arXiv:2603.02774v1 [math.PR] 3 Mar 2026

带反射的退化随机偏微分方程的渐近对数哈纳克不等式*

QiLi[(a)]，**Feng-Yu Wang**[(b)]，**Tu-Sheng Zhang**[(a)]

(a) 中国科学技术大学数学科学学院，中国合肥。(b) 天津大学应用数学中心与 KL-AAGDM，中国天津 300072。
vivien777@mail.ustc.edu.cn，wangfy@tju.edu.cn，Tusheng.Zhang@manchester.ac.uk

2026年3月4日

摘要

通过构造适当的测度变换耦合，本文为一类带反射的退化随机偏微分方程建立了渐近对数Harnack不等式。该不等式蕴含渐近热核估计、不变概率测度的唯一性、渐近梯度估计（进而得到渐近强 Feller 性质）以及渐近不可约性。作为应用，本文通过 d维带反射的退化随机纳维–斯托克斯方程说明主要结果，其中耗散算子为带有幂次$\theta \geq 1 \vee \frac{d+2}{4}$，的狄利克雷拉普拉斯算子；当 $d \leq 2$时，该算子包含拉普拉斯算子。

—

AMS学科分类：60H15；35Q30；35R60。关键词：渐近对数Harnack不等式、测度变换耦合、带反射的随机发展方程、反射随机纳维-斯托克斯方程。

1 引言

带反射的随机偏微分方程（SPDEs）为模拟随机界面在硬边界附近的演化提供了一个数学框架；参见 [7]。此类反射随机系统解的存在性与唯一性

*本研究部分得到了中国国家重点研发计划（编号：2022YFA1006000、2022YFA1006001）和国家自然科学基金委员会（12131019、12371151、12426655、12531007、12571158）的资助。

已在 [5]中得到确立。关于带反射的实值随机偏微分方程的进一步研究，请参阅 [10], [6], [16], 及其中的参考文献。

另一方面，为了刻画随机系统的正则性性质，文献 [14] 首次针对黎曼流形上的椭圆扩散半群提出了无维数限制的哈纳克不等式；作为这一不等式的较弱形式，对数哈纳克不等式随后在文献 [12]中提出。人们通过测度变换耦合法对这两种不等式进行了广泛研究，更多详情请参见文献 [1, 11, 13]及其中的参考文献。这些不等式带来了若干重要推论，包括梯度估计、不变概率测度的唯一性、热核估计，以及相应马尔可夫半群的不可约性。

当随机系统的噪声高度退化时，上述哈纳克型不等式便不再适用。因此，文献 [15] 和 [3] 分别针对退化噪声驱动的二维纳维-斯托克斯方程和具有无限时滞的随机系统提出了渐近对数Harnack不等式。该不等式还蕴含一些正则性性质，包括渐近热核估计、不变概率测度的唯一性、渐近梯度估计（进而得到渐近强Feller性质）以及渐近不可约性，详情见定理 3.1。

本文针对希尔伯特空间单位球上的一类带反射的退化随机偏微分方程，建立了渐近 Harnack 不等式；其适定性和指数遍历性已在 [4, 5] 中得到研究。

设 $(\mathbb{H}, \|\cdot\|_{\mathbb{H}}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为可分希尔伯特空间，令 $(\mathscr{L}_2(\mathbb{H})\|\cdot\|_{\mathscr{L}_2(\mathbb{H})})$ 表示 $\mathbb{H}$ 上希尔伯特－施密特算子构成的空间。设 $(A, \mathscr{D}(A))$ 为 $\mathbb{H}$ 上的正定自伴算子，其特征值为 $\{\lambda_i > 0 : i \geq 1\}$，按递增顺序排列并计入重数，且满足

LL MLLM

$$\lim_{i\to\infty} \lambda_i = \infty. \tag{1.1}$$

设 $\{e_i : i \geq 1\}$ 为 $\{\lambda_i : i \geq 1\}$ 对应的酉特征向量，它们构成 $\mathbb{H}$ 的一组标准正交基。则 $\mathbb{V} := D(A^{\frac{1}{2}})$ 是 $A^{\frac{1}{2}}$ 的定义域，其内积为

$$\langle u, v\rangle_{\mathbb{V}} := \langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v\rangle, \quad u, v \in \mathbb{V}$$

是一个紧嵌入到 $\mathbb{H}$中的希尔伯特空间。设 $\mathbb{V}^*$ 为 $\mathbb{V}$关于 $\mathbb{H}$的对偶空间，从而我们得到一个盖尔范德三元组

$$\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{H} \cong \mathbb{H}^* \hookrightarrow V^*.$$

