_1},x_1}.$$

我们将在 §2.7.5 中证明下述命题。

命题 2.58 我们假设下述条件。

- 如果$H_{\mathbb{K},I}\neq\emptyset$，则$H^\circ_{\mathbb{K},I}$ 的任一不可约分支都包含一个闭点 x，使得

$$\mathcal{I}(\Sigma_{\mathbb{K}_1},x_1)\subset\widehat{\mathcal{O}}^{(H_{\mathbb{K}})}_{X_{\mathbb{K}},x}(*H_{\mathbb{K}})/\widehat{\mathcal{O}}^{(H_{\mathbb{K}})}_{X_{\mathbb{K}},x}.$$

于是，存在 $\Sigma'_{\mathbb{K}}\subset T^*(X_{\mathbb{K}}\setminus H_{\mathbb{K}})$，使得下列结论成立。

- $\Sigma'_{\mathbb{K}}$ 的每个不可约分支在 $X_{\mathbb{K}}\setminus H_{\mathbb{K}}$上都是真且支配的 .
- $\Sigma'_{\mathbb{K}}$ 在$(X_{\mathbb{K}},H_{\mathbb{K}})$上是良好的。特别地，$\Sigma'_{\mathbb{K}}\times\mathbb{K}_1$ 在$(X_{\mathbb{K}_1},H_{\mathbb{K}_1})$上是良好的。
- $\mathcal{I}(\Sigma'_{\mathbb{K}}\times\mathbb{K}_1)=\mathcal{I}(\Sigma_{\mathbb{K}_1})$。

如果 $\Sigma_{\mathbb{K}_1}$ 是拉格朗日的，我们可以附加如下条件：$\Sigma'_{\mathbb{K}}$ 是拉格朗日的。

注记 2。59 $\Sigma_{\mathbb{K}}$ 不一定导出 $\Sigma_{\mathbb{K}_1}$。 ∎

2.7.2 单射性

设 $U_{\mathbb{K}} = \operatorname{Spec} R_{\mathbb{K}}$ 是一个 n 维光滑连通仿射 $\mathbb{K}$ 簇，其上有一个正规交叉超曲面 $H_{\mathbb{K}}$，属于 $U_{\mathbb{K}}$。令 $x \in U_{\mathbb{K}}$ 为任意闭点。假设存在一个 étale 坐标 $\psi_{\mathbb{K}}\colon U_{\mathbb{K}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{K}[z_1, \dots, z_n]$，使得 (i) $H_{\mathbb{K}} = \psi_{\mathbb{K}}^{-1}\big(\bigcup_{j=1}^{\ell}\{z_j = 0\}\big)$，(ii) $\psi_{\mathbb{K}}^{-1}(\{z_j = 0\})$ 连通，(iii) $\psi_{\mathbb{K}}(x) = (0, \dots\dots, 0)$。令 $\widehat{R}_{\mathbb{K},\,x}$ 表示 $R_{\mathbb{K}}$ 在 x 处的完备化。

引理 2.60 $R_{\mathbb{K}}(*H_{\mathbb{K}})/R_{\mathbb{K}} \to R_{\mathbb{K},\,x}(*H_{\mathbb{K}})/R_{\mathbb{K},\,x}$ 是单射。

证明 令 $a \in R_{\mathbb{K},x}(*H_{\mathbb{K}})/R_{\mathbb{K},x}$ 为任意元素。它生成子模 $R_{\mathbb{K},x}a \subset R_{\mathbb{K}}(*H_{\mathbb{K}})/R_{\mathbb{K},x_0}$ 由于 $R_{\mathbb{K},x}$ 在 $R_{\mathbb{K},x}$ 上忠实平坦，我们得到单射 $0 \neq (R_{\mathbb{K},x}a)\otimes R_{\mathbb{K},x} \to R_{\mathbb{K},x}(*H_{\mathbb{K}})/R_{\mathbb{K},x_0}$。因此，$R_{\mathbb{K},x}(*H_{\mathbb{K}})/R_{\mathbb{K},c} \to R_{\mathbb{K},x}(*H_{\mathbb{K}})/R_{\mathbb{K},x}$ 是单射。令 $a \in R_{\mathbb{K},x} \cap R_{\mathbb{K}}(*H_{\mathbb{K}})$。存在 $f \in R_{\mathbb{K}}$ 使得 $a \in R_{\mathbb{K}}(*f) \cap R_{\mathbb{K}}(*H_{\mathbb{K}})$，且 $f \notin \mathfrak{m}_{x_0}$。由于 $R_{\mathbb{K}}$ 是正则的，我们有 $R_{\mathbb{K}}(*f) \cap R_{\mathbb{K}}(*H) = R_{\mathbb{K}}$。 ∎

推论 2.61 设 $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subset R_{\mathbb{K}}(*H_{\mathbb{K}})/R_{\mathbb{K}}$ 是不规则值的良好集合。令 $\mathcal{I}_{1|\widehat{x}}$ 和 $\mathcal{I}_{2|\widehat{x}}$ 表示由 $R_x(*H)/R_x$ 诱导的子集。若 $\mathcal{I}_{1|\widehat{x}} = \mathcal{I}_{2|\widehat{x}}$，则 $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$。 ∎

2.7.3 不规则值的良好集合

设 $\mathbb{K}_1$ 是一个包含 $\mathbb{K}$ 的代数闭域。令 $U_{\mathbb{K}_1} = \operatorname{Spec} R_{\mathbb{K}_1}$ 和 $H_{\mathbb{K}_1}$ 分别表示由 $U_{\mathbb{K}}$ 和 $H_{\mathbb{K}}$ 诱导的 $\mathbb{K}_1$-簇。设 $\mathcal{I}_{\mathbb{K}_1} \subset R_{\mathbb{K}_1}(*H_{\mathbb{K}_1})/R_{\mathbb{K}_1}$ 是一个好的有限子集。令 x_1 为由 x 诱导的 $U_{\mathbb{K}_1}$ 的闭点。

引理 2.62 假设 $\mathcal{I}_{\mathbb{K}_1|\widehat{x}_1} \subset R_{\mathbb{K}_1,x_1}(*H_{\mathbb{K}_1})/R_{\mathbb{K}_1,x_1}$ 包含于 $R_{\mathbb{K},x}(*H_{\mathbb{K}})/R_{\mathbb{K},x}$。那么，$\mathcal{I}_{\mathbb{K}_1}$ 包含于 $R_{\mathbb{K}}(*H)/R_{\mathbb{K}}$。

证明 设 $S \subset \mathbb{K}_1$ 是一个在 $\mathbb{K}$ 上有限生成的正则子环。令 $U_S = \operatorname{Spec}(R_S) := U_{\mathbb{K}} \times \operatorname{Spec} S$，并令 $H_S := H_{\mathbb{K}} \times \operatorname{Spec} S$。令 $R_S = R \otimes S$。如果 S 足够大，则存在 $\mathcal{I}_S \subset R_S(*H_S)/R_S$，它通过扩张 $S \to \mathbb{K}_1$ 诱导出 $\mathcal{I}_{\mathbb{K}_1}$。对于每个闭点 $s \in \operatorname{Spec} S$，我们得到 $\mathcal{I}_{S,\,s} \subset R_{\mathbb{K}}(*H_{\mathbb{K}})/R_{\mathbb{K}}$，它是 $\mathcal{I}_S$ 沿 $U_{\mathbb{K}} \simeq U_S \times s \to U_S$ 的拉回。

令 $x_S\colon \operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R_S$ 表示由 $x\colon \operatorname{Spec} \mathbb{K} \to \operatorname{Spec} R_{\mathbb{K}}$ 诱导的截面。令 $I \subset R_S$ 表示对应于态射 $R_S \to S$ 的理想。令 $R_{S,\,I}$ 表示关于 I 对 R_S 的完备化。令 $\mathcal{I}_{S|\widehat{x}_S} \subset R_{S,\,I}(*H_S)/R_S$ 表示由 $\mathcal{I}_S$ 诱导的元组。因为

$$\widehat{R}_{\mathbb{K},x} = \mathbb{K}[\![z_1, \dots, z_\ell]\!], \quad \widehat{R}_{\mathbb{K}_1,x_1} = \mathbb{K}_1[\![z_1, \dots, z_\ell]\!], \qquad \widehat{R}_{S,x_S} = S[\![z_1, \dots, z_\ell]\!],$$

$R_{\mathbb{K},\,x}(*H_{\mathbb{K}})/R_{\mathbb{K},\,x} \to R_{S,\,I}(*H_S)/R_{S,\,I} \to R_{\mathbb{K}_1,\,x_1}(*H_{\mathbb{K}_1})/R_{\mathbb{K}_1,\,x_1}$ 是单射。由于 $\mathcal{I}_{\mathbb{K}_1|\widehat{x}_1} \subset R_{\mathbb{K},\,x}(*H)/R_{\mathbb{K},\,x}$，我们得到 $\mathcal{I}_{S|\widehat{x}_S} \subset R_{\mathbb{K},\,x}(*H)/R_{\mathbb{K},\,x_0}$

令 s 为 S 的任意闭点。根据前面的讨论，我们得到 $\mathcal{I}_{S,\,s|\widehat{x}_S} = \mathcal{I}_{S|\widehat{x}_S} = \mathcal{I}_{S|\widehat{x}}$。我们得到 $\mathcal{I}_{S,\,s|\widehat{x}} = \mathcal{I}_{\mathbb{K}_1|\widehat{x}_1}$，因此 $\mathcal{I}_{S,\,s} = \mathcal{I}_{\mathbb{K}_1}$。 ∎

2.7.4 非分歧良好的亚纯有限覆盖

设 $\Sigma_{\mathbb{K}_1} \subset T^*(U_{\mathbb{K}_1} \setminus H_{\mathbb{K}_1})$ 是 $(U_{\mathbb{K}_1},\ H_{\mathbb{K}_1})$ 上的亚纯有限覆盖。假设 $\Sigma_{\mathbb{K}_1}$ 在 $(U_{\mathbb{K}_1},\ H_{\mathbb{K}_1})$ 上非分歧良好。令 $\mathcal{I}_{\mathbb{K}_1} := \mathcal{I}(\Sigma_{\mathbb{K}_1})$。（参见 §2.4.4。）设 $\mathcal{I}_{\mathbb{K}_1|\widehat{x}_1} \subset R_{\mathbb{K},\,x}(*H)/R_{\mathbb{K},\,x_0}$。根据引理 2.62，$\mathcal{I}_{\mathbb{K}_1}$ 由良好集合 $\mathcal{I}_{\mathbb{K}} \subset R_{\mathbb{K}}(*H)/R_{\mathbb{K}}$ 诱导。

引理 2.63 存在一个在 $(U_{\mathbb{K}}, H_{\mathbb{K}})$ 上的非分歧良好亚纯有限覆盖 $\Sigma_{\mathbb{K}}$，使得 $\mathcal{I}(\Sigma_{\mathbb{K}}) = \mathcal{I}_{\mathbb{K}}$。这蕴含 $\boldsymbol{\mathcal{I}}(\Sigma_{\mathbb{K}} \times \mathbb{K}_1) = \boldsymbol{\mathcal{I}}(\Sigma_{\mathbb{K}_1})$。

证明 设 $S \subset \mathbb{K}_1$ 是一个在 $\mathbb{K}$ 上有限生成的正则子环，使得存在一个非分歧良模型 $\Sigma_S \subset T^*((U_S \setminus H_S)/S)$，如命题 2.56 所述。令 $s \in \operatorname{Spec}(S)$ 为任意闭点。我们得到 $\Sigma_{S,\,s} \subset T^*(U_{\mathbb{K}} \setminus H_{\mathbb{K}})$，它是非分歧良好的，并且满足 $\mathcal{I}(\Sigma_{S,\,s} \times \mathbb{K}_1) = \boldsymbol{\mathcal{I}}(\Sigma_{\mathbb{K}_1})$。 ∎

2.7.5 命题 2.58 的证明

设 $(S,\ X_S,\ H_S,\ \Sigma_S)$ 是命题 2.56 中的一个模型。对于 $\operatorname{Spec}(S)$ 的任意闭点 s，我们得到 $(X_{\mathbb{K}},\ H_{\mathbb{K}})$ 上的一个良好亚纯有限覆盖 $\Sigma_{S,\,s}$。由引理 2.63 可得，$\boldsymbol{\mathcal{I}}(\Sigma_{S,\,s} \times \mathbb{K}_1) = \boldsymbol{\mathcal{I}}(\Sigma_{\mathbb{K}_1})$。 ∎

2.8 亚纯拉格朗日覆盖的解消

2.8.1 绝对情形

Let X 是一个带有超曲面 H 的射影正规 $\mathbb{K}$-簇，且 $X \setminus H$ 光滑 .

命题 2.64 对任意亚纯拉格朗日覆盖 $\Sigma \subset T^*(X \setminus H)$ 在(X, H)上，存在双有理射影态射 $\rho\colon X' \to X$ ，使得下列结论成立。

- X' 是光滑的，且 $H' = \rho^{-1}(H)$ 是正规交叉。
- ρ 诱导一个同构 $X' \setminus H' \simeq X \setminus H$。
- $\rho^*\Sigma$ 在(X', H')上是平展局部好的。

证明 只需考虑 X 光滑且 H 为正规交叉的情形。只需考虑 $\mathbb{K}$ 是在 $\mathbb{Q}$上有限生成的域的代数闭包的情形。因此，只需考虑 $\mathbb{K}$ 是复数域 $\mathbb{C}$的子域的情形。我们令 $X_{\mathbb{C}} = X \times_{\mathbb{K}} \mathbb{C}$、 $H_{\mathbb{C}} = H \times_{\mathbb{K}} \mathbb{C}$和 $\Sigma_{\mathbb{C}} = \Sigma \times_{\mathbb{K}} \mathbb{C}$。由 [26, 定理 15.2.7], , 存在光滑 $\mathbb{C}$-簇的射影双有理态射$\rho_{\mathbb{C}}$： $X'_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$，使得 (i) $H'_{\mathbb{C}} = \rho^{-1}(H_{\mathbb{C}})$ 为正规交叉，(ii) $\rho_{\mathbb{C}}$ 诱导一个同构 $X'_{\mathbb{C}} \setminus H'_{\mathbb{C}} \simeq X_{\mathbb{C}} \setminus H_{\mathbb{C}}$，(iii) $\Sigma'_{\mathbb{C}} = \rho^*_{\mathbb{C}}\Sigma_{\mathbb{C}}$在 $(X'_{\mathbb{C}}, H'_{\mathbb{C}})$ 上形式良好。由命题 2.35，它在 $(X'_{\mathbb{C}}, H'_{\mathbb{C}})$ 上平展局部好。

设 $(S,\ X'_S,\ H'_S,\ \Sigma'_S)$ 是命题 2.56 中的一个模型。我们可以假设存在态射 $\rho_S\colon X'_S \to X \times S$，它在 Spec S 上方并诱导出 $\rho_{\mathbb{C}}$。令 s 为 Spec(S) 的任意闭点。我们得到一个双有理射影态射 $\rho_{S,\ s}\colon X'_{S,\ s} \to X$，使得 $H'_{S,\ s} = \rho_S^{-1}{}_{s,}(H)$ 且 $\Sigma'_{S,\ s} = \rho^*_{S,\ s}\Sigma$。由引理 2.45 和引理 2.49 可知，$\Sigma'_{S,\ s}$ 在 $(X'_{S,\ s},\ H'_{S,\ s})$ 上是良好的。 ∎

2.8.2 族情形

令 X 为一个射影正规 $\mathbb{K}$-簇。存在一个闭子集 $Z \subset X$，其余维为 $Z \geq 2$，使得 $X \setminus Z$ 正则。记 $X^\circ = X \setminus Z$。存在反身的 $\mathcal{O}_X$-凝聚层 T^*X，其在 $X \setminus Z$ 上的限制等于余切丛 $T^*(X^\circ)$。令 H 为 X 的一个超曲面，使得 $Z \subset H$。记 $\mathcal{E}_{H、\ N} = T^*X(NH)$ 和 $\mathcal{E}^\circ_{H、\ N} = T^*X^\circ(NH)$。如 §2.3.3 中所述，我们得到由截面 $X^\circ \to S^r(\mathcal{E}_{H,N})$ 构成的代数集 $H^0(X^\circ, S^r(\mathcal{E}^\circ_{H,N}))$。令 $\mathcal{G}_{H,N}$ 为 X 上的一个局部自由层，且有满态射 $\mathcal{G}^\vee_{H,N} \to \mathcal{E}^\vee_{H,N}$。由推论 2.14 和引理 2.16，存在一个分层 $H^0(X^\circ, S^r(\mathcal{E}^\circ_{N,H})) = \bigsqcup_{i\in\Lambda} T_i$，它由局部扎里斯基闭子集构成，并满足以下性质。

- P(ϕ) $(\phi \in T_i)$ 是常值。
- 存在闭子概形 $\Sigma(T_i)_{\text{红色}} \subset T_i \times \mathcal{G}_{H,\ N}$使得 $\Sigma(T_i)_{\text{红色}} \to T_i$ 是平坦的，并且在$\phi \in T_i$ 上的纤维是 $\Sigma(\phi_{\mathcal{G}_{H,\ N}})_{\text{红色}}$。
- 存在 $\Sigma(T_i)_{\text{红色}}$ 上的无挠层 $\mathcal{F}^k$ ，如引理 2.17 所述，它们在 T_i上是平坦的。

令 T_i^{Lag} 表示满足以下条件的闭点 $\phi \in T_i$ 的集合:

$$\Sigma(\phi)_{U(\phi),\text{red}} \times_{X^\circ} (U(\phi) \setminus H) \subset T^*(U(\phi) \setminus H)$$

是拉格朗日的。根据引理 2.18，我们得到以下引理。

引理 2.65 T_i^{Lag} 是 T_i的扎里斯基闭子集。 ∎

令 $\Sigma(T_{\text{Lag}\,i})_{\text{red}}$表示 $\Sigma(T_i)_{\text{red}}$与 T_i^{Lag}在 T_i上的纤维积。

命题 2.66 存在一个 $\mathbb{K}$-簇 ψ： $\widetilde{T}_{\text{Lag}\,i} \to T_i^{\text{Lag}}$以及一个射影双有理态射

$$\rho_{\widetilde{T}_i^{\text{Lag}}} : \widehat{\widetilde{T}_i^{\text{Lag}} \times X} \to \widetilde{T}_i^{\text{Lag}} \times X$$

使得以下结论成立。

(i) $\widetilde{T}_i^{\text{Lag}}$ 在 $\mathbb{K}$上光滑且仿射，并且 ψ 诱导闭点之间的满射 .

(ii) $\rho_{\widetilde{T}^{\text{拉格朗日}i}}$ 诱导一个同构 $\rho^{-1}_{\widetilde{T}_i^{\text{Lag}}}(\widetilde{T}_{\text{拉格朗日}i} \times (X \setminus H)) \simeq \widetilde{T}_{\text{拉格朗日}i} \times (X \setminus H)$。

(iii) 诱导态射 $\widetilde{T}_{\text{拉格朗日}_i} \times X \to \widetilde{T}^{\text{拉格朗日}i}$ 是光滑的，并且 $\widetilde{T}_{\text{拉格朗日}_i} \times H = \rho_{\widetilde{T}_i^{\mathrm{Lag}}}^{-1}(\widetilde{T}_{\text{拉格朗日}_i} \times H)$ 是相对于 $\widetilde{T}_{\text{拉格朗日}}$ 的无单值化正规交叉超曲面。（见 §2.5.2。）

(iv) 令 $\widehat{\Sigma}(T_{\mathrm{Lag}\,i})_{\mathrm{red}}$ 表示 $\Sigma(T_i^{\mathrm{Lag}})_{\mathrm{red}}$ 与 $\widetilde{T}_{\mathrm{Lag}_i} \times X$ 在 $\widetilde{T}_{\mathrm{Lag}_i} \times X$ 上的纤维积。于是，$\widehat{\Sigma}(T_{\mathrm{Lag}\,i})_{\mathrm{red}}$ 在 $\left(\widetilde{T}_{\mathrm{Lag}_i} \times X\right.$ 上是 $\left.\widetilde{T}_i^{\mathrm{Lag}} \times H\right)$ 平展局部好，。

证明 任取一个扎里斯基闭不可约子集 $T_i' \subset T_i$。令 R_i' 为 T_i' 上的代数函数环。令 $\mathbb{K}'$ 为 R_i' 的分式域的一个代数闭包。泛截面 $T_i' \times X^\circ \to T_i' \times S^r(\mathcal{E}^\circ_{H,\,N})$ 诱导出截面 $\phi_{\mathbb{K}'}\colon X^\circ_{\mathbb{K}'} \to S^r(\mathcal{E}^\circ_{H,\,N})_{\mathbb{K}'}$。

我们在 $X_{\mathbb{K}'} \setminus H_{\mathbb{K}'}$ 上得到亚纯拉格朗日覆盖 $\Sigma(\phi_{\mathbb{K}'}) \subset T^*(X_{\mathbb{K}'} \setminus H_{\mathbb{K}'})$。根据命题 2.64，存在一个射影双有理态射 $\rho_{\mathbb{K}'}\colon X_{\mathbb{K}'} \to X_{\mathbb{K}'}$，使得下述结论成立。

- $\widehat{X}_{\mathbb{K}'}$ 在 $\mathbb{K}'$ 上光滑，且 $\widehat{H}_{\mathbb{K}'} = \rho_{\mathbb{K}'}^{-1}(H_{\mathbb{K}'})$ 是 $\widehat{X}_{\mathbb{K}'}$ 的正规交叉超曲面。
- $\rho_{\mathbb{K}'}$ 诱导一个同构 $X_{\mathbb{K}'} \setminus H_{\mathbb{K}'} \simeq X_{\mathbb{K}'} \setminus H_{\mathbb{K}'}$。
- $\widehat{\Sigma}(\phi_{\mathbb{K}'}) = \rho_{\mathbb{K}'}^*\Sigma(\phi_{\mathbb{K}'})$ 在 $(X_{\mathbb{K}'}, \widehat{H}_{\mathbb{K}'})$ 上平展局部良好。

存在一个模型 Let (S, X_S, H_S, Σ_S) of $(X_{\mathbb{K}'}, H_{\mathbb{K}'}, \Sigma(\phi_{\mathbb{K}'}))$，如命题 2.56 所述。我们可以假设 $R_i' \subset S \subset \mathbb{K}'$，并且存在一个态射 $\rho_S\colon X_S \to X \times \mathrm{Spec}(S)$，它诱导出 $\rho_{\mathbb{K}'}$。态射 $\mathrm{Spec}(S) \to T_i'$ 的像包含一个 Zariski 开子集 U_i'。我们可以假设该像为 U_i'，且 $\mathrm{Spec}(S) \to U_i'$ 是光滑的。

通过这一过程和诺特归纳法，我们可以按要求构造出 ψ 和 $\rho_{\widetilde{T}_i^{\mathrm{Lag}}}$。 ∎

推论 2.67 存在一个光滑的 $\mathbb{K}$-簇 S、一个亚纯拉格朗日覆盖 $\Sigma_S \subset \mathcal{E}^\circ_{H,N} \times S$，以及一个位于 $\mathcal{S}$ 上的光滑射影簇 $X_{\mathcal{S}}$，它带有一个态射 $\rho\colon X_{\mathcal{S}} \to \mathcal{S} \times X$，使得以下结论成立。

- $\widehat{H}_S = \rho^{-1}(H \times S)$ 相对于 S 是正规交叉的。
- $\rho^*\Sigma_S$ 在 (X_S, H_S) 上是良好的。
- 对于任意亚纯覆盖 $\Sigma \subset \mathcal{E}_{H,N}$，存在 $a \in S$ 使得 $\Sigma_S \times S_a = \Sigma$。此外，$\rho_s^*(\Sigma)$ 在 (X_s, H_s) 上是良好的。 ∎

2.9 亚纯拉格朗日不规则性

2.9.1 预备知识

设 Σ_1, Σ_2 是定义在 (X, H) 上的亚纯拉格朗日覆盖。假设存在一个光滑 $\mathbb{K}$-簇之间的射影态射 $\rho\colon X' \to X$，满足：(i) $H' = \rho^{-1}(H)$ 是正规交叉的；(ii) $X' \setminus H' \simeq X \setminus H$；(iii) $\rho^*\Sigma_i$ 在 (X', H') 上平展局部好；(iv) $\boldsymbol{\mathcal{I}}(\rho^*\Sigma_1) = \boldsymbol{\mathcal{I}}(\rho^*\Sigma_2)$。

引理 2.68 设 $\rho_1\colon X_1 \to X$ 是光滑 $\mathbb{K}$-簇之间的射影态射，使得 *(i)* $H_1 = \rho_1^{-1}(H)$ 是正规交叉，*(ii)* $X_1 \setminus H_1 \simeq X \setminus H$，*(iii)* $\rho_1^*\Sigma_1$ 在 (X_1, H_1) 上平展局部良好。则 $\rho_1^*\Sigma_2$ 在 (X_1, H_1) 上良好，并且有 $\boldsymbol{\mathcal{I}}(\rho_1^*\Sigma_1) = \boldsymbol{\mathcal{I}}(\rho_1^*\Sigma_2)$。

证明 这由命题 2.36 得出。 ∎

2.9.2 亚纯拉格朗日不规则性

我们为亚纯拉格朗日覆盖引入一种等价关系。

定义 2.69 对于 亚纯拉格朗日覆盖 Σ_1, Σ_2 在 (X, H) 上，若满足以下 *hol* *ds.*

- 存在一个光滑 $\mathbb{K}$-簇之间的射影态射 $\rho\colon X' \to X$，使得 *(i)* $H' = \rho^{-1}(H)$ 是正规交叉的，*(ii)* $X' \setminus H' \simeq X \setminus H$，*(iii)* $\rho^*\Sigma_i$ 在 (X', H') 上是平展局部良好的，*(iv)* $\boldsymbol{\mathcal{I}}(\rho^*\Sigma_1) = \boldsymbol{\mathcal{I}}(\rho^*\Sigma_2)$。

一个等价类称为亚纯拉格朗日不规则性。亚纯拉格朗日覆盖 Σ 的等价类记作 $\boldsymbol{I}(\Sigma)$，称为 Σ 的不规则性。 ∎

注 2.70 $\Sigma_i \to X \setminus H$ 的次数不一定相等，因为本文不考虑重数。 ∎

我们由引理 2.68 得到以下命题。

命题 *2.71* 设 Σ 是 (X, H) 上的亚纯拉格朗日覆盖。令 $\boldsymbol{I}(\Sigma)$ 表示Σ的不规则性。设 $\rho : X' \to X$ 是任意的光滑 $\mathbb{K}$-簇之间的态射，满足 *(i)* $H' = \rho^{-1}(H)$ 是正规交叉，*(ii)*$X' \setminus H' \simeq X \setminus H$，*(iii)* $\rho^*\Sigma$ 在 (X', H') 上平展局部良好。那么，对于任意 $\Sigma_1 \in \boldsymbol{I}(\Sigma)$，$\rho^*(\Sigma_1)$ 在 (X', H') 上平展局部良好，且 $\boldsymbol{I}(\rho^*\Sigma_1) = \boldsymbol{I}(\rho^*\Sigma)$ 成立。 ∎

定义 2.72 若亚纯拉格朗日正则性 $\boldsymbol{I}$ 在(X, H)上满足任意 $\Sigma \in \boldsymbol{I}$在$(X, H)$上良好（分别地，对数、非分歧良好），则称其为良好（分别地，对数、非分歧良好）。这等价于存在一个 $\Sigma \in \boldsymbol{I}$，使其在$(X, H)$上良好（分别地，对数、非分歧良好）。 ∎

2.9.3 通过双有理射影态射进行拉回与推前

设 $\varphi : X' \to X$ 是一个双有理射影态射，使得 $H' = \varphi^{-1}(H)$ 是正规交叉，并且 $X' \setminus H' \simeq X \setminus H$。我们有自然同构 $T^*(X' \setminus H') \simeq T^*(X \setminus H)$。

引理 2.73

- 设 $\boldsymbol{I}$ 是定义在（X, H）上的亚纯拉格朗日不规则性。对任意 $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \boldsymbol{I}$，有 $\boldsymbol{I}$（$\varphi^*\Sigma_1$） $= \boldsymbol{I}$（$\varphi^*\Sigma_2$）。
- 设 $\boldsymbol{I}'$ 是定义在（X', H'）上的亚纯拉格朗日不规则性。对任意 $\Sigma'_1, \Sigma'_2 \in \boldsymbol{I}'$，有 $\boldsymbol{I}$（$\varphi_*\Sigma'_1$） $= \boldsymbol{I}$（$\varphi_*\Sigma'_2$）。

证明 第一个断言显然。第二个断言由命题 2.36 得出。 ∎

因此，对于任意 $\Sigma \in \boldsymbol{I}$，我们定义 $\varphi^*(\boldsymbol{I}) := \boldsymbol{I}(\varphi^*\Sigma)$。对于任意 $\Sigma' \in \boldsymbol{I}'$，我们也定义 $\varphi_*(\boldsymbol{I}') := \boldsymbol{I}(\varphi_*\Sigma')$。

2.9.4 比较

设 S, X, H 如 §2.5.2 所述。设 $\Sigma^{(i)} \subset T^*((X \setminus H)/S)$ $(i = 1, 2)$ 是 $X \setminus H$ 的拉格朗日覆盖，且在 (X, H) 上平展局部良好。对于 Spec(S) 的每个闭点 z，我们在 (X_z, H_z) 上得到良好的亚纯拉格朗日覆盖 $\Sigma_z^{(i)}$。由命题 2.51 得到以下命题。

命题 2.74 存在 一个闭子集 $Z \subset$谱(S)，使得 $\boldsymbol{I}(\Sigma_z^{(1)}) = \boldsymbol{I}(\Sigma_z^{(2)})$ 当且仅当 $z \in Z$。 ∎

3 复解析亚纯平坦丛

3.1 良好亚纯平坦丛

3.1.1 形式良亚纯平坦丛

设 X 是任意 n维复流形。设 H 是 X的一个简单正规交叉超曲面。记 $\mathcal{O}_{X,x}$为局部环 $\mathcal{O}_{X,x}$ 关于极大理想 $\mathfrak{m}_x$ 的完备化。存在 $\mathfrak{m}_x$的一个参数系 $(x_1, \ldots, x_n)$，使得 H在 x处的理想由 $\prod_{i=1}^{\ell} x_i$生成。对于任意正整数 e，定义 $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^{(e)} = \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}[x_i^{1/e} \mid i = 1, \ldots, \ell]$。对于任意$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$-模 $\mathcal{F}$，定义 $\mathcal{F}(*H) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_X(*H)_x$ 以及$\varphi_e^*(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \otimes \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^{(e)}$。对于任意自由的$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}(*H)$-模 $\mathcal{F}$，$\mathcal{F}$ 的格指满足 $\mathcal{F}_0(*H) = \mathcal{F}$的一个自由$\mathcal{O}_{X,x}$-子模 $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$。

设 $\mathcal{V}$为一个带有可积联络 $\nabla : \mathcal{V} \to \mathcal{V} \otimes \Omega_X^1$的有限秩自由$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}(*H)$-模。任意 $\varphi_e^*(\mathcal{V})$均配备诱导可积联络 ∇。我们回顾一些定义。

定义 3.1

- $(\mathcal{V}, \nabla)$ 称为正则的，如果存在一个自由的 $\mathcal{O}_{X,x}$-模 $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$，使得 *(i)* $\mathcal{V}_0$（$*H$） $= \mathcal{V}$，*(ii)* ∇（$\mathcal{V}_0$） $\subset \mathcal{V}_0 \otimes \Omega^1$(对数 H)。

- $(\mathcal{V},\nabla)$ 称为非分歧良好的，如果存在一个不规则值良好集合 $\mathcal{I}\subset\mathcal{O}_{X,x}(*H)/\mathcal{O}_{X,x}\widehat{}$ 以及一个分解

$$(\mathcal{V},\nabla)=\bigoplus_{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}}(\mathcal{V}_{\mathfrak{a}},\nabla_{\mathfrak{a}}) \tag{1}$$

$\widehat{}$ 使得 $\nabla_{\mathfrak{a}}-d\widetilde{\mathfrak{a}}\mathrm{id}_{\mathcal{V}_{\mathfrak{a}}}$ 是正则的。这里，$\widetilde{\mathfrak{a}}\in\mathcal{O}_{X,x}$ 表示 $\mathfrak{a}$的提升。我们允许在 (1)中出现 $\mathcal{V}_{\mathfrak{a}}=0$。集合$\mathcal{I}(\mathcal{V})=\{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}\,|\,\mathcal{V}_{\mathfrak{a}}\neq 0\}$ 定义良好。

- $(\mathcal{V},\nabla)$ 称为良好的，如果存在 $e\in\mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $\varphi_e^*(\mathcal{V},\nabla)$ 是非分歧良好的。我们得到集合$\mathcal{I}(\mathcal{V})\subset\widehat{\mathcal{O}}_{(e)\,X,x}(*h)/\widehat{\mathcal{O}}_{(e)\,X,x}$。

3.1.2 形式情形下相关的 Deligne-Malgrange 良好滤过丛

$\widehat{}$ 设 $H_{x,i}=\{x_i=0\}$。对于任意 $\mathcal{O}_{X,x}$-模 $\mathcal{F}$，我们定义 $\mathcal{F}_{|H_{x,i}}=\mathcal{F}/x_i\mathcal{F}$。

假设 $(\mathcal{V},\nabla)$ 是正则的。对每个满足 $\nabla(\mathcal{V}_0)\subset\mathcal{V}_0\otimes\Omega^1_X(\log H)$ 的格 $\mathcal{V}_0\subset\mathcal{V}$，通过对 dx_i/x_i 取留数，我们在 $\mathcal{V}_{|H_{x,i}}$ 上得到留数自同态 $\mathrm{Res}_i(\nabla)$。

引理 3.2 对任意 $\boldsymbol{a}=(a_i)\in\mathbb{R}^\ell$，存在唯一的格 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{\boldsymbol{a}}\mathcal{V}$，使得下列条件成立。

- $\mathrm{Res}_i(\nabla)$ 的任意特征值 α 满足 $a_i-1<-\mathrm{Re}(\alpha)\leq a_i$。

我们得到 $\mathcal{V}$ 上的滤过丛 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*(\mathcal{V})=(\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{\boldsymbol{a}}(\mathcal{V})\,|\,\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^\ell)$。

假设 $(\mathcal{V},\nabla)$ 关于分解 (1) 是非分歧良好的。通过对正则的 $(\mathcal{V}_{\mathfrak{a}},\nabla_{\mathfrak{a}}-d\mathfrak{a}\mathrm{id}_{\mathcal{V}_{\mathfrak{a}}})$ 应用前述构造，我们得到 $\mathcal{V}_{\mathfrak{a}}$ 上的滤过丛 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*(\mathcal{V}_{\mathfrak{a}})$。我们得到

$$\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*(\mathcal{V})=\bigoplus\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*(\mathcal{V}_{\mathfrak{a}}).$$

考虑 $(\mathcal{V},\ \nabla)$ 良好但不一定非分歧良好的情形。将先前的构造应用于非分歧良好的 $\varphi_e^*(\mathcal{V},\ \nabla)$，我们得到 $\varphi_e^*(\mathcal{V})$ 上的滤过丛 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*(\varphi_e^*\mathcal{V})$。令 Gal_e 表示扩张 $\widehat{\mathcal{O}}_X^{(e)},_x/\widehat{\mathcal{O}}_X,_x$ 的伽罗瓦群。Gal_e 在 $\varphi_e^*(\mathcal{V})$ 上有自然作用。它在滤过丛 $\mathcal{P}_*(\varphi^*(\mathcal{V}))$ 上诱导出作用。通过下降，我们得到 $\mathcal{V}$ 上的滤过丛 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*(\mathcal{V})$。

特别地，$\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_0(\mathcal{E})$ 称为良好的 Deligne-Malgrange 格。

3.1.3 复解析情形中的良好亚纯平坦丛

设 X 为任意复流形。设 H 为 X 的简单正规交叉超曲面。对于每个 $x\in H$，都存在一个全纯坐标系 $(x_1,\ldots\ldots,x_n)$，使得 $H=\bigcup_{i=1}^{\ell}\{x_i=0\}$。我们记 $\mathcal{O}_X^{(e)},_x=\mathcal{O}_X,_x[x_i^{1/e}\,|\,i=1,\ldots,\ell]$。

$\widehat{}$ 设 $(\mathcal{V},\nabla)$ 是 (X,H) 上的亚纯平坦丛。对于任意 $x\in X$，我们得到 $\mathcal{V}_{|\widehat{x}}=\mathcal{V}_x\otimes_{\mathcal{O}_{X,x}}\mathcal{O}_{X,x}$，其带有诱导可积联络。我们回顾一些定义。

定义 3.3 $(\mathcal{V},\nabla)$ 称为正则（分别称为非分歧良好、良好），如果对于任意 $x\in X$，$(\mathcal{V}_{|\widehat{x}},\nabla)$ 都是正则（分别都是非分歧良好、良好）。

命题 3.4 ([25]) 若 $(\mathcal{V},\nabla)$ 是良好的，则存在一个滤过丛 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*(\mathcal{V}_0)$ 在 $\mathcal{V}_0$ 上，使得 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*(\mathcal{V}_0)$ $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*\ \mathcal{V}_{0|\widehat{x}}$ $\mathcal{O}_X$ $\mathcal{V}_0$ $\mathcal{V}_{0|\widehat{x}}$ $|\widehat{x}=$ ()。特别地，存在一个局部自由 -子模，使得它们是 $\mathcal{V}_{|\widehat{x}}$ 的良好的 *Deligne-Malgrange* 格。

若 $(\mathcal{V},\nabla)$ 良好，则对任意 $x\in H$，我们得到集合 $\mathcal{I}(\mathcal{V},x)\subset\widehat{\mathcal{O}}_X^{(e)}(*H)_x/\widehat{\mathcal{O}}_X^{(e)},_x$，作为 $\varphi_e^*(\mathcal{V},\nabla)|\widehat{x}$ 的分解的指标集。（参见定义 3.1。）

命题 3.5

- 对任意 $x\in H$，我们有 $\mathcal{I}(\mathcal{V},x)\subset\mathcal{O}_{(e)\,X}(*H)_x/\mathcal{O}_{(e)\,X,x}$。
- $\boldsymbol{\mathcal{I}}(\mathcal{V})=(\mathcal{I}(\mathcal{V},x)\,|\,x\in H)$ 是分歧不规则值的好系统。

证明 在非分歧情形下，这已在 [25, 命题 2.19]中得到证明。分歧情形归结为非分歧情形。

3.2 复解析情形中的亚纯拉格朗日覆盖

3.2.1 亚纯有限覆盖

设 X 为复流形。设 H 为 X的复解析闭子集。令 $X^\circ = X \setminus H$。设 $\Sigma \subset T^*X^\circ$为闭子集。令 $\mathbb{P}_{T^*X}$表示 T^*X的射影完备化。

定义 3。6 Σ称为 X 上的亚纯覆盖，其中 $H(X,H)$ 表示其所在空间，若 Σ在 $\mathbb{P}_{T^*X}$中的闭包是一个复解析闭子集。如果 Σ 的光滑部分相对于 $T^*(X \setminus H)$的自然辛结构是拉格朗日的，则称其为亚纯拉格朗日覆盖。 ∎

3.2.2 H 为正规交叉时的一些条件

我们来考虑 H 是正规交叉超曲面的情形。

De定义 3。7 Σ称为对数的，若 Σ在 $T^*X(\log H)$ 中的闭包在 X上是真映射。 . ∎

对于 $T^*(X \setminus H)$的任意截面 τ，令 κ_τ表示由 τ的加法得到的 $T^*(X \setminus H)$的自同构。

定义 3.8

- 设 $x \in H$。我们称 Σ 在 x 处是非分歧良好的，如果存在不规则值良好集合 $\mathcal{I}(\Sigma, x) \subset \mathcal{O}_X(*H)_x/\mathcal{O}_{X,x}$、一个邻域 X_x以及一个分解

$$\Sigma_{|X_x \setminus H} = \bigsqcup_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\Sigma,x)} \Sigma_{\mathfrak{a}}$$

  使得 $\kappa_{d\widetilde{\mathfrak{a}}}^* \Sigma_{\mathfrak{a}}$ 在$(X_x, H \cap X_x)$上是对数的。

- 我们称 Σ 在(X,H) 上是非分歧良好的，如果它在任意 $x \in H$处都是非分歧良好的。 ∎

设 $x \in H$。在 x附近存在一个全纯坐标邻域$(X_x, z_1, \ldots, z_n)$，使得 $H \cap X_x = \bigcup_{j=1}^{\ell} \{z_j = 0\}$。借助该坐标，我们可以视 $X_x \subset \mathbb{C}^n$。令 $\varphi_e\colon\ \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$由 $\varphi_e(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = (\zeta_1^e, \ldots, \zeta_\ell^e, \zeta_{\ell+1}, \ldots, \zeta_n)$定义。我们置 $X_x^{(e)} = \varphi_x^{-1,e}(X_x)$以及 $H_x^{(e)} = \varphi_x^{-1,e}(H \cap X_x)$。诱导映射 $X_x^{(e)} \to X_x$ 也记作$\varphi_{x,e}$。

定义3.9

- Σ 称为在 x 处良好，如果存在 $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ 以及 x 的一个邻域 X_x ，使得$\varphi_{x,e}^*(\Sigma)$在$(X_x^{(e)}, H_x^{(e)})$上是非分歧良好的。在此情形下，我们得到 $\mathcal{I}(\Sigma, x) \subset \mathcal{O}_{X_x^{(e)}}(*H)_x/\mathcal{O}_{X_x^{(e)},x}$。
- Σ称为在(X,H) 上良好，如果它在任意 $x \in H$处都是良好的。在此情形下，我们得到元组$\boldsymbol{\mathcal{I}}(\Sigma) = \big(\mathcal{I}(\Sigma, x) \mid x \in H\big)$。 ∎

3.2.3 消解

我们来考虑 H 未必是正规交叉超曲面的情形。下述命题已在命题 2.64 中提及。

命题 3.10 ([26, 定理15.2.7]) 存在复流形的射影态射 $\rho : X' \to X$，使得*(i)* $H' = \rho^{-1}(H)$ 是正规交叉超曲面，*(ii)* ρ 诱导一个同构 $X' \setminus H' \simeq X \setminus H$，*(iii)*$\rho^*(\Sigma)$ 在(X', H')上是良好的。

证明 只需考虑 H 是正规交叉超曲面的情形，而这一情形已在 [26,定理 15.27] 中研究。 ∎

3.2.4 留数

假设 Σ 是一个好拉格朗日覆盖。令 $x \in H$。令 $\varphi_{x,e}: X_x^{(e)} \to X_x$ 与之前相同。我们有如下分解

$$\varphi_{x,e}^*(\Sigma) = \bigsqcup_{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}(\Sigma,x)} \Sigma_{\mathfrak{a}}$$

使得 $\kappa_{d\mathfrak{a}}^*\Sigma_{\mathfrak{a}}$ 是对数的。此外，如果 X_x 足够小，则存在 $\mathbb{E}(\Sigma, x, \mathfrak{a}) \subset \mathbb{C}^\ell$ 以及一个分解

$$\Sigma_{\mathfrak{a}} = \bigsqcup_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{E}(\Sigma,x,\mathfrak{a})} \Sigma_{\mathfrak{a},\boldsymbol{\alpha}}$$

使得以下结论成立。

- 对于 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{E}(\Sigma, x, \mathfrak{a})$，我们定义 $\tau(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \varphi_{x,e}^*(dz_i/z_i)$。~~令 $\kappa_{d\mathfrak{a}+\tau(\boldsymbol{\alpha})}^*\Sigma_{\mathfrak{a},\boldsymbol{\alpha}}$ 表示 $\kappa_{d\mathfrak{a}+\tau(\boldsymbol{\alpha})}^*\Sigma_{\mathfrak{a},\boldsymbol{\alpha}}$ 在~~ $T^*X(e)_x$ (log $H(e)_x$) 中的闭包。令 $\pi_{x,e}: T^*X(e)_x \to X(e)_x$ 表示投影。那么，$\kappa_{d\mathfrak{a}+\tau(\boldsymbol{\alpha})}^*\Sigma_{\mathfrak{a},\boldsymbol{\alpha}} \cap \pi_{x,e}^{-1}(H(e)_x)$ 包含于 0-截面中。

3.3 野调和丛

3.3.1 调和丛

设 (E, θ) 是复流形 Y 上的 Higgs 丛。设 h 是 E 的埃尔米特度量。我们得到陈联络 ∇_h，以及 θ 的伴随 $\theta_h^\dagger$。如果联络 $\mathbb{D}_h^1 = \nabla_h + \theta + \theta_h^\dagger$ 是平坦的，则称 (E, θ, h) 为调和~丛。对于 Higgs 丛 (E, θ)，我们有相应的 $\mathcal{O}_{T^*Y}$-模 E，其支集在 Y 上有限。支集 Σ_θ 称为谱覆盖。我们回顾以下引理，它由 Gabber 定理[4]推出。

引理 3.11 如果 (E, θ) 是调和丛 (E, θ, h)的底层结构，则 Σ_θ 是拉格朗日的。 ∎

3.3.2 野调和丛与良好野调和丛

设 X 是一个复流形，其上有一个闭复解析子空间 H。设 (E, θ, h) 是$X \setminus H$上的调和丛。

定义 3.12 (E, θ, h) 称为在(X, H) 上野的，当且仅当 Σ_θ 是(X, H)上的亚纯覆盖。 ∎

定义 3.13 设 H 是正规交叉超曲面。

- 调和丛(E, θ, h) 称为温和的，当且仅当 Σ_θ 是对数的。
- 调和丛(E, θ, h) 称为在(X, H) 上良好野的（分别称为无分歧良好野的），当且仅当 Σ_θ 在(X, H)上是良好的（分别是无分歧良好的）。 ∎

定义 3.14 第 调和丛(E, θ, h) 称为 $\sqrt{-1}\mathbb{R}$-野调和丛，~若满足以下条件 $s.$

- 设 $\rho: X' \to X$ 为如命题 3.10 中所述的 Σ_θ 的消解。则对任意 $x \in H'$ 与 $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\rho^*\Sigma)$，$\mathbb{E}(\rho^*\Sigma, x', \mathfrak{a})$ 由纯虚数的元组组成。 ∎

3.3.3 相应的亚纯可积联络

设 X 为带有超曲面 H 的复流形。设 $\iota: X \setminus H \to X$ 表示包含映射。

设 (E, θ, h) 为 (X, H) 上的野调和丛。由 $X \setminus H$ 上 $(E, \partial_E, \theta, h)$ 上的调和丛，我们得到~$X \setminus H$ 上的平坦丛 $(E, \mathbb{D}_h^1)$。我们有底全纯向量丛 $\mathcal{E}^1 = (E, \partial_E + \theta_h^\dagger)$。我们将其视为 $\mathcal{O}_{X\setminus H}$-模。我们得到 X 上的层 $\iota_*(\mathcal{E}^1)$~。

对于任意 $x \in H$，令 X_x 为 x 的一个邻域，并存在全纯函数 $f \in \mathcal{O}(X_x)$，使得 $H = f^{-1}(0)$。我们得到一个 $\mathcal{O}_X(*H)_x$-模

$$(\mathcal{P}^h\mathcal{E}^1)_x := \Big\{ s \in (\iota_*\mathcal{E}^1)_x \,\Big|\, |s|_h = O\Big(|f|^{-C}\Big) \ \exists C > 0 \Big\}.$$

我们得到 $\mathcal{O}_X(*H)$-模 $\mathcal{P}^h\mathcal{E}^1 \subset \iota_*\mathcal{E}^1$，其在 x 处的茎为 $(\mathcal{P}^h\mathcal{E}^1)_x$。

命题 3.15

- $\mathcal{P}^h\mathcal{E}^1$ 是一个相干的 $\mathcal{O}_X(*H)$-模，而 $\mathbb{D}_h^1$ 是 $\mathcal{P}^h\mathcal{E}^1$ 的一个可积联络。
- 假设 H 是正规交叉。那么，当且仅当 (E,θ,h) 在 (X,H) 上良好时，$(\mathcal{P}^h\mathcal{E}^1,\mathbb{D}_h^1)$ 才是 (X,H) 上的良好亚纯平坦丛。在这种情况下，有 $\mathcal{I}(\mathcal{P}^h\mathcal{E}^1,\mathbb{D}_h^1,x) = \{2\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a}\in\mathcal{I}(\Sigma_\theta,x)\}$。

3.3.4 射影情形下的对应

假设 X 是射影的。

定理 3.16 对于 (X,H) 上的任意半单亚纯平坦丛 (V,∇)，存在一个 $\sqrt{-1}\mathbb{R}$-野调和丛 (E,θ,h)，使得 $(\mathcal{P}^h\mathcal{E}^1,\mathbb{D}_h^1)\simeq(V,\nabla)$，且该丛在同构意义下唯一。

3.4 伴随 代数情形中的亚纯拉格朗日不规则性

设 X 是一个正规复射影簇。设 H 是 X 的任意超曲面，且 $X\setminus H$ 光滑。设 (V,∇) 是 (X,H) 上任意的亚纯平坦联络。存在一个 Jordan-H¨older 滤过，即每个分次部分都是简单的。由定理 3.16，我们得到与伴随分次亚纯平坦丛对应的 $\sqrt{-1}\mathbb{R}$-野调和丛 (E,θ)。令 $\Psi_2\colon T^*(X\setminus H)\to T^*(X\setminus H)$ 为沿纤维方向得到的自同构。我们定义 $\Sigma(V,\nabla) := \Psi_2(\Sigma_\theta)$。

推论 *3.17* 设 $\varphi: X'\to X$ 是一个射影态射，满足 $H' = \varphi^{-1}(H)$ 是正规交叉。那么，$\varphi^*(V,\nabla)$ 在 (X',H') 上良好，当且仅当 $\varphi^*\Sigma(V,\nabla)$ 在 (X',H') 上良好。在此情形下，我们有 $I(\varphi^*(V,\nabla)) = I(\varphi^*\Sigma(V,\nabla))$。

3.5 具有 Stokes 结构的局部系统

3.5.1 指标集上的偏序

设 $\varpi\colon X(H)\to X$ 表示沿 H 的定向实爆破。设 $\mathcal{O}_{\widetilde{X}(H)}$ 表示 $X(H)$ 上的全纯函数层。对任意 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$，我们令 $\mathcal{F}(*H) = \mathcal{F}\otimes_{\varpi^{-1}(\mathcal{O}_X)}\varpi^{-1}(\mathcal{O}_X(*H))$。

设 $x\in H$。我们有 x 附近的一个全纯坐标邻域 $(X_x; x_1,\dots,x_n)$，使得 $H\cap X_x = \bigcup_{i=1}^{\ell}\{x_i=0\}$。我们定义 $\widetilde{\mathcal{O}}^{(e)}_{\widetilde{X}_{x(H_x)}}(H_x) = \widetilde{\mathcal{O}}_{\widetilde{X}_x(H_x)}[x_i^{1/e}\mid i=1,\dots,\ell]$。

设 $\mathcal{I}_x\subset\mathcal{O}^{(e)}_{X,x}(*H)/\mathcal{O}^{(e)}_{X,x}$ 是良分歧不规则值集。通过选择分支 $x_i^{1/e}(i=1,\dots,\ell)$，我们得到 $\mathcal{I}\subset\mathcal{O}^{(e)}_{\widetilde{X}_x}(H)(*H)_x/\mathcal{O}^{(e)}_{\widetilde{X}_x,x}$。其像与 $x_i^{1/e}$ 的选择无关。

对每个 $\mathfrak{a}\in\mathcal{I}$，我们选择一个提升 $\widetilde{\mathfrak{a}}\in\mathcal{O}_{\widetilde{X}_x(H)}(*H)_y$。我们定义 $\mathfrak{a}\le_y\mathfrak{b}$：若存在 y 在 $\widetilde{X}(H)$ 中的邻域 $\mathcal{U}_y$，使得在 $\mathcal{U}_y\setminus\varpi^{-1}(H)$ 上有 $-\mathrm{Re}(\mathfrak{a})\le-\mathrm{Re}(\mathfrak{b})$，则.....

设 $\boldsymbol{\mathcal{I}} = (\mathcal{I}_x\mid x\in H)$ 是分歧不规则值的良系统。若 x' 足够接近 x，则有自然满射 $\mathcal{I}_x\to\mathcal{I}_{x'}$。若 $y'\in\varpi^{-1}(x')$ 足够接近 $y\in\varpi^{-1}(x)$，则映射 $\varphi_{x',x}\colon\mathcal{I}_x\to\mathcal{I}_{x'}$ 保持偏序 $\le_x$ 和 $\le_{x'}$，即若 $\mathfrak{a}\le_y\mathfrak{b}$，则 $\varphi_{x',x}(\mathfrak{a})\le_{y'}\varphi_{x',x}(\mathfrak{b})$。

3.5.2 Stokes 结构

设 L 是 $X\setminus H$ 上的局部系统。设 L 表示由 L 诱导的 $X(H)$ 上的局部系统。L 的 Stokes 结构是由偏序集 $(\mathcal{I}_{\varpi(y)},\le_y)$ 标号的滤过元组 $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \big(\mathcal{F}^y(\widetilde{L}_y)\mid y\in\varpi^{-1}(H)\big)$，并满足下列条件。

- 存在一个分解 $L_y = \bigoplus_{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}_{\varpi(y)}}G_{\mathfrak{a}}$，使得 $\mathcal{F}^y_{\mathfrak{a}}(L_y) = \bigoplus_{\mathfrak{b}\le_y\mathfrak{a}}G_{\mathfrak{b}}$。
- 若 y' 充分接近 y，则有

$$\mathcal{F}^{y'}_{\mathfrak{b}}(\widetilde{L}_{y'}) = \sum_{\varphi_{x',x}(\mathfrak{a})\le\mathfrak{b}}\mathcal{F}^y_{\mathfrak{a}}(\widetilde{L}_y)$$

在同构 $L_y\simeq L_{y'}$ 下。这里，$x'=\varpi(y')$ 和 $x=\varpi(y)$。

3.5.3 变形 (1)

设 $p\colon X \to B$ 是一个复流形之间的光滑纤维化。设 H 是 X 的正规交叉超曲面。设 $b \in B$。位于 b 上方的纤维记为 X_b 和 H_b。我们假设满足以下条件。

- B 是单连通的。
- 存在 $b_0 \in B$ 和一个微分同胚 $(X, H) \simeq B \times (X_{b_0}, H_{b_0})$，使得其在 (X_{b_0}, H_{b_0}) 上的限制是恒等映射。

设 $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ 是 (X, H) 上分歧不规则值的好系统。通过限制，我们得到 (X_b, H_b) 上诱导的分歧不规则值的好系统 $\boldsymbol{\mathcal{I}}_b$。我们有自然函子

$$\mathrm{Mero}(X, H, \boldsymbol{\mathcal{I}}) \to \mathrm{Mero}(X_b, H_b, \boldsymbol{\mathcal{I}}_b). \tag{2}$$

命题 3.18 函子 (2) 是一个等价。

证明 若 I 是非分歧的，则已在 [25, 定理 3.9] 中说明。我们来研究存在分歧伽罗瓦覆盖 $\varphi\colon (X', H') \to (X, H)$ 且 $\varphi^*\mathrm{I}$ 非分歧的情形，其中该覆盖定义在 B 上。我们有等价 $\mathrm{Loc}^{\mathrm{St}}(X', H', \varphi^*\mathrm{I}) \simeq \mathrm{Loc}^{\mathrm{St}}(X'_b, H'_b, \varphi^*\mathrm{I}_b)$。容易得到伽罗瓦等变对象的等价。因此，我们得到 $\mathrm{Loc}^{\mathrm{St}}(X, H, \mathrm{I}) \simeq \mathrm{Loc}^{\mathrm{St}}(X_b, H_b, \mathrm{I}_b)$。

我们来研究一般情形。设 $x \in H_b$。存在一个微分同胚 $F\colon B \times (X_b, H_b) \simeq (X, H)$。我们有一个 C^∞-子流形 $F(B \times x) \subset (X, H)$。存在 $F(B \times x)$ 的一个开管状邻域 N，使得以下结论成立。

- $H \cap N = \bigcup_{j=1}^{\ell} H_j$，其中 H_j 是 N的光滑超曲面。令 $H_{j,b}$ 表示纤维 b上的。
- 存在一个微分同胚 $(N, H_1, \dots, H_\ell) \simeq B \times (N_b, H_{1,b}, \dots, H_{\ell,b})$。

存在一个复流形 N'，其上有一个分歧伽罗瓦覆盖 $\varphi\colon (N', H') \to (N, H \cap N)$，沿每个$H'_j$分歧，使得 $\varphi^*\boldsymbol{\mathcal{I}}^N$是非分歧的。根据之前的讨论，$\mathrm{Loc}^{\mathrm{St}}(N, H\cap N, \boldsymbol{\mathcal{I}}^N) \simeq \mathrm{Loc}^{\mathrm{St}}(N_b, (H\cap N)_b, \boldsymbol{\mathcal{I}}^{N_b})$。

令 $(\widetilde{L}_i, \mathrm{F}) \in \mathrm{Loc}^{\mathrm{St}}(X, H, \mathrm{I})\ (i = 1, 2)$。令 $f\colon (\widetilde{L}_1, \mathrm{F})|_{X_b} \to (\widetilde{L}_2, \mathrm{F})|_{X_b}$为一个态射。令 $X = \bigcup N(i)$ 为一个开覆盖，使得 $(N^{(i)}, H \cap N(i)) \simeq B \times (N(i)_b, (H \cap N(i))_b)$，其中 $N(i)$ 如上所述。存在唯一的态射 $g^{(i)}\colon (\widetilde{L}_1, \mathrm{F})|_{N^{(i)}} \to (\widetilde{L}_2, \mathrm{F})|_{N^{(i)}}$，使得 $g^{(i)}|_{N_b^{(i)}} = f_{|N_b^{(i)}}$。利用唯一性，我们得到$g^{(i)}_{|N^{(i)}\cap N^{(j)}} = g^{(j)}_{|N^{(i)}\cap N^{(j)}}$。因此，我们得到 $g\colon (\widetilde{L}_1, \mathrm{F}) \to (\widetilde{L}_2, \mathrm{F})$，使得 $g_{|X_b} = f$。

设 $(\widetilde{L}_b, \mathrm{F}) \in \mathrm{Loc}^{\mathrm{St}}(X_b, H_b, \mathrm{F})$。存在 $(\widetilde{L}^{(i)}, \mathrm{F}) \in \mathrm{Loc}^{\mathrm{St}}(N(i), (H\cap N(i)), \mathrm{F}_{N^{(i)}})$，使得 $(\widetilde{L}^{(i)}, \mathrm{F})|_{N_b^{(i)}} \simeq (\widetilde{L}_b, \mathrm{F})|_{N_b^{(i)}}$。利用全忠实性，我们可以拼接 $(\widetilde{L}^{(i)}, \mathrm{F})$ 以构造 $(\widetilde{L}, \mathrm{F})$，使得 $(\widetilde{L}, \mathrm{F})|_{N^{(i)}} \simeq (\widetilde{L}^{(i)}, \mathrm{F})$。我们得到 $(\widetilde{L}, \mathrm{F})|_{X_b} \simeq (\widetilde{L}_b, \mathrm{F})$。

∎

3.5.4 变形 (2)

设 $p\colon X \to B$ 为复流形的光滑纤维化。设 H 为 X 的正规交叉超曲面。设$B_0 \subset B$ 为复子流形。

- B和 B_0是连通的，并且对于任意 $b_0 \in B_0$，$\pi_1(B_0, b_0) \to \pi_1(B, b)$ 是满射。
- 对于任意 $b \in B$，存在 b 的一个邻域 $B_b \subset B$，使得存在一个微分同胚 $(X, H)|_{B_b} \simeq B_b \times (X_b, H_b)$。

设 $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ 是 (X, H) 上的分歧不规则值的好系统。通过限制，我们得到 (X_b, H_b) 上诱导的分歧不规则值的好系统 $\boldsymbol{\mathcal{I}}_b$。

命题 *3.19* 设 $b_0 \in B$ *and* 设 $(\widetilde{L}_{b_0}, F) \in \mathrm{Loc}^{\mathrm{St}}(X_{b_0}, H_{b_0}, \mathrm{I}_{b_0})$。假设存在一个局部系统 $\widetilde{L}$ $\widetilde{on}$ $X(H)$，使得 $L_{|\tilde{X}_{b_0}(H_{b_0})} \simeq L_{b_0}$。那么，存在唯一一个由 I 索引的 L 上的 *Stokes* 结构 F，使得 $\widetilde{(L, F)}|_{\tilde{X}_{b_0}(H_{b_0})} \simeq (L_{b_0}, F)$。

~ ~证明 考虑 $B_0 = \{b_0\}$ 的情形。令 $\widetilde{p}$： $X(H) \to B$ 表示投影。对于任意 $b \in B$，取一条路径γ： $[0,1] \to B$，使得 $\gamma(0) = b_0$ 且 $\gamma(1) = b$，并且 γ 是单射。存在 $\gamma([0,1])$ 的一个单连通邻域 W，以及一个微分同胚 (X, H) $_{|W} \simeq W \times (X_{b_0}, H_{b_0})$。由命题 3.18，存在 $L_{|\pi^{-1}(W)}$ 上的 Stokes 结构 F，其对 $X_{b_0}(H_{b_0})$ 的限制等于 (L_{b_0}, F)。于是得到 $(L_{|\tilde{X}_b(H_b)}, \mathrm{F})$。~由于 B 是单连通的，利用命题 3.18 可验证 $(L_{|\tilde{X}_b(H_b)}, \mathrm{F})$ 与 γ 的选取无关。对于任意 $b \in B$，存在一个单连通邻域 B_b，以及一个微分同胚 $(X, H)|_{B_b} \overset{\sim}{\sim}$ $\sim B_b \times (X_b, H_b)$。由命题 3.18，存在 $L_{|\pi^{-1}(B_b)}$ 上的 Stokes 结构 F，其对 $X_b(H_b)$ ~ ~ 的限制等于 $(L_{|\tilde{X}_b(H_b)}, \mathrm{F})$。对于 b, $b' \in B$，可以验证 $L_{|\pi^{-1}(B_b \cap B_{b'})}$ 的诱导 Stokes 结构相同。~ ~ ~因此，得到 L 上的 Stokes 结构 F，使得 $(L, \mathrm{F})_{|\tilde{X}_{b_0}(H_{b_0})} \simeq (L_{b_0}, \mathrm{F})$。

让我们研究一般情形。令 Ψ： $B' \to B$ 为一个普遍覆盖。我们得到 $X' = B' \times_B X$ 和$H' = B' \times_B H$。我们在 $(X',\ H')$ 上得到诱导的分歧不规则值的好系统 $\boldsymbol{\mathcal{I}}'$。我们有映射 Ψ： $X'(H') \to X(H)$。置 $\Gamma = \pi_1(B,$ $b_0)$。我们有 Γ 在 B' 上的自然伽罗瓦作用。它提升为在 $(X',\ H')$ 上的~作用以及 $X'(H')$。

令 $b'_0 \in \Psi^{-1}(b_0)$。由 t 由先前的考虑，存在唯一的 Stokes 结构 $\boldsymbol{\mathcal{F}}'$，其属于 $\Psi^*(\widetilde{L})$，使得 t

$$\Psi^*(\widetilde{L}, \boldsymbol{\mathcal{F}}')_{|\tilde{X}'_{b'_0}(H_{b'_0})} = (\widetilde{L}_{\tilde{X}_{b_0}(H_{b_0})}, \boldsymbol{\mathcal{F}}_{|\tilde{X}_{b_0}(H_{b_0})}).$$

令 $B'_0 = B' \times_B B_0$。由于 $\pi_1(B_0, b_0) \to \pi_1(B, b_0)$ 是满射的，B'_0 是连通的。我们置 (X_{B_0}, H_{B_0})： $=\widetilde{}(X, H)|_{B_0}$，并置 $(X'_{B'_0},$ $H'_{B'_0})$ $=(X', H')|_{B'_0}$。我们得到诱导映射 Ψ_1： $(X'_{B'_0}, H'_{B'_0}) \to (X_{B_0}, H_{B_0})$，以及 Ψ_1： ~ ~ ~ $\sim X'_{B'_0}(H'_{B'_0}) \to X_{B_0}(H_{B_0})$。我们得到 $\Psi^*(L)_{|\tilde{X}'_{B'_0}($ $_{H'_{B'_0}})$ 的 Stokes 结构 $\Psi_1^*(\mathrm{F}_{B_0})$，其为 Γ-等变的。~ ~ ~ ~对于任意 $\gamma \in \Gamma$，同构 γ^*： $\Psi^*(L)_{\gamma(b'_0)} \simeq \Psi^*(L)_{b'_0}$ 被提升为带 Stokes 结构的局部系统之间的同构 γ^*： $(\widetilde{\Psi}^*(\widetilde{L}),\ \mathrm{F}')_{\gamma(b'_0)} \simeq (\widetilde{\Psi}^*(\widetilde{L}),\ \mathrm{F}')_{b'_0}$。因此，$\mathrm{F}'$ 是 Γ-等变的，并且存在一个由 I 索引的 L 的 Stokes~ ~ ~ ~ ~结构 F，使得 $\Psi^*(L, \mathrm{F}) = (\Psi^*(L), \mathrm{F}')$。于是，$(L, \mathrm{F})$ 满足所要求的条件。 ∎

3.6 黎曼-希尔伯特-伯克霍夫对应

设 $\boldsymbol{\mathcal{I}}$是分歧不规则值的好系统。令 $\mathrm{Mero}(X, H, \boldsymbol{\mathcal{I}})$ 表示由 (V, ∇) 上的良好亚纯平坦丛构成的范畴，其中丛定义在 (X, H) 上，并满足对于任意 $x \in H$， $\mathcal{I}(\mathcal{V}, x)$。令 $\mathrm{Loc}^{\mathrm{St}}(X, H, \boldsymbol{\mathcal{I}})$ 表示~上由 $X(H)$ 上带有以 $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ 为指标的 Stokes 结构的局部系统构成的范畴。

设 $(V, \nabla) \in \mathrm{Mero}(X, H, \mathrm{I})$。令 L_V为 $X \setminus H$ 上的局部系统，由~ ~(V, ∇) 的平坦截面层得到。它诱导出 $X(H)$ 上的局部系统 L_V。令 $x \in X$。存在 x 的一个邻域 $X_x \subset X$，以及一个分歧伽罗瓦覆盖 φ_x: (X'_x, H'_x) $\to (X_x, H_x)$，使得 $\varphi_x^*(V, \nabla)$ 在 (X'_x, H'_x) 上非分歧良好，并且 $\varphi_x^{-1}(x)$ 只包含一个点 x'。令 ϖ'： $\widetilde{X}'_x(H'_x) \to \widetilde{X}_x$ 表示定向实爆破。它诱导一个态射$\widetilde{\varphi}_x$： $\widetilde{X}'_x(H'_x) \to \widetilde{X}(H)$。如 $[25, §4]$, 中所述，我们得到与 $\varphi_y^*(V, \nabla)$ 相关联的 $\widetilde{\varphi}_x^*$ $(\widetilde{L}_V)$ 的 Stokes 结构 $\mathrm{F}_{x'} = \left(\mathrm{F}^{y'}(\varphi_x^*(\widetilde{L}_V)_{y'}) \mid y' \in (\varpi')^{-1}(H'_x)\right)$。由于 $\varphi_y^*(V, \nabla)$ 关于覆盖 φ_x 的伽罗瓦群 Gal 的作用是等变的，$(\widetilde{\varphi}^*(L_V), \mathrm{F}_{x'})$ 对 Gal 作用也等变。我们得到滤过的元组 $\mathrm{F}_x = (\mathcal{F}^y(\widetilde{L}_V, y) \mid y \in \varpi^{-1}(H_x))$。它是 (V, ∇) $_{|X_x}$ 的 Stokes 结构。通过改变 x,~，我们得到 L_V 的 Stokes 结构 F。由此，我们得到

$$\mathrm{RHB}(V, \nabla) = (\widetilde{L}_V, \boldsymbol{\mathcal{F}}) \in \mathrm{Loc}^{\mathrm{St}}(X, H, \boldsymbol{\mathcal{I}}).$$

这是一个阿贝尔范畴之间的函子。

命题 3.20 函子 RHB 是一个等价。

证明 若 I 是非分歧的，则已在 $[25, §4.2]$ 中说明。我们来研究存在分歧伽罗瓦覆盖 φ： $(X', H') \to (X, H)$，使得 $\varphi^*\mathrm{I}$ 为非分歧的情形。设 Gal 表示伽罗瓦群。对任意 $(\widetilde{L}, \mathrm{F}) \in \mathrm{Loc}^{\mathrm{St}}(X, H, \mathrm{I})$，我们得到伽罗瓦群等变对象 $\varphi^*(\widetilde{L}, \mathrm{F}) \in \mathrm{Loc}^{\mathrm{St}}$ $(X', H', \varphi^*\mathrm{I})$。存在 $(V', \nabla') \in \mathrm{Mero}(X', H', \varphi^*\mathrm{I})$，使得 $\mathrm{RHB}(V', \nabla') \simeq \varphi^*(\widetilde{L}, \mathrm{F})$。因为 $\mathrm{RHB} : \mathrm{Mero}(X', H', \varphi^*\mathrm{I}) \simeq \mathrm{Loc}^{\mathrm{St}}$ $(X', H', \varphi^*\mathrm{I})$，$(V', \nabla')$ 是伽罗瓦等变的，并且存在 $(V, \nabla) \in \mathrm{Mero}(X, H, \mathrm{I})$，使得 $\varphi^*(V,\ \nabla) \simeq (V', \nabla')$。 G- ~ ~等变同构 $\varphi^*\,\mathrm{RHB}(V, \nabla) \simeq \varphi^*(L, \mathrm{F})$ 诱导一个同构 $\mathrm{RHB}(V, \nabla) \simeq (L,$ $\mathrm{F})$。这表明 RHB 是本质满的。显然，RHB 是忠实的。设 $(V_i, \nabla) \in \mathrm{Mero}(X, H, \mathrm{I})$，并带有一个态射 f:

RHB$(V_1,\nabla)\to$RHB(V_2,∇)。因为 RHB : Mero$(X',H',\varphi^*\mathrm{I})\simeq\mathsf{Loc}^{\mathsf{St}}(X',H',\varphi^*\mathrm{I})$，我们得到 $g'\colon\ \varphi^*(V_1,\nabla)\to\varphi^*(V_2,\nabla)$，使得 RHB$(g')=\varphi^*(f)$。我们得到 g' 是伽罗瓦等变的，因此存在 $g\colon (V_1,\nabla)\to(V_2,\nabla)$，使得 $\varphi^*(g)=g'$。我们可以验证 RHB$(g)=f$，即在此情形下 RHB 是满的。

让我们研究一般情形。利用上述局部情形中的等价性，我们可以验证 RHB 是全忠实的。设 $(\widetilde{L},\mathrm{F})\in\mathsf{Loc}^{\mathsf{St}}(X,D,\mathrm{I})$。根据上述局部情形中的等价性，存在一个开覆盖$\sim X=\bigcup\mathcal{U}_i$ 以及 $(V_i,\nabla)\in$Mero$(\mathcal{U}_i,H\cap\mathcal{U}_i,\mathrm{I}^{\mathcal{U}_i})$，使得 RHB$(V_i)\simeq(L,\mathrm{F})|_{\varpi^{-1}(\mathcal{U}_i)}$。根据上述局部等价性，我们有同构 $\psi_{j,i}:\mathrm{RHB}(V_i)^{|\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j}\simeq\mathrm{RHB}(V_j)^{|\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j}$，其满足余循环条件。通过将它们粘合，存在 (V,∇)，使得 $(V,\nabla)^{|\mathcal{U}_i}=(V_i,\nabla)$。因此，RHB 是本质满的。∎

推论 3.2 1 在§3.5.3的设定下，我们得到等价关系 $\mathrm{Mero}(X,H,\boldsymbol{\mathcal{I}})\simeq\mathrm{Mero}(X_b,H_b,\boldsymbol{\mathcal{I}}_b)$.

推论 *3.22* 设 X,B,H,B_0,I 如 *§3.5.4* 中所述。设 $(V_0,\nabla)\in$*Mero*$(X_{B_0},H_{B_0},I^{B_0})$。假设其关联局部系统 L_{V_0} 可延拓为 $X\setminus H$上的一个局部系统。那么，存在 $(V,\nabla)\in$*Mero*(X,H,I)，使得 $(V,\nabla)^{|X_{B_0}}\simeq(V_0,\nabla)$。这样的 (V,∇) 在典范同构意义下唯一。∎

3.6.1 限制到丰沛超曲面

设 X 是一个维数为 $X\geq 3$ 的光滑复射影簇。设 H 是一个简单正规交叉超曲面，其不可约分解为 $H=\bigcup_{i\in\Lambda}H_i$。设 $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ 是 (X,H) 上分歧不规则值的良系统。设 Z 是 X 的一个充分光滑超曲面，使得 (i) $Z\subsetneq H$，(ii) $Z\cup H$ 也是简单正规交叉超曲面。设 $\boldsymbol{\mathcal{I}}_Z$ 是由 $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ 诱导的 $(Z,Z\cap H)$ 上分歧不规则值的良系统。

通过限制，我们得到函子

$$\mathrm{Mero}(X,H,\boldsymbol{\mathcal{I}})\to\mathrm{Mero}(Z,Z\cap H,\boldsymbol{\mathcal{I}}_Z),\tag{3}$$

$$\mathsf{Loc}^{\mathsf{St}}(X,H,\boldsymbol{\mathcal{F}})\to\mathsf{Loc}^{\mathsf{St}}(Z,Z\cap H,\boldsymbol{\mathcal{I}}_Z).\tag{4}$$

定理 3.23 限制函子(3) 和(4) 是等价。

证明 对于 $I\subset\Lambda$，我们令 $H_I=\bigcap_{i\in I}H_i$ 和 $H_I^\circ=H_I\setminus\bigcup_{j\notin I}(H_I\cap H_j)$。我们还令 $H_{[j]}=\bigcup_{|I|\ =j}H_I$.

对于任意 i，我们有 $H_{i,j}^\circ\cap Z\neq\emptyset$；对于满足 $i\neq j$ 的 $j\in\Lambda$，由 [8], 可得以下结论。

- $\pi_1(Z\setminus H)\simeq\pi_1(X\setminus H)$。

对于任意 $i\in I$，• $\pi_1(H_i^\circ\cap Z)\to\pi_1(H_i^\circ)$ 都是满射。

设 $(V_i,\nabla)\in$Mero(X,H,I)。假设存在 $f\colon(V_1,\nabla)^{|Z}\to(V_2,\nabla)^{|Z}$。我们得到 $(L_1,\mathrm{F})^{|\widetilde{z}(H\cap Z)}\to(L_2,\mathrm{F})^{|\widetilde{z}(H\cap Z)}$。它可延拓到 $L_1\to L_2$和 $L_1\to L_2$。此外，对任意 i，它与$\varpi^{-1}(H_i^\circ)$上的 Stokes 结构相容。因此，存在 $f'\colon(V_1,\nabla)^{|X\setminus H_{[2]}}\to(V_2,\nabla)^{|X\setminus H_{[2]}}$。由于 f'保留了 $X\setminus H_{[2]}$上的良好 Deligne-Malgrange 格，根据 Hartogs 性质，它可延拓为一个态射 $f\colon(V_1,\nabla)\to(V_2,\nabla)$，使得$\sim f_{|Z}=f$。因此，这些函子是全忠实的。

设 $(\widetilde{L}_Z,\mathrm{F})\in\mathsf{Loc}^{\mathsf{St}}(Z,H\cap Z,\mathrm{I}_Z)$。由于 $\pi_1(Z\setminus H)\simeq\pi_1(X\setminus H)$，存在一个局部系统 Lon $X\setminus H$such that $L_{|Z\setminus H}=L_Z$。由命题 3.19，存在 $\mathrm{I}^{|X\setminus H_{[2]}}$上的 $L_{|\varpi^{-1}(X\setminus H_{[2]})}$ 的 Stokes 结构 F。由于$\sim H_{i,j}^\circ\cap Z\neq\emptyset$，它延拓为 $\mathrm{I}^{|X\setminus H_{[3]}}$上的 $L_{|\varpi^{-1}(X\setminus H_{[3]})}$ 的 Stokes 结构。因此，存在 $(V',\nabla')\in$Mero$(X\setminus H_{[3]},H\setminus H_{[3]},\mathrm{I})$，使得 RHB$(V',\nabla')=(L_{|\varpi^{-1}(X\setminus H_{[3]})},\mathrm{F})$。由 [19, 28], (V',∇) 延拓为 (X,H) 上的亚纯联络 (V,∇)。利用引理 2.37、引理 2.38], , 我们得到 $(V,\nabla)\in$Mero(X,D,I)。∎

4 复曲面情形中特征数的估计

4.1 陈述

设 X 为光滑连通复射影曲面。设 H 为 X的简单正规交叉超曲面。设 $H=\bigcup_{i\in\Lambda}H_i$ 为不可约分解。设 $[H_i]\in H^2(X,\mathbb{R})$表示由 H_i诱导的上同调类。

设 $(V,\ \nabla)$ 是 $(X,\ H)$ 上的良好亚纯平坦丛。我们得到良好的 Deligne-Malgrange 滤过丛 $\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}V$。我们得到局部自由的 $\mathcal{O}_X$-模 $V_{\mathrm{DM}}=\mathcal{P}_0^{\mathrm{DM}}V$。对于 $-1<a\leq 0$，我们得到局部自由的$\mathcal{O}_{H_i}$-模 ${}^i\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{\mathrm{DM}})$。我们将在 §4.2 和 §4.3 的预备知识之后，于 §4.4 证明以下命题。

命题 4.1 类 $c_1(V^{\mathrm{DM}})$ 包含于

$$\Big\{\sum_{i\in\Lambda} a_i[H_i]\in H^2(X,\mathbb{R})\,\Big|\,0\le a_i<\mathrm{rank}(V)\Big\}.$$

存在 $C_1>$ 0 仅取决于 $([H_i]^2$,秩$(V))$，使得对任意 $-1<a\le 0$，以下结论成立 :

$$\left|\deg_{H_i}\big({}^i\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{\mathrm{DM}})\big)\right|<C_1.$$

存在 $C_2>0$ 仅取决于秩(V) 以及交数 $[H_i]\cdot[H_j]\,(i,j\in\Lambda)$，使得 t

$$|c_2(V^{\mathrm{DM}})|<C_2.$$

4.2 分歧覆盖与良好系统分歧不规则值

4.2.1 定向实爆破

设 X 为一个复曲面。设 $C\subset X$ 为一个光滑一维紧致连通复子流形。我们作如下假设:

- 包含映射 $C\to X$ 是同伦等价的。

设 H 为 X 的一个超曲面，使得 (i) $C\not\subset H$，(ii) $C\cup H$ 为简单正规交叉超曲面，(iii) H 的每个~连通分支都同构于一个圆盘。记 $H_C:=C\cap H\subset C$。记 $\varpi\colon X(H\cup C)\to X$ 为沿 $C\cup H$的~定向实爆破。记 $\mathcal{O}_{\tilde{X}(H\cup C)}$ 为 $X(H\cup C)$上的全纯函数层。记$\mathcal{O}_{\tilde{X}(H\cup C)}(*(H\cup C)):=\mathcal{O}_{\tilde{X}(H\cup C)}\otimes_{\varpi^{-1}\mathcal{O}_X}\varpi^{-1}(\mathcal{O}_X(*(H\cup C)))$。

4.2.2 定向实爆破上的一些层

令 $\mathcal{O}^{(e)}_{\tilde{X}\,(H\cup C)}$ 表示由以下方式确定的 $\tilde{X}(H\cup C)$ 上的层。

- $\mathcal{O}_{(e)\,\tilde{X}(H\cup C)}$
$|_{X\setminus H}=\mathcal{O}_{X\setminus H}$.

- 对每个 $x\in C\setminus H$，存在一个全纯坐标邻域 $(X_x,\ z_1,\ z_2)$，使得 $C\cap X_x=\{z_1=0\}$。在 $y\in\varpi^{-1}(x)$ 附近，取 $z_1^{1/e}$ 的一个分支，定义 $\mathcal{O}_{(e)\ \tilde{X}(H\cup C)}=\mathcal{O}_{(e)\ \tilde{X}(H\cup C)}[z_1^{1/e}]$，它与坐标系和分支的选取无关。

- 对每个 $x\in H\setminus C$，存在一个全纯坐标系 $(X_x,\ z_1,\ z_2)$，使得 $H\cap X_x=\{z_2=0\}$。在 $y\in\varpi^{-1}(x)$ 附近，取 $z_2^{1/e}$ 的一个分支，定义 $\mathcal{O}_{(e)\ \tilde{X}(H\cup C)}=\mathcal{O}_{(e)\ \tilde{X}(H\cup C)}[z_2^{1/e}]$，它与坐标系和分支的选取无关。

- 对于每个 $x\in H\cap C$，都存在一个全纯坐标系 $(X_x,\ z_1,\ z_2)$，使得 $H\cap X_x=\{z_2=0\}$ 且$C\cap X_x=\{z_1=0\}$。在 $y\in\varpi^{-1}(x)$ 附近，通过选取 $z_i^{1/e}$ 的分支，我们定义 $\mathcal{O}_{(e)\,\tilde{X}(H\cup C)}=\mathcal{O}_{(e)\,\tilde{X}(H\cup C)}[z_1^{1/e},z_2^{1/e}]$，它与坐标系和分支的选择无关。

我们定义 $\widetilde{\mathcal{O}}_{\tilde{X}(H\cup C)}=\varinjlim\mathcal{O}^{(e)}_{\tilde{X}\,(H\cup C)}$。我们还定义

$$\widetilde{\mathcal{O}}_{\tilde{X}(H\cup C)}(*(H\cup C))=\widetilde{\mathcal{O}}_{\tilde{X}(H\cup C)}\otimes_{\varpi^{-1}\mathcal{O}_X}\varpi^{-1}\mathcal{O}_X(*(H\cup C)).$$

我们得到集合层

$$\widetilde{\mathcal{O}}_{\tilde{X}(H\cup C)}(*(H\cup C))/\widetilde{\mathcal{O}}_{\tilde{X}(H\cup C)}$$

在 $\varpi^{-1}(H\cup C)$ 上。

4.2.3 由分歧非正则值的好系统在(X,H)上诱导的局部系统

设 $\boldsymbol{\mathcal{I}}=(\mathcal{I}_x \mid x\in C\cup H)$ 是意义如 [26, §15.1] 所述的、定义在 $(X, C\cup H)$ 上的分歧不规则值的好系统。对于 $x\in H$ and $y\in\varpi^{-1}(x)$, $\mathcal{I}_x$ 确定子集

$$L(\boldsymbol{\mathcal{I}})_y\subset\big(\widetilde{\mathcal{O}}_{\widetilde{X}(H\cup C)}(*(H\cup C))/\widetilde{\mathcal{O}}_{\widetilde{X}(H\cup C)}\big)_y.$$

此过程诱导一个集合的子层

$$L(\boldsymbol{\mathcal{I}})\subset\widetilde{\mathcal{O}}_{\widetilde{X}(H\cup C)}(*(H\cup C))/\widetilde{\mathcal{O}}_{\widetilde{X}}(H\cup C)$$

在 $\varpi^{-1}(C\cup H)$上。通过限制到 $\varpi^{-1}(C\setminus H)$，我们得到一个集合的局部系统

$$L(\boldsymbol{\mathcal{I}})_{C\setminus H}:=L(\boldsymbol{\mathcal{I}})_{|\varpi^{-1}(C\setminus H)}$$

通过限制到 $\varpi^{-1}(C\cap H)$，我们得到一个集合的局部系统

$$L(\boldsymbol{\mathcal{I}})_{C\cap H}:=L(\boldsymbol{\mathcal{I}})_{|\varpi^{-1}(C\cap H)}.$$

4.2.4 陈述

我们将在预备知识之后于§4.2.8中证明下述命题。

命题 4.2 存在复流形 $X^{(j)}\,(j=1,2,3,4)$ 及全纯映射

$$X^{(4)}\xrightarrow{\varphi_4}X^{(3)}\xrightarrow{\varphi_3}X^{(2)}\xrightarrow{\varphi_2}X^{(1)}\xrightarrow{\varphi_1}X$$

使得以下结论成立。

- $X'=\varphi_1(X_{(1)})$ 是 X 中 C 的一个邻域。诱导映射 $\varphi_1\colon X_{(1)}\to X'$ 是一个真有限映射。
- 存在 X' 的一个超曲面 H'，使得 ***(i)*** H' 的任意连通分支都同构于一个圆盘，***(ii)*** $H\cap H'=\emptyset$，***(iii)*** $C\cup H'\cup H$ 是正规交叉，***(iv)*** $\varphi_1\colon X_{(1)}\to X'$ 是一个沿 $\varphi_1^{-1}(H\cup H')$ 分歧的有限真映射。记 $C_{(1)}=\varphi_1^{-1}(C)$ 和 $H_{(1)}=\varphi_1^{-1}(H)$。
- φ_2 是一个有限伽罗瓦覆盖映射。记 $C_{(2)}=\varphi_2^{-1}(C_{(1)})$ 和 $H_{(2)}=\varphi_2^{-1}(H_{(1)})$。
- φ_3 是一个沿 $C_{(3)}=\varphi_3^{-1}(C_{(2)})$分歧的有限真映射，而诱导映射 $X_{(3)}\setminus C_{(3)}\to X_{(2)}\setminus C_{(2)}$ 是一个循环覆盖映射。我们令 $H_{(3)}=\varphi_3^{-1}(H_{(2)})$。
- φ_4 是一个有限伽罗瓦覆盖映射。我们令 $C_{(4)}=\varphi_4^{-1}(C_{(3)})$ 和 $H_{(4)}=\varphi_4^{-1}(H_{(3)})$。
- 令 $\boldsymbol{\mathcal{I}}_{(4)}$ 表示在 $(X_{(4)}C_{(4)}\cup H_{(4)})$上诱导的分歧不规则值的良系统。于是，局部系统 $L(\boldsymbol{\mathcal{I}}_4)_{C_{(4)}\setminus H^{(4)}}$ 和 $L(\boldsymbol{\mathcal{I}}_4)_{C_{(4)}\cap H^{(4)}}$ 在每个连通分支上都是整体常层。

我们有以下补充。令 G_3 表示 φ_3的伽罗瓦群，并令 G_4 表示 φ_4的伽罗瓦群。G_j 在 $X^{(j)}$上有自然作用。我们将在 §4.2.9 中证明以下引理。

引理4.3 存在一个 $G_3\times G_4$ 在 $X^{(4)}$ 上的自然作用，它在 $X^{(3)}$ 上诱导出 G_3-作用。

4.2.5 预备

设 Y 是一个复流形。设 L 是 Y 上的全纯线丛。

引理4.4 假设存在 $\alpha\in H^2(Y,\mathbb{Z})$，使得对某个整数 m 有 $c_1(L)=m\cdot\alpha$。那么，存在一个全纯线丛 $L^{1/m}$，并有一个同构 $(L^{1/m})^{\otimes m}\simeq L$。

证明 由正合列 $0\longrightarrow\mathbb{Z}\longrightarrow\mathcal{O}\longrightarrow\mathcal{O}^*\longrightarrow 0$，我们得到正合列

$$H^1(Y,\mathcal{O}_Y)\longrightarrow H^1(Y,\mathcal{O}_Y^*)\xrightarrow{\psi_1}H^2(Y,\mathbb{Z})\xrightarrow{\psi_2}H^2(Y,\mathcal{O}_Y).$$

注意，$H^j(Y,\mathcal{O}_Y)$是 $\mathbb{C}$-向量空间。注意，$\psi_2(c_1(L))=0$ 属于 $H^2(Y,\mathcal{O}_Y)$。因此，$m\cdot\psi_2(\alpha)=0$，这意味着 $\psi_2(\alpha)=0$。因此，存在一个全纯线丛 L_0，使得 $c_1(L_0)=\alpha$。因为$c_1(L^{-1}\otimes L_0^m)=0$，存在 $\beta\in H^1(Y,\mathcal{O}_Y)$，使得 $\psi_1(\beta)=L^{-1}\otimes L_0^m$。令 $L^{1/m}:=L_0\otimes\psi_1(\beta/m)$。那么，它满足$(L^{1/m})^{\otimes m}=L$。 ∎

沿 $H \cup H'$ 分歧的覆盖

设 H' 是 X 的一个超曲面，使得 $H \cap H' = \emptyset$，并且 $H \cup H' \cup C$ 是正规交叉。

引理 4.5 假设 $H \cup H'$ 的每个连通分支都同胚于一个圆盘。假设 $|H \cap C| = |H' \cap C|$。那么，对于任意 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$，存在一个复流形 X'，以及一个全纯映射 $\varphi_m \colon X' \to X$，使得以下结论成立。

- $X' \setminus \varphi_m^{-1}(H \cup H') \to X \setminus (H \cup H')$ 是一个 m 阶循环覆盖。
- $\varphi_m^{-1}(H \cup H') \to H \cup H'$ 是一个同构。

证明 考虑线丛 $L = \mathcal{O}_X(H - H')$。我们有 $c_1(L) = 0$ 属于 $H^2(X, \mathbb{Z})$。存在一个全纯线丛 $L^{1/m}$，以及一个同构 $(L^{1/m})^{\otimes m} \simeq L$。存在由 $v \longmapsto v^m$ 给出的态射 $L^{1/m} \to L$。它可扩张为态射 $\Phi \colon \mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus L^{1/m}) \to \mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus L)$。令 $X_0 = \mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus 0)$，并令 $X_\infty = \mathbb{P}(0 \oplus L)$。另令 $X_0^{(m)} = \mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus 0)$，并令 $X_\infty^{(m)} = \mathbb{P}(0 \oplus L^{1/m})$。于是，$\mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus L^{1/m}) \setminus (X_0^{(m)} \cup X_\infty^{(m)}) \to \mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus L) \setminus (X_0 \cup X_\infty)$ 是一个 m 阶循环覆盖，而 Φ 诱导了 $X_0^{(m)} \simeq X_0$ 和 $X_\infty^{(m)} \simeq X_\infty$ 之间的一个同构。

态射 $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(H)$ 诱导出 $X \to \mathbb{P}^1(\mathcal{O}_X \oplus L)$。令 X' 表示 X 与 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus L^{1/m})$ 在 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus L)$ 上的纤维积。于是，诱导态射 $X' \to X$ 满足所需条件。 ∎

4.2.7 沿 C 分歧的覆盖

令 χ 表示 C 在 X 中的法丛次数。

引理 4.6 设 m 为正整数，使得 χ/m 为整数。则存在一个复流形 X' 及一个态射 $\varphi_m \colon X' \to X$，使得以下条件成立。

- $X' \setminus \varphi_m^{-1}(C) \to X \setminus C$ 是一个次数为 m 的循环覆盖。
- $\varphi_m^{-1}(C) \simeq C$。

$\varphi_m^{-1}(C)$ 在 X' 中的法丛的欧拉类为 χ/m。

证明 考虑全纯线丛 $L = \mathcal{O}_X(C)$。由于 $H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq H^2(C, \mathbb{Z})$，存在一个 $\alpha \in H^2(X, \mathbb{Z})$，使得 $c_1(L) = m\alpha$。存在一个全纯线丛 $L^{1/m}$，并有一个同构 $(L^{1/m})^{\otimes m} \simeq L$。存在自然截面 $X \to L$。于是，我们可以像前面的引理那样构造 $X' \to X$。 ∎

4.2.8 命题 4.2 的证明

通过缩小 X，可以假设存在 X 的一个超曲面 H'，使得 (i) H' 的每个连通分支都同构于圆盘，(ii) $H \cap H' = \emptyset$，(iii) $X \cup H \cup H'$ 为正规交叉，(iv) $|H \cap C| = |H' \cap C|$。我们还假设 $C \to X$ 同伦等价。存在 $m_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得下述结论成立。

- Let $x \in H \setminus C$. Then, $\mathcal{I}_x \subset \mathcal{O}_X^{(m_1)}(*H)_x / \mathcal{O}_{X,x}^{(m_1)}$.

令 $\varphi_{m_1}^{(1)}$：如 §4.2.6 中所述，$X^{(1)} \to X$ 是沿 $H \cup H'$ 分歧的 m_1 阶循环覆盖。我们设 $C^{(1)} = (\varphi_{m_1}^{(1)})^{-1}(C)$、$H^{(1)} = \varphi_{m_1}^{-1}(H)$ 以及 $H'^{(1)} = \varphi_{m_1}^{-1}(H')$。于是得到 $(X^{(1)}, C^{(1)} \cup H^{(1)})$ 上的分歧非正则值的好系统 $\boldsymbol{\mathcal{I}}^{(1)}$。

对于每个 $x \in C^{(1)} \setminus H^{(1)}$，令 $[\mathcal{I}_x^{(1)}]$ 表示 $\mathcal{I}_x^{(1)}$ 关于扩张 $\mathcal{O}_{X^{(1)},x} \to \mathcal{O}_{X^{(1)},x}^{(e)}$ 的伽罗瓦群自然作用的商集。元组 $[\boldsymbol{\mathcal{I}}^{(1)}] = ([\mathcal{I}_x^{(1)}] \mid x \in C^{(1)} \setminus H^{(1)})$ 在 $C^{(1)} \setminus H^{(1)}$ 上给出一个有限集的局部系统。注意，根据 $\varphi_{m_1}^{(1)}$ 的构造，绕 $C^{(1)} \cap H^{(1)}$ 中任意一点的单值化都是平凡的。因此，$[\boldsymbol{\mathcal{I}}^{(1)}]$ 延拓为 $C^{(1)}$ 上的局部系统，记作 $[\boldsymbol{\mathcal{I}}^{(1)}]'$。

令 $x_0 \in C^{(1)}$。我们得到从 $\pi_1(C^{(1)}, x_0)$ 到有限集 $[\boldsymbol{\mathcal{I}}^{(1)}]'_{x_0}$ 的自同构群的同态 $\kappa^{(1)}$。令 $\varphi^{(2)} \colon X^{(2)} \to X^{(1)}$ 表示对应于 $\pi_1(X^{(1)}, x_0) = \pi_1(C^{(1)}, x_0)$ 的正规子群 $\mathrm{Ker}(\kappa^{(1)})$ 的有限伽罗瓦覆盖映射。我们设 $C^{(2)} = (\varphi^{(2)})^{-1}(C^{(1)})$ 和 $H^{(2)} = (\varphi^{(2)})^{-1}(H^{(1)})$。注意，$(\varphi_{|C^{(2)}})^{-1}([\boldsymbol{\mathcal{I}}^{(1)}]')$ 是常值的。

令 χ 为 $X^{(2)}$ 中 $C^{(2)}$ 的法丛的欧拉数。存在 $e_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得以下结论成立。

- Let $x \in C^{(2)} \setminus H^{(2)}$. Then, $\mathcal{I}_x^{(2)} \subset \mathcal{O}_{X^{(2)}}^{(e_2)}(*C^{(2)})_x/\mathcal{O}_{X^{(2)},x}^{(e_2)}$.