设 ${}_{\mathbb{V}^*}\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{V}}$ 为 $\mathbb{V}^*$ 与 $\mathbb{V}$之间的对偶。

我们考虑以下关于 $X_t^x \in D$ 的带反射随机偏微分方程: $= \{x \in \mathbb{H} : \ \|x\|_{\mathbb{H}} \leq 1\}$:

参见 参见

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}X_t^x = \big\{b(X_t^x) + B(X_t^x, X_t^x) - AX_t^x\big\}\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}W_t + \mathrm{d}L_t^x, \\ &t \geq 0,\ X_0^x = x \in D, \end{aligned} \tag{1.2}$$

- 可测映射

$$b : \mathbb{H} \to \mathbb{V}^*, \quad B : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*, \quad \sigma : \mathbb{H} \to \mathscr{L}_2(\mathbb{H})$$

由应用中相应的物理模型所决定。

- W_t 是 $\mathbb{H}$上的柱布朗运动，即形式上，

$$W_t = \sum_{i=1}^{\infty} B_t^i e_i, \quad t \geq 0$$

其中 $\{B^i\}_{i\geq 1}$ 是完备滤过概率空间$(\Omega\ \{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$上的一列独立的一维布朗运动。

满足 $L_0 = 0$ 的- L_t 是 $\mathbb{H}$上具有有限变差的适应连续过程，即$\mathbb{P}$-a.s.

$$\mathrm{Var}_H(L)([0,T]) := \sup_{n\geq 1, 0=t_0<t_1\cdots<t_n=T} \sum_{i=1}^{n} \|L_{t_i} - L_{t_{i-1}}\|_{\mathbb{H}} < \infty, \quad T \in (0,\infty).$$

设对 $x \in \mathbb{H}$有 $\sigma_i(x) = \sigma(x)e_i \in \mathbb{H}$ 。我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\sigma_i(x)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \|\sigma(x)\|_{\mathscr{L}_2(\mathbb{H})}^2 \|x\|_{\mathbb{H}}^2 < \infty, \quad x \in \mathbb{H}.$$

本文其余部分组织如下。在第2节中，我们回顾(1.2)的适定性结果。在第3节中，我们给出主要结果及其完整证明。最后，在第4节中，我们将主要结果应用于 d维反射纳维–斯托克斯方程。

2 适定性与矩估计

作为准备，本节回顾解的定义以及由 [5] 在以下假设下得到的适定性结果。

(A) $(A, \mathscr{D}(A))$ 是 $\mathbb{H}$ 上的正定自伴算子，其特征值为 $\{\lambda_i\}_{i\geq 1}$，满足(1.1)，并且 b、 B、 σ满足以下条件。

(1) 存在常数 $K_b, K_\sigma \in (0,\infty)$，使得对于任意 $x, y \in \mathbb{H}$,

$$\|b(x) - b(y)\|_{\mathbb{V}^*} \leq K_b \|x - y\|_{\mathbb{H}}, \quad \|\sigma(x) - \sigma(y)\|_{\mathscr{L}_2(\mathbb{H})}^2 \leq K_\sigma \|x - y\|_{\mathbb{H}}^2.$$

(2) $B\colon \mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}^*$ 是双线性的，并且存在 $K_B\in(0,\infty)$，使得

$$\|B(x,x)\|_{\mathbb{V}^*}\le K_B\|x\|_{\mathbb{H}}\|x\|_{\mathbb{V}},\qquad x\in\mathbb{V}.$$

此外 $\bar{}$，存在 $K\in(0,\infty)$ 使得 $B(x,y,z):={}_{\mathbb{V}^*}\langle B(x,y)z\rangle_{\mathbb{V}}$ 满足 s

$$\begin{aligned}&\bar{B}(x,y,z)=-\bar{B}(x,z,y),\quad \bar{B}(x,y,y)=0,\\&|\bar{B}(x,y,z)|\le K\|y\|_{\mathbb{V}}\sqrt{\|x\|_{\mathbb{H}}\|x\|_{\mathbb{V}}\|z\|_{\mathbb{H}}\|z\|_{\mathbb{V}}},\quad x,y,z\in\mathbb{V}.\end{aligned}$$

现在我们回顾 [5]中引入的解的定义。

defsol **定义2.1.** 称一对$(X_t^x,L_t^x)_{t\ge0}$为反射问题(1.2)的解，当且仅当下列条件成立

(i) X_t^x是 $\mathbb{H}$ 上的 $\mathscr{F}_t$-适应连续过程，且 $X\in L^2_{loc}([0,\infty);\mathbb{V})$ $\mathbb{P}$-a.s.

(ii) $L_0=0$，L_t 是定义在 $\mathbb{H}$ 上的连续适应过程，满足

$$\mathbb{E}[|\mathrm{Var}_H(L)([0,T])|^2]<\infty,\quad T\in(0,\infty). \tag{2.1}$$

此外，$\mathbb{P}$-几乎处处成立以下黎曼-斯蒂尔切斯积分不等式:

def5def5
$$\int_0^T\langle\phi(t)-X_t^x,\mathrm{d}L_t\rangle\ge0,\quad \phi\in C([0,T],D). \tag{2.2}$$

(iii) $\mathbb{P}$-几乎处处成立以下 $\mathbb{V}^*$ 中的积分方程:

$$X_t^x=x+\int_0^t\big\{b(X_s^x)+B(X_s^x,X_s^x)-AX_s^x\big\}\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma(X_s^x)\mathrm{d}W_s+L_t^x,\quad t\ge0.$$

以下结果归功于 [5] 和 [4]。

命题2.1 **命题 2.1**。 在假设**(A)**下，对于任意 $x\in\mathbb{H}$，方程(1.2) 存在唯一解(X_t^x,L_t^x)，且

estiesti
$$\mathbb{E}\bigg[\sup_{t\in[0,T]}\|X_t^x\|_{\mathbb{H}}^2+\mathrm{e}^{\lambda\int_0^T\|X_s^x\|_{\mathbb{V}}^2\mathrm{d}s}\bigg]<\infty,\quad \lambda,T\in(0,\infty). \tag{2.3}$$

3 渐近对数哈纳克及其应用

本部分首先回顾渐近 Hanrack 不等式及其应用，随后为方程 (1.2) 建立该不等式。

3.1 一般结果

设 (E,ρ) 为度量空间， P_t 是 $\mathscr{B}_b(E)$ 上的马尔可夫半群，其中 $\mathscr{B}_b(E)$ 表示 E 上的有界可测函数类。设 $\mathscr{B}_b^+(E)$ 为 $\mathscr{B}_b(E)$ 中严格正函数的集合。

对于 E上的任意函数 f，令

$$|\nabla f|(x)=\limsup_{y\to x}\frac{|f(x)-f(y)|}{\rho(x,y)},\quad x\in E.$$

令 $\|\nabla f\|_\infty:=\sup_{x\in E}|\nabla f|(x)$，且

LB
$$\begin{aligned}\mathrm{Lip}(E)&:=\{f\in\mathscr{B}_b(E):\ \|\nabla f\|_\infty<\infty\},\\ \mathscr{D}(E)&:=\{f\in\mathscr{B}_b^+(E):\ \|\nabla\log f\|_\infty<\infty\}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

定义3.1. 若存在对称的 Φ， $\Psi_t:\ E\times E\to(0,\ \infty)$，且 $\Psi_t\downarrow 0$ 随 $t\uparrow\infty$，则称 P_t 满足如下渐近对数Harnack不等式:

ALHALH
$$P_t\log f(x)\le\log P_tf(y)+\Phi(x,y)+\Psi_t(x,y)\|\nabla\log f\|_\infty,\quad t>0,f\in\mathscr{D}(E).\tag{3.2}$$

如 [15] 所示，渐近Harnack不等式蕴含 [8]中引入的渐近强Feller性质。连续函数 $\tilde\rho:\ E\times E\to\mathbb{R}_+:=[0,\infty)$称为伪度量，如果

$$\tilde\rho(x,y)=0\text{ iff }x=y,\quad \tilde\rho(x,y)\le\tilde\rho(x,z)+\tilde\rho(z,y)\text{ for }x,y,z\in E.$$

对于伪度量 $\tilde\rho$，我们考虑运输代价（当 $\tilde\rho$ 是距离时，也称为 L^1-Wasserstein 距离）

$$\mathbb{W}_1^{\tilde\rho}(\mu_1,\mu_2):=\inf_{\pi\in\mathscr{C}(\mu_1,\mu_2)}\int_{E\times E}\tilde\rho(x,y)\pi(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y),\quad \mu_1,\mu_2\in\mathscr{P}(E),$$

其中， $\mathscr{P}(E)$ 是 E 上概率测度的类，而 $\mathscr{C}(\mu_1,\ \mu_2)$ 是 μ_1 和 μ_2 的所有耦合；也就是说， $\pi\in\mathscr{C}(\mu_1,\ \mu_2)$ 表示 $\pi\in\mathscr{P}(E\times E)$，其中 $\pi(\cdot\times E)=\mu_1$ 且 $\pi(E\times\cdot)=\mu_2$.