若 $\chi \neq 0$ 则令 $m_2 = |\chi|$，若 $\chi = 0$则令 $m_2 = e_2$。令 $\varphi_{m_2}^{(3)}$： $X^{(3)} \to X^{(2)}$ 为沿 $C^{(2)}$ 分歧、阶为 m_2 的循环覆盖，如§4.2.7 所述。令 $C^{(3)} = (\varphi_{m_2}^{(3)})^{-1}(C^{(2)})$， $H^{(3)} = (\varphi_{m_2}^{(2)})^{-1}(H^{(2)})$。我们在 $(X^{(3)}, C^{(3)} \cup H^{(3)})$ 上得到分歧不规则值的好系统 $\boldsymbol{\mathcal{I}}^{(3)}$。

设 $\varpi_0^{(3)}$： $\widetilde{X}^{(3)}(C^{(3)}) \to X^{(3)}$ 表示 $X^{(3)}$ 沿 $C^{(3)}$的定向实爆破。

引理 4.7 集合的局部系统 $L(\boldsymbol{\mathcal{I}}^{(3)})_{C^{(3)}\setminus H^{(3)}}$ 在 $C^{(3)} \setminus H^{(3)}$ 上自然延拓为集合的局部系统$L(\boldsymbol{\mathcal{I}}^{(3)})'_{C^{(3)}}$，后者定义在$(\varpi_0^{(3)})^{-1}(C^{(3)})$上。

证明 设 $x \in C^{(3)} \cap H^{(3)}$。设 γ 为绕 $(\varpi_0^{(3)})^{-1}(x)$ 的任意环路。由 $\varphi^{(1)}$ 的构造， $L(\boldsymbol{\mathcal{I}}^{(3)})'_{C^{(3)}}$ 沿 γ 的单值化是平凡的。于是，我们得到该引理的结论。 ∎

$\mathcal{I}_x^{(3)}(x \in C^{(3)} \setminus H^{(3)})$的轨道分解诱导出该分解

$$L(\boldsymbol{\mathcal{I}}^{(3)})'_{C^{(3)}} = \bigsqcup_{\mathfrak{o}\in\Lambda} L(\boldsymbol{\mathcal{I}}^{(3)})'_{C^{(3)},\mathfrak{o}},$$

其中 $L(\boldsymbol{\mathcal{I}}^{(3)})'_{C^{(3)},\ \mathfrak{o}}$ 是定义在 $(\varpi_0^{(3)})^{-1}(C^{(3)})$ 上的主 $\mathbb{Z}/\ell(\mathfrak{o})$-丛。

引理4.8 对任意 $x \in C^{(3)} \setminus H^{(3)}$， $L(\boldsymbol{\mathcal{I}}^{(3)})'_{C^{(3)}}$ 沿着 $(\varpi_0^{(3)})^{-1}(x)$ 的单值化是平凡的。

证明 若 $\chi = 0$，则由 $\varphi_{e_2}^{(3)}$ 的构造可知。若 $\chi \neq 0$，注意到 $C^{(3)}$ 在 $X^{(3)}$ 中的法丛的欧拉数为 1 或 -1。因此，自然态射

$$H_1\big((\varpi_0^{(3)})^{-1}(C^{(3)}), \mathbb{Z}\big) \longrightarrow H_1(C^{(3)}, \mathbb{Z})$$

是一个同构。因此，自然态射

$$H^1(C^{(3)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1\big((\varpi_0^{(3)})^{-1}(C^{(3)}), \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}\big)$$

对任意 $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ 都是一个同构。因此，我们得到引理所述结论。 ∎

令 $\varpi_1^{(3)}$： $\widetilde{X}^{(3)}(C^{(3)} \cup H^{(3)}) \to X^{(3)}$ 表示沿着 $C^{(3)} \cup H^{(3)}$ 对 $X^{(3)}$ 作定向实爆破。由 $\varphi_{m_1}^{(1)}$ 的构造和引理 4.8，我们得到如下引理。

引理4.9 局部系统 $L(\boldsymbol{\mathcal{I}}^{(3)})_{C^{(3)}\cap H^{(3)}}$ 在$(\varpi_1^{(3)})^{-1}(C^{(3)} \cap H^{(3)}$的每个连通分支上是常值的). ∎

由引理4.8， $\boldsymbol{\mathcal{I}}^{(3)} = (\mathcal{I}_x^{(3)} \mid x \in C^{(3)} \setminus H^{(3)})$决定了 $C^{(3)} \setminus H^{(3)}$上的一个局部系统，它延拓为$C^{(3)}$上有限集的局部系统。设 $x_0 \in C^{(3)}$。我们有从 $\pi_1(C^{(3)}, x_0)$到 $\mathcal{I}_{x_0}^{(3)}$的自同构的自然同态 $\kappa^{(3)}$。设 $X^{(4)} \to X^{(3)}$ 为对应于$\pi_1(X^{(3)}, x_0) = \pi_1(C^{(3)}, x_0)$的正规子群$\mathrm{Ker}(\kappa^{(3)})$的覆盖空间。于是，诱导映射 $X^{(4)} \to X$ 满足所需条件。 ∎

4.2.9 引理4.3的证明

设 $g_{X^{(4)}}$为 $X^{(4)}$上的 G_4-不变黎曼度量，使得对于任意切向量v，都有 $g_{X^{(4)}}(Jv, Jv) = g_{X^{(4)}}(v, v)$，其中 J 是由$\sqrt{-1}$的乘法诱导的 $TX^{(4)}$ 的自同构。它在 $X^{(3)}$上诱导出黎曼度量$g_{X^{(3)}}$，使得覆盖映射 φ_4是局部等距的。对于 $j = 3, 4$，令 $N_{C^{(j)}}^{\mathbb{R}} X^{(j)}$ 表示 $X^{(j)}$ 中 $C^{(j)}$ 的法丛，它们由 $TC^{(j)} \subset TX^{(j)}_{|C^{(j)}}$的正交补得到。它们自然地是复向量丛。限制$\varphi_{4|C^{(4)}}$ 诱导出一个同构

$$N_{C^{(4)}}^{\mathbb{R}} X^{(4)} \simeq \varphi_{4|C^{(4)}}^{*}\big(N_{C^{(3)}}^{\mathbb{R}} X^{(3)}\big). \tag{5}$$

令 $0_{C^{(j)}}$ 表示 $N_{C^{(j)}}^{\mathbb{R}} X^{(j)}$的零截面的像。

我们考虑 $G_3 \subset S^1 = \big\{a \in \mathbb{C} \,\big|\, |a| = 1\big\}$。在 $N_{C^{(4)}}^{\mathbb{R}} X^{(4)}$ 上存在自然的 G_3 作用。同构 (5) 是 G_3 等变的。$N_{C^{(4)}}^{\mathbb{R}} X^{(4)}$ 上的 G_3 作用可扩张为 $N_{C^{(4)}}^{\mathbb{R}} X^{(4)}$ 上的 $G_3 \times G_4$ 作用。

存在 G_3 不变的邻域 $C^{(3)} \subset U^{(3)} \subset X^{(3)}$ 和 $0_{C^{(3)}} \subset V_{(3)} \subset N^{\mathbb{R}}_{C^{(3)}} X^{(3)}$，使得关于 $g_{X^{(3)}}$ 的指数映射诱导出一个 G_3 等变微分同胚 $V_{(3)} \simeq U^{(3)}$。我们将邻域 $0_{C^{(4)}} \subset V_{(4)} \subset N^{\mathbb{R}}_{C^{(4)}} X^{(4)}$ 定义为 $V_{(3)}$ 的拉回。它是 $G_3 \times G_4$ 不变的。令 $C^{(4)} \subset U_{(4)} \subset X^{(4)}$ 表示通过关于 $g_{X^{(4)}}$ 的指数映射，将 $V^{(4)}$ 映出的邻域。我们在 $U^{(4)}$ 上有 $G_3 \times G_4$ 作用，它诱导出 $U^{(3)} = U_{(4)}/G_4$ 上的 G_3 作用。

注意到包含映射 $U_{(4)} \to X^{(4)}$ 同伦等价。对于任意 $g \in G_3$，映射 $g\colon U_{(4)} \simeq U^{(4)}$ 可唯一延拓至 $X^{(4)} \simeq X^{(4)}$，因为 $g\colon U_{(3)} \simeq U^{(3)}$ 可延拓至 $X^{(3)} \simeq X^{(3)}$，且 $X^{(4)} \to X^{(4)}$ 是一个覆盖映射。由此得到 G_3 在 $X^{(4)}$ 上的作用。令 $g_3 \in G_3$ 和 $g_4 \in G_4$。注意到 $g_4^{-1} g_3 g_4 = g_3$ 在 $U^{(4)}$ 上，并且 $g_4^{-1} g_3 g_4$ 和 g_3 在 $X^{(4)}$ 上诱导出相同的映射。因此，我们得到 $g_3^{-1} g_2 g_3 = g_2$ 在 $X^{(4)}$ 上，即 G_3-作用和 G_4-作用是可交换的。我们注意到，这些作用与 $g_{X^{(4)}}$ 的选择无关。 ∎

4.3 分次块的次数

4.3.1 陈述

设 X、C 和 H 如 §4.2.1 中所述。设 (V, ∇) 是 $(X, H \cup C)$ 上秩为 r 的良好亚纯平坦丛。我们得到由 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^H$ 编号的 $(X, C \cup H)$ 上的良好 Deligne-Malgrange 滤过丛 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*(V)$。对于 $a \in \mathbb{R}$，沿 C 对滤过取分次，得到局部自由的 $\mathcal{O}_C(*H_C)$-模 ${}^C\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_a(V)$。此外，对于 $a \in \mathbb{R}$ 和 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^H$，我们得到局部自由层

$$\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{\boldsymbol{b}}\big({}^C\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_a(V)\big) := {}^C\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_a\big(\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{a,\boldsymbol{b}}(V)\big)$$

在 C 上。因此，我们得到 (C, H_C) 上的滤过丛 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*\big({}^C\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_a(V)\big)$。令 $N_C X$ 表示 X 中 C 的法丛。我们将在 §4.3.7 中证明以下命题。

命题 4.10 我们有

$$\deg\Big(\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*\big({}^C\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_a(V)\big)\Big) = a \cdot \deg(N_C X) \cdot \operatorname{rank} {}^C\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_a(V). \tag{6}$$

4.3.2 到等变情形的精细化

假设 X 配备了有限循环群 G 的一个作用，且该作用满足以下条件。

- $G \cdot x = x$ 对任意 $x \in C$。
- G-作用保持 H 的任意连通分支。
- (V, ∇) 是 G-等变的。
- 商空间 X/G 是一个复流形，使得投影 $X \to X/G$ 是复流形的分歧覆盖。

Deligne-Malgrange 滤过丛 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*(V)$ 是 G-等变的。设 $\mathrm{Irr}(G)$ 表示 G 的不可约表示的集合。我们得到分解

$$\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*\big({}^C\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_a(V)\big) = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*\big({}^C\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_a(V)\big)_\chi,$$

其中，对于任意 $g \in G$ 以及 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}\big({}^C\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_a(V)\big)$ 的截面 v，我们有 $g^* v = \chi(g) v$。下面的命题是命题 4.10 的一个细化，我们将在 §4.3.8 中证明它。

命题 4.11 我们有

$$\deg\Big(\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*\big({}^C\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_a(V)\big)_\chi\Big) = a \cdot \deg(N_C X) \cdot \operatorname{rank} {}^C\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_a(V)_\chi. \tag{7}$$

4.3.3 特殊情形下按不规则值的全局分解

假设 X 和 $(V,\ \nabla)$ 如 §4.3.2 中所述是 G-等变的。我们研究这个特殊情形。

条件 4.12 假设$\boldsymbol{\mathcal{I}}$ 满足以下条件。

- $\mathcal{I}_x \subset \mathcal{O}_X(*(H \cup C))_x/\mathcal{O}_{X,\ x}$对任意 $x \in C \cup H$。我们得到局部系统 $L_{C\setminus H}(\boldsymbol{\mathcal{I}}) = (\mathcal{I}_x \,|\, x \in C \setminus H)$.
- 局部系统 $L_{C\setminus H}(\boldsymbol{\mathcal{I}})$ 是常值的。 ∎

我们设 $\Gamma := H^0(C \setminus H,\ L_{C\setminus H}(\boldsymbol{\mathcal{I}}))$。我们有 G 在 Γ 上的作用，通过拉回给出。我们有如下分解

$$(V,\nabla)_{|\widehat{C}} = \bigoplus_{\mathfrak{a}\in\Gamma} (\widehat{V}_{\mathfrak{a}}, \widehat{\nabla}_{\mathfrak{a}})$$

使得以下结论成立。

- 设 x 是 $C \setminus H$ 的任意一点。设 X_x 是 x 的一个邻域，并令 $C_x := X_x \cap C$。对于 $\mathfrak{a} \in \Gamma$，取 $\widetilde{\mathfrak{a}}_x \in \mathcal{O}_{X_x}(*C_x)$ 为 $\mathfrak{a}$ 的一个提升。那么， $\nabla_{\mathfrak{a}} - d\widetilde{\mathfrak{a}}_P \mathrm{id}_{\widehat{V}_{\mathfrak{a}}}$ 沿 C_P 正则奇异。
- 设 $x \in H \cap C$。设 X_x 是 x 的一个邻域，并且 $C_x := X_x \cap C$ 和 $H_x := X_x \cap H$。对于 $\mathfrak{a} \in \Gamma$，取 $\widetilde{\mathfrak{a}}_x \in \mathcal{O}_{X_x}(*(C_x \cup H_x))$ 为 $\mathfrak{a}$ 的一个提升。那么，存在一个格 $\widehat{V}^{(0}_{\mathfrak{a}} \subset \widehat{V}_{\mathfrak{a}})$ 使得

$$(\widehat{\nabla}_{\mathfrak{a}} - d\widetilde{\mathfrak{a}}_x \,\mathrm{id}_{\widehat{V}_{\mathfrak{a}}})(\widehat{V}^{(0)}_{\mathfrak{a}}) \subset \widehat{V}^{(0)}_{\mathfrak{a}} \otimes \Omega^1_{X_x}(\log C_x)(*H_x).$$

- 对于任意 $g \in G$，我们有 $g^*\widehat{V}_{\mathfrak{a}} = \widehat{V}_{g^*\mathfrak{a}}$。

设 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*(V)$ 为 (V,∇) 的非分歧良好的 Deligne-Malgrange 滤过向量丛。我们有滤过丛的分解

$$\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*(V)_{|\widehat{C}} = \bigoplus_{\mathfrak{a}\in\Gamma} \mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_* \widehat{V}_{\mathfrak{a}}.$$

我们令 $V^{\mathrm{DM}} = \mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_0(V)$ 与 $\widehat{V}^{\mathrm{DM}}_{\mathfrak{a}} = \mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_0(\widehat{V}_{\mathfrak{a}})$。我们在 C 上得到如下局部自由层

$${}^C\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_a(V^{\mathrm{DM}}) = \bigoplus_{\mathfrak{a}\in\Gamma} {}^C\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_a(\widehat{V}^{\mathrm{DM}}_{\mathfrak{a}}).$$

它配备有自同态 $\mathrm{Res}_C(\nabla)$。特征值 α 在 C 上为常值，且满足 $\mathrm{Re}(\alpha) = -a$。对每个 $\mathfrak{a} \in \Gamma$，令 $G(\mathfrak{a}) = \{g \in G \,|\, g^*\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}$。令 $\mathrm{Irr}(G(\mathfrak{a}))$ 表示 $G(\mathfrak{a})$ 的不可约表示的集合。每个带有 $\mathrm{Res}_C(\nabla)$ 的 ${}^C\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_a(\widehat{V}_{\mathrm{DM}\mathfrak{a}})$ 是 $G(\mathfrak{a})$-等变的。我们得到分解

$${}^C\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_a(\widehat{V}^{\mathrm{DM}}_{\mathfrak{a}}) = \bigoplus_{\chi\in\mathrm{Irr}(G(\mathfrak{a}))} {}^C\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_a(\widehat{V}^{\mathrm{DM}}_{\mathfrak{a}})_\chi,$$

其中对 $V_{\mathfrak{g},\chi}$ 的任意截面 v 以及 $g \in G(\mathfrak{a})$，有 $g^*v = \chi(g)v$。我们得到关于 $\mathrm{Res}_C(\nabla)$ 的广义特征分解

$${}^C\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_a(\widehat{V}^{\mathrm{DM}}_{\mathfrak{a}})_\chi = \bigoplus_{\mathrm{Re}(\alpha)=-a} {}^C\mathbb{E}_\alpha\, \mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_a(\widehat{V}^{\mathrm{DM}}_{\mathfrak{a}})_\chi.$$

幂零部分 $\mathrm{Res}_C(\nabla)$ 诱导权滤过 W。我们得到局部自由 $\mathcal{O}_C$-模

$${}^C\mathrm{Gr}^W_j\, \mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_a(\widehat{V}^{\mathrm{DM}}_{\mathfrak{a}})_\chi = \bigoplus_{\mathrm{Re}(\alpha)=-a} {}^C\mathrm{Gr}^W_j\, \mathbb{E}_\alpha\, \mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_a(\widehat{V}^{\mathrm{DM}}_{\mathfrak{a}})_\chi.$$

我们有诱导的滤过丛 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*\Big({}^C\mathrm{Gr}^W_j\, \mathbb{E}_\alpha\, \mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_a(\widehat{V}_{\mathrm{DM}\mathfrak{a}})_\chi(*H_C)\Big)$，定义在 (C, H_C) 上。

4.3.4 一个辅助函数

我们可以假设 $H^0(C,\mathcal{O}_C(-C+H'))$ 存在一个非零截面 τs，满足以下条件。

- $\tau_{|x}\neq 0$ 对任意 $x\in H'\cap C$，均属于 $\mathcal{O}_C(-C+H')_{|x}$。
- τ 只有简单零点。
- 存在 H''，使得：(i) $H''\cap C=\tau^{-1}(0)$，(ii) $H''\cap(H'\cup H)=\emptyset$，(iii) $C\cup H\cup H'\cup H''$ 是正规交叉。

令 $H'\cap C=H'_C$ 和 $H''\cap C=H''_C$。

引理 4.13 $\deg(N_CX)=|H'_C|-|H''_C|$。

证明 由 $N_C(X)\simeq\mathcal{O}_C(C)\simeq\mathcal{O}_C(H'_C-H''_C)$ 可得。 ∎

4.3.5 分次部分上的联络

令 $x\in C$。令 (X_x,z_1,z_2) 为 §4.2.2 中的一个全纯坐标邻域。在 X_x 上存在一个 G-不变截面 $\widetilde{\tau}_x$，它属于 $\mathcal{O}_X(-C+H'-H'')$，并诱导出 $\tau_{|C_x}$。对于任意 $\alpha\in\mathbb{C}$，我们得到 $(X_x,C_x\cup H'_x\cup H''_x)$ 上的 G-等变亚纯平坦丛：

$$\mathcal{L}_{x,\widetilde{\tau}_x}(\alpha)=\Big(\mathcal{O}_{X_x}(*(C_x\cup H'_x\cup H''_x)),d+\alpha\widetilde{\tau}_x^{-1}d\widetilde{\tau}_x\Big).$$

令 $\mathfrak{a}_x$ 为 X_x 上的一个 $G(\mathfrak{a})$-不变截面，它属于 $\mathcal{O}_X(*(C\cup H\cup H'))$，并且是 $\mathfrak{a}$ 的一个提升。我们得到 $(X_x,C_x\cup H_x\cup H'_x)$ 上的 $G(\mathfrak{a})$-等变亚纯平坦丛：

$$\mathcal{L}_x(\mathfrak{a}_x)=\Big(\mathcal{O}_{X_x}(*(C_x\cup H'_x\cup H_x)),d+d\mathfrak{a}_x\Big).$$

我们得到 $(X_x,C_x\cup H_x\cup H'_x\cup H''_x)$ 上的 $G(\mathfrak{a})$-等变亚纯平坦丛：

$$\big(V_x(-\alpha,-\mathfrak{a}_x),\nabla^{(-\alpha,-\mathfrak{a}_x)}\big):=(V,\nabla)_{|X_x}\otimes\mathcal{L}_{x,\widetilde{\tau}_x}(\alpha)^{-1}\otimes\mathcal{L}_x(\mathfrak{a}_x)^{-1}.$$

我们得到 $G(\mathfrak{a})$-等变滤过丛

$$\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*\big(V_x(-\alpha,-\mathfrak{a}_x)\big)=\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*(V)_{|X_x}\otimes\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*\big(\mathcal{L}_{x,\widetilde{\tau}_x}(\alpha)^{-1}\big)\otimes\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*\big(\mathcal{L}_x(\mathfrak{a}_x)^{-1}\big).$$

对于 $\mathfrak{b}\in\mathcal{I}_x$，我们得到

$$\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*\big(V_x(\widehat{-\alpha,-\mathfrak{a}_x})_{\mathfrak{b}-\mathfrak{a}}\big)=\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*\big(\widehat{V}_{\mathfrak{b}}\big)_{|X_x}\otimes\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*\big(\mathcal{L}_{x,\widetilde{\tau}_x}(\alpha)^{-1}\big)\otimes\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*\big(\mathcal{L}_x(\mathfrak{a}_x)^{-1}\big).$$

我们设 $H_{C,x}=C_x\cap H_x$，$H'_{C,x}=C_x\cap H'_x$，以及 $H''_{C,x}=C_x\cap H''_x$。我们设 $G(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\{g\in G(\mathfrak{a})\mid g^*\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\}$ 对于 $\chi\in\mathrm{Irr}(G(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))$，存在如下自然同构

$$\begin{aligned}{}^C\mathrm{Gr}^W_j\,\mathbb{E}_{\beta-\alpha}\,\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_{b+\mathrm{Re}(\alpha)}\Big(V_x(\widehat{-\alpha,-\mathfrak{a}_x})^{\mathrm{DM}}_{\mathfrak{b}-\mathfrak{a}}\Big)_\chi(*(H'_{C,x}\cup H_{C,x}\cup H''_{C,x}))\simeq\\ {}^C\mathrm{Gr}^W_j\,\mathbb{E}_\beta\,\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_b\Big(\widehat{V}^{\mathrm{DM}}_{\mathfrak{b}}\Big)_\chi(*(H'_x\cup H_x\cup H''_x)).\end{aligned}\tag{8}$$

注意到 $G(\mathfrak{a},\mathfrak{a})=G(\mathfrak{a})$。对于 $(\mathfrak{b},\beta)=(\mathfrak{a},\alpha)$，我们在 上有诱导联络 $\nabla(\mathfrak{a},\chi,\tau,\alpha,j)$

$${}^C\mathrm{Gr}^W_j\,\mathbb{E}_0\,\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_0\Big(V_x(\widehat{-\alpha,-\widehat{\mathfrak{a}}_x})^{\mathrm{DM}}_0\Big)_\chi(*(H'_x\cup H_x\cup H''_x))\simeq{}^C\mathrm{Gr}^W_j\,\mathbb{E}_\alpha\,\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_{-\mathrm{Re}(\alpha)}\Big(\widehat{V}^{\mathrm{DM}}_{\mathfrak{a}}\Big)_\chi(*(H'_x\cup H_x\cup H''_x)).$$

联络 $\nabla(\mathfrak{a},\chi,\tau,\alpha,j)$ 即它仅依赖于 $\mathfrak{a}_x$ 的选取，而不依赖于 $\mathfrak{a}$ 的选取。

对于 $\mathfrak{a}$ 和 $x\in C$，我们在局部自由 $\mathcal{O}_C(*(H'_C\cup H_C\cup H''_C))$-模上得到联络 $\nabla(\mathfrak{a},\chi,\tau,\alpha,j)$

$${}^C\mathrm{Gr}^W_j\,\mathbb{E}_\alpha\,\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_{-\mathrm{Re}(\alpha)}\Big(\widehat{V}^{\mathrm{DM}}_{\mathfrak{a}}\Big)_\chi(*(H'_C\cup H_C\cup H''_C)),$$

仅取决于 $\mathfrak{a}$ 和 τ 的选择。

4.3.6 特殊情形下的次数

引理4.14 我们有

$$\deg\Big(\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}\Big({}^{C}\mathrm{Gr}_j^{W}\,\mathbb{E}_\alpha\,\mathrm{Gr}_{-\mathrm{Re}(\alpha)}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}\big(\widehat{V}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{DM}}\big)_\chi(*(H'_C\cup H_C\cup H''_C))\Big)\Big)=$$
$$-(|H'_C|-|H''_C|)\times\mathrm{Re}(\alpha)\times\mathrm{rank}\,{}^{C}\mathrm{Gr}_j^{W}\,\mathbb{E}_\alpha\,\mathrm{Gr}_{-\mathrm{Re}(\alpha)}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}\big(\widehat{V}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{DM}}\big)_\chi.\quad(9)$$

证明 我们得到关于联络 $\nabla(\mathfrak{a},\chi,\tau,\alpha,j)$ 的滤过丛 $\mathcal{P}'^{\mathrm{DM}}_{*}\Big({}^{C}\mathrm{Gr}_j^{W}\,\mathbb{E}_\alpha\,\mathrm{Gr}_{-\mathrm{Re}(\alpha)}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}\big(\widehat{V}_{\mathrm{DM}_{\mathfrak{a}}}\big)_\chi(*(H'_C\cup H_C\cup H''_C))\Big)$。根据 Deligne-Malgrange 滤过的一般性质，我们有

$$\deg\Big(\mathcal{P}'^{\mathrm{DM}}_{*}\Big({}^{C}\mathrm{Gr}_j^{W}\,\mathbb{E}_\alpha\,\mathrm{Gr}_{-\mathrm{Re}(\alpha)}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}\big(\widehat{V}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{DM}}\big)_\chi(*(H'_C\cup H_C\cup H''_C))\Big)\Big)=0.\quad(10)$$

在 H_C 附近，我们有

$$\mathcal{P}'^{\mathrm{DM}}_{*}\Big({}^{C}\mathrm{Gr}_j^{W}\,\mathbb{E}_\alpha\,\mathrm{Gr}_{-\mathrm{Re}(\alpha)}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}\big(\widehat{V}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{DM}}\big)_\chi(*(H'_C\cup H_C\cup H''_C))\Big)=\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}\Big({}^{C}\mathrm{Gr}_j^{W}\,\mathbb{E}_\alpha\,\mathrm{Gr}_{-\mathrm{Re}(\alpha)}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}\big(\widehat{V}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{DM}}\big)_\chi(*(H'_C\cup H_C\cup H''_C))\Big).$$

在 $P\in H'_C$ 附近，我们有

$$\mathcal{P}'^{\mathrm{DM}}_{-\mathrm{Re}(\alpha)}\Big({}^{C}\mathrm{Gr}_j^{W}\,\mathbb{E}_\alpha\,\mathrm{Gr}_{-\mathrm{Re}(\alpha)}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}\big(\widehat{V}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{DM}}\big)_\chi(*(H'_C\cup H_C\cup H''_C))\Big)={}^{C}\mathrm{Gr}_j^{W}\,\mathbb{E}_\alpha\,\mathrm{Gr}_{-\mathrm{Re}(\alpha)}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}\big(\widehat{V}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{DM}}\big)_\chi(*(H'_C\cup H_C\cup H''_C)),$$

$$\mathcal{P}'^{\mathrm{DM}}_{<-\mathrm{Re}(\alpha)}\Big({}^{C}\mathrm{Gr}_j^{W}\,\mathbb{E}_\alpha\,\mathrm{Gr}_{-\mathrm{Re}(\alpha)}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}\big(\widehat{V}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{DM}}\big)_\chi(*(H'_C\cup H_C\cup H''_C))\Big)=0.$$

在 $P\in H''_C$ 附近，我们有

$$\mathcal{P}'^{\mathrm{DM}}_{\mathrm{Re}(\alpha)}\Big({}^{C}\mathrm{Gr}_j^{W}\,\mathbb{E}_\alpha\,\mathrm{Gr}_{-\mathrm{Re}(\alpha)}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}\big(\widehat{V}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{DM}}\big)_\chi(*(H'_C\cup H_C\cup H''_C))\Big)={}^{C}\mathrm{Gr}_j^{W}\,\mathbb{E}_\alpha\,\mathrm{Gr}_{-\mathrm{Re}(\alpha)}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}\big(\widehat{V}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{DM}}\big)_\chi(*(H'_C\cup H_C\cup H''_C)),$$

$$\mathcal{P}'^{\mathrm{DM}}_{<\mathrm{Re}(\alpha)}\Big({}^{C}\mathrm{Gr}_j^{W}\,\mathbb{E}_\alpha\,\mathrm{Gr}_{-\mathrm{Re}(\alpha)}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}\big(\widehat{V}_{\mathfrak{a}}^{\mathrm{DM}}\big)_\chi(*(H'_C\cup H_C\cup H''_C))\Big)=0.$$

于是，由（10）得到（9）。∎

推论4.15 若满足条件4.12 ，则等式(7) 成立。

证明 在 ${}^{C}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V)$上，$\mathrm{Res}_C(\nabla)$的任意特征值 α 均满足 $\mathrm{Re}(\alpha)=-a$。此外，我们还有 $\deg(N_CX)=|H'_C|-|H''_C|$。对$(\mathfrak{a},\alpha,j)$求和，即可由(9)得到(7)。∎

4.3.7 命题 4.10 的证明

设$\boldsymbol{\mathcal{I}}$ 为一个分歧不规则值的良系统。我们采用命题 4.2 和引理4.3中的记号。作为(V,∇)的拉回，我们在$(X^{(j)},C^{(j)}\cup H^{(j)})$ $(j=1,2,3,4)$上得到良好亚纯平坦丛$(V_{(j)}\nabla)$。注意，$(V_{(4)}\nabla)$和$(V_{(3)}\nabla)$自然地是 G_3-等变的。由于$(V_{(4)}\nabla)$满足条件 4.12，对于任意 $a\in\mathbb{R}$ 和 $\chi\in\mathrm{Irr}(G_3)$，我们得到以下等式：

$$\deg\Big(\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}\big({}^{C^{(4)}}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{(4)})_\chi\big)\Big)=a\deg(N_{C^{(4)}}X^{(4)})\,\mathrm{rank}\,{}^{C^{(4)}}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{(4)})_\chi.$$

我们得到

$$\deg\Big(\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}\big({}^{C^{(3)}}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{(3)})_\chi\big)\Big)=\frac{1}{|G_4|}\deg\Big(\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}\big({}^{C^{(4)}}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{(4)})_\chi\big)\Big)$$
$$=a\frac{\deg(N_{C^{(4)}}X^{(4)})}{|G_4|}\,\mathrm{rank}\,{}^{C^{(4)}}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{(4)})_\chi=a\deg(N_{C^{(3)}}X^{(3)})\,\mathrm{rank}\,{}^{C^{(3)}}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{(3)})_\chi.\quad(11)$$

令 1_{G_3} 表示平凡的 G_3的表示。令 m_3 表示 φ_3 沿 $C^{(3)}$的分歧指数。我们有

$$\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}\big({}^{C^{(3)}}\mathrm{Gr}_{m_3a}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{(3)})_{1_{G_3}}\big)\simeq\varphi_{3|C^{(3)}}^{*}\Big(\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}\big({}^{C^{(2)}}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{(2)})\big)\Big).$$

注意，$\varphi_{3|C^{(3)}}=\mathrm{id}_{C^{(3)}}$。我们得到

$$\begin{aligned}\deg\Big(\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}\big({}^{C^{(2)}}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{(2)})\big)\Big)&=\deg\Big(\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}\big({}^{C^{(3)}}\mathrm{Gr}_{m_3a}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{(3)})\big)_{1_{G_3}}\Big)\\&=am_3\deg(N_{C^{(3)}}X^{(3)})\,\mathrm{rank}\,{}^{C^{(3)}}\mathrm{Gr}_{m_3a}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{(3)})=a\deg(N_{C^{(2)}}X^{(2)})\,\mathrm{rank}\,{}^{C^{(2)}}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{(2)}).\quad(12)\end{aligned}$$

令 G_2 表示 φ_2 的伽罗瓦群。我们有

$$\begin{aligned}\deg\Big(\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}\big({}^{C^{(1)}}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{(1)})\big)\Big)&=\frac{1}{|G_2|}\deg\Big(\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}\big({}^{C^{(2)}}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{(2)})\big)\Big)\\&=a\frac{\deg(N_{C^{(2)}}X^{(2)})}{|G_2|}\,\mathrm{rank}\,{}^{C^{(2)}}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{(2)})=a\deg(N_{C^{(1)}}X^{(1)})\,\mathrm{rank}\,{}^{C^{(1)}}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{(1)}).\quad(13)\end{aligned}$$

我们有

$$\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}\big({}^{C^{(1)}}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{(1)})\big)\simeq\varphi_{1|C}^*\Big(\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}\big({}^{C}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V)\big)\Big).$$

我们还有 $N_{C^{(1)}}X^{(1)}\simeq\varphi_{1|C^{(1)}}^*\Big(N_CX\Big)$。令 m_1 为 φ_1 的次数。利用下面的引理 4.16，我们得到

$$\begin{aligned}\deg\Big(\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}\big({}^{C}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V)\big)\Big)&=\frac{1}{m_1}\deg\Big(\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}\big({}^{C^{(1)}}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{(1)})\big)\Big)\\&=a\frac{\deg(N_{C^{(1)}}X^{(1)})}{m_1}\,\mathrm{rank}\,{}^{C^{(1)}}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{(1)})=a\deg(N_CX)\,\mathrm{rank}\,{}^{C}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V).\quad(14)\end{aligned}$$

因此，我们得到命题 4.10。∎

引理 4.16 设 $\varphi\colon\ C_1\to C_2$ 是紧黎曼曲面之间的满射态射。设 $D_2\subset C_2$ 是一个有限子集。我们定义 $D_1:=\varphi^{-1}(D_2)$。设 $\mathcal{P}_*V$ 是 (C_2,D_2) 上的一个滤过丛。令 $d(\varphi)$ 表示 φ 的次数。那么，我们有 $\deg(\varphi^*(\mathcal{P}_*V))=d(\varphi)\cdot\deg(\mathcal{P}_*V)$。

证明 设 U_2 是 C_2 中 D_2 的一个邻域。设 h 是 $V_{|C_2\setminus D_2}$ 的一个埃尔米特度量，使得 (i) h 的陈联络在 $U_2\setminus D_2$ 上是平坦的；(ii) h 适配于 $\mathcal{P}_*V$。令 $R(h)$ 表示 h 的陈联络的曲率。众所周知，我们有

$$\deg(\mathcal{P}_*V)=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{C_2\setminus D_2}\mathrm{Tr}\,R(h).$$

我们有 $\varphi^*(V)_{|C_1\setminus D_1}$ 的诱导度量 $\varphi^{-1}(h)$。因此得到

$$\deg(\varphi^*\mathcal{P}_*V)=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{C_1\setminus D_1}\mathrm{Tr}\,R(\varphi^*h)=d(\varphi)\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{C_2\setminus D_2}\mathrm{Tr}\,R(\varphi^*h)=d(\varphi)\deg(\mathcal{P}_*V).$$

∎

4.3.8 命题 4.11 的证明

我们设定 $X'=X/G$ 和 $H'=H/G$。令 $\pi\colon X\to X'$ 表示商映射。我们设定 $C'=\pi(C)\subset X'$。存在一个良好亚纯平坦丛（V', ∇），定义在（X', H'）上，使得 $\pi^*(V',\ \nabla)\simeq(V,\ \nabla)$。我们有 $\pi^*(\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}V')\simeq\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}(V)$。由命题 4.10，得到

$$\deg\Big(\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}\big({}^{C'}\mathrm{Gr}_b^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V')\big)\Big)=b\cdot\deg(N_{C'}X')\cdot\mathrm{rank}\,{}^{C'}\mathrm{Gr}_b^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V').$$

对于正整数 m，我们将 $G=\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 视为相同对象。令 $\chi\colon G\to\mathbb{C}^*$ 为满足以下条件的特征标

$$\chi(1)=\exp(2\pi\sqrt{-1}(\ell/m))$$

其中 $0\leq\ell<m$。令 $a\in\mathbb{R}$。我们设 $b=(a-\ell)/m$。存在一个自然同构

$$\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}\big({}^{C'}\mathrm{Gr}_b^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V')\big)\simeq\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}\big({}^{C}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V)\big)_\chi\otimes N_C(X)^{-\ell}.$$

注意，$\deg(N_{C'}X') = m\deg(N_CX)$。我们得到

$$\begin{aligned}\deg\Big(\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}\big({}^{C}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V)\big)\Big) &= \deg\Big(\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}\big({}^{C'}\mathrm{Gr}_b^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V')\big)\Big) + \ell\deg(N_CX)\\ &= b\cdot\deg(N_{C'}X')\cdot\operatorname{rank}{}^{C'}\mathrm{Gr}_b^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V') + \ell\deg(N_CX)\operatorname{rank}{}^{C'}\mathrm{Gr}_b^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V')\\ &= a\deg(N_CX)\operatorname{rank}{}^{C}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V)_{\chi}. \quad (15)\end{aligned}$$

因此，我们得到命题 4.11。 ∎

4.4 命题 4.1 的证明

注意，存在 $0 \le \alpha_i < \text{秩}(V)$ 使得

$$c_1(\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}V) = c_1(\mathcal{P}_0^{\mathrm{DM}}V) + \sum_{i\in\Lambda}\alpha_i[H_i].$$

由于 $c_1(\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}V) = 0$，我们得到第一个结论。根据命题 4.10，我们有

$$\deg_{H_i}\Big(\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}\big({}^{i}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{\mathrm{DM}})\big)\Big) = a\cdot\deg(N_{H_i}X)\operatorname{rank}{}^{i}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{\mathrm{DM}}) = a\cdot[H_i]^2\operatorname{rank}{}^{i}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(V^{\mathrm{DM}}).$$

因此，我们得到第二个结论。由于 $\int \mathrm{ch}_2(\mathcal{P}_*^{\mathrm{DM}}V) = 0$，我们得到

$$\begin{aligned}\int_X \mathrm{ch}_2(\mathcal{P}_0^{\mathrm{DM}}V) - \sum_{i\in\Lambda}\sum_{-1<a\le 0} a\deg_{H_i}\big({}^{i}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(\mathcal{P}_0^{\mathrm{DM}}V)\big) =\\ -\frac{1}{2}\sum_{i\in\Lambda}\sum_{-1<a\le 0} a^2\operatorname{rank}\big({}^{i}\mathrm{Gr}_a^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}(\mathcal{P}_0^{\mathrm{DM}}V)\big)\int_X[H_i]^2\\ -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i\ne j\\ P\in H_i\cap H_j}}\sum_{-1<a_i,a_j\le 0} a_i\cdot a_j\cdot\operatorname{rank}{}^{P}\mathrm{Gr}^{\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}}_{(a_i,a_j)}\big(\mathcal{P}_0^{\mathrm{DM}}(V)\big). \quad (16)\end{aligned}$$

我们得到第三个结论。 ∎

5 代数亚纯平坦丛

5.1 良好亚纯平坦丛

设 $\mathbb{K}$ 为特征零代数闭域。设 X 为任意 n维光滑 $\mathbb{K}$簇。设 H 为 X的简单正规交叉超曲面。令 $\mathcal{O}_{X,x}$ 表示局部环 $\mathcal{O}_{X,x}$ 关于极大理想 $\mathfrak{m}_x$的完备化。存在 $\mathfrak{m}_x$的一个参数系 $(x_1,\dots,x_n)$，使得 H在 x处的理想由$\prod_{i=1}^{\ell}x_i$生成。对于任意正整数 e，置 $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^{(e)} = \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}[x_i^{1/e}\mid i=1,\dots,\ell]$。对于任意$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$-模$\mathcal{F}$，置 $\mathcal{F}(*H) = \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_{X,x}}\mathcal{O}_X(*H)_x$ 以及 $\varphi_e^*(\mathcal{F}) = \mathcal{F}\otimes\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}^{(e)}$。对于任意自由$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}(*H)$-模 $\mathcal{F}$， $\mathcal{F}$的格是指一个自由$\mathcal{O}_{X,x}$-子模 $\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}$，满足 $\mathcal{F}_0(*H) = \mathcal{F}$。

设 V是一个有限秩的自由 $\mathcal{O}_X(*H)$-模，带有可积联络 $\nabla\colon\ V\to V\otimes\Omega^1_X$。我们令$V_{|\widehat{x}} = V_x\otimes\mathcal{O}_{X,x}$，其配备诱导可积联络 ∇。任意 $\varphi_e^*(V_{|\widehat{x}})$均配备诱导可积联络 ∇。我们回顾一些定义。

定义 5.1

- (V,∇) 在 x 处称为正则，如果存在自由$\mathcal{O}_{X,x}$-模 $V_0\subset V$，使得*(i)* $V_0(*H) = V$,$\nabla(V_0)\subset V_0\otimes\Omega^1(\log H)$*(ii)*

- (V,∇) 在 x 处称为非分歧良好，如果存在不规则值良好集合$\mathcal{I}\subset\mathcal{O}_{X,x}(*H)/\mathcal{O}_{X,x}$ 以及一个分解

$$(V,\nabla) = \bigoplus_{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}}(V_{\mathfrak{a}},\nabla_{\mathfrak{a}}) \quad (17)$$

使得 $\nabla_{\mathfrak{a}} - d\widetilde{\mathfrak{a}}\mathrm{id}_{V_{\mathfrak{a}}}$ 是正则的。这里，$\widetilde{\mathfrak{a}}\in\mathcal{O}_{X,x}$ 表示 $\mathfrak{a}$的提升。我们允许 (17)中的 $V_{\mathfrak{a}} = 0$。集合$\mathcal{I}(V,\nabla,x) = \{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}\mid V_{\mathfrak{a}}\ne 0\}$ 定义良好。

若存在 $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $\varphi_e^*(V,\nabla)$ 是非分歧良好的，则称 $\bullet(V,\nabla)$ 在 x 处良好。我们得到集合 $\mathcal{I}(V,\nabla,x) \subset \widehat{\mathcal{O}}(e)_{X,x}(*H)/\widehat{\mathcal{O}}(e)_{X,x}$，它在扩张 $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \subset \widehat{\mathcal{O}}(H,e)_{X,x}$ 的伽罗瓦群作用下保持不变。

我们称 (V,∇) 在 (X,H) 上良好（分别称为正则、非分歧良好），如果 $(V,\nabla)|^{\widehat{x}}$ 在任意 $x \in H$ 处都良好（分别为正则、非分歧良好）。 ∎

5.1.1 域的扩张

设 X 是一个带有正规交叉超曲面 H 的光滑 $\mathbb{K}$-簇。设 $\mathbb{K}'$ 是一个包含 $\mathbb{K}$ 的代数闭域。令 $(X_{\mathbb{K}'},H_{\mathbb{K}'}) = (X,H) \times_{\mathbb{K}} \mathbb{K}'$。设 (V,∇) 是 (X,H) 上的亚纯平坦丛。令 $(V_{\mathbb{K}'},\nabla)$ 表示在 $(X_{\mathbb{K}'},H_{\mathbb{K}'})$ 上诱导的亚纯平坦丛。

命题 5.2 (V,∇) 良好，当且仅当 $(V_{\mathbb{K}'},\nabla)$ 良好。

证明 假设 $(V_{\mathbb{K}'},\nabla)$ 良好。设 x 是 X 的任意闭点。其在 $X_{\mathbb{K}'}$ 中诱导的闭点也记为 $\widehat{\ \ \ }x$。注意，$(V_{\mathbb{K}'|\widehat{x}},\nabla)$ 是由 $(V_{|\widehat{x}},\nabla)$ 以及扩张 $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X_{\mathbb{K}'},x}$ 诱导的。根据 [14, 引理 1.6.5、定义 3.2.1、定理 4.4.2], $(V_{|\widehat{x}},\nabla)$ 良好，当且仅当 $(V_{\mathbb{K}'|\widehat{x}},\nabla)$ 良好。因此，(V,∇) 良好。

让我们研究逆命题。令 $H = \bigcup_{i\in\Lambda} H_i$ 为不可约分解。对于任意非空的 $I \subset \Lambda$，我们设 $H_I = \bigcap_{j\in I} H_j$ 和 $H_I^\circ = H_I \setminus \bigcup_{j\in\Lambda\setminus I} H_j$。令 y 为 $(H_{\mathbb{K}'})_I^\circ$ 的一个闭点。令 η 表示 H_I° 中由 y 经自然态射 $X_{\mathbb{K}'} \to X$ 的像得到的点。存在 X 中 η 的一个仿射邻域 U，其上有截面 x_1、……、$x_m \in \mathcal{O}_X(U)$，使得 $H \cap U$ 的理想由 $\prod_{i=1}^m x_i$ 生成。对于任意 $e \in \mathbb{Z}_{>0}$，令 $U(e)$ 表示与 $\mathcal{O}_X(U)[x_1^{1/e},\dots,x_m^{1/e}]$ 相关联的仿射 $\mathbb{K}$ 簇，其自然态射为 $\varphi_e\colon U(e) \to U$。存在 $e \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得 φ_e^*V 在 $\varphi_e^{-1}(H)$ 的任意点处均非分歧良好。令 R 表示与 $\varphi_e^{-1}(U \cap H_I)$ 对应的环。我们设 $z_i = x_i^{1/e}$（$i = 1$、……、m）。我们由 $\varphi_e^*(V,\nabla)$ 得到局部自由 $R[\![z_1,\dots,z_m]\!][z_1^{-1},\dots,z_m^{-1}]$-模 V_I 及其可积联络。根据命题 4.4.1] 以及定义 5.1.1],之后的一条注记，存在一个有限 étale 扩张 $R \subset R'$，使得以下结论成立。

- $\varphi_e^{-1}(y)$ 包含在 $\mathrm{Spec}(R') \to \mathrm{Spec}(R)$ 的像中。
- 存在一个不规则值良好集合 $\mathcal{I} \subset R'[\![z_1,\dots,z_m]\!][z_1^{-1},\dots,z_m^{-1}]/R'[\![z_1,\dots,z_m]\!]$ 以及一个良分解

$$V_I \otimes_{R[\![z_1,\dots,z_m]\!]} R'[\![z_1,\dots,z_m]\!] = \bigoplus_{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}} (V_{I,\mathfrak{a}},\nabla_{\mathfrak{a}}) \tag{18}$$

使得 $\nabla_{\mathfrak{a}} - d\widetilde{\mathfrak{a}}$ 是正则奇异的。

我们由（18）得到（$V_{\mathbb{K}'|\widehat{y}}$，$\nabla$）的分歧良分解。 ∎

5.1.2 限制

设 X 是一个光滑复 $\mathbb{K}$ 簇，且 $\dim X \geq 3$。设 H 是一个简单正规交叉超曲面，其不可约分解为 $H = \bigcup_{i\in\Lambda} H_i$。设 $\Sigma \subset T^*(X \setminus H)$ 在（X，H）上良好。设 $\boldsymbol{\mathcal{I}} = \boldsymbol{\mathcal{I}}(\Sigma)$ 是（X，H）上的分歧不规则值的好系统。

设 Z 是 X 的一个充分光滑超曲面，使得 (i) $Z \subsetneq H$，(ii) $Z \cup H$ 也是简单正规交叉超曲面。设 $\boldsymbol{\mathcal{I}}_Z$ 是由 $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ 在 $(Z,\ Z\cap H)$ 上诱导的分歧不规则值的好系统。通过限制，我们得到函子

$$\mathrm{Mero}(X,H,\boldsymbol{\mathcal{I}}) \to \mathrm{Mero}(Z,Z\cap H,\boldsymbol{\mathcal{I}}_Z), \tag{19}$$

由命题 5.2 和定理 3.23，我们得到以下命题。

定理 5.3 限制函子 (19) 是一个等价。 ∎

5.2 良格与留数的特征值

5.2.1 非分歧良格

设 X 是一个光滑射影 $\mathbb{K}$-簇，其上有一个简单正规交叉超曲面 H，其不可约分解为 $H = \bigcup_{k\in\Lambda} H_k$。设 $(V,\ \nabla)$ 是定义在 $(X,\ H)$ 上的非分歧良好亚纯平坦丛。对于任意 $x \in H$，存在一个分解

$$(V_{|\widehat{x}},\nabla) = \bigoplus_{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}(V,\nabla,x)} (V_{\widehat{x},\mathfrak{a}},\nabla_{\mathfrak{a}})$$

使得 $\nabla_{\mathfrak{a}} - d\widetilde{\mathfrak{a}}$ 正则。

令 E 为 $(V,\ \nabla)$ 的一个格，即 E 是 V 的一个局部自由 $\mathcal{O}_X$-子模，使得 $E(*H) = V$。我们得到 $E_{|\widehat{x}} \subset V_{|\widehat{x}}$。

定义 5.4 我们称 E 在 x 处非分歧良好，若

$$E_{|\widehat{x}} = \bigoplus_{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}(V,\nabla,x)} (E_{|\widehat{x}} \cap V_{\widehat{x},\mathfrak{a}}), \tag{20}$$

并且 $\nabla_{\mathfrak{a}} - d\mathfrak{a}$ 关于 $E_{|\widehat{x}} \cap V_{\widehat{x},\ \mathfrak{a}}$ 是对数的。若 E 在任意 $x \in H$ 处都非分歧良好，则称其在 (X, H) 上非分歧良好。 ∎

5.2.2 良格

设 (V,∇) 是 (X,H) 上的一个良好亚纯平坦丛。设 $x \in H$。令 $U = \mathrm{Spec}(R)$ 为 x 的一个仿射开邻域，并带有一个 étale 坐标系 $(x_1, \ldots, x_n)$，使得 $U \cap H = \bigcup_{i=1}^{\ell}\{x_i = 0\}$。对于 $e \in \mathbb{Z}_{>0}$,$R^{(e)} = R[x_1^{1/e}, \ldots, x_\ell^{1/e}]$ 和 $U^{(e)} = \mathrm{Spec}(R^{(e)})$。令 $H_U^{(e)}$ 表示 H 在 $U^{(e)} \to X$ 下的逆像。将 (V,∇) 拉回，得到 $(V^{(e)}{}_U, \nabla)$，这是 $(U^{(e)}, H_U^{(e)})$ 上的非分歧良好亚纯平坦丛。令 $\mathrm{Gal}_U^{(H,e)}$ 表示分歧覆盖 $U^{(e)} \to U$ 的伽罗瓦群。

定义 5.5 设 E 是 V 的一个格。若存在如上所述的 x 的一个 *étale* 坐标邻域$(U, x_1, \ldots, x_n)$ 以及一个 $\mathrm{Gal}_U^{(H,e)}$-等变非分歧良格 $E_U^{(e)}$，它属于$(V^{(e)}{}_U, \nabla)$，且 $E_{|U}$ 是 $E_U^{(e)}$ 的下降，则称 E 在 x 处良好。若 E 在任意 $x \in H$ 处良好，则称其在 (X, H) 上良好。 ∎

5.2.3 正则部分与不规则部分的分解

设 (V,∇) 是 (X,H) 上的一个良好亚纯平坦丛。设 E 是一个良格。设 $x \in H_k$。我们有自然映射

$$\rho_k : \mathcal{I}(V,\nabla,x) \to \widehat{\mathcal{O}}_X^{(H,e)}(*H)_x \big/ \widehat{\mathcal{O}}_X^{(H,e)}(*H_{\neq k})_x$$

设 $\mathcal{I}(V,\nabla,x)_{k,0} = \rho_k^{-1}(0)$。我们定义

$$(E_{|\widehat{x}})^{\mathrm{reg},k} = \bigoplus_{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}(V,\nabla,x)_{k,0}} (E_{|\widehat{x}} \cap V^{(H,e)}_{\widehat{x},\mathfrak{a}}), \qquad (E_{|\widehat{x}})^{\mathrm{irreg},k} = \bigoplus_{\mathfrak{a}\notin\mathcal{I}(V,\nabla,x)_{k,0}} (E_{|\widehat{x}} \cap V^{(H,e)}_{\widehat{x},\mathfrak{a}}).$$

我们得到分解

$$E_{|\widehat{x}} = (E_{|\widehat{x}})^{\mathrm{reg},k} \oplus (E_{|\widehat{x}})^{\mathrm{irreg},k}. \tag{21}$$

容易验证如下结论

$$\nabla(E_{|\widehat{x}})^{\mathrm{reg},k} \subset (E_{|\widehat{x}})^{\mathrm{reg},k} \otimes \Big(\Omega^1(\log H_k) + \Omega^1(*H_{\neq k})\Big), \qquad \nabla(E_{|\widehat{x}})^{\mathrm{irreg},k} \subset (E_{|\widehat{x}})^{\mathrm{irreg},k} \otimes \Omega^1(*H). \tag{22}$$

令 $E_{|\widehat{H}_k}$ 表示 E 沿着 H_k 的完备化，即 $E_{|\widehat{H}_k} = \varprojlim E/E(-mH_k)$。

命题 5.6 存在分解

$$E_{|\widehat{H}_k} = E^{\mathrm{reg}}_{\widehat{H}_k} \oplus E^{\mathrm{irreg}}_{\widehat{H}_k} \tag{23}$$

由此可得，对任意 $x \in H_k$，都有 (21)。此外，我们有 $\nabla(E^{\mathrm{reg}}_{\widehat{H}_k}) \subset E^{\mathrm{reg}}_{\widehat{H}_k} \otimes \Big(\Omega^1_X(\log H_k) + \Omega^1_X(*H_{\neq k})\Big)$ 以及$\nabla(E^{\mathrm{irreg}}_{\widehat{H}_k}) \subset E^{\mathrm{irreg}}_{\widehat{H}_k} \otimes \Omega^1_X(*H)$。

第二个断言由 (22) 得出。我们将在 §5.2.4 中研究无分歧良好情形下的第一个断言，并在 §5.2.5 中研究一般情形，

5.2.4 非分歧情形下命题 5.6 的证明

设 $(V,\ \nabla)$ 和 E 均为非分歧良好。设 $x\in H_k$。令 $U\subset X$ 为 x 的一个扎里斯基开邻域，带有一个 étale 坐标系 $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$，使得 H 在 x 处的理想由 $\prod_{i=1}^{\ell}x_i$ 生成，且 H_k 在 x 处的理想由 x_1 生成。令 $H_{U,\ k}=U\cap H_k$。我们还假设 $E_{|U}$ 是 $\mathcal{O}_U$-自由的。

我们设定 $\mathcal{A}^{(0)}=H^0(H_{U,k},\mathcal{O}_{H_k}(*\partial H_k))$，其中 $\partial H_k=H_k\cap H_{\neq k}$。我们设定

$$\mathcal{R}^{(0)}=\varprojlim\mathcal{A}^{(0)}[x_1]/x_1^m\mathcal{A}^{(0)}[x_1]\simeq\varprojlim\mathcal{O}_X(*H_{\neq k})(U)/x_1^m\mathcal{O}_X^h(*H_{\neq k})(U).$$

我们还设定 $\mathcal{M}^{(0)}=\mathcal{R}^{(0)}\otimes_{\mathcal{O}(U)}E(U)$。它带有由 $\nabla:\ \mathcal{M}^{(0)}\to\mathcal{M}^{(0)}\otimes\Omega^1_X(*H)$ 诱导的可积联络。存在一个正整数 N，使得 $x_1^{N+1}\nabla_{x_1}\mathcal{M}^{(0)}\subset\mathcal{M}^{(0)}$。我们得到由 $x_1^{N+1}\nabla_{x_1}$ 诱导的 $\mathbb{C}$-线性映射 $G^{(0)}\colon\ \mathcal{M}^{(0)}\to\mathcal{M}^{(0)}$，满足对于 $f\in\mathcal{R}^{(0)}$ 和 $s\in\mathcal{M}^{(0)}$，有 $G^{(0)}(fs)=x_1^{N+1}\partial_{x_1}(f)s+fG^{(0)}(s)$。它诱导出 $\mathcal{M}^{(0)}/x_1\mathcal{M}^{(0)}$ 的 $\mathcal{A}^{(0)}$-自同态 $F_{(0)}$。

引理 5.7 存在一个有限生成伽罗瓦扩张 $\mathcal{A}^{(0)}\subset\mathcal{A}^{(1)}$、一个有限子集 $\mathcal{J}_1\subset\mathcal{A}^{(1)}$ 以及分解

$$\mathcal{A}^{(1)}\otimes_{\mathcal{A}^{(0)}}(\mathcal{M}^{(0)}/x_1\mathcal{M}^{(0)})=\bigoplus\left(\mathcal{A}^{(1)}\otimes_{\mathcal{A}^{(0)}}(\mathcal{M}^{(0)}/x_1\mathcal{M}^{(0)})\right)_{\mathfrak{c}}\tag{24}$$

使得 *(i)* $F^{(0)}-\mathfrak{c}=0$ 在 $\left(\mathcal{A}^{(1)}\otimes_{\mathcal{A}^{(0)}}(\mathcal{M}^{(0)}/x_1\mathcal{M}^{(0)})\right)_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{c}\in\mathcal{J}_1}$ 上，*(ii)* 对任意两个不同的元素 $\mathfrak{c}_1$、$\mathfrak{c}_2\in\mathcal{J}_1$，差 $\mathfrak{c}_1-\mathfrak{c}_2$ 在 $\mathcal{A}^{(1)}$中可逆，*(iii)* 存在一个开邻域 $x\in U'\subset H_k$，使得 $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}^{(1)})\times_U U'\to\mathrm{Spec}(\mathcal{A}^{(0)})\times_U U'$ 是平展的。