伪度量 $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$ 的递增序列（即 $\rho_i(\cdot,\ \cdot)\ge\rho_j(\cdot,\ \cdot)\ i\ge j$）称为完全分离的，若对于所有 $x\ne y$，均有 $\lim_{n\to\infty}\rho_n(x,\ y)=1$。

定义 3.2 ([8])。马尔可夫半群 P_t 在点 $x\in E$，处称为渐近强Feller，如果存在一个完全分离的伪度量系 $\{\rho_k\}_{k\ge1}$ 和一个序列 $t_k\uparrow\infty$，使得

eq5eq5
$$\inf_{U\in\mathcal{U}_x}\limsup_{k\to\infty}\sup_{y\in U}W_1^{\rho_k}(P_{t_k}(x,\cdot),P_{t_k}(y,\cdot))=0,\tag{3.3}$$

其中， $\mathcal{U}_x$ 表示所有包含 x的开集的集合，且 $P_t(x,\ A):=P_t1_A(x)$ 对于 $x\in E$ 和可测的 $A\subset E$成立。若P_t 在任意 $x\in E$处都满足渐近强Feller性质，则称P_t 为渐近强Feller。

以下结果引自 [3]。

T2.1 **定理 3.1**。 设 P_t 满足(3.2)，其中某个对称的 $\Phi, \Psi_t: \quad E \times E \to (0,\infty)$，且$\Psi_t \downarrow 0$ 当 $t \uparrow \infty$ 时成立。那么：

(1) 若对任意 $x \in E$,

c77 c(3.4)
$$\Lambda(x) := \limsup_{y \to x} \frac{\Phi(x,y)}{\rho(x,y)^2} < \infty,$$
$$\Gamma_t(x) := \limsup_{y \to x} \frac{\Psi_t(x,y)}{\rho(x,y)} < \infty,$$

then

GES GES (3.5) $|\nabla P_t f| \le \sqrt{2\Lambda}\sqrt{P_t f^2 - (P_t f)^2 + \|\nabla f\|_\infty \Gamma_t}$, $t > 0, f \in \mathrm{Lip}(E)$。特别地，当 $\Gamma_t \downarrow 0$ 当 $t \uparrow \infty$时， P_t 是渐近强 ***Feller***。

(2) 若 P_t 有一个不变概率测度 μ，则

03 (3.6)
$$\limsup_{t \to \infty} P_t f(x) \le \log\left(\frac{\mu(\mathrm{e}^f)}{\int_E \mathrm{e}^{-\Phi(x,y)}\mu(\mathrm{d}y)}\right), \qquad x \in E,\ f \in \mathrm{Lip}(E).$$

因此，对于任意闭的 $A \subset E$，若 $\mu(A) = 0$,

05 (3.7)
$$\limsup_{t \to \infty} P_t 1_A(x) = 0, \qquad x \in E.$$

(3) P_t 至多有一个不变概率测度。

3.2 论文的主要结果

设 P_t 为与 (1.2) 相关的马尔可夫半群，即

$$P_t f(x) := \mathbb{E}[f(X_t^x)], \quad t \ge 0,\ x \in \mathbb{H},\ f \in \mathscr{B}_b(D).$$

为证明此 P_t 的 (3.2)，我们对某个 $N \in \mathbb{N}$ 作如下假设。

($\mathbf{A_N}$) 对于任意 $x \in \mathbb{H}$,

$$\mathbb{H}_N := \mathrm{span}\{e_i : 1 \le i \le N\} \subset \sigma(x)\mathbb{H} := \{\sigma(x)z :\ z \in \mathbb{H}\},$$

并且存在一个可测映射

$$\sigma^{-1} : \mathbb{H} \times \mathbb{H}_N \to \mathbb{H}$$

使得 $\sigma(x)\sigma^{-1}(x)y = y$ 对任意$(x,y) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}_N$均成立，并且

$$\|\sigma^{-1}\|_{\mathbb{H}_N} := \sup_{x \in \mathbb{H}, y \in \mathbb{H}_N, \|y\| \le 1} \|\sigma^{-1}(x)y\| < \infty.$$

本文主要结果如下，适用于满足$\mathbf{A_N}$) 的退化噪声，其中某个 $N \in \mathbb{N}$ 满足 $r(N) > 0$。显然，由于 (1.1)，当 N 足够大时，我们有 $r(N) > 0$。