证明 我们有 $E_{|\widehat{x}}$的分解 (20)。我们有映射 $\nu:\mathcal{I}\to\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}(*H_{\neq k})/x_1\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}(*H_{\neq k})=\widehat{\mathcal{O}}_{H_k,x}(*\partial H_k)$，这是通过考虑 $\mathfrak{a}\mapsto x_1^{N+1}\partial_{x_1}\mathfrak{a}$得到的。令 $\widehat{\mathcal{J}}_1$ 表示 ν的像。对于 $\mathfrak{c}\in\widehat{\mathcal{J}}_1$，我们令 $E_{\widehat{x},\mathfrak{c}}=\bigoplus_{\nu(\mathfrak{a})=\mathfrak{c}}(E_{|\widehat{x}}\cap V_{\widehat{x},\mathfrak{a}})$。我们有分解 $E_{|\widehat{x}}=\bigoplus_{\mathfrak{c}\in\widehat{\mathcal{J}}_1}E_{\widehat{x},\mathfrak{c}}$，且 $x_1^{N+1}\nabla_{x_1}E_{\widehat{x},\mathfrak{c}}\subset E_{\widehat{x},\mathfrak{c}}\otimes\mathcal{O}_X(*H_{\neq k})_x$。对于两个不同的$\mathfrak{c}_1$、$\mathfrak{c}_2\in\widehat{\mathcal{J}}_1$，$\mathfrak{c}_1-\mathfrak{c}_2$可逆。令 $\widehat{F}$ (0) 为 $(E_{|\widehat{x}}/x_1E_{|\widehat{x}})\otimes\mathcal{O}_{H_k}(*\partial H_k)_x$的自同态。我们有分解

$$(E_{|\widehat{x}}/x_1E_{|\widehat{x}})\otimes\mathcal{O}_{H_k}(*\partial H_k)_x=\bigoplus_{\mathfrak{c}\in\widehat{\mathcal{J}}_1}(E_{\widehat{x},\mathfrak{c}}/x_1)\otimes\mathcal{O}_{H_k}(*\partial H_k)_x,\tag{25}$$

以及 $\widehat{F}(0)-\mathfrak{c}=0$在 $(E_{\widehat{x},\mathfrak{c}}/x_1)\otimes\mathcal{O}_{H_k}(*\partial H_k)_x$ 上。

令 $P^{(0)}$ 表示 $F_{(0)}$ 的特征多项式。我们固定一个包含 $\mathcal{A}^{(0)}$ 的代数闭域。令 $\mathcal{S}p(P^{(0)})$ 表示 $P_{(0)}$ 的解集。令 $\mathcal{A}^{(0)}\subset\mathcal{A}^{(1)}$ 表示一个有限生成伽罗瓦扩张，使得 (i) $\mathcal{S}p(P^{(0)})\subset\mathcal{A}^{(1)}$，(ii) 对任意两个不同的元素 $\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2\in\mathcal{S}p(P_{(0)})$，$\mathfrak{c}_1-\mathfrak{c}_2\in\mathcal{A}^{(1)}$。我们得到分解 (24)，它在 $F^{(0)}$ 作用下保持不变，并且 $F_{(0)}-\mathfrak{c}$ 在 $\left(\mathcal{A}^{(1)}\otimes_{\mathcal{A}^{(0)}}(\mathcal{M}^{(0)}/x_1\mathcal{M}^{(0)})\right)_{\mathfrak{c}}$ 上是幂零的。通过与 (25) 比较，我们得到条件 (i) 和 (iii) 也成立。∎

我们令 $\mathcal{R}^{(1)}=\varprojlim\mathcal{A}^{(1)}[x_1]/x^m\mathcal{A}^{(1)}[x_1]$ 和 $\mathcal{M}^{(1)}=\mathcal{A}^{(1)}\otimes_{\mathcal{O}(U)}E(U)$。它配备了诱导可积联络 ∇: $\mathcal{M}^{(1)}\to\mathcal{M}^{(1)}\otimes\Omega^1_X(*H)$。由标准结果可得唯一分解 $\mathcal{M}^{(1)}=\bigoplus_{\mathfrak{c}\in\mathcal{J}_1}\mathcal{M}^{(1)}_{\mathfrak{c}}$，使得以下性质成立。

- 该分解在 $G_{(0)}$ 作用下保持不变。
- $\mathcal{M}_{(1)\mathfrak{c}}/x_1\mathcal{M}_{(1}{}_{\mathfrak{c}}=\left(\mathcal{A}^{)(1)}\otimes_{\mathcal{A}^{(0)}}(\mathcal{M}_{(0)}/x_1\mathcal{M}_{(0)})\right)_{\mathfrak{c}}$.
- $x_1^{-1}(x_1^{N+1}\nabla_{x_1}-\mathfrak{c})\mathcal{M}_{(1)\mathfrak{c}}\subset\mathcal{M}_{(1)\mathfrak{c}}$.
- $\nabla(\mathcal{M}_{(1)\mathfrak{c}})\subset\mathcal{M}_{(1)_{\mathfrak{c}}}\otimes\Omega^1(*H)$。

引理 5.8 归纳地，对于 $j=1$、.....、N，我们可以构造以下元组。

$=$ $\nabla\ \mathcal{M}^{\,j}\to\mathcal{M}^{\,j}\otimes\ {}^{1}_{X}*H$ $=$ $\varprojlim$

- 有限生成伽罗瓦扩张 $\mathcal{A}_{(j)}$，其为 $\mathcal{A}_{(0)}$。我们设 $\mathcal{R}_{(j)}{}^{\mathcal{A}^{\,j}}\otimes_{\mathcal{O}\ U}E\ U$ $\leftarrow\mathcal{A}_{(j)}[x_1]/x^m\mathcal{A}_{(j)}[x_1]$，并设 $\mathcal{M}_{(j)\,()\,()\,()}$。它带有诱导可积联络：$_{()\,()}\Omega\,(\,)$。
- 有限子集 $\mathcal{J}_j\subset\mathcal{R}_{(j)}/x_1^j\mathcal{R}^{(j)}$，以及分解 $\mathcal{M}_{(j)}=\bigoplus_{\mathfrak{c}\in\mathcal{J}_j}\mathcal{M}_{(j)\mathfrak{c}}$。

它们满足以下条件。

- 投影 $\mathcal{R}_x/x_1^{j+1}\mathcal{R}_x \to \mathcal{R}_x/x_1^j\mathcal{R}_x$ 诱导出满射 $\mathcal{J}_j \to \mathcal{J}_{j-1}$。
- 如果两个不同的元素 $\mathfrak{c}_1$、$\mathfrak{c}_2 \in \mathcal{J}_j$ 映射到 $\mathcal{J}_{j-1}$中的同一个元素，那么 $x_1^{-j}(\mathfrak{c}_1-\mathfrak{c}_2)$ 在 $\mathcal{A}^{(j)}$中可逆。
- $x_1^{-j}(x_1^{N+1}\nabla_{x_1}-\mathfrak{c})\mathcal{M}^{(j+1)}_{\mathfrak{c}} \subset \mathcal{M}^{(j+1)}_{\mathfrak{c}}$.
- $\nabla(\mathcal{M}^{(j)}_{\mathfrak{c}}) \subset \mathcal{M}^{(j)}_{\mathfrak{c}} \otimes \Omega^1(*H)$.
- 存在一个开邻域 $x \in U' \subset U$，使得 谱 $\mathcal{A}^{(j)}\times_U U' \to$谱 $\mathcal{A}^{(0)}\times_U U'$是平展的。

特别地，对于任意 $\mathfrak{c} \in \mathcal{J}_{N-1}$，有$(x_1\nabla_{x_1}-x_1^{-N}\mathfrak{c})\mathcal{M}^{(N)}_{\mathfrak{c}} \subset \mathcal{M}^{(N)}_{\mathfrak{c}}$。

证明 假设我们已经构造了 $\mathcal{A}^{(j)}$、 $\mathcal{J}_j$ 和 $\mathcal{M}^{(j)}=\bigoplus \mathcal{M}^{(j)}_{\mathfrak{c}}$。由 $x_1^{-j}(x_1^{N+1}\nabla_{x_1}-\mathfrak{c})$ 诱导出 $\mathbb{K}$-线性映射 $G^{(j)}_{\mathfrak{c}}$: $\mathcal{M}^{(j)}_{\mathfrak{c}} \to \mathcal{M}^{(j)}_{\mathfrak{c}}$。它满足 $G^{(j)}_{\mathfrak{c}}(fs) = fG^{(j)}_{\mathfrak{c}}(s) + x_1^{N+1-j}\partial_{x_1}(f)s$，其中 $f \in \mathcal{R}^{(j)}$和 $s \in \mathcal{M}^{(j)}_{\mathfrak{c}}$。它诱导出 $\mathcal{M}^{(j)}_{\mathfrak{c}}/x_1\mathcal{M}^{(j)}_{\mathfrak{c}}$的 $\mathcal{A}^{(j)}$-自同态 $F^{(j)}_{\mathfrak{c}}$。如引理 5.7 所示，存在一个 $\mathcal{A}^{(j)}$的有限生成伽罗瓦扩张 $\mathcal{A}^{(j+1)}_{\mathfrak{c}}$、一个有限子集 $\mathcal{J}_{\mathfrak{c},j+1} \subset \mathcal{A}^{(j+1)}_{\mathfrak{c}}$以及分解

$$\mathcal{A}^{(j+1)}_{\mathfrak{c}} \otimes_{\mathcal{A}^{(j)}} (\mathcal{M}^{(j)}_{\mathfrak{c}}/x_1\mathcal{M}^{(j)}_{\mathfrak{c}}) = \bigoplus_{\mathfrak{b}\in\mathcal{J}_{\mathfrak{c},j+1}} \left(\mathcal{A}^{(j+1)}_{\mathfrak{c}} \otimes_{\mathcal{A}^{(j)}} (\mathcal{M}^{(j)}_{\mathfrak{c}}/x_1\mathcal{M}^{(j)}_{\mathfrak{c}})\right)_{\mathfrak{b}} \tag{26}$$

使得 (i) $F^{(j)}_{\mathfrak{c}}-\mathfrak{b}=0$ 在 $\left(\mathcal{A}^{(j+1)}_{\mathfrak{c}} \otimes_{\mathcal{A}^{(j)}} (\mathcal{M}^{(j)}_{\mathfrak{c}}/x_1\mathcal{M}^{(j)}_{\mathfrak{c}})\right)_{\mathfrak{c}}$, (ii) 对任意两个不同的元素 $\mathfrak{b}_1$、$\mathfrak{b}_2 \in \mathcal{J}_{\mathfrak{c},\,j+1}$，差 $\mathfrak{b}_1-\mathfrak{b}_2$在 $\mathcal{A}^{(j+1)}_{\mathfrak{c}}$中可逆；(iii) 存在一个邻域 $x \in U' \subset U$，使得 Spec $\mathcal{A}^{(j+1)}_{\mathfrak{c}}\times_U U' \to$Spec $\mathcal{A}^{(0)}\times_U U'$是平展的。令 $\mathcal{A}^{(j+1)}$为 $\mathcal{A}^{(0)}$的有限生成伽罗瓦扩张，其中包含所有 $\mathcal{A}^{(j+1)}_{\mathfrak{c}}$。我们令 $\mathcal{M}^{(j+1)}_{\mathfrak{c}} = \mathcal{A}^{(j+1)}\otimes_{\mathcal{O}(U)}E(U)$，并赋予其诱导可积联络 $\nabla\colon \mathcal{M}^{(j+1)} \to \mathcal{M}^{(j+1)}\otimes\Omega^1(*H)$。众所周知，可以得到唯一分解 $\mathcal{M}^{(j+1)}_{\mathfrak{c}} = \bigoplus_{\mathfrak{b}\in\mathcal{J}_{\mathfrak{c},\,j+1}} \mathcal{M}^{(j+1)}_{\mathfrak{c}+x_1^j\mathfrak{b}}$，使其满足以下条件。

- The decomposition is preserved by $G^{(j)}$.
- $\mathcal{M}^{(j+1)}_{\mathfrak{c}+x_1^j\mathfrak{b}}/x_1\mathcal{M}^{(j+1)}_{\mathfrak{c}+x_1^j\mathfrak{b}} = \left(\mathcal{A}^{(j+1)} \otimes_{\mathcal{A}^{(j)}} (\mathcal{M}^{(j)}_{\mathfrak{c}}/x_1\mathcal{M}^{(j)}_{\mathfrak{c}})\right)_{\mathfrak{b}}$.
- $x_1^{-j}(x_1^{N+1}\nabla_{x_1}-(\mathfrak{c}+x_1^{j+1}\mathfrak{b}))\mathcal{M}^{(1)}_{\mathfrak{c}+x_1^j\mathfrak{b}} \subset \mathcal{M}^{(1)}_{\mathfrak{c}+x_1^j\mathfrak{b}}$.
- $\nabla(\mathcal{M}^{(j+1)}_{\mathfrak{c}+x_1^j\mathfrak{b}}) \subset \mathcal{M}^{(j+1)}_{\mathfrak{c}+x_1^j\mathfrak{b}} \otimes \Omega^1(*H)$.

我们令 $\mathcal{J}_{j+1} = \bigsqcup_{\mathfrak{c}\in\mathcal{J}_j}\{\mathfrak{c}+x_1^j\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b} \in \mathcal{J}_{\mathfrak{c},j+1}\}$。因此，可以继续进行归纳构造。 ∎

我们令 $\mathcal{M}^{(N)\,\mathrm{reg}} = \mathcal{M}^{(N)}_0$ 和 $\mathcal{M}^{(N)\,\mathrm{irreg}} = \bigoplus_{\mathfrak{c}\neq 0}\mathcal{M}^{(N)}_{\mathfrak{c}}$。得到分解

$$\mathcal{M}^{(N)} = \mathcal{M}^{(N)\,\mathrm{reg}} \oplus \mathcal{M}^{(N)\,\mathrm{irreg}}. \tag{27}$$

该分解在 ∇作用下保持不变。

通过缩小 U，我们可以假设 Spec$(\mathcal{A}^{(N)}) \to (U\cap H_k)\backslash\partial H_k$是有限且 étale 的。由于分解 (27) 在伽罗瓦扩张 $\mathcal{A}^{(0)} \to \mathcal{A}^{(N)}$ 下不变，存在分解

$$\mathcal{M}^{(0)} = \mathcal{M}^{(0)\,\mathrm{reg}} \oplus \mathcal{M}^{(0)\,\mathrm{irreg}} \tag{28}$$

这是 (27) 的下降。我们可以验证如下结论。

$$\nabla\mathcal{M}^{(0)\,\mathrm{reg}} \subset \mathcal{M}^{(0)\,\mathrm{reg}} \otimes \left(\Omega^1(\log H_k) + \Omega^1(*H_{\neq k})\right), \qquad \nabla\mathcal{M}^{(0)\,\mathrm{irreg}} \subset \mathcal{M}^{(0)\,\mathrm{irreg}} \otimes \Omega^1(*H). \tag{29}$$

我们还可以验证

$$\sum_{j\geq 0}(x_1\nabla_{x_1})^j(\mathcal{M}^{(0)\,\mathrm{irreg}})_{\widehat{y}} = (\mathcal{M}^{(0)\,\mathrm{irreg}})_{\widehat{y}}(*H_k), \quad \sum_{j\geq 0}(x_1\nabla_{x_1})^j(E_{|\widehat{x}})^{\mathrm{irreg},k} = (E_{|\widehat{x}})^{\mathrm{irreg},k}. \tag{30}$$

引理 5.9 存在分解 $E_{|\widehat{H}_k}(U) = (E_{|\widehat{H}_k})^{\mathrm{reg}}(U) \oplus (E_{|\widehat{H}_k})^{\mathrm{irreg}}(U)$，它诱导出(21)和(28)。它还对任意 $y \in U\cap H_k$ 诱导出分解(21) 。

证明 令 $\widetilde{\mathcal{R}} = \widehat{\mathcal{O}}_{H_k,x}(*\partial H_k)[\![x_1]\!]$，它同时包含 $\mathcal{R}^{(0)} \cap \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ 和 $\mathcal{O}_{H_k}(H_{U,k})[\![x_1]\!]$。存在自然同构 $\widetilde{\mathcal{R}} \otimes E_{|\widehat{y}} \simeq \widetilde{\mathcal{R}} \otimes \mathcal{M}^{(0)}$。根据性质 (22)、(29) 和 (30)，我们得到

$$\widetilde{\mathcal{R}} \otimes (E_{|\widehat{x}})^{\mathrm{reg},k} = \widetilde{\mathcal{R}} \otimes \mathcal{M}^{(0)\,\mathrm{reg}}, \quad \widetilde{\mathcal{R}} \otimes (E_{|\widehat{x}})^{\mathrm{irreg},k} = \widetilde{\mathcal{R}} \otimes \mathcal{M}^{(0)\,\mathrm{irreg}}.$$

由于 $\mathcal{R}^{(0)} \cap \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} = \mathcal{O}_{H_k}(H_{U,k})[\![x_1]\!]$ 属于 $\widetilde{\mathcal{R}}$，我们得到第一个断言。对 $y \in H_{U,k}$ 应用同样的论证，我们得到第二个断言。∎

因此，我们得到分解 (23)。

5.2.5 一般情形下命题 5.6 的证明

设 $H_{U\,k}^{(e)}$,表示 $U^{(e)} \to X$ 下 H_k 的逆像。我们有 $\mathrm{Gal}_U^{(H,e)}$-等变分解

$$(E_U^{(e)})_{|\widehat{H}_{U,k}^{(e)}} = (E_U^{(e)})^{\mathrm{reg}}_{\widehat{H}_{U,k}^{(e)}} \oplus (E_U^{(e)})^{\mathrm{irreg}}_{\widehat{H}_{U,k}^{(e)}}. \tag{31}$$

设 $H_{U,k} = H_k \cap U$。由于 $E_{|U}$ 是 $E_U^{(e)}$ 的下降，我们得到如下作为 (31) 之下降的分解：

$$(E_U)_{|\widehat{H}_{U,k}} = (E_{|U})^{\mathrm{reg}}_{\widehat{H}_{U,k}} \oplus (E_{|U})^{\mathrm{irreg}}_{\widehat{H}_{U,k}}.$$

于是，我们得到 (21)。∎

5.2.6 留数

若 E是非分歧良好的，对于满足 $x \in H_k$的 $k \in \Lambda$，我们将 $\bigoplus(\nabla_{\mathfrak{a}} - d\mathfrak{a})$沿 H_k的留数记为$(E_{|H_k})_{|\widehat{x}}$上的自同态 $\mathrm{Res}_{H_k}(\nabla)$。

命题5.10 若 E 是非分歧良好的，则存在 $E_{|H_k}$ 上的自同态$\mathrm{Res}_{H_k}(\nabla)$，它对任意 $x \in H_k$诱导出$(E_{|H_k})_{\widehat{x}}$ 上的$\mathrm{Res}_{H_k}(\nabla)$。

证明 我们继续使用命题 5.6 的证明中的记号。我们得到 $\mathcal{M}^{(N)}/x_1\mathcal{M}^{(N)}$ 上的自同态 $\mathrm{Res}_{H_k}(\nabla)$，其定义为$\bigoplus_{\mathfrak{c}} \mathrm{Res}_{x_1}\big(x_1\nabla_{x_1} - x_1^{-N}\mathfrak{c}\,\mathrm{id}_{\mathcal{M}_{\mathfrak{c}}^{(N)}}\big)$。由于它在伽罗瓦群的作用下不变，因此 $\mathcal{M}^{(0)}/x_1\mathcal{M}^{(0)}$ 上存在 $\mathrm{Res}_{H_k}(\nabla)$，它在 $\mathcal{M}^{(N)}/x_1\mathcal{M}^{(N)}$上诱导出 $\mathrm{Res}_{H_k}(\nabla)$。由下述引理可得命题5.10的结论。

引理5.11 存在一个 $\mathcal{O}_{H_k}(H_{U,k})$-自同态 $\mathrm{Res}_{H_k}(\nabla)$作用于 $E(U)/x_1E(U)$，其在 $\mathcal{M}^{(0)}/x_1\mathcal{M}^{(0)}$ 上诱导出 $\mathrm{Res}_{H_k}(\nabla)$。

证明 利用分解 (21)，我们得到 $(E_{|\widehat{x}} \cap V_{\widehat{x},\mathfrak{a}})/x_1(E_{|\widehat{x}} \cap V_{\widehat{x},\mathfrak{a}})$ 上的 $\mathcal{O}_{X,x}/x_1\mathcal{O}_{X,x}$-自同态 $\mathrm{Res}_{x_1}(\nabla_{\mathfrak{a}} - d\mathfrak{a})$。我们得到 $E_{|\widehat{x}}/x_1E_{|\widehat{x}}$ 上的 $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}/x_1\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$-自同态 $\mathrm{Res}_{x_1}(\nabla) = \bigoplus\mathrm{Res}_{x_1}(\nabla_{\mathfrak{a}} - d\mathfrak{a})$。比较两个留数自同态可得，存在作用于 $E_{|H_k}(U)$ 的自同态 $\mathrm{Res}_{H_k}(\nabla)$，其在 $\mathcal{M}^{(0)}/x_1\mathcal{M}^{(0)}$ 上诱导出 $\mathrm{Res}_{H_k}(\nabla)$。因此，我们得到引理5.11和命题5.10。∎

考虑 E 良好但不一定非分歧良好的情形。由（22），我们得到 $(E^{\mathrm{reg}}_{\widehat{H}_k|H_k})_{|\widehat{x}}$ 的自同态 $\mathrm{Res}_{H_k}(\nabla)$。

命题 5.12 E 是良格。我们得到作用在 $(E^{\mathrm{reg}}_{\widehat{H}_k})_{|H_k}$ 上的留数自同态 $\mathrm{Res}_{H_k}(\nabla)$，它对任意 $x \in H_k$ 在 $(E^{\mathrm{reg}}_{\widehat{H}_k|H_k})_{|\widehat{x}}$ 上诱导出 $\mathrm{Res}_{H_k}(\nabla)$。∎

注意，$\mathrm{Res}_{H_k}(\nabla)_x$ 的特征值集合与 $x \in H_k$ 无关。

记号 5.13 令 $\mathcal{S}p(E,\nabla,H_k)^{\mathrm{reg}} \subset \mathbb{K}$ 表示$\mathrm{Res}_{H_k}(\nabla)$ 在$(E^{\mathrm{reg}}_{\widehat{H}_k})_{|H_k}$上的特征值集合。

5.3 良好 $\mathbb{C}$-Deligne-Malgrange 滤过丛

5.3.1 $\mathbb{K}\subset\mathbb{C}$ 的情形

设 $\mathbb{K}\subset\mathbb{C}$ 为代数闭域。设 X 为具有简单正规交叉超曲面 H的光滑射影 $\mathbb{K}$簇。设 (V,∇) 为 (X,H) 上的良好亚纯平坦丛。

设 $(U=$谱 $R,\ \varphi,\ \psi)$ 是 §2.4.5 中的一个 étale 坐标系。对于 $e\in\mathbb{Z}_{>0}$，令 $R^{(e)}=R[x_1^{1/e},\dots,x_\ell^{1/e}]$和 $U^{(e)}=$谱 $R^{(e)}$。令 $\rho^{(e)}\colon U^{(e)}\to U$ 表示诱导态射。令 Gal_e 表示分歧覆盖的伽罗瓦群。对于任意 $e\in$（秩 V）！$\mathbb{Z}$，我们设 $(V^{(e)},\nabla)=\rho_e^*(V,\nabla)$，它是 Gal_e-等变的，并且在 $(U^{(e)},H^{(e)})$ 上非分歧良好。

由扩张 $\mathbb{K}\subset\mathbb{C}$，我们得到 $(V^{(e)}{}_{\mathbb{C}},\nabla)$ 上的非分歧良好亚纯平坦丛 $(U_{\mathbb{C}}^{(e)},H_{\mathbb{C}}^{(e)})$。令 E 为 $(V^{(e)}{}_{\mathbb{C}},\nabla)$ 的任意一个非分歧良格。存在 $E_{|H_{\mathbb{C}\,i}^{(e)}}$ 的留数自同态 $\mathrm{Res}_i(\nabla)$ $(i=1,\dots,\ell)$。$\mathrm{Res}_i(\nabla)|_y$ 的特征值与 $y\in H_{\mathbb{C}\,i}^{(e)}$ 无关。

引理 5.14 $\mathrm{Res}_i(\nabla)|_y$ 的特征值都包含在 $\mathbb{K}$中。

证明 设 $z\in H_i^{(e)}\setminus\bigcup_{j\neq i}H_j^{(e)}$。存在一个非分歧良格 $L\subset V_{|\widehat{z}}$，使得我们有如下分解

$$(L,\nabla)_{|\widehat{z}}=\bigoplus_{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}(V,z)}(L_{\mathfrak{a}},\nabla_{\mathfrak{a}})$$

使得 $\nabla_{\mathfrak{a}}-d\widetilde{\mathfrak{a}}$ 是对数的。我们得到 $L_{|z}$ 的留数 $\mathrm{Res}_i(\nabla)=\bigoplus_{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}}\mathrm{Res}_i(\nabla_{\mathfrak{a}}-d\widetilde{\mathfrak{a}})$。

对于 $E_{|z}$ 上 $\mathrm{Res}_i(\nabla)$ 的任意特征值 α，存在 $L_{|z}$ 上 $\mathrm{Res}_i(\nabla)$ 的一个特征值 β，使得 $\alpha-\beta\in\mathbb{Z}$。反过来，对于 $L_{|z}$上 $\mathrm{Res}_i(\nabla)$ 的任意特征值 β，存在 $E_{|z}$ 上 $\mathrm{Res}_i(\nabla)$ 的一个特征值 α，使得$\alpha-\beta\in\mathbb{Z}$。∎

对于任意 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^\ell$，存在 e xists由下列条件确定的非分歧良格 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{e\boldsymbol{a}}(V_{\mathbb{C}}^{(e)})$。

- $\mathrm{Res}_i(\nabla)$ 的任意特征值 α 满足 $ea_i-1<\mathrm{Re}(\alpha)\leq ea_i$。

由于它是 Gal_e-等变的，我们得到 $V_{\mathbb{C}|U_{\mathbb{C}}}$ 的良格 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{\boldsymbol{a}}(V_{\mathbb{C}})$，作为 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{e\boldsymbol{a}}(V_{\mathbb{C}}^{(e)})$ 的下降。我们还有 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{e\boldsymbol{a}}(V_{\mathbb{C}}^{(e)})$ 在 $\mathbb{C}/\mathbb{K}$ 的伽罗瓦群作用下的不变性，因此存在 $V^{(e)}$ 的一个格$\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{e\boldsymbol{a}}(V^{(e)})$，它诱导 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{e\boldsymbol{a}}(V^{(e)}{}_{\mathbb{C}})$。我们还有 $V_{|U}$的格 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{\boldsymbol{a}}(V)_U$。

设 $H=\bigcup_{i\in\Lambda}H_i$ 为不可约分解。通过对任意 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^\Lambda$粘合 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{\boldsymbol{a}}(V)_U$，我们得到格 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{\boldsymbol{a}}(V)$。

5.3.2 一般情形

设 $\mathbb{K}$ 是特征零的代数闭域，不一定包含于 $\mathbb{C}$中。设 X 是一个光滑射影的 $\mathbb{K}$-簇，带有一个简单正规交叉超曲面 H。设 (V,∇) 是 (X,H) 上的良好亚纯平坦丛。

存在一个子域 $\mathbb{K}_0\subset\mathbb{K}$，使得 (i) $\mathbb{K}_0$ 是一个有限生成于 $\mathbb{Q}$上的域的代数闭包；(ii) (X,H) 和 (V,∇) 均定义在 $\mathbb{K}_0$上，也就是说，存在定义在 $\mathbb{K}_0$ 上的 $(X_{\mathbb{K}_0},H_{\mathbb{K}_0})$，以及定义在 $(X_{\mathbb{K}_0},H_{\mathbb{K}_0})$ 上的 $(V_{\mathbb{K}_0},\nabla)$，使它们分别诱导出 (X,H) 和 (V,∇)。

存在一个嵌入 $\mathbb{K}_0\subset\mathbb{C}$。根据该嵌入，存在一个以 $\mathbb{R}^\Lambda$为指标的滤过丛 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*(V_{\mathbb{K}_0})$。它诱导出一个以 $\mathbb{R}^\Lambda$为指标的滤过丛 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*(V)$。

5.3.3 拉回

设 Y 是 $\mathbb{K}$ 上的光滑射影簇，带有一个简单正规交叉超曲面 H_Y。设 $f\colon Y\to X$ 是一个态射，使得 $f^{-1}(H)=H_Y$。回忆如下结果。

引理5.15 $(V_Y,\nabla)=f^*(V,\nabla)$ 是(Y,H_Y)上的良好亚纯平坦丛。

证明 令 $y\in Y$为一个闭点。设 $x=f(y)$。对于某个 $e\in\mathbb{Z}_{>0}$，存在 $\mathcal{I}(V,x)\subset\widehat{\mathcal{O}}_X^{(H,e)}(*H)_x/\widehat{\mathcal{O}}_{X\,x}^{(H,e)}$，以及一个分解

$$(V,\nabla)\otimes\widehat{\mathcal{O}}_x^{(H,e)}=\bigoplus_{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}(V,x)}(\widehat{V}_{\mathfrak{a}},\nabla_{\mathfrak{a}})$$

$\widehat{}$使得每个 $(V_{\mathfrak{a}},\ \nabla_{\mathfrak{a}}-d\widetilde{\mathfrak{a}})$ 都有一个对数格。存在 e'，使得态射 $\mathcal{O}_{X,\ x}\to\mathcal{O}_{Y,\ y}$ 诱导$\mathcal{O}_X^{(H,e)}{}_{,\ x}\ \to\mathcal{O}_Y^{(H_Y,e'}{}_{),\ y}$。我们得到 $\mathcal{I}(V_Y,\ y)\subset\mathcal{O}^{(H_Y,e'}{}_{)Y}(*H_Y)_y/\mathcal{O}_Y^{(H_Y,e'}{}_{),\ y}$ 以及该分解

$$(V_Y,\nabla)\otimes\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}^{(H_Y,e')}=\bigoplus_{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}(V,x)}(\widehat{V}_{Y,\mathfrak{a}},\nabla_{\mathfrak{a}})$$

$\widehat{}$使得每个 $(V_{Y,\mathfrak{a}},\nabla_{\mathfrak{a}}-d\widetilde{\mathfrak{a}})$ 都有一个对数格。

设 $H_Y=\bigcup_{i\in\Lambda_Y}H_{Y,i}$ 表示不可约分解。对任意 $i\in\Lambda$，设 $\boldsymbol{b}^{(i)}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\Lambda_Y}$ 由作为除子的拉回 $f^*(H_i)$ $=\sum_{j\in\Lambda_Y}b_j^{(i)}H_{Y,j}$所确定。矩阵 $(b_j^{(i)})$ 确定映射 $f^*\colon\ \mathbb{R}^\Lambda\to\mathbb{R}^{\Lambda_Y}$。设$\boldsymbol{\delta}_\Lambda=(1,\dots,1)\in\mathbb{R}^\Lambda$。

引理 5.16 对任意 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^\Lambda$，我们有 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{f^*(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{\delta}_\Lambda)}(f^*V)\subset f^*\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{\boldsymbol{a}}(V)\subset\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{f^*(\boldsymbol{a})}(f^*V)$。

证明 只需考虑非分歧情形以及 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$。设 $y\in H_Y$与 $x=f(y)$。设 $(y_1,\dots,y_m)$ 为 y附近的一个 étale 坐标，使得 $H_Y=\bigcup_{i=1}^k\{y_i=0\}$。设 $(x_1,\dots,x_n)$ 为 x 附近的一个 étale 坐标邻域，使得 $H=\bigcup_{i=1}^\ell\{x_i=0\}$。设 $\alpha_{i,j}$ ($1\leq j\leq n,\ 1\leq i\leq m$) 为由此所确定的非负整数

$$f^*(dx_j/x_j)=\sum\alpha_{i,j}dy_i/y_i.$$

设 $\beta_i\in\mathbb{K}$，使得 $a_j-1<-\mathrm{Re}(\beta_j)\leq a_i$。我们得到

$$\sum\alpha_{i,j}(a_j-1)<-\sum\alpha_{i,j}\,\mathrm{Re}(\beta_j)\leq\sum\alpha_{i,j}a_j.$$

若 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^\Lambda_{<0}$，则有$-\sum\alpha_{i,\ j}\mathrm{Re}(\beta_j)<0$。若 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^\Lambda_{\geq 1}$，则有$0<-\sum\alpha_{i,\ j}\mathrm{Re}(\beta_j)$。

推论 5.17 对于 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^\Lambda_{<0}$，有 $f^*\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{\boldsymbol{a}}V\subset\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{<0}(f^*V)$。对于 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^\Lambda_{\geq 1}$，有 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_0(f^*V)\subset f^*\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{\boldsymbol{a}}V$。

5.4 相关的亚纯拉格朗日不规则性

设 $X_{\mathbb{K}}$ 是一个正规射影的 $\mathbb{K}$ 簇，带有超曲面 $H_{\mathbb{K}}$，使得 $X_{\mathbb{K}}\setminus H_{\mathbb{K}}$ 光滑。设 $(V,\ \nabla)$ 是 $(X_{\mathbb{K}},\ H_{\mathbb{K}})$ 上的亚纯可积联络，即 V 是一个相干反身 $\mathcal{O}_{X_{\mathbb{K}}}(*H_{\mathbb{K}})$-模，带有可积联络 $\nabla\colon V\to V\otimes\Omega^1_{X_{\mathbb{K}}}$。以下定理在 [15] 中得到了证明。若 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$，该定理也在 [24] 中得到了证明。

定理 5.18 存在一个射影双有理态射 $\rho_{\mathbb{K}}\colon\ X'_{\mathbb{K}}\to X_{\mathbb{K}}$，使得 *(i)* $X'_{\mathbb{K}}$ 是光滑的， *(ii)* $H'_{\mathbb{K}}=\rho_{\mathbb{K}}^{-1}(H_{\mathbb{K}})$ 是正规交叉，*(iii)* $X'_{\mathbb{K}}\setminus H'_{\mathbb{K}}\simeq X_{\mathbb{K}}\setminus H_{\mathbb{K}}$，*(iv)* $\rho_{\mathbb{K}}^*(V,\nabla)$ 在$(X'_{\mathbb{K}},H'_{\mathbb{K}})$上是良好的。

定理 5.19 存在亚纯拉格朗日覆盖 $\boldsymbol{I}(V,\nabla)$ 的唯一不规则性，使得以下结论成立。

- 设 $\rho\colon\ X'_{\mathbb{K}}\to X_{\mathbb{K}}$ 是光滑 $\mathbb{K}$-簇之间的射影态射，且满足 *(i)* $H'_{\mathbb{K}}=\rho^{-1}(H_{\mathbb{K}})$ 是正规交叉，*(ii)* $X'_{\mathbb{K}}\setminus H'_{\mathbb{K}}\simeq X_{\mathbb{K}}\setminus H_{\mathbb{K}}$。那么，$\rho^*(V,\nabla)$ 在 $(X'_{\mathbb{K}},H_{\mathbb{K}'})$ 上是良好的，当且仅当 $\rho^*\boldsymbol{I}(V,\nabla)$ 在 $(X'_{\mathbb{K}},H'_{\mathbb{K}})$ 上是平展局部良好的。在这种情况下，我们有 $I(\rho^*(V,\nabla))=I(\rho^*\boldsymbol{I}(V,\nabla)$。

证明 我们考虑 $\mathbb{K}\subset\mathbb{C}$ 的情形。我们由 $X_{\mathbb{K}}$、$H_{\mathbb{K}}$ 以及 $(V_{\mathbb{K}},\nabla)$ 得到 $X_{\mathbb{C}}$、$H_{\mathbb{C}}$ 以及 $(V_{\mathbb{C}},\nabla)$。存在与 $(V_{\mathbb{C}},\nabla)$ 相关联的拉格朗日亚纯覆盖 $\Sigma(V_{\mathbb{C}})\subset T^*(X_{\mathbb{C}}\setminus H_{\mathbb{C}})$，如 §3.4 所述。设 $\rho_{\mathbb{K}}\colon(X'_{\mathbb{K}},H'_{\mathbb{K}})\to(X_{\mathbb{K}},H_{\mathbb{K}})$ 使得 $\rho_{\mathbb{K}}^*(V_{\mathbb{K}},\nabla)$ 在 $(X'_{\mathbb{K}},H'_{\mathbb{K}})$ 上是良好的。设 $\rho_{\mathbb{C}}\colon(X'_{\mathbb{C}},H'_{\mathbb{C}})\to(X_{\mathbb{C}},H_{\mathbb{C}})$ 为诱导态射。由推论 3.17，$\rho_{\mathbb{C}}^*(\Sigma(V_{\mathbb{C}}))$ 在 $(X'_{\mathbb{C}},H'_{\mathbb{C}})$ 上是良好的，并且我们有 $\mathrm{I}(\rho_{\mathbb{C}}^*(\Sigma(V_{\mathbb{C}})))=\mathrm{I}(\rho_{\mathbb{C}}^*(V_{\mathbb{C}},\nabla))$。由命题 2.58，存在 $\Sigma_{\mathbb{K}}\subset T^*(X_{\mathbb{K}}\setminus H_{\mathbb{K}})$ 使得 $\mathrm{I}\big((\rho_{\mathbb{K}}^*\Sigma_{\mathbb{K}})\times\mathbb{C}\big)=\mathrm{I}(\rho_{\mathbb{C}}^*\Sigma(V_{\mathbb{C}}))$。由命题 2.57、推论 3.17 和命题 5.2，该断言在此情形下成立。

在一般情形下，存在一个特征零代数闭域 $\mathbb{K}_0$，使得 (i) $\mathbb{K}_0$ 是一个在 $\mathbb{Q}$ 上有限生成的域的代数闭包，(ii) $\mathbb{K}_0\subset\mathbb{K}$，(iii) 存在 $(X_{\mathbb{K}_0},\ H_{\mathbb{K}_0},\ V_{\mathbb{K}_0},\ \nabla)$，它诱导出 $(X_{\mathbb{K}},\ H_{\mathbb{K}},\ V_{\mathbb{K}},\ \nabla)$。根据前面的讨论，存在与 $(V_{\mathbb{K}_0},\ \nabla)$ 相关联的亚纯拉格朗日覆盖 $\boldsymbol{I}(V_{\mathbb{K}_0},\ \nabla)$ 的不规则性。我们令 $\boldsymbol{I}(V_{\mathbb{K}},\ \nabla)=\boldsymbol{I}(V_{\mathbb{K}_0},\ \nabla)\times\mathbb{K}$。于是，根据命题 2.57、推论 3.17 和命题 5.2，该情形下的结论成立。

5.4.1 与联络的极点阶数比较

设 X 是一个带有超曲面 $H=\bigcup_{i\in\Lambda}H_i$ 的正规 $\mathbb{K}$-簇。存在一个闭子集 $Z\subset H$，使得 $\operatorname{codim}_X(Z)\geq 2$，并且 (i) $X^\circ=X\setminus Z$ 光滑，(ii) $H^\circ=H\setminus Z$ 是 X° 的正规交叉超曲面。我们还令 $H_i^\circ=H_i\setminus Z$。

设 (V,∇) 是定义在 (X,H) 上的亚纯可积联络。注意，存在一个闭子集 $Z\subset Z'\subset H$，其余维为 ${}_X Z'\geq 2$，使得 $(V,\nabla)^{|X\setminus Z'}$ 在 $(X\setminus Z',H\setminus Z')$ 上是良好的。

命题 5.20 对于一个 非负整数元组 $\boldsymbol{m}=(m_i\,|\,i\in\Lambda)$，以下条件等价 .

- 存在一个反身格 $V_0\subset V$，使得 $\nabla(V_{0|X^\circ})\subset V_{0|X^\circ}\otimes\Omega^1_{X^\circ}(\text{对数 }H^\circ)(\sum m_iH_i^\circ)$。
- 设 $Z\subset Z'$ 是 H 的任意闭子集，其余维为 余维$_X Z'\geq 2$，并且满足 $(V,\nabla)^{|X\setminus Z'}$ 在 $(X\setminus Z',H\setminus Z')$ 上是良好的。设 $V_0\subset V$ 是任意相干反身 $\mathcal{O}_X$-模，并满足 *(i)* $V_0(*H)=V$，*(ii)* $V_{0|X\setminus Z'}$ 是 $(V,\nabla)^{|X\setminus Z'}$ 的良格。那么，我们有 $\nabla(V_{0|X^\circ})\subset V_{0|X^\circ}\otimes\Omega^1_{X^\circ}(\text{对数 }H^\circ)(\sum m_iH_i^\circ)$。
- 对任意 $\Sigma\in\boldsymbol{I}(V,\nabla)$，$\Sigma$ 在 $T^*X^\circ(\log H^\circ)(\sum m_iH_i^\circ)$ 中的闭包在 X° 上是真的。

这些条件与 Z 的选取无关。

证明 第二个条件蕴含第一个条件。我们来证明第一个条件蕴含第二个条件。只需考虑 $\dim X=1$ 的情形。此外，只需考虑形式与非分歧情形。设 V 是带有联络 ∇ 的有限维 $\mathbb{K}((z))$-向量空间。假设存在有限子集 $\mathcal{I}\subset z^{-1}\mathbb{K}[z^{-1}]$ 以及一个分解

$$(V,\nabla)=\bigoplus_{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}}(V_{\mathfrak{a}},\nabla_{\mathfrak{a}})$$

使得 $\nabla_{\mathfrak{a}}-d\mathfrak{a}$ 是正则的。设 $E=\bigoplus E_{\mathfrak{a}}$ 是一个非分歧良格。设 $N_1=\max\{\deg_{z^{-1}}\mathfrak{a}\,|\,\mathfrak{a}\in\mathcal{I}\}$。取 $\mathfrak{a}\in\mathcal{I}$ 使得 $\deg_{z^{-1}}\mathfrak{a}=N_1$。设 G 是 V 的任意格。存在 $N_2\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得 $z\nabla_{\partial_z}(G)\subset z^{-N_2}G$。我们令 $G_{\mathfrak{a}}=G\cap E_{\mathfrak{a}}$。我们有 $z\nabla_{\partial_z}G_{\mathfrak{a}}\subset z^{-N_2}G_{\mathfrak{a}}$。于是，容易验证 $N_2\geq N_1$。因此，我们得到第二个断言蕴含第一个断言。

假设第二个条件成立。由于在 $(X\setminus Z',\ H\setminus Z')$ 上有 $\mathcal{I}(\Sigma)=\mathcal{I}(V,\nabla)$，我们得到 $T^*(X\setminus Z')(\log H^\circ)(\sum m_iH_i^\circ)$ 中 Σ 的闭包 Σ 在 $X\setminus Z'$ 上是真态射。由引理 2.7，第三个条件成立。反过来，若第三个条件成立，则 $\nabla(V_0)\subset V_0\otimes\Omega^1_{X^\circ}(\log H^\circ)(\sum m_iH_i^\circ)$ 在 $X\setminus Z'$ 上成立。由 Hartogs 性质，第二个条件成立。∎

5.5 通用可积亚纯相对联络

5.5.1 给定丛的通用亚纯可积相对联络

设 $\mathcal{S}$ 是一个 $\mathbb{K}$-簇。设 $\mathcal{X}\to\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{K}$-簇之间的一个光滑射影态射，带有相对非常丰沛线丛 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(1)$。设 $\mathcal{X}$ 的一个超曲面 $\mathcal{H}\subset\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{S}$ 上平坦。对于 $\mathcal{S}$ 上的任意 $\mathbb{K}$-簇 $\mathcal{S}_1$，我们定义 $\mathcal{X}_{\mathcal{S}_1}=\mathcal{X}\times_{\mathcal{S}}\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{H}_{\mathcal{S}_1}=\mathcal{H}\times_{\mathcal{S}}\mathcal{S}_1$。对于任意在 $\mathcal{S}$ 上平坦的相干 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-模 $\mathcal{F}$，令 $\mathcal{F}_{\mathcal{S}_1}$ 表示 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{X}_{\mathcal{S}_1}$ 的拉回。

命题 5.21 设 $\mathcal{V}$ 为有限秩的局部自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-模。对任意正整数 N，存在 $\mathcal{S}_1$ 上、$\mathcal{S}$ 上的复代数簇，使得下列结论成立。

- 局部自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathcal{S}_1}}$-模 $\mathcal{V}_{\mathcal{S}_1}$ 配备了一个可积亚纯相对联络

$$\nabla:\mathcal{V}_{\mathcal{S}_1}\to\mathcal{V}_{\mathcal{S}_1}\otimes\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(N\mathcal{H})_{\mathcal{S}_1}.$$

- 设 $s\in\mathcal{S}$ 为任意闭点。设 $\nabla\colon\mathcal{V}_s\to\mathcal{V}_s\otimes\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(N\mathcal{H})_s$ 为亚纯可积联络。则存在 s 上的闭点 $s_1\in\mathcal{S}_1$，使得 $(\mathcal{V}_s,\nabla)\simeq(\mathcal{V}_{\mathcal{S}_1},\nabla)^{s_1}$，其中 $(\mathcal{V}_{\mathcal{S}_1},\nabla)^{s_1}$ 表示 $(\mathcal{V}_{\mathcal{S}_1},\nabla)$ 到 $(\mathcal{X}_{\mathcal{S}_1})^{s_1}$ 的限制。

证明 通过考虑 $\mathcal{S}$ 的仿射开子集覆盖，我们可以假设 (i) $\mathcal{S}$ 是仿射的，(ii) 存在两两不同的光滑超曲面 $\mathcal{H}'_i\,(i=1,\ldots\ldots,m)$，它们是某个 $\ell\geq 1$ 的 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\ell)$ 的截面，(iii)$\bigcap_{i=1}^m\mathcal{H}'_i=\emptyset$。令 $\mathcal{H}'=\bigcup\mathcal{H}'_i$。设 N' 是充分大的正整数。令 $p_{\mathcal{S}}\colon\mathcal{X}\to\mathcal{S}$ 表示投影。我们可以假设

$$R^jp_{\mathcal{S}*}\Big(\operatorname{End}(\mathcal{V})\otimes\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(N\mathcal{H}+N'\mathcal{H}'_i)\Big)=0\quad(i=1,\ldots,m),\quad R^jp_{\mathcal{S}*}\Big(\operatorname{End}(\mathcal{V})\otimes\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(N\mathcal{H}+N'\mathcal{H}')\Big)=0$$

对任意 $j>0$， $p_{\mathcal{S}*}\Big(\mathrm{End}(\mathcal{V})\otimes\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(N\mathcal{H}+N'\mathcal{H}')\Big)$ 和 $p_{\mathcal{S}*}\Big(\mathrm{End}(\mathcal{V})\otimes\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(N\mathcal{H}+N'\mathcal{H}'_i)\Big)(i=1,\ .....,\ m)$ 均为局部自由的。我们还可以假设，对任意 $j>0$， $R^jp_{\mathcal{S}*}\Big(\mathrm{End}(\mathcal{V})\otimes\Omega^2_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(2N\mathcal{H}+2N'\mathcal{H}')\Big)=0$，并且

$$p_{\mathcal{S}*}\Big(\mathrm{End}(\mathcal{V})\otimes\Omega^2_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(2N\mathcal{H}+2N'\mathcal{H}')\Big)$$

是局部自由的。

引理 5.22 如果 N' 足够大，则存在亚纯相对联络

$$\nabla_0^{(i)}:\mathcal{V}\to\mathcal{V}\otimes\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(N'\mathcal{H}'_i),\quad \nabla_0^{(0)}:\mathcal{V}\to\mathcal{V}\otimes\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(N'\mathcal{H}'),$$

但这些联络不一定是可积的。

证明 由于 $\mathcal{X}\setminus\mathcal{H}'_i$ 是仿射的，存在足够大的 M，使得 $\mathcal{V}(*\mathcal{H}'_i)$ 是$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(*\mathcal{H}'_i)^{\oplus M}$的直和项。令 $\pi_i:\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(*\mathcal{H}'_i)^{\oplus M}\to\mathcal{V}(*\mathcal{H}'_i)$ 表示相对于直和分解的投影。令 $j_i:\mathcal{V}(*\mathcal{H}'_i)\to\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(*\mathcal{H}'_i)^{\oplus M}$ 表示包含映射。令 $\nabla_0'^{(i)}$ 为平凡丛$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(*\mathcal{H}'_i)^{\oplus M}$的平凡联络。由此得到 $\mathcal{V}(*\mathcal{H}'_i)$的一个联络 $\nabla_0^{(i)}=\pi_i\circ\nabla_0'^{(i)}\circ j_i$。类似地，我们可以构造 $\nabla_0^{(0)}$。∎

令 $\nabla_0^{(i)}$和 $\nabla_0^{(0)}$为引理 5.22 中的亚纯相对联络。我们将 $p_{\mathcal{S}*}\Big(\mathrm{End}(\mathcal{V})\otimes\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(N\mathcal{H}+N'\mathcal{H}')\Big)$ 视为 $\mathcal{S}$上的一个仿射簇 $\mathcal{S}^{(0)}$。存在一个 $\Psi^{(0)}$ 的泛截面

$$\mathrm{End}(\mathcal{V}_{\mathcal{S}^{(0)}})\otimes\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(N\mathcal{H}+N'\mathcal{H}')_{\mathcal{S}^{(0)}}$$

在 $\mathcal{X}_{\mathcal{S}^{(0)}}$上。利用 $\nabla_0^{(0)}$ 和 $\Psi^{(0)}$，我们得到亚纯相对联络

$$\widetilde{\nabla}^{(0)}:\mathcal{V}_{\mathcal{S}^{(0)}}\to\mathcal{V}_{\mathcal{S}^{(0)}}\otimes\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(N\mathcal{H}+N'\mathcal{H}')_{\mathcal{S}^{(0)}}.$$

以下结论成立。

- 令 $s\in\mathcal{S}$为任意闭点。设 $\nabla:\mathcal{V}_s\to\mathcal{V}_s\otimes\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(N\mathcal{H}+N'\mathcal{H}')_s$为一个亚纯联络。那么，存在 $s'\in\mathcal{S}^{(0)}$ 在 s 上，使得 $(\mathcal{V}_{\mathcal{S}^{(0)\prime}},\widetilde{\nabla}^{(0)})_{s'}\simeq(\mathcal{V}_s,\nabla)$。

类似地，我们将 $p_{\mathcal{S}*}\Big(\mathrm{End}(\mathcal{V})\otimes\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(N\mathcal{H}+N'\mathcal{H}'_i)\Big)$ 视为 $\mathcal{S}^{(i)}$ 上的仿射簇。存在其泛截面 $\Psi^{(i)}$

$$\mathrm{End}(\mathcal{V}_{\mathcal{S}^{(i)}})\otimes\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(N\mathcal{H}+N'\mathcal{H}'_i)_{\mathcal{S}^{(i)}}$$

在 $\mathcal{X}_{\mathcal{S}^{(i)}}$上。利用 $\nabla_0^{(i)}$ 和 $\Psi^{(i)}$，我们得到亚纯相对联络

$$\widetilde{\nabla}^{(i)}:\mathcal{V}_{\mathcal{S}^{(i)}}\to\mathcal{V}_{\mathcal{S}^{(i)}}\otimes\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(N\mathcal{H}+N'\mathcal{H}'_i)_{\mathcal{S}^{(i)}}.$$

以下结论成立。

- 设 $s\in\mathcal{S}$为任意闭点。设 $\nabla:\mathcal{V}_s\to\mathcal{V}_s\otimes\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(N\mathcal{H}+N'\mathcal{H}'_i)_s$为一个亚纯联络。那么，存在 $s'\in\mathcal{S}^{(i)}$，其定义在 s 上，使得 $(\mathcal{V}_{\mathcal{S}^{(i)\prime}},\widetilde{\nabla}^{(i)})_{s'}\simeq(\mathcal{V}_s,\nabla)$。

我们得到截面 $\widetilde{\nabla}^{(i)}-\nabla_0^{(0)}=(\nabla_0^{(i)}-\nabla_0^{(0)})+\Psi^{(i)}$，它属于 $\mathrm{End}(\mathcal{V}_{\mathcal{S}^{(i)}})\otimes\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(N\mathcal{H}+N\mathcal{H}')_{\mathcal{S}^{(i)}}$。我们得到诱导的闭嵌入 $\mathcal{S}^{(i)}\to\mathcal{S}^{(0)}$，使得 $(\mathcal{V}_{\mathcal{S}^{(0)}},\widetilde{\nabla}^{(0)})$ 的拉回与 $(\mathcal{V}_{\mathcal{S}^{(i)}},\widetilde{\nabla}^{(i)})$ 同构。令$p_{\mathcal{S}^{(0)}}:\mathcal{X}_{\mathcal{S}^{(0)}}\to\mathcal{S}^{(0)}$ 表示投影。作为曲率，我们得到局部自由层的截面 $(\widetilde{\nabla}^{(0)})^2$

$$p_{\mathcal{S}^{(0)}*}\Big(\mathrm{End}(\mathcal{V}_{\mathcal{S}^{(0)}})\otimes\Omega^2_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(2N\mathcal{H}+2N'\mathcal{H}')_{\mathcal{S}^{(0)}}\Big).$$

令 $\mathcal{S}_1\subset\mathcal{S}^{(0)}$为 $\mathcal{S}^{(i)}(i=1、.....、\ m)$ 与 $(\widetilde{\nabla}^{(0)})^2$ 的零点集的交所构成的子概形。令 $(\mathcal{V}_{\mathcal{S}_1},\ \nabla)$ 为 $(\mathcal{V}_{\mathcal{S}^{(0)}},\ \widetilde{\nabla}^{(0)})$ 的拉回。则它具有所需的性质。∎

5.5.2 附录：万有扩张

令 $\mathcal{V}_i$ 为一个具有可积亚纯相对联络的有限秩局部自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-模

$$\nabla_i : \mathcal{V}_i \to \mathcal{V}_i \otimes \Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(N\mathcal{H}).$$

命题 5.23 存在一个 $\mathbb{K}$-簇 $\mathcal{S}_1$ 上的 $\mathcal{S}$、带有相对可积亚纯联络

$$\nabla : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3 \otimes \Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(N\mathcal{H})_{\mathcal{S}_1}$$

以及可积亚纯联络的正合列

$$0 \longrightarrow (\mathcal{V}_1, \nabla)_{\mathcal{S}_1} \longrightarrow (\mathcal{V}_3, \nabla) \longrightarrow (\mathcal{V}_2, \nabla)_{\mathcal{S}_1} \longrightarrow 0, \tag{32}$$

使得以下结论成立。

- 设 $s \in \mathcal{S}$。设 V 是一个局部自由的 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}$-模，带有可积亚纯联络 $\nabla : V \to V \otimes \Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(N\mathcal{H})_s$，并有一个正合列

$$0 \longrightarrow (V_1, \nabla) \longrightarrow (V, \nabla) \longrightarrow (V_2, \nabla) \longrightarrow 0 \tag{33}$$

  使得 $(V_i, \nabla) \simeq (\mathcal{V}_i, \nabla)_s$。那么，存在 $s' \in \mathcal{S}_1$ 在 s 上，使得将（32）拉回到 s' 所得的对象与（33）同构。

证明 令 $\mathcal{C}^j = \mathcal{H}om(\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_1) \otimes \Omega^j_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(jN\mathcal{H})$，得到 $\mathcal{X}$ 上的复形 $\mathcal{C}^\bullet$。对 $\mathcal{S}$ 取一个仿射开覆盖后，不妨设 $\mathcal{S}$ 光滑且仿射。还可设存在互不相同的超曲面 $\mathcal{H}_i (i = 1, \ldots\ldots, m)$，它们属于 $\mathcal{X}$，并满足：(i) $\mathcal{H}_i$ 在 $\mathcal{S}$ 上光滑，且是某个 $\ell > 0$ 的 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\ell)$ 的截面的零点；(ii) $\bigcap \mathcal{H}_i = \emptyset$。对任意 $I \subset \{1, \ldots, m\}$，令 $\mathcal{H}(I) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i$。对任意非空的 I，不妨设 $R^k p_{\mathcal{S}*}\big(\mathcal{C}^j \otimes \mathcal{O}((j+1)\mathcal{H}(I))\big) = 0\ (k > 0)$，且 $p_{\mathcal{S}*}\big(\mathcal{C}^j \otimes \mathcal{O}((j+1)\mathcal{H}(I))\big)$ 局部自由。

我们设 $U = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}e_i$。对于有序子集 $I = \{i_1, \ldots, i_p\} \subset \{1, \ldots, m\}$，我们设 $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$。我们设 $U_I = \mathbb{C}e_I \subset \bigwedge^{|I|} U$。$e_i$ 的乘法诱导出 $\varphi_i : U_I \to U_{I \sqcup \{i\}}$。结合自然包含映射 $p_{\mathcal{S}*}\big(\mathcal{C}^j \otimes \mathcal{O}((j+1)\mathcal{H}(I))\big) \to p_{\mathcal{S}*}\big(\mathcal{C}^j \otimes \mathcal{O}((j+1)\mathcal{H}(I \cup \{i\}))\big)$，我们得到

$$p_{\mathcal{S}*}\big(\mathcal{C}^j \otimes \mathcal{O}((j+1)\mathcal{H}(I))\big) \otimes U_I \longrightarrow p_{\mathcal{S}*}\big(\mathcal{C}^j \otimes \mathcal{O}((j+1)\mathcal{H}(I \cup \{i\}))\big) \otimes U_{I \cup \{i\}}.$$

我们设

$$\widetilde{\mathcal{C}}^{j,p} = \bigoplus_{|I|=p} p_{\mathcal{S}*}\big(\mathcal{C}^j \otimes \mathcal{O}((j+1)\mathcal{H}(I))\big) \otimes U_I.$$

我们得到 $\widetilde{\mathcal{C}}^{j,\,p} \to \widetilde{\mathcal{C}}^{j,\,p+1}$。我们得到由可积亚纯相对联络诱导的态射 $p_{\mathcal{S}*}\big(\mathcal{C}^j \otimes \mathcal{O}((j+1)\mathcal{H}(I))\big) \to p_{\mathcal{S}*}\big(\mathcal{C}^{j+1} \otimes \mathcal{O}((j+2)\mathcal{H}(I))\big)$，从而得到 $\widetilde{\mathcal{C}}^{j,\,p} \to \widetilde{\mathcal{C}}^{j+1,\,p}$。因此，我们得到一个双复形 $\widetilde{\mathcal{C}}^{\bullet,\,\bullet}$。令 $\widehat{\mathcal{C}}^\bullet$ 表示全复形。我们可以将 $\widehat{\mathcal{C}}^i$ 视为 $\mathcal{S}_0$上的向量丛，并且有态射 $\widehat{\mathcal{C}}^i \to \widehat{\mathcal{C}}^{i+1}$。

我们将 $\widehat{\mathcal{C}}^1$ 视为 $\mathcal{S}$上的簇 $\mathcal{S}^{(0)}$。令 $\pi_1 : \mathcal{S}^{(0)} \to \mathcal{S}$ 表示投影。由 $\widehat{\mathcal{C}}^1 \to \widehat{\mathcal{C}}^2$诱导，我们在 $\mathcal{S}_0$ 上得到 $\pi_1^*(\widehat{\mathcal{C}}^2)$的截面 Ψ。令 $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_0$ 表示由 $\Psi^{-1}(0)$得到的子概形。

对于 $i \neq j$，我们有以下态射

$$\psi_{i,j} : \mathcal{V}_{2,\mathcal{S}_1} \longrightarrow \mathcal{V}_{1,\mathcal{S}_1} \otimes \mathcal{O}(\mathcal{H}_i \cup \mathcal{H}_j)_{\mathcal{S}_1}.$$

对于 i，我们有以下态射

$$\phi_i : \mathcal{V}_{2,\mathcal{S}_1} \longrightarrow \mathcal{V}_{1,\mathcal{S}_1} \otimes \big(\Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(N\mathcal{H}) \otimes \mathcal{O}(2\mathcal{H}_i)\big)_{\mathcal{S}_1}.$$

它们满足余循环条件：

$$\psi_{i,j} + \psi_{j,k} = \psi_{i,k}, \quad \nabla_1 \circ \psi_{i,j} - \psi_{i,j} \circ \nabla_2 + \phi_i - \phi_j = 0, \quad \nabla_1 \circ \phi_i + \phi_i \circ \nabla_2 = 0.$$

我们得到以下同构

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\mathcal{V}_1} & \psi_{i,j} \\ 0 & \mathrm{id}_{\mathcal{V}_2} \end{pmatrix} : \Big((\mathcal{V}_{1,\mathcal{S}_1} \oplus \mathcal{V}_{2,\mathcal{S}_1})_{|(\mathcal{X}\setminus\mathcal{H}_j)_{\mathcal{S}_1}}\Big)_{|(\mathcal{X}\setminus(\mathcal{H}_i\cup\mathcal{H}_j))_{\mathcal{S}_1}} \simeq \Big((\mathcal{V}_{1,\mathcal{S}_1} \oplus \mathcal{V}_{2,\mathcal{S}_1})_{|(\mathcal{X}\setminus\mathcal{H}_i)_{\mathcal{S}_1}}\Big)_{|(\mathcal{X}\setminus(\mathcal{H}_i\cup\mathcal{H}_j))_{\mathcal{S}_1}}. \tag{34}$$

它们满足余循环条件。通过利用同构 (34) 对 $(\mathcal{V}_{1,\,\mathcal{S}_1} \oplus \mathcal{V}_{2,\,\mathcal{S}_1})_{|(\mathcal{X}\setminus\mathcal{H}_j)\,\mathcal{S}_1}$ 进行粘合，我们得到 $\mathcal{S}_1$ 上的向量丛 $\mathcal{V}_3$。$(\mathcal{V}_i)_{|\mathcal{S}_3 \times (\mathcal{X}\setminus H_i)}$ 的可积亚纯相对联络 ∇ 与 ϕ_i 在 $(\mathcal{V}_{1,\,\mathcal{S}_1} \oplus \mathcal{V}_{2,\,\mathcal{S}_1})_{|(\mathcal{X}\setminus\mathcal{H}_j)\,\mathcal{S}_1}$ 上诱导出一个可积亚纯相对联络。通过将它们粘合，我们得到 $\mathcal{V}_3$ 的一个可积亚纯相对联络。存在正合列 (32)。所需条件由该构造得到满足。

∎

5.6 用斜率估计极大斜率

5.6.1 斜率

设 $\mathbb{K}$ 为特征零的代数闭域。设 X 为一个 n 维光滑连通射影的 $\mathbb{K}$ 簇，并带有一个丰沛线丛 $\mathcal{O}_X(1)$。关于 X 的 Chow 群中相干 $\mathcal{O}_X$-模的交理论和特征类，我们参见 [3] 。置 $\omega = c_1(\mathcal{O}_X(1))$。对于任意无挠相干 $\mathcal{O}_X$-模 V，置 $\deg_\omega(V) = \int_X c_1(V)\omega^{n-1}$，并置 $\mu_\omega(V) = \deg_\omega(V)/\mathrm{rank}(V)$。存在关于斜率 μ_ω 的 Harder-Narasimhan 滤过 $\mathcal{F}^{HN}$：即存在一个由 $\mathbb{Q}$ 索引的 V 的唯一递减滤过 $\mathcal{F}^{HN}$，使得 (i) $\mathcal{F}^{HN}_a(V) = 0$ 且 $\mathcal{F}^{HN}_a(V) = V$ 对任意充分大的 $a > 0$ 成立；(ii) $\mathrm{Gr}^{\mathcal{F}^{HN}}_a(V)$ 是 μ_ω-半稳定层，且 $\mu\big(\mathrm{Gr}^{\mathcal{F}^{HN}}_a(V)\big) = a$。置

$$\mu_{\omega,\max}(V) = \max\big\{a \,\big|\, \mathrm{Gr}^{\mathcal{F}^{HN}}_a(V) \neq 0\big\}, \quad \mu_{\omega,\min}(V) = \min\big\{a \,\big|\, \mathrm{Gr}^{\mathcal{F}^{HN}}_a(V) \neq 0\big\}.$$

引理 5.24 设 $V_i\,(i = 1, 2)$ 是无挠凝聚 $\mathcal{O}_X$-模，且存在非零态射 $\varphi\colon V_1 \to V_2$。假设 V_1 是 μ_ω-半稳定的。那么，我们得到 $\mu_\omega(V_1) \leq \mu_{\omega,\max}(V_2)$。

证明 设 $\mathcal{F}^{HN}(V_2)$ 是 V_2 的 Harder-Narasimhan 滤过。存在 $b(0)$，使得 $\varphi(V_1) \subset \mathcal{F}^{HN}_{b(0)}(V_2)$ 且 $\varphi(V_1) \not\subset \mathcal{F}^{HN}_{<b(0)}(V_2)$。我们得到一个非零态射 $\varphi_1\colon V_1 \to \mathrm{Gr}^{\mathcal{F}}_{b(0)}(V_2)$。由于 V_1 和 $\mathrm{Gr}^{\mathcal{F}}_{b(0)}(V_2)$ 都是 μ_ω-半稳定的，我们得到

$$\mu_\omega(V_1) \leq \mu_\omega(\mathrm{Im}\,\varphi_1) \leq \mu_\omega(\mathrm{Gr}^{\mathcal{F}}_{b(0)}(V_2)) \leq \mu_{\omega,\max}(V_2).$$

因此，证毕。 ∎

引理 5.25 设 V 是一个凝聚 $\mathcal{O}_X$-模，带有一个递增滤过 $F_j(V)\,(j = 0, \ldots, m)$，其子模为凝聚$\mathcal{O}_X$-子模，并满足 *(i)* $F_0(V) = 0$ 且 $F_m(V) = V$，*(ii)* $\mathrm{Gr}^F_j(V)$ 为无挠。则有

$$\min_{1\leq j\leq m} \mu_\omega(\mathrm{Gr}^{\mathcal{F}}_j(V)) \leq \mu_\omega(V) \leq \max_{1\leq j\leq m} \mu_\omega(\mathrm{Gr}^{\mathcal{F}}_j(V)).$$

证明 若 $m = 1$，则结论显然。假设 $m \geq 2$。以下情况之一成立 .

- $\mu_\omega(\mathcal{F}_{m-1}(V)) = \mu_\omega(V) = \mu_\omega(\mathrm{Gr}^{\mathcal{F}}_m(V))$.
- $\mu_\omega(\mathcal{F}_{m-1}(V)) \leq \mu_\omega(V) \leq \mu_\omega(\mathrm{Gr}^{\mathcal{F}}_m(V))$.
- $\mu_\omega(\mathcal{F}_{m-1}(V)) \geq \mu_\omega(V) \geq \mu_\omega(\mathrm{Gr}^{\mathcal{F}}_m(V))$.

于是，通过对 m 作归纳法，得到引理的结论。 ∎

5.6.2 用斜率估计最大斜率

对于充分大的整数 M_1，存在一个单态射 $\Omega^1_X \to \mathcal{O}_X(M_1)^n$。令 $M_2 = \deg_\omega(\mathcal{O}_X(M_1))$. 令 H 为一个正规交叉超曲面。设 N 为任意正整数。

引理 5.26 设 $V_i\,(i = 1, 2)$ 为无挠相干的 μ_ω-半稳定 $\mathcal{O}_X$-模，且存在一个非零态射$V_1 \to V_2 \otimes \Omega^1_X(NH)$。则有 $\mu_\omega(V_1) \leq \mu_\omega(V_2) + M_2 + N$度$_\omega(H)$

证明 存在一个非零态射 $V_1 \to V_2 \otimes \mathcal{O}_X(M_1)$。由于 V_1 和 $V_2 \otimes \mathcal{O}_X(M_1)$ 是 μ_ω-半稳定的，我们得到 $\mu_\omega(V_1) \leq \mu_\omega(V_2 \otimes \mathcal{O}_X(M_1)) = \mu_\omega(V_2) + M_2$。 ∎

命题 5.27 设 V 是一个局部自由的 $\mathcal{O}_X$-模，配备有亚纯联络 ∇： $V \to V \otimes \Omega^1_X(NH)$，且 (V, ∇) 不可约，即不存在饱和的 $\mathcal{O}_X$-子模 V'，使得 V 中 $\nabla(V') \subset V' \otimes \Omega^1_X(NH)$，且 $0 <$秩$(V') <$秩(V)。于是，我们得到

$$\mu_{\omega,\max}(V) - \mu_{\omega,\min}(V) \leq \mathrm{rank}(V) \cdot \big(M_2 + N \deg_\omega(H)\big).$$

因此，我们得到

$$\mu_{\omega,\max}(V) \leq \mu_\omega(V) + \mathrm{rank}(V) \cdot \big(M_2 + N \deg_\omega(H)\big).$$

证明 设 (V, ∇) 如命题所述。若 V是一个 μ_ω-半单层，则 $\mu_{\omega,\max}(V) - \mu_{\omega,\min}(V) = 0$。假设 V不是 μ_ω-半稳定的。我们令 $V_a = \mathrm{Gr}^{\mathcal{F}^{HN}}_a(V)$。设 $a_0 > a_1 > \cdots > a_m$ 为集合 $\{a \,|\, V_a \neq 0\}$。我们有 $a_0 = \mu_{\omega,\max}(V)$ 以及 $a_m = \mu_{\omega,\min}(V)$。我们令 $i(0) = 0$。

引理 5.28 存在一个严格递增序列 $i(0) < i(1) < \cdots < i(q) = m$ 以及 $k(p) \leq i(p-1)(p = 1,\ldots,q)$ 使得下列成立：

$$a_{k(p)} \leq a_{i(p)} + M_2 + N \deg_\omega(H). \tag{35}$$

证明 由于 (V,∇) 是不可约的， $\mathcal{O}_X$-模之间的诱导态射 $\mathcal{F}_{a_0} \to (V/\mathcal{F}_{a_0}) \otimes \Omega^1_X(NH)$ 是非平凡的。因此，存在 $0 < i(1) \leq m$ 以及一个非零态射 $V_{a_0} \to V_{a_{i(1)}} \otimes \Omega^1_X(NH)$。令 $k(1) = 0$。我们得到

$$a_{k(1)} \leq a_{i(1)} + M_2 + N \deg_\omega H.$$

假设我们已经构造出 $0 = i(0) < \cdots < i(s) < m$ 和 $k(p) \leq i(p-1)$ $(p = 1,\ldots,s)$，使得 (35) 成立。由于 (V,∇) 是不可约的， $\mathcal{O}_X$-模之间的诱导态射 $\mathcal{F}_{a_{i(s)}} \to (V/\mathcal{F}_{a_{i(s)}}) \otimes \Omega^1_X(NH)$ 是非平凡的。因此，存在 $k(s+1) \leq i(s) < i(s+1)$，以及一个非零态射 $V_{a_{k(s+1)}} \to V_{a_{i(s+1)}} \otimes \Omega^1_X(NH)$。这意味着 $a_{k(s+1)} \leq a_{i(s+1)} + M_2 + N \deg_\omega(H)$。因此，通过归纳法，我们得到引理 5.28 的结论。

对于 $p = 1,\ldots,q$，我们得到

$$a_{i(p-1)} \leq a_{k(p)} \leq a_{i(p)} + M_2 + N \deg_\omega(H).$$

我们得到 $a_0 \leq a_m + q(M_2 + N \deg_\omega(H)) \leq a_m + \text{秩}(V)(M_2 + N \deg_\omega(H))$。因此，在 V 不是 μ_ω-半稳定的情形下，我们得到命题 5.27。

推论 5.29 设 V 是局部自由 $\mathcal{O}_X$-模，带有亚纯联络 $\nabla\colon V \to V \otimes \Omega^1_X(NH)$ 以及递增滤过 $F_j(V)$ $(j = 0,\ldots,m)$，由 $\mathcal{O}_X$-子模给出，使得 **(i)** $F_0(V) = 0$ 且 $F_m(V) = V$，**(ii)** $\nabla(F_j(V)) \subset F_j(V) \otimes \Omega^1_X(NH)$，**(iii)** $\mathrm{Gr}^F_j(V) := F_j(V)/F_{j-1}(V)$ $(j = 1,\ldots,m)$ 是局部自由 $\mathcal{O}_X$-模。于是，我们得到

$$\mu_{\omega,\max}(V) \leq \max_{1\leq j\leq m} \mu_\omega(\mathrm{Gr}^F_j(V)) + \mathrm{rank}(V)(M_2 + N \deg_\omega(H)). \tag{36}$$

此外，若存在常值 $A_i\,(i = 1,2)$ 使得 $A_1 \leq \mu_\omega(\mathrm{Gr}^{\mathcal{F}}_j(V)) \leq A_2\,(j = 1,\ldots,m)$，则得到

$$\mu_{\omega,\max}(V) \leq \mu_\omega(V) + \mathrm{rank}(V)(M_2 + N \deg_\omega(H)) + A_2 - A_1. \tag{37}$$

证明 由命题 5.27，得到

$$\mu_{\omega,\max}(\mathrm{Gr}^F_j(V)) \leq \mu_\omega(\mathrm{Gr}^F_j(V)) + \mathrm{rank}\,\mathrm{Gr}^F_j(V)(M_2 + N \deg_\omega(H)). \tag{38}$$

令 $\mathcal{F}^{HN}\mathrm{Gr}^F_j(V)$ 表示 $\mathrm{Gr}^F_j(V)$ 的 Harder-Narasimhan 滤过。令 $\mathcal{F}^{HN}(V)$ 表示 V 的 Harder-Narasimhan 滤过。设定 $a(0) = \mu_{\omega,\max}(V)$。存在 $j(0)$，使得 $\mathcal{F}^{HN}_{a(0)}(V) \subset F_{j(0)}(V)$ 且 $\mathcal{F}^{HN}_{a(0)}(V) \not\subset F_{j(0)-1}(V)$。我们得到非零态射 $\mathcal{F}^{HN}_{a(0)}(V) \to \mathrm{Gr}^F_{j(0)}(V)$。由引理 5.24，得到 $a(0) \leq \mu_{\omega,\max}(\mathrm{Gr}^F_{j(0)}(V))$。然后，由 (38) 得到 (36)。由 (36) 和引理 5.25 得到 (37)。

5.7 Hilbert 多项式

5.7.1 无挠层的 Hilbert 多项式

设 $\mathbb{K}$ 是特征零代数闭域。设 X 是一个 n 维的射影光滑 $\mathbb{K}$ 簇，带有一个丰沛线丛 $\mathcal{O}_X(1)$。对于任意无挠 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$，令 $P_{\mathcal{F}} \in \mathbb{Q}[t]$ 表示 $\mathcal{F}$ 的 Hilbert 多项式，即对于任意 $m \in \mathbb{Z}$， $P_{\mathcal{F}}(m)$ 等于 $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(m)$ 的欧拉数，也就是说，

$$P_{\mathcal{F}}(m) = \int_X \mathrm{td}(X)\,\mathrm{ch}(\mathcal{F})\,\mathrm{ch}(\mathcal{O}_X(m)).$$

存在整数 $a_i(\mathcal{F})$ $(i = 0, \ldots\ldots, n)$，使得

$$P_{\mathcal{F}}(m) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\mathcal{F}) \begin{pmatrix} m+n-1 \\ n-i \end{pmatrix}.$$

我们有 $a_0(\mathcal{F}) = \text{秩}(\mathcal{F}) \int_X c_1(\mathcal{O}_X(1))^n$。

5.7.2 Maruyama有界性定理

设 $\mathcal{X}_S \to S$ 是光滑复代数簇之间的光滑射影态射，并带有相对丰线丛 $\mathcal{O}(1)$。设 r 为正整数，令 $a_1,\ a_2 \in \mathbb{Z}$。设 $M > 0$。令 $\mathcal{C}(\mathcal{X}_s,\ r,\ a_1,\ a_2,\ M)$ 表示满足以下条件的无挠 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}$ 层 E 范畴:

$$\mu_{\max}(E) < \mu(E) + M, \quad \operatorname{rank}(E) = r, \quad |a_1(E)| \le a_1, \quad a_2(E) \ge a_2.$$

命题 5.30（Maruyama [20]） 族 $(\mathcal{C}(\mathcal{X}_s, r, a_1, a_2, M) \mid s \in S(\mathbb{C})$ 在以下意义下是有界的。

- 存在一个光滑复簇之间的态射 $\mathcal{S} \to S$。
- 存在一个相干的 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathcal{S}}}$-模 $\mathcal{E}$，它在 $\mathcal{S}$ 上是平坦的。$\sim$
- 对于任意 $b \in S(\mathbb{C})$ 和 $E \in \mathcal{C}(\mathcal{X}_s, r, a_1, a_2, M)$，存在一个在 b 上的 $b \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$，使得 $\mathcal{E}_{\widetilde{b}} \simeq E$。 ∎

注5.31 *Langer* 将此推广到了正特征情形。参见 [18]。 ∎

5.8 某些格的估计

设 $\mathbb{K}$ 为特征零的代数闭域。设 X 为一个 n 维射影光滑 $\mathbb{K}$ 簇，且带有丰沛线丛 $\mathcal{O}_X(1)$。记 $\omega = c_1(\mathcal{O}_X(1))$。设 $H = \bigcup_{j\in\Lambda} H_j$ 为 X 的简单正规交叉超曲面。由交理论 [3],，我们得到与 $(X, \mathcal{O}_X(1))$ 相关的以下数值:

$$\int_X \omega^n, \quad \int_X c_1(X)\omega^{n-1}, \quad \int_X c_1(X)^2\omega^{n-2}, \quad \int_X c_2(X)\omega^{n-2}, \tag{39}$$

我们还得到与 $(X, H, \mathcal{O}_X(1))$ 相关的以下附加数值:

$$\int_X c_1(X)[H_i]\omega^{n-2}, \quad \int_X [H_i]\omega^{n-1}, \quad \int_X [H_i]\cdot[H_j]\omega^{n-2}. \tag{40}$$

命题5.32 存在一个仅依赖于 $\int_X [H_i]\omega^{n-1}$ $(i \in \Lambda)$ 的常值 $A > 0$，以及一个依赖于正数 r 和数值 (39,40) 的常值 $C(r) > 0$，使得以下结论成立。

- 设 (V, ∇) 是 (X, H) 上任意一个秩为 $\le r$ 的良好亚纯平坦丛，其中秩$(V) \le r$。设 $\mathcal{F}$ 为 (V, ∇) 的一个滤过。那么，存在 V 的一个良格 V_0，使得 *(i)* $\mathrm{Gr}_j^{\mathcal{F}}(V_0)$ 局部自由，*(ii)* $0 \le \mu_\omega(\mathrm{Gr}_j^{\mathcal{F}} V_0) \le A$，*(iii)* $|a_1(\mathrm{Gr}_j^{\mathcal{F}}(V_0))| + |a_2(\mathrm{Gr}_j^{\mathcal{F}}(V_0))| \le C(r)$，*(iv)* $\mathrm{Gr}_j^{\mathcal{F}}(V_0)$ 作为一个 $\mathcal{D}_X$-模生成 $\mathrm{Gr}_j^{\mathcal{F}}(V)$，即 $\mathcal{D}_X \cdot \mathrm{Gr}_j^{\mathcal{F}}(V_0) = \mathrm{Gr}_j^{\mathcal{F}}(V)$。

证明 现在考虑 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 的情形。令 $V_{\mathrm{DM}} \subset V$ 表示 $(V,\ \nabla)$ 的良好的 Deligne-Malgrange 格。由黎曼－罗赫公式，得到

$$\begin{aligned} P_{V^{\mathrm{DM}}}(m) = m^n \operatorname{rank}(V)\int_X \omega^n + m^{n-1}\int_X \big(c_1(V^{\mathrm{DM}}) + \operatorname{td}_1(X)\operatorname{rank}(V^{\mathrm{DM}})\big)\omega^{n-1} \\ + m^{n-2}\int_X \Big(\operatorname{ch}_2(V^{\mathrm{DM}}) + c_1(V^{\mathrm{DM}})\operatorname{td}_1(X) + \operatorname{rank}(V^{\mathrm{DM}})\operatorname{td}_2(X)\Big)\omega^{n-2} + O(m^{n-3}). \end{aligned} \tag{41}$$

我们可以假设 $\mathcal{O}_X(1)$ 是非常丰沛的。存在一个光滑曲面 Z，它是 $\mathcal{O}_X(1)$ 的 $(n-2)$-截面的完全交，并且 $H_Z = Z \cap H$ 在 Z 中是正规交叉。限制 $(V_{\mathrm{DM}}\nabla)|_Z$ 是 $(V,\ \nabla)|_Z$ 的良好的 Deligne-Malgrange 格。由命题 4.1，存在仅依赖于 $\int_X [H_i]\omega^{n-1}$ 的 $C_1 > 0$，使得

$$\left|\int_X c_1(V^{\mathrm{DM}})\omega^{n-1}\right| \le \operatorname{rank}(V)C_1.$$

还存在仅依赖于 $\operatorname{rank}(V)$、$\int_X [H_i]\omega^{n-1}$、$\int_X [H_i]c_1(X)\omega^{n-2}$ 和 $\int_X [H_i]\cdot[H_j]\omega^{n-2}$ 的 $C_2 > 0$，使得

$$\left|\int_X c_1(V^{\mathrm{DM}})c_1(X)\omega^{n-2}\right| + \left|\int_X c_1(V^{\mathrm{DM}})^2\omega^{n-2}\right| + \left|\int_X c_2(V^{\mathrm{DM}})\omega^{n-2}\right| \le C_2.$$

于是，在 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 的情况下，我们得到了所需的估计。

让我们研究一般情形。只需考虑情形 $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$。我们考虑由双射 $\{a \in \mathbb{K} \mid 0 \le \mathrm{Re}(a) < 1\} \simeq \mathbb{K}/\mathbb{Z}$ 诱导的分裂 $\tau\colon\ \mathbb{K}/\mathbb{Z} \to \mathbb{K}$。根据 [15, 定理 5.3.4],，存在与选择 τ 相关联的良好的 Deligne-Malgrange 格 $V_0 \subset V$。它在 $X \times \mathbb{C}$ 上诱导出复化 $(V_{\mathbb{C}},\ \nabla)$ 的良好 Deligne-Malgrange 格。我们还注意到，$\mathrm{Gr}_j^{\mathcal{F}}(V_0)$ 是 $\mathrm{Gr}_j^{\mathcal{F}}(V,\ \nabla)$ 的良好 Deligne-Malgrange 格。因此，V_0 满足所需条件。 ∎

6 作为亚纯对象的有界性

6.1 形式亚纯平坦丛族与形式 $\mathcal{D}$-模

6.1.1 良好形式亚纯平坦丛族

设 R 为 $\mathbb{K}$ 上的正则亨泽尔局部环。令 $\mathfrak{m}$ 为极大理想。我们有 $\mathbb{K} \simeq R/\mathfrak{m}$.

~我们令 $R_1 = R[\![x_1, \dots, x_n]\!]$ 与 $R_1 = R_1(\!(x_1 \dots x_\ell)\!)$。设 $\mathcal{E}$ 是带有可积联络 $\nabla : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \Omega^1_{R_1/R}$ 的有限生成自反 R_1-模。这样的$(\mathcal{E}, \nabla)$称为相对于 R的~ ~R_1 上的形式亚纯可积联络。 $\mathcal{E}$ 的格 E 是指满足 $E \otimes R_1 = \mathcal{E}$的有限生成 R_1-子模。

定义 6.1 $\mathcal{E}$ 的格 E 称为关于 ∇ 是对数的，如果

$$\nabla E \subset \bigoplus_{i=1}^{\ell} E \otimes \big(dx_i/x_i\big) \oplus \bigoplus_{i=\ell+1}^{n} E \otimes dx_i.$$

我们称$(\mathcal{E}, \nabla)$ 是正则的，如果存在一个对数格。 ∎

对任意 $f \in \widetilde{R}_1$，我们有 $df \in \Omega^1_{\widetilde{R}_1/R}$。

~**定义 6.2** $\mathcal{E}$ 的格 E 称为非分歧良好的，如果存在良好集合 $\mathcal{I} \subset R_1/R_1$ 以及分解 $\widetilde{E}, \nabla) = \bigoplus_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}} (E_{\mathfrak{a}}, \nabla_{\mathfrak{a}})$，使得$(E_{\mathfrak{a}}, \nabla_{\mathfrak{a}} - d\widetilde{\mathfrak{a}})$ 是对数的。这里，$\widetilde{\mathfrak{a}} \in R_1$ 表示 $\mathfrak{a}$的提升。我们称$(\mathcal{E}, \nabla)$是非分歧良好的，如果存在一个非分歧良格。 ∎

对任意正整数 e，我们令 $\widetilde{R}_1^{(e)} = \widetilde{R}_1[x_1^{1/e}, \dots, x_\ell^{1/e}]$。我们称 $\mathcal{E}^{(e)} = \mathcal{E} \otimes \widetilde{R}_1^{(e)}$。它自然地带有相对于 R的可积联络 $\nabla^{(e)}$ 。设Gal_e 表示扩张 $\widetilde{R}_1^{(e)}/\widetilde{R}_1$的伽罗瓦群。我们有 $\mathcal{E}^{(e)}$上的自然Gal_e作用。

定义 6.3 若存在某个 $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得$(\mathcal{E}, \nabla)$ 是$(\mathcal{E}^{(e)}, \nabla^{(e)})$ 非分歧良好，则称其为良好。 ∎

定义 6.4 当 $\mathcal{E}$ 良好时，若存在一个Gal_e-不变的非分歧良好格 $E' \subset \mathcal{E}^{(e)}$，使得 E 是 E' 的下降，则称 $\mathcal{E}$ 的格 E 良好。 ∎

6.1.2 与格相关联的 $V\mathcal{D}_{R_1/R}$-子模和 $\mathcal{D}_{R_1/R}$-子模

令 $\mathcal{D}_{R_1/R} = R_1\langle \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$ 和 $V\mathcal{D}_{R_1/R} = R_1\langle x_1\partial_1, \dots, x_\ell\partial_\ell, \partial_{\ell+1}, \dots, \partial_n \rangle$。任何相对于 R、定义在 R_1 上的亚纯可积联络 $(\mathcal{E}, \nabla)$，都可自然地视为一个 $V\mathcal{D}_{R_1/R}$-模或 $\mathcal{D}_{R_1/R}$-模。

令 E 为 $(\mathcal{E}, \nabla)$ 的一个格。我们得到 $V_{\mathcal{D}_{R_1/R}}$-子模 $V\mathcal{D}_{R_1/R} \cdot E \subset \mathcal{E}$。令

$$\mathcal{D}_{R_1/R}(E) := \mathcal{D}_{R_1/R} \otimes_{V\mathcal{D}_{R_1/R}} \big(V\mathcal{D}_{R_1/R} \cdot E\big).$$

对于 $E \subset E'$，我们得到 $\mathcal{D}_{R_1/R}$-同态 $\mathcal{D}_{R_1/R}(E) \to \mathcal{D}_{R_1/R}(E')$。

命题 6.5 假设 E 是良好的。

- $V\mathcal{D}_{R_1/R} \cdot E$ 和 $\mathcal{E}/(V\mathcal{D}_{R_1/R} \cdot E)$ 在 R 上是平坦的。存在一个自然同构 m

$$(V\mathcal{D}_{R_1/R} \cdot E) \otimes_R \mathbb{K} \simeq V\mathcal{D}_{\mathbb{K}[\![x_1,\dots,x_n]\!]/\mathbb{K}} \cdot (E \otimes_R \mathbb{K}). \tag{42}$$

- $\mathcal{D}_{R_1/R}(E)$在 R 上是平坦的。存在如下自然同构

$$\mathcal{D}_{R_1/R}(E) \otimes_R \mathbb{K} \simeq \mathcal{D}_{\mathbb{K}[\![x_1,\dots,x_n]\!]/\mathbb{K}}(E \otimes \mathbb{K}).$$

证明 第二个和第三个断言由第一个断言推出。我们来研究第一个断言。考虑E 非分歧良好的情形。根据定义 6.2，存在一个良好集合 $\mathcal{I}$ 和一个分解 $E = \bigoplus E_{\mathfrak{a}}$。对于每个$\mathfrak{a}$，令 $I(\mathfrak{a})$ 表示满足 $\mathrm{ord}(\mathfrak{a})_i \neq 0$ 的 $1 \le i \le \ell$ 的集合。容易看出 $V\mathcal{D}_{R_1/R} \cdot E_{\mathfrak{a}} = E_{\mathfrak{a}}(\!(x^{I(\mathfrak{a})})\!)$。我们

可以假设，对于某个 k，有 $I(\mathfrak{a}) = \{1, \dots, k\}$。令 $\mathcal{I}(k)$ 表示满足 $I(\mathfrak{a}) = \{1, \dots, k\}$ 的 $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}$ 的集合。我们令 $E_k = \bigoplus_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(k)} E_{\mathfrak{a}}$。我们得到如下分解

$$E = \bigoplus_{k=1}^{\ell} E_k. \tag{43}$$

于是，我们有

$$V\mathcal{D}_{R_1/R}E = \bigoplus_{k=1}^{\ell} E_k(*x_1 \cdots x_k). \tag{44}$$

由此描述可得，$V\mathcal{D}_{R_1/R}E$ 和 $\mathcal{E}/V\mathcal{D}_{R_1/R}E$ 在 R上是平坦的。我们还得到同构 (42)。

假设 E 是良好的。存在一个 Gal_e-不变的非分歧良格 $E' \subset \mathcal{E}^{(e)}$，使得 E 是 E'的伽罗瓦下降。我们有如下分解

$$E' = \bigoplus_{k=1}^{\ell} E'_k \tag{45}$$

如 (43) 所示。分解 (45) 是 Gal_e-等变的。令 E_k 表示 E'_k的伽罗瓦下降。我们得到如下分解

$$E = \bigoplus_{k=1}^{\ell} E_k. \tag{46}$$

容易看出$V\mathcal{D}_{R_1/R} \cdot E = \bigoplus_{k=1}^{\ell} E_k(*x_1 \cdots x_k)$。因此，我们得到命题 6.5。 ∎

6.1.3 补充

设 $\mathcal{E}$ 是一个自由的 R_1模。设 E 是 $\mathcal{E}$的一个 R_1格。设 $\mathcal{I} \subset R_1/R_1$ 是一个不规则值良好集合。设 $\mathbb{K}_1$是 R的分式域的一个代数闭包。我们令 $\mathfrak{R}_1 = \mathbb{K}_1[\![x_1, \dots, x_n]\!]$ 和 $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_1(*x_1 \cdots x_\ell)$。通过扩张 $R_1 \to \mathfrak{R}_1$ 和 $R_1 \to \mathfrak{R}_1$，我们得到 $\mathfrak{E} = \mathfrak{R}_1 \otimes E$ 和 $\mathfrak{E} = \mathfrak{R}_1 \otimes \mathcal{E}$。由此可得以下引理。

引理 6.6 假设存在一个分解 $\mathfrak{E} = \bigoplus_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}} \mathfrak{E}_{\mathfrak{a}}$，使得

$$(\nabla - d\widetilde{\mathfrak{a}}\,\mathrm{id})\mathfrak{E}_{\mathfrak{a}} \subset \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathfrak{E}_{\mathfrak{a}} \otimes (dx_i/x_i) \oplus \bigoplus_{i=\ell+1}^{n} \mathfrak{E}_{\mathfrak{a}} \otimes dx_i.$$

那么，存在一个分解 $E = \bigoplus_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}} E_{\mathfrak{a}}$，使得

$$(\nabla - d\widetilde{\mathfrak{a}}\,\mathrm{id})E_{\mathfrak{a}} \subset \bigoplus_{i=1}^{\ell} E_{\mathfrak{a}} \otimes (dx_i/x_i) \oplus \bigoplus_{i=\ell+1}^{n} E_{\mathfrak{a}} \otimes dx_i.$$

∎

6.2 亚纯平坦联络的良好族

6.2.1 亚纯平坦联络族

设 $\mathbb{K}$ 为特征零代数闭域。设 $U = \mathrm{Spec}(S)$ 为光滑仿射 $\mathbb{K}$-概形。设 X为正规 $\mathbb{K}$-簇，并具有态射 $X \to U$，满足：(i) X 在 U上是射影且平坦的；(ii) $X \to U$ 的每个几何纤维都是不可约且正规的。设 $H \subset X$ 为在 S上平坦的超曲面。我们假设 $X^\circ = X \setminus H$在 U上光滑。对于任意几何点 $u\colon \mathrm{Spec}(\mathbb{K}_1) \to U$，置 $(X_u, H_u) = (X, H) \times_U \mathrm{Spec}(\mathbb{K}_1)$。

设 $j : X^\circ \to X$ 表示包含映射。我们有相对外微分 $d\colon j_*\mathcal{O}_{X^\circ} \to j_*(\Omega^1_{X^\circ/U}$).

设 $\mathcal{E}$为一个反身相干 $\mathcal{O}_X(*H)$-模，带有可积相对联络 $\nabla\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes j_*\Omega^1_{X^\circ/U}$，使得 $\mathcal{E}$在 S上平坦。这样的 $(\mathcal{E}, \nabla)$ 称为相对于 U的 (X, H) 上的亚纯平坦联络。若 $\mathcal{E}$是一个局部自由的 $\mathcal{O}_X(*H)$-模，则 $(\mathcal{E}, \nabla)$ 称为相对于 U的 (X, H) 上的亚纯平坦丛。

对于每个几何点 $u : \mathrm{Spec}(\mathbb{K}_1) \to U$，我们得到相干的 $\mathcal{O}_{X_u}(*H_u)$-模 $\mathcal{E}_u$，其配备了可积联络 ∇_u。

引理 6。7 $\mathcal{E}_{|X^\circ}$ 是局部自由的 $\mathcal{O}_{X^\circ}$-模。

证明 由于对任意闭点， $\mathcal{E}_{u|X_u\setminus H_u}$ 都是平坦的 $\mathcal{O}_{X_u\setminus H_u}$-模，因此我们得到 $\mathcal{E}_{|X^\circ}$ 是平坦的，即局部自由。 ∎

6.2.2 良好亚纯平坦丛族

假设 X 是光滑的，且 $X\to U$ 是光滑的。我们还假设：(i) H 相对于 S是正规交叉的；(ii) 单值化是平凡的。

设 $x\in H$是一个闭点。设 $n=$维 X。存在一个参数系$(x_1,\dots,x_n)$，使得 H 在 x 处的理想由某个 ℓ的 $\prod_{i=1}^{\ell}x_i$ 生成。

设$(\mathcal{V},\nabla)$是(X,H)上的一个相对于 U的亚纯平坦丛。令$\mathcal{V}_{|\widehat{x}}=\mathcal{V}\otimes\mathcal{O}_{X,x}$。我们得到诱导的可积相对联络 ∇: $\mathcal{V}_{|\widehat{x}}\to\mathcal{V}_{|\widehat{x}}\otimes\Omega^1_{X/U^\circ}$

定义 6.8 $(\mathcal{V},\nabla)$ 称为在闭点 $x\in H$ 处正则（分别为良好、非分歧良好），如果$(\mathcal{V}_{|\widehat{x}},\nabla)$ 是正则（分别为良好、非分歧良好）的。若$(\mathcal{V},\nabla)$ 在(X,H) 上是良好（分别为正则、非分歧良好）的，是指$(\mathcal{V},\nabla)^{|\widehat{x}}$在任意闭点 $x\in H$处都是良好（分别为正则、非分歧良好）的。 ∎

6.2.3 étale 坐标系

相对于 U的 $x\in X$的 étale 坐标邻域是由光滑仿射 $\mathbb{K}$-簇 $\mathcal{U}$、闭点 $x'\in\mathcal{U}$、étale 态射 $\varphi:(\mathcal{U},x')\to(X,x)$，以及 étale 态射 $\psi:\mathcal{U}\to U\times\mathbb{K}[x_1\dots,x_n]$ 构成的元组 $(\mathcal{U},x',\varphi,\psi)$，满足以下条件。

- $H_{\mathcal{U}}:=\varphi^{-1}(H)$ 等于 $\psi^{-1}\bigl(\bigcup_{i=1}^{\ell}\{z_i=0\}\bigr)$，其中存在某个 $1\leq\ell\leq n$。
- $\psi(x')\in U\times(0,\dots\dots,0)$。
- $\psi^{-1}(U\times\{z_i=0\})$ 是连通的。

对于 $e\in\mathbb{Z}_{>0}$，存在分歧覆盖

$$U\times\mathrm{Spec}(\mathbb{K}[x_1^{1/e},\dots,x_\ell^{1/e},x_{\ell+1},\dots,x_n])\to U\times\mathrm{Spec}(\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]).$$

令 $\mathcal{U}^{(e)}$ 表示 $\mathcal{U}$ 与 $U\times\mathbb{K}[x_1^{1/e},\dots,x_\ell^{1/e},x_{\ell+1},\dots,x_n]$ 在 $U\times\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ 上的纤维积。令 $\varphi_{\mathcal{U},e}:\mathcal{U}^{(e)}\to X$ 表示诱导态射。我们令 $H_{\mathcal{U}}^{(e)}=\varphi_{\mathcal{U},e}^{-1}(H_{\mathcal{U}})$。

引理 6.9 设 $(\mathcal{E},\nabla)$ 是相对于 U 定义在 (X,H) 上的良好亚纯平坦丛。设 $\{(\mathcal{U}_i,\varphi_i,\psi_i)\}_{i=1,\dots\dots,m}$ 是 X 的一个 *étale* 覆盖，其由 *étale* 坐标系构成。则存在 $e\in\mathbb{Z}_{>0}$，使得 $\varphi_{\mathcal{U}_i,e}^*(\mathcal{E},\nabla)|_{\mathcal{U}_i}$ 在 $(\mathcal{U}_i^{(e)},H_{\mathcal{U}_i}^{(e)})$ 上非分歧良好。 ∎

6.2.4 良格

设 $(\mathcal{E},\nabla)$ 是相对于 U 的良好亚纯平坦丛，定义在 (X,H) 上。设 $E\subset\mathcal{E}$ 是一个局部自由的 $\mathcal{O}_X$-子模，满足 $\mathcal{E}=E(*H)$。

定义 6.10 假设 $(\mathcal{E},\nabla)$ 是非分歧良好的。那么，如果对任意 $x\in H$ 都满足以下条件，就称 E 为非分歧良好。

- 我们有如下分解：$E_{|\widehat{x}}=\bigoplus_{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}(\mathcal{E},\nabla,x)}E_{x,\mathfrak{a}}$ 使得 $E_{x,\mathfrak{a}}=(\mathcal{E}_{x,\mathfrak{a}}\cap E_{|\widehat{x}})$，且 $(\nabla-d\widetilde{\mathfrak{a}})E_{x,\mathfrak{a}}\subset\widehat{E}_{x,\mathfrak{a}}\otimes\Omega^1_{X/U}(\log H)$。 ∎

定义 6.11 设 $\{(\mathcal{U}_i,\varphi_i,\psi_i)\}_{i=1,\dots,m}$ 和 $e\in\mathbb{Z}_{>0}$ 如上所述。若存在 $\varphi_e^*(\mathcal{E},\nabla)$ 的非分歧良格 $E_{e,i}$，使得 ***(i)*** $E_{e,i}$ 在 $\mathcal{U}_i^{(e)}/\mathcal{U}_i$的伽罗瓦群作用下不变，***(ii)*** $E_{e,i}$ 的伽罗瓦下降等于 φ_i^*E，则称 E是 $(\mathcal{E},\nabla)$ 的良格。 ∎

6.2.5 分解为正则部分和不规则部分

设 (V,∇) 是相对于 U 的 (X,H) 上的良好亚纯平坦丛。设 E 是一个良格。设 $x\in H_k$。我们有自然映射

$$\rho_k:\mathcal{I}(V,\nabla,x)\to \widehat{\mathcal{O}}_X^{(H,e)}(*H)_x\big/\widehat{\mathcal{O}}_X^{(H,e)}(*H_{\neq k})_x$$

设 $\mathcal{I}(V,\nabla,x)_{k,0}=\rho_k^{-1}(0)$。我们令

$$(E_{|\widehat{x}})^{\mathrm{reg},k}=\bigoplus_{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}(V,\nabla,x)_{k,0}}(E_{|\widehat{x}}\cap V^{(H,e)}_{\widehat{x},\mathfrak{a}}),\qquad (E_{|\widehat{x}})^{\mathrm{irreg},k}=\bigoplus_{\mathfrak{a}\notin\mathcal{I}(V,\nabla,x)_{k,0}}(E_{|\widehat{x}}\cap V^{(H,e)}_{\widehat{x},\mathfrak{a}}).$$

我们得到如下分解

$$E_{|\widehat{x}}=(E_{|\widehat{x}})^{\mathrm{reg},k}\oplus(E_{|\widehat{x}})^{\mathrm{irreg},k}. \tag{47}$$

容易验证如下结论

$$\nabla(E_{|\widehat{x}})^{\mathrm{reg},k}\subset(E_{|\widehat{x}})^{\mathrm{reg},k}\otimes\Big(\Omega^1_{X/U}(\log H_k)+\Omega^1_{X/U}(*H_{\neq k})\Big),\qquad \nabla(E_{|\widehat{x}})^{\mathrm{irreg},k}\subset(E_{|\widehat{x}})^{\mathrm{irreg},k}\otimes\Omega^1_{X/U}(*H). \tag{48}$$

下面的命题与命题 5.6 类似。

命题 6.12 存在如下分解

$$E_{|\widehat{H}_k}=E^{\mathrm{reg}}_{\widehat{H}_k}\oplus E^{\mathrm{irreg}}_{\widehat{H}_k} \tag{49}$$

它对任意 $x\in H_k$ 都诱导出 (47)。此外，我们有 $\nabla(E^{\mathrm{reg}}_{\widehat{H}})\subset E^{\mathrm{reg}}_{\widehat{H}}\otimes\Big(\Omega^1_{X/U}(\text{对数 }H_k)+\Omega^1_{X/U}(*H_{\neq k})\Big)$ 以及 $\nabla(E^{\mathrm{irreg}}_{\widehat{H}})\subset E^{\mathrm{irreg}}_{\widehat{H}}\otimes\Omega^1_{X/U}(*H)\Big)$。

由 (48)，我们得到 $(E^{\mathrm{reg}}_{\widehat{H}_k|H_k})_{|\widehat{x}}$ 的自同态 $\mathrm{Res}_{H_k}(\nabla)$。

推论 6.13 设 E 是良格。我们得到作用在 $(E^{\mathrm{reg}}_{\widehat{H}_k})_{|H_k}$ 上的留数自同态 $\mathrm{Res}_{H_k}(\nabla)$，它对任意 $x\in H_k$ 都在 $(E^{\mathrm{reg}}_{\widehat{H}_k|H_k})_{|\widehat{x}}$ 上诱导出 $\mathrm{Res}_{H_k}(\nabla)$。

6.2.6 格非分歧良好的条件

设 (V,∇) 是相对于 U、定义在 (X,H) 上且带有格 E 的亚纯平坦丛。设 $\Sigma\subset T^*((X\setminus H)/U)$ 是一个无分歧良亚纯拉格朗日覆盖。假设 U 不可约。设 $u:\mathrm{Spec}(\mathbb{K}_1)\to U$ 是一个几何点，由泛点的代数闭包得到。

引理 6.14 假设以下条件成立。

- $(\mathcal{E}_u,\nabla_u)$ 是非分歧良好的，并且 E_u 是非分歧良好的。
- Σ_u 是 $\boldsymbol{I}(\mathcal{E}_u,\nabla_u)$ 的一个代表。

于是，以下结论成立。

- $(\mathcal{E},\nabla)$ 是非分歧良好的，且 E 是非分歧良好的。

证明 设 $x\in H$ 为任意闭点。我们来证明 E 在 x 处是非分歧良好的。只需考虑存在一个截面 $U\to X$，其像 U_1 包含 x 的情形。我们可以假设 X 是仿射的，即 $X=\mathrm{Spec}(R)$。令 R_{U_1} 表示 R 沿 U_1 的完备化。我们有 $\mathcal{I}\subset R_{U_1}(*H)/R_{U_1}$，以及一个分解 $\Sigma=\bigsqcup_{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}}\Sigma_{\mathfrak{a}}$，使得 $\widehat{\ }$ 是对数的。利用引理 6.6，我们可以证明存在一个分解 $E_{|\widehat{x}}=\bigoplus_{\mathfrak{a}\in\mathcal{I}}E_{x,\mathfrak{a}}$，使得 $(\nabla-d\widetilde{\mathfrak{a}})E_{x,\mathfrak{a}}\subset E_{x,\mathfrak{a}}\otimes\Omega^1_{X/U}(\log H)$。

6.2.7 参数空间的细化

设 U， X， H 如 §6.2.1 中所述。设 $(\mathcal{E},\ \nabla)$ 是相对于 U、定义在 $(X,\ H)$ 上的亚纯可积联络。

命题 6.15 存在一个光滑的 $\mathbb{K}$-簇 $\widetilde{U}$，带有一个满射 $\widetilde{U} \to U$，以及一个射影双有理态射 $\varphi\colon X_{\widetilde{U}} \to X_{\widetilde{U}}$，使得以下结论成立。

- $\widehat{X}_{\widetilde{U}}$在 $\widetilde{U}$ 上光滑，并且 $\varphi^{-1}(H_{\widetilde{U}})$相对于 $\widetilde{U}$ 是正规交叉的，且具有平凡单值。
- $\varphi^*(\mathcal{E},\ \nabla)$ 是良好的。
- 存在 $\varphi^*(\mathcal{E},\ \nabla)$的一个良格 E 。

证明 只需考虑 $\mathbb{K}$ 是一个在 $\mathbb{Q}$ 上有限生成的域的代数闭包的情形。令$T \subset U$ 为任意局部闭不可约光滑子集。令 $u:\ \mathbb{K}_1 \to T$ 为 T 的泛点的代数闭包。我们在 (X_u, H_u) 上得到一个亚纯平坦联络 $(\mathcal{E}_u, \nabla_u)$。存在一个射影双有理态射 $\rho_u:\ \widehat{X}_u \to X_u$，使得 (i) $\widehat{H}_u = \rho_u^{-1}(H_u)$ 是简单正规交叉，(ii) $\widehat{X}_u \setminus \widehat{H}_u \simeq X_u \setminus H_u$，(iii)$\frown\ \frown\rho_u^*(\mathcal{E}_u, \nabla_u)$ 在 (X_u, H_u) 上是良好的。令 $\Sigma(\mathcal{E}_u, \nabla_u)$ 为拉格朗日不规则性 $\boldsymbol{I}(\mathcal{E}_u, \nabla_u)$ 的一个代表。我们固定一个嵌入 $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{C}$。存在一个 $(\mathcal{E}_u, \nabla_u)$ 的 $\mathbb{C}$-Deligne-Malgrange 格 $\mathcal{P}_0^{\mathrm{DM}}(\mathcal{E}_u)$。存在由 étale 坐标系 $(\mathcal{U}_{u,i}, \varphi_{u,i}, \psi_{u,i})$ 构成的 $\widehat{X}_u$ 的一个 étale 覆盖。在 $\mathcal{U}_{u\,i}^{(e)}$ 上，存在 $\varphi_{u,i,e}^*(\mathcal{E}_u, \nabla)$ 的非分歧良格 $\mathcal{P}_0^{\mathrm{DM}}\big(\varphi_{u,i,e}^*(\mathcal{E}_u)\big)$，。

$\widetilde{\ }\qquad\qquad\widehat{\ }\qquad\qquad\widehat{\ }$存在 T的一个Zariski开子集 T'、一个有限étale覆盖 $T' \to T'$、(X_u, ρ_u)的一个模型$(X_{T'}, \rho_{T'})$、$(\mathcal{U}_{u,i}, \varphi_{u,i}, \psi_{u,i})$的模型$(\mathcal{U}_{T',i}, \varphi_{T',i}, \psi_{T',i})$、$\mathcal{P}_0^{\mathrm{DM}}(\mathcal{E}_u)$的一个模型$\mathcal{P}_0^{\mathrm{DM}}(\mathcal{E}_{T'})$、 $\Sigma(\mathcal{E}_u, \nabla_u)$的一个模型$\Sigma_{T'}$，以及模型 $\mathcal{P}_0^{\mathrm{DM}}\big(\varphi_{T'、\ i、\ e}^*(\mathcal{E}_{T'})\big)$。由引理6.14，我们得到$\mathcal{P}_0^{\mathrm{DM}}\big(\varphi_{T'、\ i、\ e}^*(\mathcal{E}_{T'})\big)$ 是非分歧良好的。因此，我们得到 $\mathcal{P}_0^{\mathrm{DM}}(\mathcal{E}_{T'})$是良好的。

利用前面的论证和诺特归纳法，我们得到了命题 6.15 的结论。 ∎

6.3 有界不规则性的良好亚纯平坦丛的有界性

6.3.1 分歧不规则值的亚纯良系统

设 X 是一个光滑射影 $\mathbb{K}$-簇。设 H 是 X 的一个正规交叉超曲面 .

定义 6.16 设 $\boldsymbol{\mathcal{I}} = (\mathcal{I}_x \mid x \in H)$ 是一个由分歧不规则值的良好集合组成的元组 $\mathcal{I}_x \subset \widehat{\mathcal{O}}_{X\,x}^{(H)},\ (*H)/\widehat{\mathcal{O}}_{X\,x}^{(H)}$。若存在一个亚纯拉格朗日覆盖 $\Sigma \subset T^*(X \setminus H)$ 使得 $\boldsymbol{\mathcal{I}} = \boldsymbol{\mathcal{I}}(\Sigma)$，则称其为亚纯的。 ∎

设 $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ 是一个由不规则值的良好集合组成的亚纯元组。设 Σ 是一个亚纯拉格朗日覆盖，使得 $\boldsymbol{\mathcal{I}}(\Sigma) = \boldsymbol{\mathcal{I}}$。设 $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\Lambda}$，其中 Λ 表示 $H = \bigcup_{j\in\Lambda} H_j$ 的不可约分解的指标集。若 Σ 在 $T^*X(\log\ H)\big(\sum m_i H_i\big)$ 中的闭包在 X 上是真，则称 $\mathrm{ord}(\boldsymbol{\mathcal{I}}) \geq \boldsymbol{m}$。

引理 6.17 假设 $\mathrm{ord}(\boldsymbol{\mathcal{I}}) \geq \boldsymbol{m}$。设 (V, ∇) 是 (X, H) 上的一个良好亚纯平坦丛，使得$\boldsymbol{\mathcal{I}}(V) \subset \boldsymbol{\mathcal{I}}$。设 V_0 是 (V, ∇)的任意良格。则我们得到 $\nabla(V_0) \subset V_0 \otimes \Omega_X^1(\log\ H)\big(\sum m_i H_i\big)$。

证明 在非分歧情形中，我们可以通过直接计算来验证。一般情形可归结为非分歧情形。 ∎

6.3.2 良好亚纯平坦丛作为亚纯对象的有界性 $\mathbf{s}$

设 $X_S \to S$ 是 $\mathbb{K}$-簇的光滑射影态射，使得每个闭纤维都是连通的。设$H_S \subset X_S$ 是相对于 S 正规交叉的超曲面（见 §2.5.2）。对 S上的任意 $\mathbb{K}$-簇 S'，我们令 $X_{S'} = X_S \times_S S'$和 $H_{S'} = H_S \times_S S'$。对任意闭点 $s \in S$，设 $\mathcal{C}^{\mathrm{good}}(X_s, H_s, r, \boldsymbol{m})$ 是 (X_s, H_s) 上秩为 r的良好亚纯平坦丛 (V, ∇) 的一族，使得 $\mathrm{ord}(\boldsymbol{\mathcal{I}}) \geq \boldsymbol{m}$。

定理 6.18 该 存在一个 $\mathbb{K}$-簇 $\mathcal{S}$，其上有一个局部自由的 $\mathcal{O}_{X_{\mathcal{S}}}$-模 $E_{\mathcal{S}}$，以及一个可积联络

$$\nabla_{\mathcal{S}} : E_{\mathcal{S}} \to E_{\mathcal{S}} \otimes \Omega^1_{X_{\mathcal{S}}/\mathcal{S}}(*H_{\mathcal{S}})$$

相对于 $\mathcal{S}$，使得以下条件成立。

• 对于任意 $s \in S$，$(V, \nabla) \in \mathcal{C}^{\text{良好}}(X_s, H_s, r, \boldsymbol{m})$ 以及一个 $\mathbb{C}$-*Deligne-Malgrange* 格 V_0，存在 $\widetilde{s} \in \mathcal{S}$ 在 s 上，使得 $(V_0, \nabla) \simeq (E_{\mathcal{S}}, \nabla_{\mathcal{S}})_{\widetilde{s}}$。

• $(E_{\mathcal{S}}(*H_{\mathcal{S}})\ \nabla_{\mathcal{S}})$ 是相对于 $\mathcal{S}$ 定义在 $(X_{\mathcal{S}}, H_{\mathcal{S}})$ 上的良好亚纯平坦丛。

从这个意义上说，族 $(\mathcal{C}^{\text{good}}(X_s, H_s, r, \boldsymbol{m}) \mid s \in S(\mathbb{K}))$ 作为亚纯对象是有界的。

证明 设 $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ 满足 $\Omega^1_{X_s}(\log\ H_s)(\sum m_i H_{s,i}) \subset \Omega^1_{X_s}(NH_s)$。设 $M_2 > 0$ 如§5.6中所述，其中 $s \in S(\mathbb{K})$。对于 $s \in S(\mathbb{K})$，令 $\mathcal{G}_s(r)$ 为 X_s 上秩为 r 的局部自由层 E 构成的族，并满足以下条件。

• $|a_1(E)| + |a_2(E)| \leq C(r)$，其中 $a_i(E)$ 表示§5.7.1中定义的常值，而 $C(r)$ 表示命题5.32中的一个常值。

• $\mu_{\max}(E) \leq \mu(E) + r(M_2 + N \deg_\omega(H_s)) + A$，其中 A 表示命题5.32中的常值。（关于 $\mu_{\max}(E)$、$\mu(E)$ 和 M_2，参见§5.6。）

由 Maruyama 有界性定理 [20]（见命题 5.30），存在一个 $\mathbb{K}$-簇之间的态射 $\mathcal{S}_1 \to S$ 以及定义在 $X_{\mathcal{S}_1}$ 上的秩为 r 的局部自由层 $\mathcal{E}$，使得对于任意 $s \in S(\mathbb{K})$ 和任意 $E \in \mathcal{G}_s(r)$，都存在定义在 s 上的 $s_1 \in \mathcal{S}_1(\mathbb{K})$，使得 $\mathcal{E}_s \simeq E$。由命题 5.21，存在一个 $\mathbb{K}$-簇之间的态射 $\mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_1$ 和一个万有可积亚纯联络

$$\nabla^u : \mathcal{E}_{\mathcal{S}_2} \to \mathcal{E}_{\mathcal{S}_2} \otimes \Omega^1_{X_{\mathcal{S}_2/\mathcal{S}_2}}(NH_{\mathcal{S}_2})$$

相对于 $\mathcal{S}_2$，使得以下结论成立。

• 对于任意 $s_1 \in \mathcal{S}_1(\mathbb{K})$ 以及可积亚纯联络 $\nabla : \mathcal{E}_{s_1} \to \mathcal{E}_{s_1} \otimes \Omega^1_{X_{s_1}}$（$NH_{s_1}$），存在定义在 s_1 上的 $s_2 \in \mathcal{S}_2$，使得 $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}_2},\ \nabla^u)_{s_2} \simeq (\mathcal{E}_{s_1},\ \nabla)$。

通过细化 $\mathcal{S}_2$，我们可以假设 $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}_2}(*H_{\mathcal{S}_2})\ \nabla^u)$ 相对于 $\mathcal{S}_2$ 是良好的。

对于任意 $s \in S(\mathbb{K})$ 和 $(V,\ \nabla) \in \mathcal{C}^{\text{good}}(X_s,\ H_s,\ r,\ \boldsymbol{m})$，都存在一个 $\mathbb{C}$-Deligne-Malgrange 格 V_0，它属于 V，如命题5.32所述。根据推论 5.29，V_0 包含于 $\mathcal{G}_s(r)$。根据构造，存在 $s_2 \in \mathcal{S}_2$ 使得 $(V_0,\ \nabla) \simeq (\mathcal{E},\ \nabla^u)_{s_2}$。 ∎

注 6.19 稍后，我们将研究族 $(\mathcal{C}^{\text{good}}(X_s, H_s, r, \boldsymbol{m}) \mid s \in S(\mathbb{K}))$ 作为 $\mathcal{D}$-模的有界性（定理 8.2）。 ∎

6.4 Bou具有有界不规则性的亚纯平坦丛的有界性

设 X 是一个正规射影 $\mathbb{K}$-簇，带有一个超曲面 H，使得 $X \setminus H$ 光滑。存在一个闭子集 $Z \subset H$，满足 $\operatorname{codim}_X(Z) \geq 2$，使得 (i) $X^\circ = X \setminus Z$ 光滑，(ii) $H^\circ = H \setminus Z$ 是 X° 的正规交叉超曲面。我们还令 $H_i^\circ = H_i \setminus Z$。

对于 $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^\Lambda_{>0}$，令 $\mathcal{C}(X,\ H,\ r,\ \boldsymbol{m})$ 表示秩为 r 的亚纯平坦丛族 $(V,\ \nabla)$，其满足以下条件。（等价条件见命题 5.20。）

• 存在一个反身格 $V_0 \subset V$，使得 $\nabla(V_{0|X^\circ}) \subset V_0 \otimes \Omega^1_{X^\circ}(\log\ H^\circ)(\sum m_i H_i^\circ)$。

定理 6.20 存在一个光滑的 $\mathbb{K}$-簇 $\mathcal{S}$、一个上的光滑 $\mathbb{K}$-簇 $X_{\mathcal{S}}$、一个相对于 $\mathcal{S}$ 正规交叉的超曲面 $H_{\mathcal{S}} \subset X_{\mathcal{S}}$、一个相对于 $\mathcal{S}$ 的良好亚纯平坦丛 $(\mathcal{V}, \nabla)$ 在 $(X_{\mathcal{S}}, H_{\mathcal{S}})$ 上，以及一个格 $E_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{V}$，使得以下条件成立。

• $\rho_{\mathcal{S}}^{-1}(H \times \mathcal{S}) = \widehat{H}_{\mathcal{S}}$，以及 $\widehat{X}_{\mathcal{S}} \setminus \widehat{H}_{\mathcal{S}} \simeq (X \setminus H) \times \mathcal{S}$。

• 对于任意 $(V,\ \nabla) \in \mathcal{C}(X,\ H,\ r,\ \boldsymbol{m})$，存在 $s \in \mathcal{S}$，使得 $\rho_s^*(V,\ \nabla) \simeq (\mathcal{V},\ \nabla)_s$，并且 E_s 是 $\mathbb{C}$-德利涅-马尔格朗日格 $\rho_s^*(V,\ \nabla)$。

证明 令 $N > m_i + 1$，对任意 i 均成立。根据命题 2.66，存在一个光滑的 $\mathbb{K}$-簇 S、一个扎里斯基闭子集 $\Sigma_S \subset S \times T^*(X \setminus H)$ 以及一个射影态射 $\rho_S : X_S \to S \times X$，使得下述结论成立。

• $\Sigma_S \to S \times (X \setminus H)$ 是覆盖在 $S \times (X, H)$ 上的亚纯拉格朗日覆盖，并且 Σ_S 在 S 上是平坦的。任意纤维的个数小于 r。

• 对于任意在 (X°, H°) 上的亚纯拉格朗日覆盖 $\Sigma \subset T^*(X \setminus H)$，若 Σ 在 $T^*X^\circ(NH^\circ)$ 中的闭包在 X° 上是真的，则存在 $s \in S$ 使得 $\Sigma = \Sigma_S \times_S s =: \Sigma_s$。

- $\widehat{X}_S$ 在 S上是光滑射影的，且$\widehat{H}_S = \rho_S^{-1}(S \times H)$相对于 S是正规交叉的。
- 对每个 $s \in S$，$\rho_s^*(\Sigma_s)$ 在 $(X_s, H_s) = (\widehat{X}_S, \widehat{H}_S) \times_S s$ 上是良好的，其中 $\rho_s\colon X_s \to X$ 表示由 ρ_S 诱导的态射。
- 对于任意光滑的 $\mathbb{K}$-簇 T，其上的 S，我们定义 $(X_T, H_T) = (X_S, H_S) \times_S T$。

令 S' 为 S 的一个连通分支。令 $H_{S'} = \bigcup_{i\in\Lambda(S')} H_{S',i}$ 表示不可约分解。对于每个 $s \in S'$，我们在 $(\widehat{X}_s, \widehat{H}_s)$ 上得到元组 $\boldsymbol{\mathcal{I}}(\Sigma_s)$。存在 $\boldsymbol{m}(S') \in \mathbb{Z}^{\Lambda(S')}_{\geq 0}$，使得对于任意 $s \in S'$，$\mathrm{ord}(\boldsymbol{\mathcal{I}}(\Sigma_s)) \geq \boldsymbol{m}(S')$。

根据定理 6.18，存在一个 $\mathbb{K}$-簇的态射 $S_1 \to S$，一个局部自由的 $\mathcal{O}_{\widehat{X}_{S_1}}(*\widehat{H}_{S_1})$-模 $\widetilde{\mathcal{V}}^u_{S_1}$ 带有相对于 S_1 的可积亚纯联络 $\nabla\colon \widetilde{\mathcal{V}}^u_{S_1} \to \widetilde{\mathcal{V}}^u_{S_1} \otimes \Omega^1_{\widehat{X}_{S_1}/S_1}$，以及 $\widetilde{\mathcal{V}}^u_{S_1}$ 的一个格 $\widetilde{E}_{S_1}$，使得下列结论成立。

- $(\widetilde{\mathcal{V}}^u_{S_1}, \nabla)$ 相对于 S_1 是良好的。
- 设 $s' \in S' \subset S$ 为任意闭点。设 (V, ∇) 为 (X_s, H_s) 上的良好亚纯平坦丛，使得 $\boldsymbol{\mathcal{I}}(V) \geq \boldsymbol{m}(S')$。则存在 s 上的 $s_1 \in S_1$，使得 $(\mathcal{V}^u_{S_1}, \nabla)_{|s_1} \simeq \rho_{s_1}^*(V, \nabla)$，并且 E_{s_1} 是 $\rho_{s_1}^*(V, \nabla)$ 的 $\mathbb{C}$-DM 格。

通过细化 S_1，我们还可以作如下假设。

- $(\mathcal{V}^u_{S_1}, \nabla)$ 的亚纯拉格朗日不规则性等于 $\boldsymbol{I}(\Sigma_{S_1})$。

令 $(V, \nabla) \in \mathcal{C}(X, H, r, \boldsymbol{m})$。令 $\boldsymbol{I}(V, \nabla)$ 为相关亚纯拉格朗日不规则性。任取$\Sigma(V, \nabla) \in \boldsymbol{I}(V, \nabla)$。由命题 5.20，$\Sigma(V, \nabla)$ 在 $T^*(X^\circ)(\log H^\circ)(\sum m_i H_i^\circ)$ 中的闭包在 X° 上是真映射。存在 $s \in S$，使得 $\Sigma(V, \nabla) = \Sigma_s$，且 $\rho_s^*\Sigma(V, \nabla)$ 在 (X_s, H_s) 上良好。由定理 5.19，$\rho_s^*(V, \nabla)$ 在 (X_s, H_s) 上良好，并且 $\mathrm{I}(\rho_s^*(V, \nabla)) = \mathrm{I}(\Sigma(V))$。因此，存在位于 s 上的 $s_1 \in S_1$，使得 $(\mathcal{V}^u_{S_1}, \nabla)_{|s_1} \simeq \rho_{s_1}^*(V, \nabla)$，且 E_{s_1} 是 $\rho_{s_1}^*(V, \nabla)$ 的 $\mathbb{C}$-Deligne-Malgrange 格。∎

推论 6.21 存在一个光滑的 $\mathbb{K}$-簇 $\mathcal{S}_1$，以及一个相干无挠 $\mathcal{O}_{\mathcal{S}_1 \times X}$-模 $E_{\mathcal{S}_1}$，其上带有亚纯可积联络

$$\nabla_{\mathcal{S}_1} : E_{\mathcal{S}_1} \to E_{\mathcal{S}_1} \otimes \Omega^1_{\mathcal{S}_1 \times X/\mathcal{S}_1}(*(H \times \mathcal{S}_1))$$

相对于 $\mathcal{S}_1$，使得以下结论成立。

- $E_{\mathcal{S}_1}$ 是一个反身 $\mathcal{O}_{\mathcal{S}_1 \times X}$-模，且在 $\mathcal{S}_1$ 上平坦。
- 对于任意 $(V, \nabla) \in \mathcal{C}(X, H, r, \boldsymbol{m})$，存在 $s \in \mathcal{S}_1$ 以及一个 $\mathbb{C}$-*Deligne-Malgrange* 格 V_0，它属于 (V, ∇)，使得$(E_{\mathcal{S}}, \nabla_{\mathcal{S}})_{s_1} \simeq (V_0, \nabla)$。

从这个意义上说，族 $\mathcal{C}(X, H, r, \boldsymbol{m})$ 是有界的。

证明 通过细化 $\mathcal{S}$，我们可以假设 $\rho_{\mathcal{S}*}\widehat{E}_{\mathcal{S}}$ 和 $(\rho_{\mathcal{S}*}\widehat{E}_{\mathcal{S}})^\vee$ 在 $\mathcal{S}$ 上平坦。令 $E_{\mathcal{S}} = \big((\rho_{\mathcal{S}*}\widehat{E}_{\mathcal{S}})^\vee\big)^\vee$。通过细化 $\mathcal{S}$，我们可以假设 $(E_{\mathcal{S}}) \simeq \big((\rho_{\mathcal{S}*}\widehat{E}_{\mathcal{S}})^\vee\big)^\vee$。此外，我们可以假设对于任意$s \in \mathcal{S}(\mathbb{K})$，$(E_{\mathcal{S}})_s \simeq \big((\rho_{\mathcal{S}*}\widehat{E}_{\mathcal{S}})^\vee_s\big)^\vee$。特别地，$(E_{\mathcal{S}})_s$ 是反身的。

我们有由（$E_{\mathcal{S}}, \nabla$）诱导的 $E_{\mathcal{S}}$的亚纯可积相对联络 $\nabla_{\mathcal{S}}$。如果（$E_{\mathcal{S}}$）$_s$是某个 $s \in \mathcal{S}$（$\mathbb{K}$）的（（$E_{\mathcal{S}}$）$_s$（$*H_s$） ∇）的良好$\mathbb{C}$-Deligne-Malgrange 格，则存在 $Z \subset H$，使得 codim_X（Z） ≥ 2，并且（$E_{\mathcal{S}}$）$_{s|X\setminus Z}$是（（$E_{\mathcal{S}}$）$_s$（$*H$） ∇）的 $\mathbb{C}$-Deligne-Malgrange 格$_{|X\setminus Z}$。由于（$E_{\mathcal{S}}$）$_s$是自反的，（$E_{\mathcal{S}}$）$_s$是（（$E_{\mathcal{S}}$）$_s$（$*H$） ∇）的 $\mathbb{C}$-DM 格。∎

7 $\mathcal{D}$-模族

7.1 $\mathcal{D}$-模族

7.1.1 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模

设 $\mathbb{K}$ 是一个特征零的代数闭域。设 S 是一个 $\mathbb{K}$-概形。设 X_S 是定义在 S 上的相对维数为 n的拟射影光滑概形，即 $n =$ 秩 $\Omega^1_{X_S/S}$。令 $\mathcal{D}_{X_S/S}$ 表示 X_S 相对于 S的微分算子层。代数层 $\mathcal{D}_{X_S/S}$ 按照 [10, 定义 1.4.8] 的意义是一个凝聚环层。

我们令 $\Omega_{X_S/S}=\bigwedge^n\Omega^1_{X_S/S}$。对于任意左 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模 M，可得到一个右 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模 $\Omega_{X_S/S}\otimes_{\mathcal{O}_{X_S}}M$。反之，对于任意右 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模 N，可得到一个左 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模 $N\otimes_{\mathcal{O}_{X_S}}(\Omega^{X_S/S})^{-1}$。这些过程在左 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模与右 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模之间诱导出一个等价。本文将考虑左$\mathcal{D}_{X_S/S}$-模。下面的引理显然。

引理 7.1 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模的范畴 $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_{X_S/S})$ 是一个阿贝尔范畴。相干$\mathcal{D}_{X_S/S}$-模的全子范畴 $\mathrm{Mod}_c(\mathcal{D}_{X_S/S})$是一个阿贝尔子范畴，且对扩张封闭。类似地，拟相干 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模的全子范畴 $\mathrm{Mod}_{qc}(\mathcal{D}_{X_S/S})$ 是一个阿贝尔子范畴，且对扩张封闭。 ∎

令 $D(\mathcal{D}_{X_S/S})$ 表示 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模复形的导出范畴。令 $D_c(\mathcal{D}_{X_S/S})$（分别地， $D_{qc}(\mathcal{D}_{X_S/S})$）表示 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模的上同调相干（分别地，拟相干）复形的导出范畴。令$D^b(\mathcal{D}_{X_S/S})\subset D(\mathcal{D}_{X_S/S})$、 $D^b_c(\mathcal{D}_{X_S/S})\subset D_c(\mathcal{D}_{X_S/S})$ 和 $D^b_{qc}(\mathcal{D}_{X_S/S})\subset D_{qc}(\mathcal{D}_{X_S/S})$ 表示上同调有界对象的全子范畴。

定义 7.2 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模若在 $\mathcal{O}_S$ 上平坦，则称为 S-平坦。 $D(\mathcal{D}_{X_S/S})$ 中的对象若在上同调意义下 S-平坦，则称为 S-平坦。 ∎

注 7.3 $\mathcal{D}$-模族的解析理论已在 [1, 2] 中建立。 ∎

7.1.2 参数方向上的函子性

设 $g\colon S'\to S$ 是任意的 $\mathbb{K}$-概形态射。记 $X_{S'}=X_S\times_S S'$。诱导态射 $X_{S'}\to X_S$ 也记作 g。我们有代数层 $g^{-1}(\mathcal{D}_{X_S/S})\to\mathcal{D}_{X_{S'}/S'}$ 的自然态射。

逆像 我们假设 S 是一个光滑的 $\mathbb{K}$-簇。对于任意 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模 M，

$$g^*(M):=\mathcal{O}_{X_{S'}/S'}\otimes_{g^{-1}\mathcal{O}_{X_S}}g^{-1}(M)\simeq\mathcal{D}_{X_{S'}/S'}\otimes_{g^{-1}(\mathcal{D}_{X_S/S})}g^{-1}(M)$$

它自然是一个 $\mathcal{D}_{X_{S'}/S}$-模。通过令 $Lg^*\colon D^b_c(\mathcal{D}_{X_S/S})\to D^b_c(\mathcal{D}_{X_{S'}/S'})$，我们得到

$$Lg^*(M^\bullet)=\mathcal{D}_{X_{S'}/S'}\otimes^L_{g^{-1}(\mathcal{D}_{X_S/S})}g^{-1}(M^\bullet).$$

它还诱导出 $Lg^*\colon D^b_{qc}(\mathcal{D}_{X_S/S})\to D^b_{qc}(\mathcal{D}_{X_{S'}/S'})$。

引理 7.4 若 M是 S-平坦的，则有 $Lg^*(M)\simeq g^*(M)$。

证明 令 $\mathbb{K}_{X_{S'}}$ 表示 $X_{S'}$上取值于 $\mathbb{K}$ 的局部常值函数层。它自然地是一个代数层。令 $D(\mathbb{K}_{X_{S'}})$ 表示 $\mathbb{K}_{X_{S'}}$-复形的导出范畴。存在自然遗忘函子$a\colon D(\mathcal{D}_{X_{S'}/S'})\to D(\mathbb{K}_{X_{S'}})$。只需证明，对于任意 $j<0$， $a(Lg^*(M))$ 的 j 次上同调层消失。

令 $g^{-1}\mathcal{O}_{X_S}\xrightarrow{\pi}X_{S'}\to S'$ $\mathcal{O}_{X_{S'}}\simeq\pi^{-1}\mathcal{O}_{S'}\otimes_{\pi^{-1}g^{-1}\mathcal{O}_S}$：表示投影。存在自然同构 ( ) ( )，并且

$$\mathcal{D}_{X_{S'}/S'}\simeq\pi^{-1}(\mathcal{O}_{S'})\otimes_{\pi^{-1}g^{-1}\mathcal{O}_S}g^{-1}(\mathcal{D}_{X_S/S}).$$

令 $\mathcal{P}\to\mathcal{O}_{S'}$ 为一个 $g^{-1}(\mathcal{O}_S)$-平坦分解。我们得到右 $g^{-1}\mathcal{D}_{X_S/S}$-模复形的拟同构

$$\pi^{-1}(\mathcal{P})\otimes_{\pi^{-1}g^{-1}\mathcal{O}_S}g^{-1}(\mathcal{D}_{X_S/S})\to\mathcal{D}_{X_{S'}/S'}.$$

这是 $g^{-1}(\mathcal{D}_{X_S/S})$-平坦消解 $\mathcal{D}_{X_{S'}/S'}$。于是， $a(Lg^*(M))$ 可表示为

$$\Big(\pi^{-1}(\mathcal{P})\otimes_{\pi^{-1}g^{-1}\mathcal{O}_S}g^{-1}(\mathcal{D}_{X_S/S})\Big)\otimes_{g^{-1}\mathcal{D}_{X_S/S}}g^{-1}(M)\simeq\pi^{-1}\mathcal{P}\otimes_{\pi^{-1}g^{-1}(\mathcal{O}_S)}g^{-1}(M).$$

由于 M 是 S-平坦的，对于任意 $j<0$， $a(Lg^*(M))$ 的 j 次上同调层消失。 ∎

注 7.5 如果 M 是 S-平坦的， $g^*(M)$ 通常记作 $M_{S'}$。 ∎

直接像 我们假设 S 和 S' 都是光滑的 $\mathbb{K}$-簇。对于任意 $\mathcal{D}_{X_{S'}/S'}$-模 N，我们得到 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模 $g_{X*}(N)$。对于任意 $\mathcal{D}_{X_{S'}/S'}$-复形 $N^\bullet$，通过取一个 $\mathcal{D}_{X_{S'}/S'}$-内射分解 $N^\bullet\to\mathcal{J}$，我们得到一个由 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模组成的复形 $g_{X*}(\mathcal{J})$。这样，我们得到 $Rg_*\colon D^b(\mathcal{D}_{X_{S'}/S'})\to D^b(\mathcal{D}_{X_S/S})$。我们假设 S 和 S' 都是光滑的 $\mathbb{K}$-簇。它还诱导出 $Rg_*\colon D^b_{qc}(\mathcal{D}_{X_{S'}/S'})\to D^b_{qc}(\mathcal{D}_{X_S/S})$。如果 g 是真概形，我们还得到 $D^b_c(\mathcal{D}_{X_{S'}/S'})\to D^b_c(\mathcal{D}_{X_S/S})$。

7.1.3 良滤过

假设 S 是一个诺特 $\mathbb{K}$-概形。我们有由微分算子的阶所给出的自然滤过 $F(\mathcal{D}_{X_S/S})$，其中 $\mathcal{D}_{X_S/S}$ 是意义下的滤过环层，见 $[12, \text{A.1(c)}]$。设 M 是一个相干 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模。相干 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模的良滤过概念按标准方式定义。也就是说，它是一个递增滤过 $F(M)$，其各项都是相干 $\mathcal{O}_{X_S}$-子模，并满足以下条件。

- $\bigcup F_j(M) = M$。存在 $j_0(x)$，使得 $F_{j_0}(M) = 0$。
- $F_j\mathcal{D}_{X_S/S} \cdot F_k(M) \subset F_{j+k}(M)$。
- $\bigoplus F_j(M)$ 是 $\bigoplus F_j(\mathcal{D}_{X_S/S})$ 上的相干模。

与 $\mathcal{D}_X$-模的情形一样，这样的良滤过总是存在的。此外，如果 F和 F'是两个这样的滤过，则存在 $i_0 > 0$，使得对于任意 $j \in \mathbb{Z}$， $F'_{j-i_0}(M) \subset F_j(M) \subset F'_{j+i_0}(M)$（参见 $[10, \text{定理 2.1。}3]$）。取关于该滤过的分次，我们得到相干的 $\mathrm{Gr}^F(\mathcal{D}_{X_S/S})$-模 $\mathrm{Gr}^F(M)$。令$T^*(X_S/S)$表示 X_S在 S上的相对余切丛。由 $\mathrm{Gr}^F(M)$ 可得到一个相干的 $\mathcal{O}_{T^*(X_S/S)}$ -模 $\mathrm{Gr}^F(M)$~。其支集与良滤过的选择无关，这与 $\mathcal{D}_X$-模的情形相同（参见 $[10, \text{定理 2.2。}1]$）。该支集记为 $\mathrm{Ch}(M)$，称为 M 的特征簇。

定义 7.6 若良滤过 $F(M)$ 是 S-平坦的，则称其为 S-平坦的，当且仅当 $\mathrm{Gr}^F(M)$ 在 $\mathcal{O}_S$ 上是平坦的。 ∎

引理 7.7 假设 M 具有一个 S-平坦的良滤过 F。

- $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模 M 以及 $\mathcal{O}_{X_S}$-模 $F_j(M)$ 在 S 上是平坦的。
- 设 $\iota\colon S' \to S$ 是一个局部闭子集的浸入。诱导态射 $X_{S'} \to X_S$ 也记作 ι。那么， $\iota^*F(M) = (\iota^*F_j(M))$ 是 $\mathcal{D}_{X_{S'}/S'}$-模 $\iota^*(M)$的一个 S'-平坦良滤过。我们还有 $\iota^*\mathrm{Gr}^F(M) = \mathrm{Gr}^{\iota^*F}(\iota^*M)$。 ∎

引理 7.8 设 M 是任意一个相干 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模。对于 M的任意良滤过 F，存在 S 的一个非空开子集 S'，使得 $M_{|X_{S'}}$ 的诱导良滤过 F 是 S'-平坦的。特别地， $M_{|X_{S'}}$ 是 S'-平坦的。

证明 根据 $[6, \text{定理 6.9}, 1]$, 存在 S 的一个非空开子集 S'，使得 $\mathrm{Gr}^F(M)_{|X_{S'}}$ 在 S' 上平坦。 ∎

推论 7.9 对于任意相干 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模之间的态射 $\varphi: M_1 \to M_2$，存在一个非空 *Zariski* 开子集 S'，使得 核 $\varphi_{|X_{S'}}$、像 $\varphi_{|X_{S'}}$ 和 余核 $\varphi_{|X_{S'}}$ 都具有 S'-平坦的良滤过。这里，$\varphi_{|X_{S'}}$ 表示诱导态射 $M_{1|X_{S'}} \to M_{2|X_{S'}}$。 ∎

推论 7.10 对于任意 S-平坦相干 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模 M，存在一个分解 $S = \bigsqcup_{j\in\Gamma} S_j$，使得每个 M_{S_j} 都具有 S_j-平坦的良滤过。对于任意 S-平坦相干 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模之间的态射 φ: $M_1 \to M_2$，存在一个分解 $S = \bigsqcup S_j$，使得 $M_{1,\ S_j}$、$M_{2,\ S_j}$核 φ_{S_j}、像 φ_{S_j} 和 余核 φ_{S_j} 都具有 S-平坦的良滤过。这里，$\varphi_{S_j}: M_{1,\ S_j} \to M_{2,\ S_j}$ 表示诱导态射。 ∎

回顾一下， S 的几何点是一个态射 $\eta: \mathrm{Spec}(\mathbb{K}_1) \to S$，其中 $\mathbb{K}_1$ 是代数闭域。诱导的 $\mathbb{K}_1$-簇记作 X_η。诱导的 $\mathcal{D}_{X_\eta}$-模记作 M_η。

推论 7.11 假设 S 不可约。设 η 是由 S的泛点取代数闭包得到的几何点。设 M 是一个相干 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模，使得 $M_\eta = 0$。那么，存在一个 $\mathbb{K}$-概形之间的支配拟有限平展态射 $f\colon S' \to S$，使得 ***(i)*** η经由 f分解，***(ii)*** $f^*M = 0$。

证明 只需考虑 S、 X_S 和 $T^*(X_S/S)$ 都是仿射的情形。我们可以假设 M 具有一个 S-平坦的良滤过 F。它在 M_η 上诱导出一个良滤过 F_η。由于 $\mathrm{Gr}^{F_\eta}(M_\eta) = 0$，我们得到 $\eta^*\mathrm{Gr}^F(M) = 0$。由于 $T^*(X_S/S)$ 是仿射的，存在截面 a_1、……、a_m，它们在 $\mathcal{O}_{T^*(X_S/S)}$ 上生成 $\mathrm{Gr}^F(M)$。存在一个支配拟有限平展态射 $f\colon S' \to S$，使得 $f^*(m_i)$ 在 $f^*\mathrm{Gr}^F(M)$ 中为 0。这意味着 $f^*\mathrm{Gr}^F(M) = 0$ 且 $f^*(M) = 0$。 ∎

7.1.4 全纯椭圆 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模

设 M 是一个 S-平坦的相干 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模。

定义 7.12 M 称为全纯椭圆的，如果存在一个由局部闭不可约子集构成的分解 $\bigsqcup_{j\in\Gamma} S_j$，使得 *(i)* 每个 M_{S_j} 都有一个 S_j-平坦良滤过，*(ii)* $\dim \mathrm{Ch}(M_{S_j}) = \dim X_{S_j}$。 ∎

引理 *7.13 </style}*相干 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模 M 是全纯椭圆的，当且仅当满足以下条件。

(A) 对于 S 的任意几何点 η， M_η 都是全纯椭圆 $\mathcal{D}_{X_\eta}$-模。

证明 存在一个分解 $S = \bigsqcup S_j$，使得每个 M_{S_j} 都有一个 S_j-平坦良滤过 F。令 $\eta\colon \mathrm{Spec}(\mathbb{K}_1) \to S$ 为 S 的任意几何点。存在 S_j 使得 η 经由 S_j分解。 M_{S_j}的 S_j-平坦良滤过 F诱导出 M_η的一个良滤过 F_η，满足 $\mathrm{Gr}^{F_\eta}(M_\eta) = \mathrm{Gr}^F(M_{S_j}) \otimes_{\mathcal{O}_{S_j}} \mathbb{K}_1$。于是，结论显然成立。 ∎

7.1.5 态射的模型

假设 S 不可约。设 M_i $(i = 1, 2)$ 为相干的 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模。

引理 7.14 设 $\eta\colon$ 谱 $\mathbb{K}_1 \to S$ 是由 S 的泛点的代数闭包得到的几何点。对于任意态射 $\varphi : M_{1,\eta} \to M_{2,\eta}$，存在一个 $\mathbb{K}$-簇之间的支配拟有限平展态射 $f\colon S' \to S$，以及一个 $\mathcal{D}_{X_{S'}/S'}$-模态射 $\varphi_{S'}\colon f^*(M_1) \to f^*(M_2)$，使得 *(i)* η 经由 f 分解，*(ii)* φ 由 $\varphi_{S'}$ 诱导，*(iii)* $f(S')$ 包含 S 的一个 *Zariski* 开子集。 ∎

7.2 基本函子性

7.2.1 沿纤维方向拉回

设 S 是一个光滑的 $\mathbb{K}$-簇。设 $f\colon X_S \to Y_S$ 是 S 上 $\mathbb{K}$-簇之间的态射。记 $\mathcal{D}_{(X_S\to Y_S)/S} := f^*\mathcal{D}_{Y_S/S}$，它自然地是一个左 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模和右 $f^{-1}\mathcal{D}_{Y_S/S}$-模。对于任意左 $\mathcal{D}_{Y_S/S}$-模 M，记

$$Lf^*(M) = \mathcal{D}_{(X_S\to Y_S)/S} \otimes^L_{f^{-1}\mathcal{D}_{Y_S/S}} f^{-1}(M).$$

它诱导出 $Lf^*\colon\ D^b(\mathcal{D}_{Y_S/S}) \to D^b(\mathcal{D}_{X_S/S})$。它还诱导出 $Lf^*\colon\ D^b_{qc}(\mathcal{D}_{Y_S/S}) \to D^b_{qc}(\mathcal{D}_{X_S/S})$，如$\mathcal{D}$-模的情形。（参见 [10, 命题 1.5.8]。另参见 [10,备注 1.5.10]。）

7.2.2 纤维方向上的正像

设 $f : X_S \to Y_S$ 是一个射影态射。我们定义

$$\mathcal{D}_{(Y_S\leftarrow X_S)/S} = \Omega^{-1}_{X_S/S} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{Y_S}} f^*(\mathcal{D}_{Y_S/S} \otimes \Omega_{Y_S/S}).$$

对于任意 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-复形 $M^\bullet$，我们得到

$$f_\dagger(M^\bullet) := Rf_*\Big(\mathcal{D}_{(Y_S\leftarrow X_S)/S} \otimes^L_{\mathcal{D}_{X_S/S}} M^\bullet\Big) \in D^b(\mathcal{D}_{Y_S/S}).$$

以下结果是 [10, 定理 2.5.1] 的一个类似结果。

命题 7.15 我们得到函子 $f_\dagger\colon D^b_\sharp(\mathcal{D}_{X_S/S}) \to D^b_\sharp(\mathcal{D}_{Y_S/S})\,(\sharp = c, qc)$. ∎

对于任意局部闭光滑子集 $T \subset S$，令 $f_T\colon X_T \to Y_T$ 表示诱导态射。令 $\iota_X\colon X_T \to X_S$ 和 $\iota_Y : Y_T \to Y_S$ 表示包含映射。

引理 7.16 对于 $M \in D^b_c(\mathcal{D}_{Y_S/S})$，存在自然同构

$$f_{S\dagger}\iota_{X*}(M) \simeq \iota_{Y*}f_{T\dagger}(M).$$

证明 存在以下自然同构

$$\mathcal{D}_{(Y_S\leftarrow X_S)/S}\otimes^L_{\mathcal{D}_{X_S/S}}\iota_{X*}M\longrightarrow\iota_{X*}\big(\iota_X^{-1}\mathcal{D}_{(Y_S\leftarrow X_S)/S}\otimes^L_{\iota_X^{-1}\mathcal{D}_{X_S/S}}M\big)\longrightarrow\iota_{X*}\big(\mathcal{D}_{(Y_T\leftarrow X_T)/T}\otimes^L_{\mathcal{D}_{X_T/T}}M\big).$$

容易验证，复合是 $D^b(f_S^{-1}(\mathcal{D}_{Y_S/S}))$ 中的同构。我们得到 $D^b(\mathcal{D}_{Y_S/S})$ 中的如下同构：

$$f_{S\dagger}(\iota_{X*}M)\simeq f_{S*}\circ\iota_{X*}\big(\mathcal{D}_{(Y_T\leftarrow X_T)/T}\otimes^L_{\mathcal{D}_{X_T/T}}M\big)\simeq\iota_{Y*}f_{T\dagger}(M).$$

∎

命题 7.17 设 M 是一个 S-平坦相干 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模。则存在一个由局部闭光滑子集构成的分解 $S=\bigsqcup_{i\in\Lambda}S_i$，使得 $f^k_{S_i\dagger}(M_{S_i})$ $(k\in\mathbb{Z})$ 是 S_i-平坦相干 $\mathcal{D}_{X_{S_i}/S_i}$-模。对于任意局部闭光滑子集 $T\subset S_i$，存在自然同构 $f^k_{S_i\dagger}(M_{S_i})_T\simeq f^k_{T\dagger}(M_T)$。

证明 设 $S'\subset S$ 是任意一个局部闭光滑子集。由引理 7.8，存在一个非空开子集$S''\subset S'$，使得 $f^k_{S''\dagger}(M_{S''})$ 是 S''-平坦的。

设 T 是 S的一个局部闭光滑子集。令 $\iota_X:\ X_T\to X_S$ 和 $\iota_Y:\ Y_T\to Y_S$ 表示诱导包含映射。设 $\mathcal{J}$ 是一个上同调有界的 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-内射复形。设 $\iota_X^{-1}\mathcal{J}^\bullet\to\mathcal{J}_1$ 是一个 $\iota_X^{-1}\mathcal{D}_{X_S/S}$-内射复形。存在如下自然态射：

$$\iota_Y^{-1}f_{S*}(\mathcal{J})\to f_{T*}\iota_X^{-1}(\mathcal{J})\to f_{T*}\mathcal{J}_1.$$

因此，存在一个自然态射

$$\begin{aligned}\iota_Y^{-1}\Big(Rf_{S*}\big(\mathcal{D}_{(Y_S\leftarrow X_S)/S}\otimes^L_{\mathcal{D}_{X_S/S}}M\big)\Big)\longrightarrow Rf_{T*}\iota_X^{-1}\big(\mathcal{D}_{(Y_S\leftarrow X_S)/S}\otimes^L_{\mathcal{D}_{X_S/S}}M\big)\\ \simeq Rf_{T*}\big(\iota_X^{-1}\mathcal{D}_{(Y_S\leftarrow X_S)/S}\otimes^L_{\iota_X^{-1}\mathcal{D}_{X_S/S}}\iota_X^{-1}M\big).\quad(50)\end{aligned}$$

设 $g:\ \iota_Y\circ f_T=f_S\circ\iota_X$。存在自然同构

$$f_T^{-1}(\mathcal{D}_{Y_T/T})\otimes_{g^{-1}\mathcal{D}_{Y_S/S}}\iota_X^{-1}(\mathcal{D}_{(Y_S\leftarrow X_S)/S})\simeq f_T^{-1}(\mathcal{D}_{Y_T/T})\otimes^L_{g^{-1}\mathcal{D}_{Y_S/S}}\iota_X^{-1}(\mathcal{D}_{(Y_S\leftarrow X_S)/S})\simeq\mathcal{D}_{(Y_T\leftarrow X_T)/T}.$$

因此，在 $D^b_c(\mathcal{D}_{Y_T/T})$ 中存在如下自然态射：

$$L\iota_Y^*\big(f_{S\dagger}(M)\big)\longrightarrow f_{T\dagger}L\iota_X^*(M)\tag{51}$$

我们来验证 (51) 是一个拟同构。只需验证 $X=Y\times\mathbb{P}^m$ 对某个正整数 m 成立、Y 是仿射的且 f 是投影的情形。只需证明 $\iota_{Y*}L\iota_Y^*\big(f_{S\dagger}(M)\big)\to\iota_{Y*}f_{T\dagger}L\iota_X^*(M)$ 是一个拟同构。设 $\mathcal{P}_Y\to\iota_{Y*}\mathcal{O}_Y$ 是由有限秩局部自由 $\mathcal{O}_X$-模构成的有限分解。我们有

$$\iota_{Y*}L\iota_Y^*\big(f_{S\dagger}(M)\big)\simeq f_{S\dagger}(M\otimes f_S^*\mathcal{P}_Y)\simeq f_{S\dagger}\big(\iota_{X*}L\iota_X^*(M)\big)\simeq\iota_{Y*}f_{T\dagger}(L\iota_X^*M).$$

通过诺特归纳，我们得到命题 7.17 的结论。∎

推论 7.18 假设 M 是 S-平坦的，且 $Y=S$。那么，存在一个由局部闭光滑子集构成的分解 $S=\bigsqcup S_i$，使得 $f^j_{S_i\dagger}(M_{S_i})$ 是局部自由 $\mathcal{O}_{S_i}$-模。此外，对任意闭点 $s\in S_i$，存在自然同构 $f^j_{s\dagger}(M_{S_i})_{|s}\simeq H^{\dim X+j}(X_s,M_s\otimes\Omega^\bullet)$。

∎

7.2.3 对偶性

假设 S 在 $\mathbb{K}$上是光滑拟射影的。令 n表示 X_S 在 S上的相对维数。对于任意$\mathcal{D}_{X_S/S}$-复形 $M^\bullet$，我们定义

$$\mathbb{D}(M^\bullet)=R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M^\bullet,\mathcal{D}_{X_S/S}\otimes\Omega^{-1}_{X_S/S})[n]\in D(\mathcal{D}_{X_S/S}).$$

它诱导出一个反变函子 $\mathbb{D}\colon D^b_c(\mathcal{D}_{X_S/S})\to D^b_c(\mathcal{D}_{X_S/S})$。

命题 7.19 设 M是一个全纯椭圆 S-平坦 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模。则存在由局部闭光滑子集构成的分解 $S=\bigsqcup_{j\in\Gamma}S_j$，使得 $\mathbb{D}(M_{S_j})$ 是平坦于 S_j 的全纯椭圆 $\mathcal{D}_{X_{S_j}/S_j}$-模。对于任意局部闭光滑子集 $T\subset S_j$，存在自然同构 $\mathbb{D}(M_{S_j})_T\simeq\mathbb{D}(M_T)$。

证明 设 $S'\subset S$ 是任意光滑不可约局部闭子集。设 $\mathcal{P}\to M_{S'}$ 是一个有限 $\mathcal{D}_{X_{S'/S'}}$-射影消解。则， $\mathbb{D}(M_{S'})$ 可表示为

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_{S'/S'}}}\big(\mathcal{P},\mathcal{D}_{X_{S'/S'}}\otimes\Omega^{-1}_{X_{S'/S'}}\big)[n].$$

设 $\eta:\ \mathrm{Spec}(\mathbb{K}_1)\to S'$ 是由 S' 的泛点的代数闭包得到的一个几何点。诱导态射 $X_\eta\to X_{S'}$ 也记作 η。我们得到诱导的局部射影 $\mathcal{D}_{X_\eta}$-消解 $\eta^*\mathcal{P}\to M_\eta$。存在如下自然同构：

$$\eta^*\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_{S'}}}\big(\mathcal{P},\mathcal{D}_{X_{S'/S'}}\otimes\Omega^{-1}_{X_{S'/S'}}\big)[n]\simeq\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_\eta}}\big(\eta^*\mathcal{P},\mathcal{D}_{X_\eta}\otimes\Omega^{-1}_{X_\eta}\big)[n].\tag{52}$$

我们得到 $(\mathbb{D}(M_{S'}))_\eta=\mathbb{D}(M_\eta)$，它是一个全纯椭圆 $\mathcal{D}_{X_\eta}$-模。因此，存在一个 Zariski 开子集$S''\subset S'$，使得 $\mathbb{D}(M_{S''})$ 是一个全纯椭圆 S''-平坦 $\mathcal{D}_{X\times S''/S''}$-模。

设 T 是 S 的一个局部闭子集。令 $\iota:X_T\to X_S$ 表示包含映射。我们得到诱导的局部射影 $\mathcal{D}_{X_T/T}$-消解 $\iota^*\mathcal{P}\to M_T$。存在同构

$$\iota^*\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}\big(\mathcal{P},\mathcal{D}_{X_S/S}\otimes\Omega^{-1}_{X_S/S}\big)[n]\simeq\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_T/T}}\big(\iota^*\mathcal{P},\mathcal{D}_{X_T/T}\otimes\Omega^{-1}_{X_T/T}\big)[n].$$

我们得到 $L\iota^*\mathbb{D}(M)\simeq\mathbb{D}(M_T)$。

于是，我们通过诺特归纳得到该命题的第一个断言。 ∎

7.2.4 柏原等价

设 $\iota:\ X_S\to Y_S$ 为 S 上光滑拟射影 $\mathbb{K}$-簇的闭嵌入。记 $\mathrm{Mod}_\sharp^{X_S}(\mathcal{D}_{Y_S/S})$ $(\sharp=c,qc)$ 为 $\mathrm{Mod}_\sharp(\mathcal{D}_{Y_S/S})$ 中由支撑包含于 $\iota(X_S)$ 的对象构成的全子范畴。记 $D^{b,\ X_S}_\sharp(\mathcal{D}_{Y_S/S})$ $(\sharp=c,qc)$ 为 $D^b_\sharp(\mathcal{D}_{Y_S/S})$ 中由上同调支撑包含于 $\iota(X_S)$ 的对象构成的全子范畴。下列命题类似于 [10, 定理 1.6.1、推论 1.6.2]。

命题 7.20 直接像函子诱导这些等价

$$i_\dagger:\mathrm{Mod}_\sharp(\mathcal{D}_{X_S/S})\simeq\mathrm{Mod}_\sharp^{X_S}(\mathcal{D}_{Y_S/S}),\quad i_\dagger:D^b_\sharp(\mathcal{D}_{X_S/S})\simeq D^{b,X_S}_\sharp(\mathcal{D}_{Y_S/S})\qquad(\sharp=c,qc).$$

它保持 S-平坦条件与全纯性条件。准逆由

$$Li^*[\dim X-\dim Y]:D^{b,X_S}_\sharp(\mathcal{D}_{Y_S/S})\to D^b_\sharp(\mathcal{D}_{X_S/S}).$$

∎

7.2.5 闭浸入下拟相干 $\mathcal{D}_{Y/S}$-模的拉回

设 $\iota:\ X_S\to Y_S$ 是定义在 S上的光滑拟射影 $\mathbb{K}$-簇之间的闭嵌入。我们将 X_S 视为 Y_S的闭子簇。设 $H_j(j=1,\ \ldots\ldots,\ m)$ 是 Y_S的闭超曲面，并且$X_S=\bigcap_{j=1}^m H_j$。

我们定义$U=\bigoplus_{j=1}^m\mathbb{K}e_j$。对于有序子集 $J=(j_1,\ \ldots\ldots,\ j_k)\subset\{1,\ldots,m\}$，我们定义$e_J=e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k}\in\bigwedge^k U$。我们还定义 $H(J)=\bigcup_{j\in J}H_j$。我们形式上定义 $e_\emptyset=1$ 和 $H(\emptyset)=\emptyset$。

设 M 是一个拟相干 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模。我们定义

$$\mathcal{C}^k(M,\boldsymbol{H})=\bigoplus_{|J|=k}M(*H(J))\otimes e_J.$$

对于任意 $J\subset\{1,\ldots,m\}$和 $i\in\{1,\ldots,m\}\setminus J$，存在由 $M(*H(J))\to M(*H(J\cup\{i\}))$ 以及 e_i的乘法诱导的态射 $M(*H(J))\otimes e_J\to M(*H(J\cup\{i\}))e_i\wedge e_J$。这些态射诱导出 $d:\ \mathcal{C}^k(M,\boldsymbol{H})\to\mathcal{C}^{k+1}(M,\boldsymbol{H})$，使得 $d\circ d=0$。由于 $(\mathcal{C}^\bullet(M,\boldsymbol{H}),d)|_{Y_S\setminus X_S}$无循环，$(\mathcal{C}^\bullet(M,\boldsymbol{H}),d)\in D^{b,\ X_S}_{qc}(\mathcal{D}_{Y_S/S})$。

引理 7.21 存在自然态射 $C^\bullet(M,\boldsymbol{H})\simeq\iota_\dagger L\iota^*(M)$[维 $X-$维 Y] 在 $D^{b,\ X_S}_{qc}(\mathcal{D}_{Y_S/S})$。

证明存在复形的自然态射 $C^\bullet(M,\ \boldsymbol{H})\to M$。它诱导 s

$$L\iota^*\mathcal{C}^\bullet(M,\boldsymbol{H})[\dim X-\dim Y]\simeq L\iota^*(M)[\dim X-\dim Y].$$

由命题 7.20，存在一个自然同构

$$\mathcal{C}^\bullet(M,\boldsymbol{H})[\dim X-\dim Y]\simeq\iota_\dagger\big(L\iota^*\mathcal{C}^\bullet(M,\boldsymbol{H})[\dim X-\dim Y]\big)\simeq\iota_\dagger\big(L\iota^*(M)[\dim X-\dim Y]\big).$$

∎

7.3 扩张的限制

7.3.1 伴随

设 S 是一个光滑 $\mathbb{K}$-簇。设 X_S 是一个在 S 上光滑射影的 $\mathbb{K}$-簇。设 M 是任意相干 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模。设 $T \subset S$ 是一个闭复子流形。令 $\iota\colon T \to S$ 表示包含映射。设 N_T 是任意 $\mathcal{D}_{X_T/T}$-模。

引理 7.22 在 $D^b(p^{-1}\mathcal{O}_S)$中存在如下自然同构：

$$\iota_* R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_T/T}}(L\iota^* M, N_T) \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M, \iota_* N_T) \tag{53}$$

证明 设 $\mathcal{J}_0$为 N_T 的一个 $\mathcal{D}_{X_T/T}$-内射分解。设 $\mathcal{J}_1$为 $\iota_* N_T$ 的一个 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-内射分解。存在 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-复形的拟同构 $\iota_*\mathcal{J}_0 \to \mathcal{J}_1$，它延拓了 $\iota_* N_T$ 的恒等映射。设 $P \to M$ 为 M 的一个局部 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-射影的消解。于是，$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M, \iota_* N_T)$ 由 $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(P, \mathcal{J}_1)$ 表示，而$\iota_* R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_T/T}}(L\iota^* M, N_T)$ 由 $\iota_*\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_T/T}}\big(\iota^* P, \mathcal{J}_0\big)$ 表示。存在如下自然同构与拟同构

$$\iota_*\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_T/T}}\big(\iota^* P, \mathcal{J}_0\big) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(P, \iota_*\mathcal{J}_0) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(P, \mathcal{J}_1). \tag{54}$$

我们得到（53）。 ∎

令 $p : X_S \to S$ 表示投影。

引理 7.23 存在 以下 $D(p^{-1}\mathcal{O}_S)$ 中的态射，使得 $b \circ a$ 等于态射 (53) ：

$$\iota_* R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_T/T}}\big(L\iota^* M, N_T\big) \xrightarrow{\ a\ } R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}\big(\iota_* L\iota^* M, \iota_* N_T\big) \xrightarrow{\ b\ } R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}\big(M, \iota_* N_T\big) \tag{55}$$

证明 我们使用引理 7.22 的证明中 的记号。我们有以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}\big(\iota_*\iota^* P, \iota_*\mathcal{J}_0\big) & \xrightarrow{c_1} & \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}\big(\iota_*\iota^* P, \mathcal{J}_1\big) \\ {\scriptstyle c_2}\big\downarrow{\scriptstyle \simeq} & & {\scriptstyle c_3}\big\downarrow \\ \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}\big(P, \iota_*\mathcal{J}_0\big) & \xrightarrow[\text{qis}]{c_4} & \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}\big(P, \mathcal{J}_1\big). \end{array}$$

这里， c_2 是一个同构，而 c_4 是一个拟同构。我们有如下自然同构

$$\iota_*\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_T/T}}\big(\iota^* P, \mathcal{J}_0\big) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}\big(\iota_*\iota^* P, \iota_*\mathcal{J}_0\big). \tag{56}$$

(56)、 c_2与 c_4的复合是拟同构(54)。注意 $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}\big(\iota_* L\iota^* M,\ \iota_* N_T\big)$ 由 $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}\big(\iota_*\iota^* P,\ \mathcal{J}_1\big)$表示。因此，我们得到(55)中的态射。 ∎

7.3.2 与参数空间上层的张量积

设 M 为任意凝聚 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模。设 N 为任意 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-模。

引理 7.24 对任意 $\mathcal{O}_S$-模 F，存在自然同构

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M, N) \otimes^L_{p^{-1}\mathcal{O}_S} p^{-1}F \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M, N \otimes^L_{p^{-1}\mathcal{O}_S} p^{-1}F). \tag{57}$$

证明 设 $P \to M$为有限局部射影 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-消解。设 $N \to \mathcal{J}_2$为 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-内射分解。设 $L \to F$为任意 $\mathcal{O}_S$-平坦分解。则 $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M,\ N)\ \otimes^L_{p^{-1}\mathcal{O}_S} p^{-1}F$可表示为

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(P, \mathcal{J}_2) \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_S} p^{-1}L \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(P, \mathcal{J}_2 \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_S} p^{-1}L). \tag{58}$$

设 $N \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_S} p^{-1}L \to \mathcal{J}_3$ 是一个 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-单射消解。那么， $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M,\ N \otimes^L_{p^{-1}\mathcal{O}_S} F)$ 可由 $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(P,\ \mathcal{J}_3)$ 表示。存在一个 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-复形的拟同构 $\mathcal{J}_2 \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_S} p^{-1}L \longrightarrow \mathcal{J}_3$。它诱导出一个拟同构

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(P, \mathcal{J}_2 \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_S} p^{-1}L) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(P, \mathcal{J}_3). \tag{59}$$

由 (58) 和 (59) 得到 (57)。 ∎

7.3.3 参数空间的变换

根据引理 7.22 和引理 7.24，我们得到

$$\begin{aligned}\iota_*R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_T/T}}\big(L\iota^*M, L\iota^*N\big) \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M, \iota_*L\iota^*N) \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}\big(M, N\otimes^L_{p^{-1}\mathcal{O}_S} p^{-1}\iota_*\mathcal{O}_T\big)\\ \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}\big(M,N\big)\otimes^L_{p^{-1}\mathcal{O}_S} p^{-1}\iota_*\mathcal{O}_T. \quad (60)\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\iota_*Rp_*R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_T/T}}\big(L\iota^*M, L\iota^*N\big) \simeq Rp_*R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}\big(M,N\big)\otimes^L_{\mathcal{O}_S}\iota_*\mathcal{O}_T.$$

特别地，我们得到以下结果。

推论 7.25 假设 M 和 N 在 S 上是平坦的。那么，存在自然同构

$$\iota_*R^kp_*R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_T/T}}\big(\iota^*M, \iota^*N\big) \simeq R^kp_*R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}\big(M,N\big)\otimes^L_{\mathcal{O}_S}\iota_*\mathcal{O}_T.$$

∎

7.3.4 交换图

我们作如下假设。

条件 7.26 我们假设：*(i)* S 是仿射的；*(ii)* M 和 N 在 S上是平坦的。 ∎

令 $N_T = \iota^*N$。设 $\iota_*N_T \to \mathcal{J}_1$ 是一个 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-内射分解。设 $N \to \mathcal{J}_2$ 是一个 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-内射分解。存在一个 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-复形之间的态射 $\mathcal{J}_2 \to \mathcal{J}_1$，它延拓 $N \to \iota_*N_T$。

设 $L(S) \to \mathcal{O}_S$ 和 $L(T) \to \iota_*\mathcal{O}_T$ 是由有限秩局部自由 $\mathcal{O}_S$-模构成的有限分解，并带有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} L(S) & \longrightarrow & L(T)\\ \big\downarrow & & \big\downarrow\\ \mathcal{O}_S & \longrightarrow & \iota_*\mathcal{O}_T. \end{array}$$

注意，$N\otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_S} p^{-1}L(T) \to \mathcal{J}_2\otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_S} p^{-1}L(T)$是一个 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-内射分解。存在如下由拟同构构成的交换图：

$$\begin{array}{ccc} N\otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_S} p^{-1}L(T) & \longrightarrow & \mathcal{J}_2\otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_S} p^{-1}L(T)\\ \big\downarrow & & \big\downarrow\\ \iota_*N_T & \longrightarrow & \mathcal{J}_1. \end{array}$$

引理 7.27 下图在 $D(\mathcal{D}_{X_S/S})$中交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}_2\otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_S} p^{-1}L(S) & \longrightarrow & \mathcal{J}_2\otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_S} p^{-1}L(T)\\ \big\downarrow & & \big\downarrow\\ \mathcal{J}_2 & \longrightarrow & \mathcal{J}_1. \end{array} \quad (61)$$

证明 由于下图是交换的，

$$\begin{array}{ccc} N\otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_S} p^{-1}L(S) & \longrightarrow & N\otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_S} p^{-1}L(T)\\ \big\downarrow & & \big\downarrow\\ N & \longrightarrow & \iota_*N_T, \end{array}$$

我们得到 (61) 的交换性。 ∎

设 $\alpha : M \to \mathcal{J}_2[k]$ 是 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-复形的一个态射。我们得到 $\alpha_1 : M \to \mathcal{J}_1[k]$ 作为如下复合 of

$$M \xrightarrow{\alpha} \mathcal{J}_2[k] \longrightarrow \mathcal{J}_1[k].$$

我们还得到 $\alpha_2 : M\otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_S} p^{-1}L(S) \to \mathcal{J}_2[k]\otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_S} p^{-1}\mathcal{O}_T$ 作为以下态射的复合：

$$M\otimes p^{-1}L(S) \xrightarrow{\alpha\otimes\mathrm{id}} \mathcal{J}_2[k]\otimes p^{-1}L(S) \longrightarrow \mathcal{J}_2[k]\otimes p^{-1}L(T).$$

引理 7.28 我们有 $\alpha_1=\alpha_2$ 属于 $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M,\iota_*N_T)$。

证明 我们在 $D^b(\mathcal{D}_{X_S/S})$ 中有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccc} M\otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_S}p^{-1}L(S) & \xrightarrow{\alpha\otimes\mathrm{id}} & \mathcal{J}_2[k]\otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_S}p^{-1}L(S) & \longrightarrow & \mathcal{J}_2[k]\otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_S}p^{-1}L(T) \\ \downarrow qis & & \downarrow qis & & \downarrow qis \\ M & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{J}_2[k] & \longrightarrow & \mathcal{J}_1[k]. \end{array}$$

因此，我们得到了该引理所述的结论。 ∎

存在如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M,\mathcal{J}_2[k]) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M\otimes p^{-1}L(S),\mathcal{J}_2[k]\otimes p^{-1}L(S)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M\otimes p^{-1}L(T),\mathcal{J}_2[k]\otimes p^{-1}L(T)) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M\otimes p^{-1}L(S),\mathcal{J}_2[k]\otimes p^{-1}L(T)). \end{array}$$

由 α，我们得到

$$\alpha_3=\alpha\otimes\mathrm{id}: M\otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_S}p^{-1}L(T)\to\mathcal{J}_2[k]\otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_S}p^{-1}L(T).$$

下面的引理显然成立。

引理 7.29 α_2 是 α_3 经由 $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(\iota_*M_T,\iota_*N_T)\to\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M,\iota_*N_T)$ 所得的像。 ∎

推论 7.30 态射 $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M,N)\to\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M,\iota_*N_T)$ 可按如下方式分解:

$$\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M,N)\to\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(\iota_*M_T,\iota_*N_T)\to\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M,\iota_*N_T).$$

∎

7.3.5 扩张的限制

我们假设条件 7.26。设 $T\subset S$ 是 S 的任意光滑闭子集。包含映射 $T\to S$ 和 $X_T\to X_S$ 记为 ι。对于任意在 S 上平坦的 $\mathcal{D}_{X_SS/S}$-模 G，我们定义 $G_T=\iota^*G$。由推论 7.25，我们得到

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M,N)\to\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M,\iota_*N_T)\simeq\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_{X_T/T}}(M_T,N_T).$$

对于任意 $\alpha\in\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M,\ N)$，其像记为 $\alpha_T\in\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_{X_T/T}}(M_T,\ N_T)$。

命题 7.31 若 α 对应于一个扩张 $0\to N\to M\to M\to 0$，则 α_T 对应于诱导的扩张 $0\to N_T\to M_T\to M_T\to 0$。注意，$M$ 在 S 上平坦。

证明 我们得到如下分解，如推论 7.30 所示:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(M,N)\to\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(\iota_*M_T,\iota_*N_T)\to\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_{X_T/T}}(M_T,N_T).$$

我们有 $\alpha'_T\in\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_{X_S/S}}(\iota_*M_T,\iota_*N_T)$，它是 α 的像。根据引理 7.29，只需证明 α'_T 对应于由 $0\to\iota_*M_T\to\iota_*(M_T)\to\iota_*(N_T)\to 0$ 诱导的扩张。

设 $\widetilde{\alpha}: M\to\mathcal{J}_2[1]$ 是表示 α 的态射。我们还有 $\mathcal{D}_{X_S/S}$-复形 $M\to\mathrm{Cone}(\widetilde{M}\to M)$ 的自然态射，它也表示 α。在 $D^b_c(\mathcal{D}_{X_S/S})$ 中存在如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\simeq} & M \\ \widetilde{\alpha}\downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{J}_2[1] & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Cone}(\widetilde{M}\to M). \end{array}$$

设 $\widetilde{\alpha}'_T$: $M\otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_S}\pi^{-1}L(T)\to\mathcal{J}_2[1]\otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_S}\pi^{-1}L(T)$ 是由 $\widetilde{\alpha}$ 诱导的态射，它表示 α'_T。我们在 $D^b_c(\mathcal{D}_{X_S/S})$ 中得到如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} M\otimes\pi^{-1}L(T) & \xrightarrow{\simeq} & M\otimes\pi^{-1}L(T) & \xrightarrow{\simeq} & \iota_*(M_s)\\ \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\alpha}'_T} & & \downarrow & & \downarrow\\ \mathcal{J}_2[1]\otimes\pi^{-1}L(T) & \xrightarrow{\simeq} & \operatorname{Cone}(\widetilde{M}\to M)\otimes\pi^{-1}L(T) & \xrightarrow{\simeq} & \iota_*\operatorname{Cone}(\widetilde{M}_s\to M_s). \end{array}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$注意，$\iota_*(M_s)\to\iota_*\operatorname{Cone}(M_s\to M_s)$ 对应于扩张 $0\to\iota_*M_T\to\iota_*(M_T)\to\iota_*(N_T)\to 0$。于是，我们得到命题 7.31 的结论。 ∎

7.4 $\mathcal{D}$绝对情形中与良格相关的 -模 e

7.4.1 与格相关的 $\mathcal{D}$-模

设 X 是一个光滑的 $\mathbb{K}$-簇，其上有一个超曲面 H。设 $(\mathcal{E},\nabla)$ 是 (X,H) 上的亚纯平坦联络。

设 E 是 (X,H) 上的亚纯可积联络 $(\mathcal{E},\nabla)$ 的一个格。我们得到 $V\mathcal{D}_X$-子模$V\mathcal{D}_X\cdot E\subset\mathcal{E}$。令

$$\mathcal{D}_X(E):=\mathcal{D}_X\otimes_{V\mathcal{D}_X}(V\mathcal{D}_X\cdot E).$$

存在一个自然同构 $\mathcal{D}_X(E)(*H)=\mathcal{E}$。

对于亚纯可积联络的态射 $(\mathcal{E}',\ \nabla)\to(\mathcal{E},\ \nabla)$。设 $E'\to E$是一个诱导出态射 $\mathcal{E}'\to\mathcal{E}$的格的态射。于是，我们得到 $\mathcal{D}_X(E')\to\mathcal{D}_X(E)$。

7.4.2 与良好格相关的 $\mathcal{D}$-模

假设 H 是简单正规交叉，并且 $(\mathcal{E},\ \nabla)$ 是 $(X,\ H)$ 上的良好亚纯平坦丛。我们定义 $\mathcal{E}^\vee=\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X(*H)}(\mathcal{E},\ \mathcal{O}_X(*H))$，其上赋有诱导可积联络 ∇。我们得到 $\mathcal{D}$-模 $\mathcal{E}(!H)=\mathbb{D}(\mathcal{E}^\vee)$。

令 $H=\bigcup_{i\in\Lambda}H_j$ 为不可约分解。对于 $I\subset\Lambda$，我们定义 $H(I)=\bigcup_{j\in I}H_j$。我们令 t

$$\mathcal{E}(!H(I)*H(I^c))=\mathcal{E}(!H)\otimes\mathcal{O}_X(*H(I^c)),$$

其中 $I^c=\Lambda\setminus I$。对于 $I\supset J$，存在自然态射 $\mathcal{E}(!H(I)*H(I^c))\to\mathcal{E}(!H(J)*H(J^c))$。

命题 7.32 设 E 是 $(\mathcal{E},\nabla)$ 的良格。假设对每个 $i\in\Lambda$，以下条件之一成立。

(a) $\mathcal{S}p(E,\nabla,H_i)^{\mathrm{reg}}\cap\mathbb{Z}_{>0}=\emptyset$.

(b) $\mathcal{S}p(E,\nabla,H_i)^{\mathrm{reg}}\cap\mathbb{Z}_{\leq 0}=\emptyset$.

令 $\Lambda(a)$（分别为 $\Lambda(b)$）表示满足条件 *(a)*（分别为 *(b)*）的 $i\in\Lambda$ 集合。我们定义 $H(a)=\bigcup_{i\in\Lambda(a)}H_i$，以及 $H(b)=\bigcup_{i\in\Lambda(b)}H_i$。那么，存在自然同构 $\mathcal{D}_X(E)\simeq\mathcal{E}(!H(b)*H(a))$。 ∎

令 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*(\mathcal{E})$ 为 §5.3.2 中所述的良好 $\mathbb{C}$-Deligne-Malgrange 滤过丛。

命题 7.33 对于 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{Q}^I_{<0}\times\mathbb{Q}^{I^c}_{\geq 0}$，存在自然同构

$$\mathcal{D}_X\big(\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{\boldsymbol{a}}(\mathcal{E})\big)\simeq\mathcal{E}\big(!H(I)*H(I^c)\big).$$

设 $I\supset J$。设 $\boldsymbol{a}(I)\in\mathbb{Q}^I_{<0}\times\mathbb{Q}^{I^c}_{\geq 0}$ 和 $\boldsymbol{a}(J)\in\mathbb{Q}^J_{<0}\times\mathbb{Q}^{J^c}_{\geq 0}$，使得 $\boldsymbol{a}(I)_i=\boldsymbol{a}(J)_i$ 对于 $J\sqcup I^c$ 成立。那么，存在如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_X\big(\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{\boldsymbol{a}(I)}(\mathcal{E})\big) & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{E}\big(!H(I)*H(I^c)\big)\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathcal{D}_X\big(\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{\boldsymbol{a}(J)}(\mathcal{E})\big) & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{E}(!H(J)*H(J^c)). \end{array}$$

∎

命题 7.34 对于满足 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{(0,\dots,0)}(\mathcal{E})\subset E_1$ 的 $\mathcal{E}$ 的任意良格 E_1，我们有 $\mathcal{D}_X(E_1)\simeq\mathcal{E}$。对于满足 $\mathcal{P}_{<(0,\dots,0)}(\mathcal{E})\supset E_2$ 的 $\mathcal{E}$ 的任意良格 E_2，我们有 $\mathcal{D}_X(E_2)\simeq\mathcal{E}(!H)$。 ∎

7.5 与良好格相关的 $\mathcal{D}$-模族

7.5.1 与格相关的 $\mathcal{D}$-模族

设 S 是一个光滑的 $\mathbb{K}$-簇。设 X 是一个 $\mathbb{K}$-簇，带有一个光滑射影态射 $X \to S$，使得每个几何纤维都不可约。设 X 中的一个超曲面为 $H \subset X$，它相对于 S 是正规交叉的，且具有平凡单值。用 $H = \bigcup_{i\in\Lambda} H_i$ 表示其不可约分解。

设 $(\mathcal{E}, \nabla)$ 是相对于 S 的亚纯可积联络。对于 $\mathcal{E}$ 的任意格 E，我们得到 $V\mathcal{D}_{X/S}$-子模 $V\mathcal{D}_{X/S}\cdot E \subset \mathcal{E}$。我们得到 $\mathcal{D}_{X/S}$-模

$$\mathcal{D}_{X/S}(E) = \mathcal{D}_{X/S} \otimes_{V\mathcal{D}_{X/S}} \big(V\mathcal{D}_{X/S}\cdot E\big).$$

7.5.2 与良好格相关的 $\mathcal{D}$-模族

假设 E 是良好的。设 u 是 S 的任意闭点。设 $x \in H$ 是位于 u 上方的一个闭点。我们令 $R_u = \mathcal{O}_{U,u}$ 和 $R_x = \mathcal{O}_{X,x}$。

引理 7.35 存在自然同构 $(V\mathcal{D}_{X/S}\cdot E)_{|\widehat{x}} \simeq V\mathcal{D}_{\widehat{R}_x/\widehat{R}_u}\cdot E_{|\widehat{x}}$ 和 $\mathcal{D}_X(E)_{|\widehat{x}} \simeq \mathcal{D}_{\widehat{R}_x/\widehat{R}_u}(E_{|\widehat{x}})$。

证明 自然态射的像

$$\widehat{R}_x \otimes_{R_x} (V\mathcal{D}_{X/S}\cdot E)_x \longrightarrow \mathcal{E}_{|\widehat{x}} \tag{62}$$

等于 $V\mathcal{D}_{\widehat{R}_x/\widehat{R}_u}\cdot E_{|\widehat{x}}$。由于 R_x 在 $R_x = \mathcal{O}_{X,x}$ 上是平坦的，态射 (62) 是单射。因此，自然态射 $R_x \otimes_{R_x} (V\mathcal{D}_{X/S}\cdot E)_x \to V\mathcal{D}_{\widehat{R}_x/\widehat{R}_u}\cdot E_{|\widehat{x}}$ 是一个同构。由第一个同构可得第二个同构。 ∎

引理 7.36 $V\mathcal{D}_{X/S}\cdot E$ 在 S 上是平坦的。对于任意闭点 $u \in S$，自然态射 $(V\mathcal{D}_{X/S}\cdot E)_u \to V\mathcal{D}_{X_u}\cdot E_u$ 是一个同构。

证明 设 $x \in H$ 是 u 上的一个闭点。我们来证明 $(V\mathcal{D}_{X/S}\cdot E)_x$ 在 $R_u = \mathcal{O}_{U,u}$ 上是平坦的。设 I 是 R_u 的任意理想。对于 S-平坦性，只需证明 $I \otimes (V\mathcal{D}_{X/S}\cdot E)_x \to (V\mathcal{D}_{X/S}\cdot E)_x$ 是单射。令 $\widehat{I} = I\cdot\widehat{R}_u \simeq I \otimes \widehat{R}_u$。由于根据命题 6.5，$V\mathcal{D}_{\widehat{R}_x/\widehat{R}_u}\cdot E_{|\widehat{x}} \subset \mathcal{E}_{|\widehat{x}}$ 在 $\widehat{R}_u$ 上是平坦的，$\widehat{I} \otimes_{\widehat{R}_u} \big(V\mathcal{D}_{\widehat{R}_x/\widehat{R}_u}\cdot E_{|\widehat{x}}\big) \longrightarrow \big(V\mathcal{D}_{\widehat{R}_x/\widehat{R}_u}\cdot E_{|\widehat{x}}\big)$ 是单射。

根据引理 7.35，存在同构 $R_x \otimes_{R_x} (V\mathcal{D}_{X/S}\cdot E)_x \simeq V\mathcal{D}_{\widehat{R}_x/\widehat{R}_u}\cdot E_{|\widehat{x}}$。我们还得到

$$\widehat{R}_x \otimes_{R_x} \big(I \otimes_{R_u} (V\mathcal{D}_{X/S}\cdot E)_x\big) \simeq \widehat{R}_x \otimes_{R_x} \big(IR_x \otimes_{R_x} (V\mathcal{D}_{X/S}\cdot E)_x\big) \simeq I\widehat{R}_x \otimes_{\widehat{R}_x} (V\mathcal{D}_{\widehat{R}_x/\widehat{R}_u}\cdot E_{|\widehat{x}}) \simeq \widehat{I} \otimes_{\widehat{R}_u} V\mathcal{D}_{\widehat{R}_x/\widehat{R}_u}\cdot E_{|\widehat{x}}.$$

存在如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \widehat{R}_x \otimes_{R_x} \big(I \otimes_{R_u} (V\mathcal{D}_{X/S}\cdot E)_x\big) & \longrightarrow & \widehat{R}_x \otimes_{R_x} (V\mathcal{D}_{X/S}\cdot E)_x \\ \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow \\ \widehat{I} \otimes_{\widehat{R}_u} \big(V\mathcal{D}_{\widehat{R}_x/\widehat{R}_u}\cdot E_{|\widehat{x}}\big) & \longrightarrow & V\mathcal{D}_{\widehat{R}_x/\widehat{R}_u}\cdot E_{|\widehat{x}}. \end{array}$$

由于 R_x 在 R_x 上忠实平坦，我们得到 $I \otimes_{R_u} (V\mathcal{D}_{X/S}\cdot E)_x \longrightarrow (V\mathcal{D}_{X/S}\cdot E)_x$ 是单射。因此，我们得到 $V\mathcal{D}_{X/S}\cdot E$ 是 S-平坦的。

设 $R_{1,\,x} = \mathcal{O}_{X_u,\,x}$。我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \widehat{R}_{1,x} \otimes (V\mathcal{D}_{X/S}\cdot E)_u & \longrightarrow & \widehat{R}_{1,x} \otimes V\mathcal{D}_{X_u}E_u \\ \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow \\ \mathbb{K} \otimes_{\widehat{R}_u} \big(V\mathcal{D}_{\widehat{R}_x/\widehat{R}_u}\cdot E_{|\widehat{x}}\big) & \xrightarrow{\simeq} & V\mathcal{D}_{\widehat{R}_{1,x}/\mathbb{K}}\cdot E_{u|\widehat{x}}. \end{array}$$

我们得到 $(V\mathcal{D}_{X/S}\cdot E)_u \simeq V\mathcal{D}_{X_u}E_u$。 ∎

推论 7.37 $\mathcal{D}_{X/S}(E)$ 是 S-平坦的，并且存在自然态射 $\mathcal{D}_{X/S}(E)_u \simeq \mathcal{D}_{X_u}(E_u)$。 ∎

设 $\varphi\colon S'\to S$ 是光滑 $\mathbb{K}$-簇之间的一个态射。我们得到 $(X_{S'},\ H_{S'})=(X,\ H)\times_S S'$，其诱导态射为 $\varphi\colon(X_{S'},\ H_{S'})\to(X,\ H)$。我们在 $(X_{S'},\ H_{S'})$ 上得到 $(\mathcal{E}_{S'},\ \nabla)=\varphi^*(\mathcal{E},\ \nabla)$。对于 $\mathcal{E}$ 的任意格 E，我们得到诱导格 $E_{S'}$。

命题 7.38 设 E 是$(\mathcal{E},\nabla)$的良格。那么，存在一个自然同构

$$\varphi^*\mathcal{D}_{X/S}(E)\simeq\mathcal{D}_{X_{S'}/S'}(E_{S'}).$$

设 $\eta\colon$谱$(\mathbb{K}_1)\to S$ 是一个几何点。

命题 7.39 设 E 是$(\mathcal{E},\nabla)$的良格。那么，存在一个自然同构

$$\mathcal{D}_{X/S}(E)_\eta\simeq\mathcal{D}_{X_\eta}(E_\eta).$$

7.5.3 例外子集

设 S 不可约。令 $\eta(0)\colon$谱$(\mathbb{K}_1)\to S$ 为由 S的泛点的代数闭包得到的几何点。令 $\Lambda=I\sqcup I^c$ 为一个分解。令 E 为一个良格，使得$\mathcal{D}_{X_{\eta(0)}}(E_{\eta(0)})\simeq\mathcal{E}_{\eta(0)}(!H_{\eta(0)}(I)*H_{\eta(0)}(I^c))$。根据命题 7.32，对于 $i\in I^c$，我们有 $\mathcal{S}p(E_{\eta(0)},\ \nabla,\ i)^{\mathrm{reg}}\cap\mathbb{Z}_{>0}=\emptyset$；对于 $i\in I$，我们有 $\mathcal{S}p(E_{\eta(0)},\ \nabla,\ i)^{\mathrm{reg}}\cap\mathbb{Z}_{\leq 0}=\emptyset$。根据推论 6.13，对于 $m\in\mathbb{Z}$ 和 $i\in\Lambda$，我们得到扎里斯基闭子集

$$W(E,i,m)=\{u\,|\,m\in\mathcal{S}p(E_u,\nabla)\}\subset S.$$

我们定义 $A=\{(i,\ m)\in I^c\times\mathbb{Z}_{>0}\}\cup\{(i,\ m)\in I\times\mathbb{Z}_{\leq 0}\}$。我们得到以下扎里斯基闭子集的可数并:

$$W(E)=\bigcup_{(i,m)\in A}W(E,i,m)\subsetneq S.$$

由命题 7.32，我们得到如下结论。

命题 7.40 设 η' 是 S 的任意几何点，且 η 的像不包含于 $W(E)$。那么，$\mathcal{D}_{X_{\eta'}}(E_{\eta'})\simeq\mathcal{E}_{\eta'}(!\ H_{\eta'}(I)*H_{\eta'}(I^c))$。

引理 7.41 设 E' 是另一个良格，使得 $\mathcal{D}_{X_{\eta(0)}}(E'_{\eta(0)})\simeq\mathcal{E}_{\eta(0)}(!\ H_{\eta(0)}(I)*H_{\eta(0)}(I^c))$。那么，存在一个扎里斯基闭子集 $W_1\subset W(E)\cap W(E')$，使得 $\mathcal{D}_{X/S}(E)_{S\setminus W_1}\simeq\mathcal{D}_{X/S}(E')_{S\setminus W_1}$。

证明 存在一个正整数 N，使得下述结论成立。

$$\mathcal{S}p(E_{\eta(0)},\nabla,i)^{\mathrm{reg}}\subset\Big\{\alpha+n\,\Big|\,\alpha\in\mathcal{S}p(E'_{\eta(0)},\nabla,i)^{\mathrm{reg}},\ n\in\mathbb{Z},\ |n|\leq N\Big\},$$

$$\mathcal{S}p(E'_{\eta(0)},\nabla,i)^{\mathrm{reg}}\subset\Big\{\alpha+n\,\Big|\,\alpha\in\mathcal{S}p(E_{\eta(0)},\nabla,i)^{\mathrm{reg}},\ n\in\mathbb{Z},\ |n|\leq N\Big\}.$$

于是，结论显然。

7.5.4 相关的 $\mathcal{D}_{X/S}$-模与态射

假设 S 不可约。令 $H=\bigcup_{j\in\Lambda}H_j$ 为不可约分解。对于任意 $\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^\Lambda$，定义 $\boldsymbol{m}H=\sum m_iH_i$。

设 $(\mathcal{E},\nabla)$ 是相对于 S 的 (X,H) 上的良好亚纯平坦丛。设 E 是 $(\mathcal{E},\nabla)$ 的一个良格。我们作如下假设。

条件 7.42 对于任意由 S 的泛点的代数闭包得到的几何点 $\eta(0)$，我们有$E_{\eta(0)}\subset\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{<0}(\mathcal{E}_{\eta(0)})$，其中 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*(\mathcal{E}_{\eta(0)})$ 是一个良好的 $\mathbb{C}$-*Deligne-Malgrange* 滤过丛

取满足以下条件的 $\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^\Lambda_{>0}$。

条件 7.43 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{(1,\dots,1)}(\mathcal{E}_{\eta(0)})\subset E_{\eta(0)}(\boldsymbol{m}H_{\eta(0)})$ 对于一个良好的 $\mathbb{C}$-*Deligne-Malgrange* 滤过丛 $\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_*(\mathcal{E}_{\eta(0)})$。

我们令 $W(E,\boldsymbol{m}) = W(E) \cup W(E(\boldsymbol{m}H))$。

令 $\mathcal{B}(E,\ \boldsymbol{m})$ 表示满足以下条件的闭点集合 u .

- $E_u \subset \mathcal{P}_{\mathrm{DM}<0}(\mathcal{E}_u)$ 和 $\mathcal{P}_{\mathrm{DM}(1,\ldots,1)}(\mathcal{E}_u) \subset E_u(\boldsymbol{m}H_u)$，其中 $\mathcal{P}_{\mathrm{DM}*}(\mathcal{E}_u)$ 是 $(\mathcal{E}_u,\ \nabla)$ 的一个良好 $\mathbb{C}$-Deligne-Malgrange 滤过丛。

下面的引理显然。

引理 7.44 $W(E,\ \boldsymbol{m}) \cap \mathcal{B}(E,\ \boldsymbol{m}) = \emptyset$。 ∎

对于任意 $I \subset \Lambda$，我们定义 $\boldsymbol{m}(I) \in \mathbb{Z}^{\Lambda}_{\geq 0}$ 使得 $\boldsymbol{m}(I)_i = m_i$ $(i \in I)$ 且 $\boldsymbol{m}(I)_i = 0$ $(i \notin I)$。我们得到 $\mathcal{D}_{X/S}$-模 $\mathcal{D}_{X/S}(E(\boldsymbol{m}(I)\cdot H))$。

引理 7.45 设 η 是一个几何点，使得 η 的像不包含于 $W(E,\boldsymbol{m})$。那么，存在自然同构 $\mathcal{D}_{X/S}\big(E(\boldsymbol{m}(I)\cdot H)\big)_{\eta} \simeq \mathcal{E}_{\eta}\big(!H_{\eta}(I^c) * H_{\eta}(I)\big)$。

证明 根据构造，对任意 $u \notin W(E,\boldsymbol{m})$，以下结论成立。

- $\mathcal{S}p\big(E_u(\boldsymbol{m}(I)H_u)\ \nabla, i\big) \cap \mathbb{Z}_{>0} = \mathcal{S}p\big(E_u(\boldsymbol{m}H_u)\ \nabla, i\big) \cap \mathbb{Z}_{>0} = \emptyset$ 对任意 $i \in I$。
- $\mathcal{S}p\big(E_u(\boldsymbol{m}(I)H_u)\ \nabla, i\big) \cap \mathbb{Z}_{\leq 0} = \mathcal{S}p\big(E_u, \nabla, i\big) \cap \mathbb{Z}_{\leq 0} = \emptyset$ 对任意 $i \in I^c$。

于是，引理的断言得证。 ∎

对于 $I \subset J$，存在自然态射

$$\mathcal{D}_{X/S}\big(E(\boldsymbol{m}(I)\cdot H)\big) \longrightarrow \mathcal{D}_{X/S}\big(E(\boldsymbol{m}(J)\cdot H)\big). \tag{63}$$

由推论 7.9，得到以下引理。

引理 7.46 存在一个非空开子集 $S' \subset S$，使得态射的余核

$$\mathcal{D}_{X/S}\big(E(\boldsymbol{m}(I)\cdot H)\big)_{|X_{S'}} \longrightarrow \mathcal{D}_{X/S}\big(E(\boldsymbol{m}(J)\cdot H)\big)_{|X_{S'}}$$

在 $X_{S'}$ 上对任意一对 $I \subset J$ 都是平坦的。 ∎

设 E' 是 $(\mathcal{E},\ \nabla)$ 的另一个满足条件 7.42 的良格。取满足关于 E' 的条件 7.43 的 $\boldsymbol{m}' \in \mathbb{Z}^{\Lambda}$。

命题 7.47 存在一个扎里斯基闭子集 $W_1 \subset W(E,\boldsymbol{m}) \cup W(E',\boldsymbol{m}')$，使得

$$\mathcal{D}_{X/S}\big(E(\boldsymbol{m}(I)\cdot H)\big)_{S\setminus W_1} \simeq \mathcal{D}_{X/S}\big(E'(\boldsymbol{m}'(I)\cdot H)\big)_{S\setminus W_1}.$$

特别地，$W_1 \cap \big(\mathcal{B}(E,\boldsymbol{m}) \cap \mathcal{B}(E',\boldsymbol{m}')\big) = \emptyset$。

证明 由引理 7.41 可得。 ∎

我们还有如下关于例外子集的引理。

引理 7.48 若 $E' \subset E$ 与 $E(\boldsymbol{m}H) \subset E'(\boldsymbol{m}'H)$ 成立，则我们有 $W(E',\boldsymbol{m}') \subset W(E,\boldsymbol{m})$ 与 $\mathcal{B}(E,\boldsymbol{m}) \subset \mathcal{B}(E',\boldsymbol{m}')$。 ∎

让我们给出一个补充。

引理 *7.49* 设 E_0 是 $\mathcal{E}$ 的一个格，不一定良好。假设 $E \subset E_0(-H)$ 和 $E_0(H) \subset E(\boldsymbol{m}H)$。令 $\mathcal{A}(E_0)$ 表示 S 中满足 $E_{0,u}$ 是 $(\mathcal{E}_u,\nabla_u)$ 的良好 $\mathbb{C}$-*Deligne-Malgrange* 格的闭点 u 的集合。那么，我们有 $\mathcal{A}(E_0) \subset \mathcal{B}(E,\boldsymbol{m})$。特别地，$W(E,\boldsymbol{m}) \cap \mathcal{A}(E_0) = \emptyset$。 ∎

7.5.5 推前

我们继续假设 S 不可约。设 Y 是一个 $\mathbb{K}$-簇，带有一个光滑射影态射 $Y \to S$。设 H_Y 是 Y 的一个超曲面，在 S 上平坦，但不一定是正规交叉。令 $H_Y = \bigcup_{j\in\Lambda_Y} H_{Y,j}$ 为其不可约分解。

设 $f\colon X \to Y$是 S上的射影 $\mathbb{K}$簇之间的一个态射，使得 $H = f^{-1}(H_Y)$，且 $f\colon X \setminus H \to Y \setminus H_Y$是一个闭浸入。我们有诱导映射 $f_*\colon \Lambda \to \Lambda_Y$。L

et $(\mathcal{E},\nabla)$ be 一个相对于 S的良好亚纯平坦丛，定义在 $(X,\ H)$ 上。令 E 和 $\boldsymbol{m}$ 如 §7.5.4 中所述 .

引理 7.50 存在一个开子集 $S' \subset S$，使得 $f^j_\dagger\Big(\mathcal{D}_{X/S}\Big(E\big(\boldsymbol{m}(f_*^{-1}(I_Y))H\big)\Big)\Big)_{|Y_{S'}} = 0\,(j \neq 0)$对任意 $I_Y \subset \Lambda_Y$均成立。对于 S' 的任意几何点 η，若其像不包含于 $W(E,\boldsymbol{m})$ 中，则存在自然同构

$$f^0_\dagger\Big(\mathcal{D}_{X/S}\Big(E\big(\boldsymbol{m}(f_*^{-1}(I_Y))H\big)\Big)\Big)_\eta \simeq f^0_\dagger\big(\mathcal{E}_\eta(!H_\eta)\big)\big(*H_{Y,\eta}(I_Y)\big). \tag{64}$$

证明 令 η表示 S的一个泛点的代数闭包。对于 $j \neq 0$，我们有 $f^j_\dagger\Big(\mathcal{D}_{X_\eta}\big(E_\eta(\boldsymbol{m}(I_1)H_\eta)\big)\Big)_{|Y_{\overline{\eta}}} = 0$，其中 $I_1 = f_*^{-1}(I_Y)$。于是得到第一个断言。第二个断言由命题 7.40 得出。 ∎

推论 7.51 存在一个由局部闭光滑子集构成的分解 $S = \bigsqcup S_j$，使得

$$f^k_{S_j\dagger}\Big(\mathcal{D}_{X_{S_j}/S_j}\Big(E_{S_j}\big(\boldsymbol{m}(f_*^{-1}(I_Y))H_{S_j}\big)\Big)\Big) = 0 \quad (k \neq 0)$$

对任意 $I_Y \subset \Lambda_Y$均成立。对于 S_j的任意几何点 η，若其像不包含在 $W(E,\boldsymbol{m}) \cap S_j$中，则存在自然同构(64)。 ∎

7.5.6 细化

设 $K \subset X$ 是一个超曲面，使得 K 和 $H \cup K$ 在 S 上平坦，且 $\operatorname{codim}(H \cap K) \geq 2$。我们不假设 $K \cup H$ 相对于 S具有正规交叉。

令 X' 为一个带有光滑射影态射 $X' \to S$ 的 $\mathbb{K}$-簇。令 H' 为 X 中相对于 S 的正规交叉超曲面。令 $H' = \bigcup_{j\in\Lambda'} H'_j$ 为其不可约分解。令 $f\colon X' \to X$ 为一个在 S 上的态射，使得 $f^{-1}(H \cup K) = H'$，且 $X' \setminus H' \simeq X \setminus (H \cup K)$。注意， $f^{-1}(H)$ 也是相对于 S 的正规交叉。

令 $(\mathcal{E},\ \nabla)$ 为一个相对于 S 的良好亚纯平坦丛，定义在 $(X,\ H)$ 上。令 E 为 $(\mathcal{E},\ \nabla)$ 的一个满足条件 7.42 的良格。取满足条件 7.43 的 $\boldsymbol{m}$ 。

我们得到一个相对于 S 的良好亚纯平坦丛 $(\mathcal{E}',\ \nabla') = f^*(\mathcal{E},\ \nabla)$，定义在 $(X',\ H')$ 上。我们还得到良格 $E' = f^*(E)(-H')$，它对 $(\mathcal{E}',\ \nabla')$ 满足条件 7.42。取 $\boldsymbol{m}' \in \mathbb{Z}^{\Lambda'}_{>0}$ 使得 $f^*(E(\boldsymbol{m}))(H') \subset E'(\boldsymbol{m}'H')$。它对 E' 满足条件 7.43。

对于任意分解 $I \sqcup I^c$，我们得到 $\mathcal{D}_{X/S}$-模 $\mathcal{D}_{X/S}\big(E(\boldsymbol{m}(I)H)\big)$。存在 $I_1 \subset \Lambda'$使得 $H'(I_1) = f^{-1}(H(I) \cup K)$。存在 $I_2 \subset \Lambda'$使得 $H'(I_2) = f^{-1}(H(I))$。我们得到

$$\mathcal{D}_{X'/S}\big(E'(\boldsymbol{m}'(I_2)H')\big) \longrightarrow \mathcal{D}_{X'/S}\big(E'(\boldsymbol{m}'(I_1)H')\big).$$

存在以下自然态射：

$$\begin{array}{ccccc}
f^0_{\eta(0)\dagger}\mathcal{D}_{X'_{\eta(0)}}(E'_{\eta(0)}(\boldsymbol{m}'(I_2)H'_{\eta(0)})) & \longrightarrow & \mathcal{D}_{X_{\eta(0)}}(E_{\eta(0)}(\boldsymbol{m}H_{\eta(0)})) & \longrightarrow & f^0_{\eta(0)\dagger}\mathcal{D}_{X'_{\eta(0)}}(E'_{\eta(0)}(\boldsymbol{m}'(I_1)H'_{\eta(0)})) \\
\simeq\downarrow & & \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow \\
f^0_{\eta(0)\dagger}\Big(\mathcal{E}'_{\eta(0)}(!H'_{\eta(0)})\Big)(*H_{\eta(0)}(I)) & \longrightarrow & \mathcal{E}_{\eta(0)}(!H_{\eta(0)}(I^c) * H_{\eta(0)}(I)) & \longrightarrow & f^0_{\eta(0)\dagger}\mathcal{E}'_{\eta(0)}\Big((!H'_{\eta(0)})\Big)(*(H_{\eta(0)}(I) \cup K_{\eta(0)})).
\end{array} \tag{65}$$

命题 7.52 存在一个 *Zariski* 开子集 $S' \subset S$ 以及态射

$$f^0_\dagger\Big(\mathcal{D}_{X'/S}\big(E'(\boldsymbol{m}'(I_2)H')\big)\Big)_{S'} \xrightarrow{a} \mathcal{D}_{X/S}\big(E(\boldsymbol{m}(I)H)\big)_{S'} \xrightarrow{b} f^0_\dagger\Big(\mathcal{D}_{X'/S}\big(E'(\boldsymbol{m}'(I_1)H')\big)\Big)_{S'}$$

它诱导(65)。此外，以下结论成立。

- 态射 a 是满态射，态射 b 是单态射，且 b 的余核在S'上平坦。

- 设 η 为 S' 的一个几何点，其像不含于 $W(E,\boldsymbol{m})\cup W(E',\boldsymbol{m}')$。则存在如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
f_!^0\Big(\mathcal{D}_{X'/S}\big(E'(\boldsymbol{m}'(I_2)H')\big)\Big)_\eta & \longrightarrow & \mathcal{D}_{X/S}\big(E(\boldsymbol{m}(I)H)\big)_\eta & \longrightarrow & f_!^0\Big(\mathcal{D}_{X'/S}\big(E'(\boldsymbol{m}'(I_1)H')\big)\Big)_\eta \\
\simeq\downarrow & & \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow \\
f_!^0\Big(\mathcal{E}'_\eta(!H'_\eta)\Big)(*H_\eta(I)) & \longrightarrow & \mathcal{E}_\eta\big(!H_\eta(I^c)*H_\eta(I)\big) & \longrightarrow & f_!^0\Big(\mathcal{E}'_\eta(!H'_\eta)\Big)\big(*(H_\eta(I)\cup K_\eta)\big).
\end{array}$$

证明 存在一个 Zariski 开子集 $S'_1\subset S$，使得以下结论成立。

- $f_!^j\Big(\mathcal{D}_{X'/S}\big(E'(\boldsymbol{m}'(I_1)H')\big)_{S'_1}\Big)=0$ and $f_!^j\Big(\mathcal{D}_{X'/S}\big(E'(\boldsymbol{m}'(I_2)H')\big)_{S'_1}\Big)=0$ for $j\neq 0$.
- 自然态射的余核

$$f_!^0\Big(\mathcal{D}_{X'/S}\big(E'(\boldsymbol{m}'(I_2)H')\big)_{S'_1}\Big)\longrightarrow f_!^0\Big(\mathcal{D}_{X'/S}\big(E'(\boldsymbol{m}'(I_1)H')\big)_{S'_1}\Big) \tag{66}$$

  在 S'_1上平坦。

令 $\mathcal{M}$ 表示 (66) 的像。注意， $\mathcal{M}_{\eta(0)}$ 等于 (65) 中间项的像。此外，对于任意几何点 η，若其像不包含于 $W(E',\boldsymbol{m}')$，则存在如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
f_!^0\Big(\mathcal{D}_{X'/S}\big(E'(\boldsymbol{m}'(I_2)H')\big)\Big)_\eta & \longrightarrow & \mathcal{M}_\eta & \longrightarrow & f_!^0\Big(\mathcal{D}_{X'/S}\big(E'(\boldsymbol{m}'(I_1)H')\big)\Big)_\eta \\
\simeq\downarrow & & \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow \\
f_!^0\Big(\mathcal{E}'_\eta\big(!H'_\eta(I_2^c)\big)\Big)(*H_\eta(I)) & \longrightarrow & \mathcal{E}_\eta(!H_\eta(I^c)*H_\eta(I)) & \longrightarrow & f_!^0\Big(\mathcal{E}'_\eta(!H'_\eta)\Big)\big(*(H_\eta(I)\cup K_\eta)\big).
\end{array}$$

通过缩小 S'_1，我们可以假设 $\mathcal{M}_{S'_1}\simeq\mathcal{D}_{X/S}\big(E(\boldsymbol{m}(I)H)\big)_{S'_1}$。 ∎

推论 7.53 存在一个扎里斯基闭子集 $W\subset W(E,\boldsymbol{m})\cup W(E',\boldsymbol{m}')$、一个分解 $S\setminus W=\bigsqcup S_j$，以及态射

$$f_{S_j!}^0\Big(\mathcal{D}_{X'/S}\big(E'(\boldsymbol{m}'(I_2)H')\big)_{S_j}\Big)\xrightarrow{a_j}\mathcal{D}_{X/S}\big(E(\boldsymbol{m}(I)H)\big)_{S_j}\xrightarrow{b_j}f_{S_j!}^0\Big(\mathcal{D}_{X'/S}\big(E'(\boldsymbol{m}'(I_1)H')\big)_{S_j}\Big)$$

使得以下条件成立。

- 态射 a_j 是满态射，态射 b_j 是单态射，并且 b_j 的余核在 S_j上平坦。

- 设 η是 S_j的一个几何点，其像不包含于 $W(E,\boldsymbol{m})\cup W(E',\boldsymbol{m}')$中。那么，存在如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
f_{S_j!}^0\Big(\mathcal{D}_{X'/S}\big(E'(\boldsymbol{m}'(I_2)H')\big)_{S_j}\Big)_\eta & \longrightarrow & \mathcal{D}_{X/S}\big(E(\boldsymbol{m}(I)H)\big)_\eta & \longrightarrow & f_{S_j!}^0\Big(\mathcal{D}_{X'/S}\big(E'(\boldsymbol{m}'(I_1)H')\big)\Big)_\eta \\
\simeq\downarrow & & \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow \\
f_{S_j!}^0\Big(\mathcal{E}'_\eta(!H'_\eta)\Big)(*H_\eta(I)) & \longrightarrow & \mathcal{E}_\eta\big(!H_\eta(I^c)*H_\eta(I)\big) & \longrightarrow & f_{S_j!}^0\Big(\mathcal{E}'_\eta(!H_\eta)\Big)\big(*(H_\eta(I)\cup K)\big).
\end{array}$$

∎

下面给出一个补充。

引理 7。54 $\mathcal{B}(E,\boldsymbol{m})\subset\mathcal{B}(E',\boldsymbol{m}')$。因此，我们有 $\mathcal{B}(E,\boldsymbol{m})\cap(W(E,\boldsymbol{m})\cup W(E,\boldsymbol{m}'))=\emptyset$。

证明 我们有 $f^*(E)(-H)_u\subset f^*(\mathcal{P}_{<0}^{\mathrm{DM}}\mathcal{E}_u)(-H)\subset\mathcal{P}_{<0}^{\mathrm{DM}}(f^*\mathcal{E}_u)$。我们还有

$$\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{(1,\dots,1)}(\mathcal{E}'_u)(H)\subset f^*(\mathcal{P}^{\mathrm{DM}}_{(1,\dots,1)}\mathcal{E}_u)(H)\subset f^*(E(\boldsymbol{m}H))(H)\subset E'(\boldsymbol{m}'H').$$

于是，我们得到该引理的结论。 ∎

7.6 与胞腔相关的几乎最小延拓

7.6.1 胞腔与几乎最小延拓

设 X 为光滑的 $\mathbb{K}$-簇。设 Z 为 X的闭子集。设 H 为 X的超曲面 .

设 S 是一个光滑的 $\mathbb{K}$-簇，但不一定不可约。设 Z_S 是一个光滑的 $\mathbb{K}$-簇，它在 S 上是射影的，并具有相对于 S 的正规交叉超曲面 H_{Z_S}。设 $\rho\colon Z_S \to S \times X$ 是一个在 S 上的射影态射，使得 (i) $H_{Z_S} = \rho^{-1}(H)$，(ii) $Z_S \setminus H_{Z_S} \simeq S \times (Z \setminus H)$。设 $(\mathcal{E}, \nabla)$ 是 (Z_S, H_{Z_S}) 上相对于 S 的良好亚纯平坦丛，带有格 E_0。

设 $H_{Z_S} = \bigcup_{j\in\Lambda} H_{Z_S,j}$ 表示不可约分解。设 E 是 $(\mathcal{E}, \nabla)$ 的一个良格，满足条件 7.42。取满足条件 7.43 的 $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^{\Lambda}_{>0}$。

设 $H = \bigcup_{j\in\Gamma} H_j$ $I \subset \Gamma$ $\rho^* I \subset \Lambda$ $\rho^{-1} S \times$ 是不可约分解。$H\ I$ 对于任意，我们得到 ( )，使得 (( )) $= \bigcup_{j\in\rho^*(I)} H_{Z_S,j}$。

~**引理 7.55** 存在一个扎里斯基闭子集 $W \subset W(E, \boldsymbol{m})$，以及一个光滑 $\mathbb{K}$-簇之间的态射 $\widetilde{S} \to S$，使得以下结论成立：

- .....的像 $\widetilde{S} \to S$ 是 $S \setminus W$。
- *For any* $I \subset \Gamma$, $\rho_{\widetilde{S}\dagger}\Big(\mathcal{D}_{Z_{\widetilde{S}}/\widetilde{S}}\big(E(\boldsymbol{m}(\rho^* I)H_{Z_S})\big)_{\widetilde{S}}\Big)$ *are* $\widetilde{S}$*-flat, and* $\rho^k_{\widetilde{S}\dagger}\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}\big(E(\boldsymbol{m}(\rho^* I)H_{Z_S})\big)_{\widetilde{S}}\Big) = 0$ $(k \neq 0)$.
- 设 η 是 S 的任意几何点，其像不~包含于 $S \times_S W(E, \boldsymbol{m})$。那么，存~在以下自然同构

$$\rho_{\widetilde{S}\dagger}\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}\big(E(\boldsymbol{m}(\rho^* I)H_{Z_S})\big)_{\widetilde{S}}\Big)_\eta \simeq \rho_{\eta\dagger}\Big(\mathcal{E}_\eta\big(!H_{Z_S,\eta}\big)\Big)(*H(I)_\eta).$$

此外，对于 $I \subset J$，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \rho_{\widetilde{S}\dagger}\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}(E(\boldsymbol{m}(\rho^* I)H_{Z_S}))_{\widetilde{S}}\Big)_\eta & \xrightarrow{\simeq} & \rho_{\eta\dagger}\Big(\mathcal{E}_\eta\big(!H_{Z_S,\eta}\big)\Big)(*H(I)_\eta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \rho_{\widetilde{S}\dagger}\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}(E(\boldsymbol{m}(\rho^* J)H_{Z_S}))_{\widetilde{S}}\Big)_\eta & \xrightarrow{\simeq} & \rho_{\eta\dagger}\Big(\mathcal{E}_\eta\big(!H_{Z_S,\eta}\big)\Big)(*H(J)_\eta). \end{array}$$

- *The cokernel of* $\rho_{\widetilde{S}\dagger}\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}\big(E(\boldsymbol{m}(\rho^* I)H_{Z_S})\big)_{\widetilde{S}}\Big) \to \rho_{\widetilde{S}\dagger}\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}\big(E(\boldsymbol{m}(\rho^* J)H_{Z_S})\big)_{\widetilde{S}}\Big)$ *are flat over* $\widetilde{S}$. ∎

~将 S 替换为 S 后，我们可以假设引理 7.55 的结论在 $S = S$ 的情形下也成立。因此，存在以下自然同构：

$$\mathrm{Cok}\Big(\rho_\dagger\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}\big(E(\boldsymbol{m}(\rho^* I)H_{Z_S})\big)\Big) \to \rho_\dagger\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}\big(E(\boldsymbol{m}(\rho^* J)H_{Z_S})\big)\Big)\Big) \simeq \mathrm{Cok}\Big(\rho_\dagger\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}\big(E(\boldsymbol{m}(\rho^* I)H_{Z_S})\big)\Big) \to \rho_\dagger\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}\big(E(\boldsymbol{m}(\rho^* J)H_{Z_S})\big)\Big)\Big), \quad (67)$$

$$\mathrm{Ker}\Big(\rho_\dagger\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}\big(E(\boldsymbol{m}(\rho^* I)H_{Z_S})\big)\Big) \to \rho_{\widetilde{S}\dagger}\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}\big(E(\boldsymbol{m}(\rho^* J)H_{Z_S})\big)\Big)\Big) \simeq \mathrm{Ker}\Big(\rho_\dagger\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}\big(E(\boldsymbol{m}(\rho^* I)H_{Z_S})\big)\Big) \to \rho_\dagger\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}\big(E(\boldsymbol{m}(\rho^* J)H_{Z_S})\big)\Big)\Big), \quad (68)$$

$$\mathrm{Im}\Big(\rho_\dagger\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}\big(E(\boldsymbol{m}(\rho^* I)H_{Z_S})\big)\Big) \to \rho_\dagger\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}\big(E(\boldsymbol{m}(\rho^* J)H_{Z_S})\big)\Big)\Big) \simeq \mathrm{Im}\Big(\rho_\dagger\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}\big(E(\boldsymbol{m}(\rho^* I)H_{Z_S})\big)\Big) \to \rho_\dagger\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}\big(E(\boldsymbol{m}(\rho^* J)H_{Z_S})\big)\Big)\Big). \quad (69)$$

~**定义 7.56** 对于一个元组 $\mathcal{U} = (S, Z_S, \rho, \mathcal{E}, \nabla, E, \boldsymbol{m})$，使得引理 7.55 的断言对 $S = S$ 成立，令 $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ 表示

$$\rho_\dagger\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}(E)\Big) \to \rho_\dagger\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}\big(E(\boldsymbol{m}H_{Z_S})\big)\Big).$$

对于任意 $K=\bigcup_{i\in I}H_i\subset H$，令 $\mathcal{L}^{*K}(\mathcal{U})$ 表示

$$\rho_!\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}\big(E(\boldsymbol{m}(\rho^*I)H_{Z_S})\big)\Big)\to\rho_!\Big(\mathcal{D}_{Z_S/S}\big(E(\boldsymbol{m}H_{Z_S})\big)\Big).$$

注意， $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ 和 $\mathcal{L}^{*K}(\mathcal{U})$是 S-平坦的。 ∎

注意， $E(\boldsymbol{m}H)^\vee$ 是满足条件 7.42 的 $(\mathcal{E}^\vee,\nabla)$ 的良格，并且 $\boldsymbol{m}$ 针对 $(\mathcal{E}^\vee,\nabla)$ 和 $E(\boldsymbol{m}H)^\vee$ 满足条件 7.43。因此，由元组 $\mathcal{U}=(S,Z_S,\rho,\mathcal{E},\nabla,E,\boldsymbol{m})$ 可得到另一个元组 $\mathcal{U}^\vee=(S,Z_S,\rho,\mathcal{E}^\vee,\nabla,E(\boldsymbol{m}H)^\vee,\boldsymbol{m})$。

定义 7.57 若元组 $\mathcal{U}=(S,Z_S,\rho,\mathcal{E},\nabla,E,\boldsymbol{m})$ 满足以下条件，则称其为一个胞腔。

- 引理 7.55 的结论对 $\mathcal{U}=(S,Z_S,\rho,\mathcal{E},\nabla,E,\boldsymbol{m})$ 以及 $\mathcal{U}^\vee=(S,Z_S,\rho,\mathcal{E}^\vee,\nabla,E(\boldsymbol{m}H)^\vee,\boldsymbol{m})$ 成立，其中$\sim S=S$。
- $\mathbb{D}\mathcal{L}(\mathcal{U})$ 和 $\mathbb{D}\mathcal{L}(\mathcal{U}^\vee)$ 是 S-平坦的。

我们设 $\mathcal{B}(\mathcal{U})=\mathcal{B}(E,\boldsymbol{m})$。注意， $\mathcal{B}(\mathcal{U})=\mathcal{B}(\mathcal{U}^\vee)$。 ∎

引理 7.58 设 $\mathcal{U}=(S,Z_S,\rho,\mathcal{E},\nabla,E,\boldsymbol{m})$ 是一个胞腔。设 η是 S 的任意几何点，其像不包含于 $W(E,\boldsymbol{m})$。那么，存在自然同构 $(\mathbb{D}\mathcal{L}(\mathcal{U}))_\eta\simeq\mathcal{L}(\mathcal{U}^\vee)_\eta$。 ∎

引理 7.59 存在一个扎里斯基闭子集 $W\subset W(E,\boldsymbol{m})\cup W(E(\boldsymbol{m}H)^\vee,\boldsymbol{m})$ 以及一个自然同构$\mathbb{D}(\mathcal{L}(\mathcal{U}))_{S\setminus W}\simeq\mathcal{L}(\mathcal{U}^\vee)_{S\setminus W}$。 ∎

7.6.2 超曲面的变更

设 H' 是 X 的一个超曲面，使得 $H\subset H'$。通过细化 S，我们假设存在一个射影态射$f\colon Z'_S\to Z_S$在 S 上，使得 $H'_{Z'_S}=(\rho\circ f)^{-1}(H')$ 相对于 S 是简单正规交叉。我们设 $\rho':=\rho\circ f$。

我们在（$Z'_S,H'_{Z'_S}$）上定义（$\mathcal{E}',\nabla$）$=f^*$（$\mathcal{E},\nabla$）。我们得到（$\mathcal{E}',\nabla$）的良格 $E'=f^*$（E）（$-H'_{Z'_S}$），其满足关于（$\mathcal{E}',\nabla$）的条件 7.42。取 $\boldsymbol{m}'$，使得 f^*（E（$\boldsymbol{m}H_{Z_S}$））（$H'_{Z'_S}$）$\subset E'$（$\boldsymbol{m}'H'_{Z'_S}$），其满足关于（$\mathcal{E}',\nabla$）和 E' 的条件 7.43。如有必要，通过细化 S，我们得到一个胞腔 $\mathcal{U}'=$（$S,Z'_S,\rho',\mathcal{E}',\nabla',E',\boldsymbol{m}'$）。

引理 *7.60* 存在一个扎里斯基闭子集 $W\subset W$（$E,\boldsymbol{m}$）$\cup W$（$E',\boldsymbol{m}'$）以及一个自然同构 $\mathcal{L}$（$\mathcal{U}$）$_{S\setminus W}\simeq\mathcal{L}$（$\mathcal{U}'$）$_{S\setminus W}$。我们还有 $\mathcal{B}$（$E,\boldsymbol{m}$）$\subset\mathcal{B}$（$E',\boldsymbol{m}'$），因此 $\mathcal{B}$（$E,\boldsymbol{m}$）$\cap\big(W$（$E,\boldsymbol{m}$）$\cup W$（$E',\boldsymbol{m}'$）$\big)=\emptyset$。特别地，$W\cap\mathcal{B}$（$E,\boldsymbol{m}$）$=\emptyset$。

证明 这由命题 7.52 得出。 ∎

7.7 泛扩张的逼近

7.7.1 子集上的可局部化性

设 S 是一个光滑的 $\mathbb{K}$-簇，且有一个子集 $A\subset S(\mathbb{K})$。设 M_S 是一个 S-平坦的全纯椭圆 $\mathcal{D}_{S\times X/S}$-模。

定义 7.61 我们称 M_S 在 A 上可局部化，如果对于任意超曲面 H，都存在一个光滑 $\mathbb{K}$-簇 $S\to S$ 之间的拟有限态射$\widetilde{\ }\quad\widetilde{\ }\quad\widetilde{\ }$、一个子集 $A\subset S(\mathbb{K})$、一个全纯椭圆 $\mathcal{D}_{\widetilde{S}\times X/\widetilde{S}}$-模 $M_{\widetilde{S},1}$，以及 $\mathcal{D}_{\widetilde{S}\times X/\widetilde{S}}$-同态

$$M_{\widetilde{S}}\to M_{\widetilde{S},1}\to M_{\widetilde{S}}(*(\widetilde{S}\times H)),$$

$and\quad\widetilde{\ }$个扎里斯基闭子集的可数并 $W(M_{\widetilde{S},1})\subset S$，使得以下条件成立 $s.$

- $\widetilde{A}$ 映射到 A。$\sim$
- $W(M_{\widetilde{S},1})\cap A=\emptyset.\sim$
- 令 η为 S的任意几何点，其像不包含于 $W(M_{\widetilde{S},\ 1})$。那么，诱导态射$\widetilde{\ }(M_{\widetilde{S},\ 1})_\eta\to M_{\widetilde{S}}(*(S\times H))\eta$是一个同构。 ∎

注 7.62 </style}这样的 和 ， 1 并非唯一。

下述引理是显然的。

引理 7.63 设 M_S 在 A上可局部化。设 $T \to S$ 为任意局部闭不可约子集。我们令$A_T = A \cap T(\mathbb{K})$。则 M_T在 A_T上可局部化。

引理 7.64 设 $0 \to M'_S \to M_S \to M''_S \to 0$是 S-平坦全纯椭圆 $\mathcal{D}_{S\times X/S}$-模的正合列。若 M'_S、 M_S与 M''_S中有两个在 A上可局部化，则余下的一个也在 A上可局部化。

证明 设 $T \subset S$ 为任意局部闭不可约子集。我们令 $A_T = A\cap T(\mathbb{K})$。只需考虑情形$A_T \neq \emptyset$。设 η 是由 T的泛点的代数闭包得到的几何点。存在拟-有限态射 $\widetilde{T} \to T$以及 T-平坦全纯椭圆 $\mathcal{D}_{\widetilde{T}\times X/\widetilde{T}}$-模的正合列 $0 \to N'_{\widetilde{T}} \to N_{\widetilde{T}} \to N''_{\widetilde{T}} \to 0$，它诱导 $0 \to M'_\eta(*H_\eta) \to M_\eta(*H_\eta) \to M''_\eta(*H_\eta) \to 0$。我们可以假设存在正合列的态射$(0 \to M'_{\widetilde{T}} \to M_{\widetilde{T}} \to M''_{\widetilde{T}} \to 0) \to (0 \to N'_{\widetilde{T}} \to N_{\widetilde{T}} \to N''_{\widetilde{T}} \to 0) \to (0 \to M'_{\widetilde{T}} \to M_{\widetilde{T}} \to M''_{\widetilde{T}} \to 0)(*T \times H)$。设 $A_{\widetilde{T}} \subset T(\mathbb{K})$为 A_T的逆像。

我们来证明 M_S 在 A 上可局部化，假设 M'_S 和 M''_S 在 A 上可局部化。其他结论也可以类似地证明。我们可以假设存在 $M'_{\widetilde{T}} \to M'_{\widetilde{T},\,\jmath} \to M'_{\widetilde{T}}$（$*(T\times H)$）以及 $M''_{\widetilde{T}} \to M''_{\widetilde{T},\,\jmath} \to M''_{\widetilde{T}}$（$*(T\times H)$），如定义中所述。我们还可以假设存在同构 $M'_{\widetilde{T},\,\jmath} \simeq N'_{\widetilde{T}}$ 和 $M''_{\widetilde{T},\,\jmath} \simeq N''_{\widetilde{T}}$。令 $W_{\widetilde{T},\,\jmath} = \big(W_{M'_{\widetilde{T},\,\jmath}} \cup W_{M''_{\widetilde{T},\,\jmath}}\big) \times_S \widetilde{T}$。设 η 是 $\widetilde{T}$ 的一个几何点，其像不包含在 $W_{\widetilde{T}}$ 中。由于 $(M'_{\widetilde{T},\,\jmath})_\eta \simeq (M'_{\widetilde{T}})_\eta(*H_\eta)$，且 $(M''_{\widetilde{T},\,\jmath})_\eta \simeq (M''_{\widetilde{T}})_\eta(*H_\eta)$，我们得到 $(M_{\widetilde{T},\,\jmath})_\eta \simeq (M_{\widetilde{T}})_\eta(*H_\eta)$。因此，通过使用诺特归纳，我们得到 M 在 A 上也可局部化。

引理 7.65 设 $\kappa\colon M \to M'$是一个 S-平坦全纯椭圆 $\mathcal{D}_{S\times X/S}$-模的态射。假设 M和 M'在 A上可局部化，且 余核 κ是 S-平坦的。那么，像 κ、核 κ和 余核(κ) 也都在 A上可局部化。

证明 存在如定义 7.61 中所述的 $(S_i, A_i, (M_i)_{\widetilde{S}_{i,1}}, W_{(M_{\widetilde{S}_{i,1}})})$。通过细化 S_i，我们可以假设 $S_1 = S_2 =: S$ 且 $A_1 = A_2 =: A$。我们还可以假设存在以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
(M_1)_{\widetilde{S}} & \longrightarrow & (M_1)_{\widetilde{S},1} & \longrightarrow & (M_1)_{\widetilde{S}}(*(\widetilde{S}\times H)) \\
\downarrow & & {\scriptstyle \kappa_{\widetilde{S},1}}\downarrow & & \downarrow \\
(M_2)_{\widetilde{S}} & \longrightarrow & (M_2)_{\widetilde{S},1} & \longrightarrow & (M_2)_{\widetilde{S}}(*(\widetilde{S}\times H)).
\end{array}$$

此外，我们可以假设 $\kappa_{\widetilde{S},1}$ 的余核是 S-平坦的。那么，所述结论显然成立 ar.

引理 7.66 对于任意胞腔 $\mathcal{U} = (S, Z_S, \rho, \mathcal{E}, \nabla, E, \boldsymbol{m})$， $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ 和 $\mathbb{D}\mathcal{L}(\mathcal{U})$ 在 $\mathcal{B}(\mathcal{U})$上均可局部化。

证明 这由引理 7.59 和引理 7.60 得出。

7.7.2 强可局部化性

设 M 是一个带有 $A \subset S(\mathbb{K})$ 的 S-平坦全纯椭圆 $\mathcal{D}_{S\times X/S}$-模。

定义 7.67 若对任意光滑的 $\mathbb{K}$-簇 Y、 Y 上的任意胞腔 $\mathcal{U}_Y = (S_1, \rho_1, \mathcal{E}, \nabla, E, \boldsymbol{m})$，以下条件均成立，则称 M 是强可局部化的。

- $\mathcal{D}_{(S_1\times S)\times(Y\times X)/(S_1\times S)}$-模 $\mathcal{L}(\mathcal{U}_Y) \boxtimes M$和 $\mathbb{D}\mathcal{L}(\mathcal{U}_Y) \boxtimes M$在 $\mathcal{B}(\mathcal{U}_Y) \times A$上均可局部化。

引理 7.68 设 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$是一个由 S-平坦全纯椭圆 $\mathcal{D}_{S\times X/S}$-模构成的正合列。如果其中两个是强可局部化的，那么其余的也强可局部化。

引理 7.69 设 $\varphi\colon M \to M'$是一个 S-平坦全纯椭圆 $\mathcal{D}_{S\times X/S}$-模的态射。假设 $\mathrm{Cok}\,\varphi$是 S-平坦的，且 M 和 M'是强可局部化的。那么，$\mathrm{Cok}(\varphi)$、$\mathrm{Im}(\varphi)$ 和 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ 都是强可局部化的。

7.7.3 扩张空间的逼近

设 S 是一个光滑 $\mathbb{K}$-簇。设 $A\subset S(\mathbb{K})$ 是一个子集。设 M 是一个 S-平坦全纯椭圆 $\mathcal{D}_{S\times X/S}$-模，且在 A 上强可局部化。

$\mathcal{U}=(T,\ Z,\ H,\ \rho,\ \mathcal{E},\ E)$ 是 X 上的一个胞腔。我们得到一个 $(T\times S)$-平坦全纯椭圆 $\mathcal{D}_{(T\times S)\times(X\times X)/T\times S}$-模$\mathbb{D}\mathcal{L}(\mathcal{U})\boxtimes M$。它在 $\mathcal{B}(\mathcal{U})\times A$ 上可局部化。

令 $\Delta:\ X\to X\times X$ 表示对角嵌入。它诱导出 $(T\times S)\times X\to(T\times S)\times X\times X$。令 $H_j(j=1,\ \ldots\ldots,\ m)$ 为一组超曲面元组，使得 $\Delta(X)=\bigcap_{i=1}^{\ell}H_{i\circ}$

存在 $U\to T\times S$ 和 $W\subset U$，使得以下结论成立。

- W 是可数个 U 的闭扎里斯基子集的并，使得 $W\cap\big(U\times_{T\times S}(\mathcal{B}(\mathcal{U})\times A)\big)=\emptyset$.
- 对于任意 $J\subset\{1,\ldots,m\}$，存在相干的 $\mathcal{D}_{T\times S\times X\times X/T\times S}$-模 $(\mathbb{D}\mathcal{L}(\mathcal{U})\boxtimes M)_{U,\ J}$以及态射 $(\mathbb{D}\mathcal{L}(\mathcal{U})\boxtimes M)_{U,\ J}\to(\mathbb{D}\mathcal{L}(\mathcal{U})\boxtimes M)_{U,\ J'}$使得对于 $J\subset J'$

$$\begin{array}{ccc}\big((\mathbb{D}\mathcal{L}(\mathcal{U})\boxtimes M)_{U,J}\big)_\eta & \longrightarrow & \big((\mathbb{D}\mathcal{L}(\mathcal{U})\boxtimes M)_{U,J'}\big)_\eta\\ \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow\\ (\mathbb{D}\mathcal{L}(\mathcal{U})\boxtimes M)_\eta(*H(J)_\eta) & \longrightarrow & (\mathbb{D}\mathcal{L}(\mathcal{U})\boxtimes M)_\eta(*H(J')_\eta)\end{array}$$

对于任意几何点 η，若其像不包含于 U，则有 W。

令 U表示以 $e_1,\ldots,e_\ell$ 为基的 $\mathbb{K}$-向量空间。对于有序子集 $J=(j_1,\ldots,j_m)$，我们定义$e_J=e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_m}$。我们定义

$$\mathcal{C}^{\mathrm{app},k}\big(\mathcal{L}(\mathcal{U}),M\big)=\bigoplus_{|J|=k}\big(\mathbb{D}\mathcal{L}(\mathcal{U})\boxtimes M\big)_{U,J}\otimes e_J.$$

我们得到复形 $\mathcal{C}^{\mathrm{app},\bullet}(\mathcal{L}(\mathcal{U})\ M)$。我们还定义

$$\mathcal{C}^{k}\big(\mathcal{L}(\mathcal{U}),M\big)=\bigoplus_{|J|=k}(\mathbb{D}\mathcal{L}(\mathcal{U})\boxtimes M)(*H(J))\otimes e_J.$$

我们得到复形 $\mathcal{C}^{\bullet}(\mathcal{L}(\mathcal{U})\ M)$。存在自然的复形态射。

$$\mathcal{C}^{\mathrm{app},\bullet}(\mathcal{L}(\mathcal{U}),M)\to\mathcal{C}^{\bullet}(\mathcal{L}(\mathcal{U}),M).$$

对于任意几何点 η，若其像不包含于 W，则有

$$\mathcal{C}^{\mathrm{app},\bullet}(\mathcal{L}(\mathcal{U}),M)_\eta\simeq\mathcal{C}^{\bullet}(\mathcal{L}(\mathcal{U}),M)_\eta.$$

令 $\pi:\ U\times X\to U$ 表示投影。我们得到以下态射

$$R^k\pi_*\mathcal{C}^{\mathrm{app},\bullet}(\mathcal{L}(\mathcal{U}),M)\longrightarrow R^k\pi_*\mathcal{C}^{\bullet}(\mathcal{L}(\mathcal{U}),M).$$

通过细化 U，我们可以假设 $R^k\pi_*\mathcal{C}^{\mathrm{app}\,\bullet}(\mathcal{L}(\mathcal{U})\ M)$ 是局部自由的有限秩 $\mathcal{O}_U$-模。对于像不包含在 W 中的任意几何点 η，我们有

$$\Big(R^k\pi_*\mathcal{C}^{\mathrm{app}\,\bullet}(\mathcal{L}(\mathcal{U}),M)\Big)_\eta\simeq\Big(R^k\pi_*\mathcal{C}^{\mathrm{app}\,\bullet}(\mathcal{L}(\mathcal{U}),M)_\eta\Big)\simeq\Big(R^k\pi_*\mathcal{C}^{\bullet}(\mathcal{L}(\mathcal{U})_\eta,M_\eta)\Big)\simeq\mathrm{Ext}^k\Big(\mathcal{L}(\mathcal{U})_\eta,M_\eta\Big).$$

令 E^1 为与 $R^1\pi_*\mathcal{C}^{\mathrm{app},\bullet}(\mathcal{L}(\mathcal{U})\ M)$ 对应的、定义在 U 上的向量丛。令 $p:\ E^1\to U$ 表示投影。令 $\pi_1:\ E^1\times X\to E^1$ 表示投影。我们得到

$$p^*R^1\pi_*\mathcal{C}^{\mathrm{app},\bullet}(\mathcal{L}(\mathcal{U}),M)\to p^*R^1\pi_*\mathcal{C}^{\bullet}(\mathcal{L}(\mathcal{U}),M)\simeq R^1\pi_{1*}\mathcal{C}^{\bullet}(\mathcal{L}(\mathcal{U})_{E^1},M_{E^1})$$

在 E^1 上。$p^*R^1\pi_*\mathcal{C}^{\mathrm{app},\bullet}(\mathcal{L}(\mathcal{U})\ M)$ 的泛截面诱导出 E^1 上 $R^1\pi_{1*}\mathcal{C}^{\bullet}(\mathcal{L}(\mathcal{U})_{E^1},M_{E^1})$ 的截面 s_1。由于 E^1 是一个仿射概形，它诱导出一个元素

$$\alpha(s_1)\in\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_{E^1\times X/E^1}}\Big(\mathcal{L}(\mathcal{U})_{E^1},M_{E^1}\Big).$$

我们得到与 $\alpha(s_1)$ 对应的 $\mathcal{D}_{E^1\times X/E^1}$-模扩张：

$$0\longrightarrow M_{E^1}\longrightarrow\widetilde{M}_{E^1}\longrightarrow\mathcal{L}(\mathcal{U})_{E^1}\longrightarrow 0.$$

~设 $a \in A \subset S(\mathbb{K})$ 和 $b \in \mathcal{B}(\mathcal{U}) \subset T(\mathbb{K})$。设 $u \in U(\mathbb{K})$ 是在 $(a,\ b)$ 上的。有一个同构

$$E^1_{|u} \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{L}(\mathcal{U})_b, M_a).$$

由命题 7.31 得到以下命题。

命题 7.70 对于 $x \in E^1_{|u}$，扩张

$$0 \longrightarrow M_{E^1|_{x\times X}} \longrightarrow \widetilde{M}_{E^1|_{x\times X}} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U})_{E^1|_{x\times X}} \longrightarrow 0$$

对应于 $x \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{L}(\mathcal{U})_b, M_a)$。 ∎

8 某些 $\mathcal{D}$-模族的有界性

8.1 有界性条件

设 $\mathbb{K}$ 是一个特征零代数闭域。设 S 是一个 $\mathbb{K}$-簇。令 $S(\mathbb{K})$ 表示闭点集。设 $\pi\colon X_S \to S$ 是一个相对维数为 n 的光滑射影态射。对于每个 $s \in S(\mathbb{K})$，我们令 $X_s = \{s\} \times_S X_S$。令 $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_{X_s})$ 表示 $\mathcal{D}_{X_s}$- 模的范畴。

定义 8.1 设 $\mathcal{C}_s\,(s \in S(\mathbb{K}))$ 为 $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_{X_s})$ 的全子范畴。若存在下列对象，则称族 $(\mathcal{C}_s \mid s \in S(\mathbb{K}))$ 是有界的。

- 一个 S 上的 $\mathbb{K}$-簇 $\mathcal{S}$。我们令 $X_{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \times_S X_S$。
- 一个在 $\mathcal{S}$ 上平坦的凝聚 $\mathcal{D}_{X_{\mathcal{S}}/\mathcal{S}}$-模 $\mathcal{M}$。
- 对任意 $s \in S(\mathbb{K})$ 以 及 $\mathcal{C}_s$ 中的任意对象 M，存在 s 上的一个闭点 $\widetilde{s} \in \mathcal{S}(\mathbb{K})$，使得 $\mathcal{M}_s \simeq M$。 ∎

8.1.1 亚纯平坦联络的有界性

我们有如下有界性。

定理 8.2 设 S、 X_S、 H_S 如§6.3.2中所述。则族 $(\mathcal{C}^{\mathrm{good}}(X_s, H_s, r, \boldsymbol{m}) \mid s \in S(\mathbb{K}))$ 按照定义8.1的意义是有界的。

证明 设 $\mathcal{S}$ 和 $(E_{\mathcal{S}}, \nabla_{\mathcal{S}})$ 如定理 6.18 中所述。令 $\mathcal{E}_{\mathcal{S}} = E_{\mathcal{S}}(*H_{\mathcal{S}})$。我们得到相对于 $\mathcal{S}$ 的良好亚纯平坦丛 $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \nabla_{\mathcal{S}})$。通过细化 $\mathcal{S}$，可假设 $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \nabla_{\mathcal{S}})$ 存在一个良格。令 $\mathcal{S}_1$ 为 $\mathcal{S}$ 的一个不可约分支。我们得到 $(X_{\mathcal{S}_1}, H_{\mathcal{S}_1}) = (X_{\mathcal{S}}, H_{\mathcal{S}}) \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}_1$。取限制后，我们得到 $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}_1}, \nabla_{\mathcal{S}_1})$ 及诱导格 $E_{\mathcal{S}_1}$。设 $H_{\mathcal{S}_1} = \bigcup_{j\in\Lambda_1} H_{\mathcal{S}_1,j}$ 为不可约分解。令 $E^{(1)}_{\mathcal{S}_1}$ 为满足条件 7.42 的 $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}_1}, \nabla_{\mathcal{S}_1})$ 的良格。我们取满足关于 $E^{(1)}_{\mathcal{S}_1}$ 的条件 7.43 的 $\boldsymbol{m}_1 \in \mathbb{Z}^{\Lambda_1}_{>0}$。我们还假设以下条件。

- $E_{(1)\,\mathcal{S}_1} \subset E_{\mathcal{S}_1}(-H_{\mathcal{S}_1})$ 和 $E_{\mathcal{S}_1}(H_{\mathcal{S}_1}) \subset E_{(1)\,\mathcal{S}_1}(\boldsymbol{m}_1 H_{\mathcal{S}_1})$。这意味着 $\mathcal{A}(E_{\mathcal{S}_1}) \subset \mathcal{B}(E_{(1)\,\mathcal{S}_1}, \boldsymbol{m}_1)$。（关于$\mathcal{A}(E_{\mathcal{S}_1})$，参见引理 7.49。）

我们得到相干的 $\mathcal{D}_{X_{\mathcal{S}_1}/\mathcal{S}_1}$-模 $\mathcal{D}_{X_{\mathcal{S}_1}/\mathcal{S}_1}\big(E^{(1)}_{\mathcal{S}_1}(\boldsymbol{m}_1 H_{\mathcal{S}_1})\big)$，它在 $\mathcal{S}_1$ 上平坦。对 $\mathcal{S}$的每个不可约分支应用这一构造，即得到定理所述结论。 ∎

定理 8.3 设 X, H, r, $\boldsymbol{m}$ 如§6.4所述。那么，族 $\mathcal{C}(X, H, r, \boldsymbol{m})$ 按照定义8.1的意义是有界的。

证明 设 $\mathcal{S}$, $X_{\mathcal{S}}$, $\rho_{\mathcal{S}}\colon X_{\mathcal{S}} \to \mathcal{S} \times X$, $H_{\mathcal{S}}$ 是相对于 $\mathcal{S}$、定义在 $(X_{\mathcal{S}}, H_{\mathcal{S}})$ 上的良好亚纯平坦丛 $(\mathcal{V}, \nabla)$，并且$\widehat{\ }$是定理 6.20 中的格 $E_{\mathcal{S}}$。通过细化 $\mathcal{S}$，我们可以假设 $(\mathcal{V}, \nabla)$ 有一个良格。与定理 8.2 的证明一样，我们构造一个相干的 $\mathcal{D}_{\widehat{X}_{\mathcal{S}}/\mathcal{S}}$-模 $\mathcal{M}$，使其满足以下性质。

- $\mathcal{M}_s \simeq \mathcal{V}_s$ 对于任意 $u \in \mathcal{A}(E_{\mathcal{S}})$。

通过考察 $\rho_{\mathcal{S}\dagger}\mathcal{M}$，我们得到了该定理的结论。 ∎

8.2 具有受控特征循环的全纯椭圆 $\mathcal{D}$-模的有界性

设 X 是光滑射影 $\mathbb{K}$簇。设 $\Lambda=\sum m_i\Lambda_i$，其中 $m_i\in\mathbb{Z}_{>0}$，且 Λ_i 是 T^*X中的复拉格朗日锥。对于任意全纯椭圆 $\mathcal{D}_X$-模 M，其特征循环为 $\mathrm{CC}(M)$。令 $\mathcal{C}(X,\Lambda)$ 表示满足 $\mathrm{CC}(M)\leq\sum m_i\Lambda_i$ 的全纯椭圆 $\mathcal{D}_X$-模 M族，即 $\mathrm{CC}(M)=\sum n_i\Lambda_i$且 $n_i\leq m_i$。

定理 8.4 族 $\mathcal{C}(X,\Lambda)$ 在定义 8.1的意义下是有界的。

8.2.1 极小延拓的有界性

设 $Z\subset X$ 是一个不可约闭子集，不一定正规。设 H 是 X 的一个超曲面，使得 $Z\setminus H$ 光滑。令 $H_Z=H\cap Z$。令 $\iota_Z\colon Z\setminus H_Z\to X\setminus H$ 表示该浸入。

(Z,H_Z) 上的亚纯联络指一个带有可积联络 ∇的代数 $\mathcal{O}_{Z\setminus H_Z}$-模 V。它诱导出一个 $\mathcal{D}_{X\setminus H}$-模 $\iota_{Z\dagger}(V)$。极小延拓记为 $(\iota_{Z\dagger}V)_{\min}$。

令 $\mathrm{Mero}_{\min}(Z,H_Z,\Lambda)$ 表示由 $\mathcal{D}_X$-模构成的范畴，这些模形如 $(\iota_{Z\dagger}V)_{\min}$，其中 V 是 (Z,H_Z) 上的亚纯平坦联-络，并且满足

$$\mathrm{CC}\big((\iota_{Z\dagger}V)_{\min}\big)\leq\Lambda.$$

命题 8.5 存在一个胞腔 $\mathcal{U}=(S,Z_S,\rho,\mathcal{E},\nabla,E,\boldsymbol{m})$ 使得下列结论成立。

- 对任意 $(\iota_{Z\dagger}V)_{\min}\in\mathrm{Mero}_{\min}(Z,H_Z,\Lambda)$，存在 $a\in\mathcal{B}(\mathcal{U})$ 使得 $(\iota_{Z\dagger}V)_{\min}\simeq\mathcal{L}(\mathcal{U})_a$。

~~~
~~~

8.2.2 定理 8.4 的证明

定义 8.8 Λ 的有序划分是一个分解 $\Lambda=\sum\Lambda^{(i)}$，其中 $\Lambda^{(i)}=\sum m_j^{(i)}\Lambda_j$，且 $m_j^{(i)}$ 为某些非负整数。令 $\mathcal{P}(\Lambda)$ 表示有序划分的集合。 ∎

由命题 8.5 和命题 7.70 可得以下命题。

命题 8.9 设 $\mathbf{\Lambda}=(\Lambda^{(i)})\in\mathcal{P}(\Lambda)$。存在一个复代数簇 $S(\mathbf{\Lambda})$ 以及一个相干的 $\mathcal{D}_{X\times S/S}$-模$\mathcal{M}(\mathbf{\Lambda})$，它带有一个由 $\mathcal{D}$-子模构成的滤过 $\mathcal{F}$，满足以下性质。

- $(\mathcal{M}(\mathbf{\Lambda})\ \mathcal{F})$ 在 S 上是平坦的，并且 $\mathcal{M}(\mathbf{\Lambda})$ 是全纯椭圆的。
- 设 M是一个全纯椭圆的 $\mathcal{D}_X$-模，其 *Jordan-H¨older* 分解 $\mathcal{F}$满足 $\mathrm{Gr}_j^{\mathcal{F}}(M)\leq\Lambda_{(j)}$。那么，存在 $s\in S$使得 $(M,\mathcal{F})\simeq(\mathcal{M}(\mathbf{\Lambda})\ \mathcal{F})_s$。 ∎

设 M是 X 上的全纯椭圆 $\mathcal{D}$-模，满足 CC(M) $\leq\Lambda$。存在 Jordan-H¨older 滤过 $\mathcal{F}$(M)。我们有 CC(M) $=\sum$CC(Gr$_i^{\mathcal{F}}$(M))。存在分拆 $\mathbf{\Lambda}\in\mathcal{P}(\Lambda)$，使得 CC(Gr$_i^{\mathcal{F}}$($M$)) $\leq\Lambda^{(i)}$。存在$s\in\mathcal{S}(\mathbf{\Lambda})$使得 $M\simeq\mathcal{M}(\mathbf{\Lambda})_s$。因此，$\mathcal{S}=\bigsqcup_{\mathbf{\Lambda}\in\mathcal{P}(\Lambda)}\mathcal{S}(\mathbf{\Lambda})$ 连同其诱导的 $\mathcal{D}_{X\times\mathcal{S}/\mathcal{S}}$-模满足定理 8.4 中所需的性质。 ∎

8.2.3 附录：特征循环的约束

设 M 是一个相干的 $\mathcal{D}_{S\times X/S}$-模，它在 S 上平坦且全纯椭圆。设 $\Lambda_i\subset T^*X\,(i=1,\ \ldots\ldots,\ \ell)$ 为复拉格朗日锥。设 m_i $(i=1,\ \ldots\ldots,\ \ell)$ 为正整数。令 $\Lambda=\sum m_i\Lambda_i$。

引理 8.10 存在一个可构造子集 $S'\subset S$，使得 $\mathrm{CC}(M_s)\leq\Lambda$ 当且仅当 $s\in S'$.

证明 设 $T\subset S$ 是一个局部闭光滑子簇。存在一个 Zariski 开子集 $T'\subset T$，使得 $M_{T'}$ 具有一个在 T' 上平坦的良滤过。利用该良滤过，我们得到特征簇 Ch($M_{T'}$) 和特征循环 CC($M_{T'}$)。

设 $\mathbb{K}_1$ 是 T 的泛点的代数闭包。设 η: Spec $\mathbb{K}_1\to T$ 为诱导态射。我们在 $X_{\mathbb{K}_1}$上得到 M_η。由 $M_{T'}$的良滤过得到 M_η 的良滤过。我们有 Ch(M_η) =Ch($M_{T'}$)η。若 Ch(M_η) $\not\subset|\Lambda|\times_{\mathbb{K}}\mathbb{K}_1$，则存在一个 Zariski 开子集 $T'\subset T$，使得对任意$s\in T'$，Ch(M_s) $\not\subset\bigcup\Lambda_{i,\ \mathbb{K}_1}$。若 Ch($M_\eta$) $=\bigcup\Lambda_{i,\ \mathbb{K}_1}$，则对某个 $n_i\in\mathbb{Z}_{\geq0}$，有 CC($M_{T'}$) $=\sum n_i$($T'\times\Lambda_i$)。我们有 $n_i\leq m_i$ 当且仅当 CC(M_η)$\leq\sum m_i\Lambda_{i,\ \mathbb{K}_1}$。然后，通过诺特归纳法得到引理的结论。 ∎

参考文献

[1] L. Fiorot、T. Monteiro Fernandes、C. Sabbah，《相对正则黎曼–希尔伯特对应》，《伦敦数学会会刊》（3）122（2021），434–457。[2] L. Fiorot、T. Monteiro Fernandes、C. Sabbah，《相对正则黎曼–希尔伯特对应 II》，《组合数学》159（2023），1413–1465。[3] W. Fulton，《交理论》，数学及其边缘领域成果（3），2，施普林格出版社，柏林，1998，xiv+470页。[4] O. Gabber，《特征簇的可积性》，《美国数学杂志》103（1981），445–468。[5] I. M. Gelfand、M. M. Kapranov、A. V. Zelevinsky，《判别式、结式与多维行列式》，Birkh¨auser Boston公司，美国马萨诸塞州波士顿，1994，x+523 页。[6] A. Grothendieck，《´代数几何基础´´´´》IV：´概形及其态射的局部研究´´II，法国高等科学研究所数学出版物 ´24（1965），231页。[7] A. Grothendieck，《´代数几何基础´´´´》IV：´概形及其态射的局部研究´´III，法国高等科学研究所数学出版物 ´28（1966），255页。[8] H. A. Hamm、D. T. Lê，《拟射影簇上的莱夫谢茨定理》，a《法国数学会通报》113（1985），123–142。

[9] R. Hartshorne，《代数几何》，数学研究生教材，52，施普林格出版社，纽约-海德堡，1977，xvi+496页。[10] R. Hotta、K. Takeuchi、T. Tanisaki，《 $\mathcal{D}$-模、拟层与表示论》，由Takeuchi译自1995年日文版，数学进展，236，Birkh¨auser Boston公司，美国马萨诸塞州波士顿，2008，xii+407页。[11] H. Hu、J.-B. Teyssier，《曲面上平坦丛的上同调有界性及其应用》，《组合数学》160（2024），2775–2827。[12] M. Kashiwara，《 $\mathcal{D}$-模与微局部演算》，数学专著译丛，217，岩波现代数学丛书，美国数学会，2003[13] M. Kashiwara、P. Schapira，《流形上的层》，施普林格出版社，柏林，1990，x+512 页。[14] K. Kedlaya，《平坦亚纯联络的良形式结构，I：曲面》，《杜克数学杂志》154（2010），343–418。[15] K. Kedlaya，《平坦亚纯联络的良形式结构，II：优秀概形》，《美国数学会杂志》24（2011），188–229。[16] K. Kedlaya，《平坦亚纯联络的良形式结构，III：不规则性与转折轨迹》，《数理解析研究所纪要》57（2021），831–866。[17] M. Kontsevich，《全纯椭圆 D-模与正特征》，《日本数学杂志》4（2009），1–25。[18] A. Langer，《论半稳定层的有界性》，《数学文献》27（2022），1–16。[19] B. Malgrange，《亚纯联络2：典范网》，Invent. Math. 124（1996），367–387。´ı[20] M. Maruyama，《论无挠层族的有界性》，《京都大学数学杂志》21（1981），673–701。[21] J. S. Milne，《 ´平展上同调》，普林斯顿大学出版社，美国新泽西州普林斯顿，1980，xiii+323 页。[22] T. Mochizuki，《驯和谐丛的Kobayashi-Hitchin对应及其一个应用》，Ast´erisque 309（2006）。[23] T. Mochizuki，《光滑射影曲面上亚纯平坦联络的良形式结构》，纯粹数学高级研究，54，日本数学会，东京，2009，223–253。[24] T. Mochizuki，《野和谐丛与野纯扭子 D-模》，Ast´erisque 340，（2011）[25] T. Mochizuki，《良好亚纯平坦丛的Stokes 结构》，《朱西厄数学研究所杂志》10（2011），675–712。[26] T. Mochizuki，《混合扭子 $\mathcal{D}$-模》，施普林格，2015。[27] C. Sabbah，《关于射影直线上刚性不可约亚纯联络的注记》，《数学文献》28（2023），1473–1492。[28] Y. T. Siu，《解析对象的扩张技巧》，第8卷，Marcel Dekker公司，纽约，1974。