哈纳克

定理 3.2。 假设 (**A**)。若存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 ($\mathbf{A_N}$) 且 $r(N) > 0$ 成立，其中

$$r(N) := \lambda_{N+1} - 2K_b - 3K_\sigma - 2K_B^2(2K_b + \|b(0)\|_{\mathbb{V}^*}^2) - 4K_B^2(4K_B^2+1)(K_\sigma + \|\sigma(0)\|_{\mathscr{L}_2(\mathbb{H})}^2),$$

则渐近对数*Harnack*不等式 (3.2) 成立，其中

PPSPPS

$$\begin{aligned} \Phi(x,y) &= \frac{\mathrm{e}^{K_B^2}\lambda_{N+1}^2\|\sigma^{-1}\|_{\mathbb{H}_N}^2}{2r(N)}\|x-y\|_{\mathbb{H}}^2, \\ \Psi_t(x,y) &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(K_B^2 - r(N)t)}\|x-y\|_{\mathbb{H}}, \quad t \geq 0,\ x,y \in \mathbb{H}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

因此， P_t 至多有一个不变概率测度，且对于以下情况，估计式 (3.5)、(3.6)和 (3.7) 成立

$$\Lambda(x) = \frac{\mathrm{e}^{K_B^2}\lambda_{N+1}^2\|\sigma^{-1}\|_{\mathbb{H}_N}^2}{2r(N)}\|x-y\|_{\mathbb{H}}^2, \quad \Gamma_t(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(K_B^2 - r(N)t)}, \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{H}.$$

3.3 定理 3.2 的证明

根据关于 $E = \mathbb{H}$ 与 $\rho(x,y) = \|x-y\|_{\mathbb{H}}$ 的定理 3.1，只需对（3.8）中给出的 Φ 与 Ψ_t 证明（3.2）。为此，我们将应用测度变换耦合。

定理 *3.2* 的证明。 设 π_N： $\mathbb{H} \to \mathbb{H}_N$ 为正交投影，即 .

$$\pi_N x := \sum_{i=1}^N \langle x, e_i\rangle e_i, \quad x \in \mathbb{H}.$$

对任意 $x, y \in D$，设 (X_t^x, L_t^x) 为方程（1.2）的解，并设 (Y_t^y, L_t^y) 为如下修正方程的解:

4.34.3

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Y_t^y = &\big\{b(Y_t^y) + B(Y_t^y, Y_t^y) - AY_t^y\big\}\mathrm{d}t + \sigma(Y_t^x)\mathrm{d}W_t + \mathrm{d}L_t^y \\ &+ \frac{\lambda_{N+1}}{2}\pi_N(X_t^x - Y_t^y)\mathrm{d}t, \quad t \geq 0,\ Y_0^y = y. \end{aligned} \tag{3.9}$$

为了利用 Y_t^y 表述 $P_t f(y)$，我们使用吉尔萨诺夫定理。令

$$\begin{aligned} \tilde{W}_t &:= W(t) + \int_0^t \beta_s \mathrm{d}s, \\ \beta_s &:= \lambda_{N+1}\sigma(Y_s^y)^{-1}\pi_N(X_s^x - Y_s^y). \end{aligned}$$

由（$\mathbf{A_N}$）和 $X_t^x, Y_t^y \in D$，对任意 $t \geq 0$,

BT
$$\begin{aligned}\|\beta_t\|_{\mathbb{H}} &\leq \frac{1}{2}\lambda_{N+1}\|\sigma^{-1}\|_{\mathbb{H}_N}\|\pi_N(X_t^x - Y_t^y)\| \\ &\leq \frac{1}{2}\lambda_{N+1}\|\sigma^{-1}\|_{\mathbb{H}_N}\|X_t^x - Y_t^y\| \leq \lambda_{N+1}\|\sigma^{-1}\|_{\mathbb{H}_N} < \infty.\end{aligned} \tag{3.10}$$

因此，根据吉尔萨诺夫定理,

$$R_t := \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta_s \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\beta_s\|_{\mathbb{H}}^2 \mathrm{d}s}, \quad t \geq 0$$

~是一个鞅，并且对任意 $t > 0$，$(W_s)_{s\in[0,t]}$ 在加权概率下是 $\mathbb{H}$ 上的柱布朗运动

$$\mathrm{d}\mathbb{Q}_t := R_t \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

因此，由(1.2)在以初值 y 代替 x时的弱唯一性，并注意到(3.9)可改写为

$$\mathrm{d}Y_t^y = \big\{b(Y_t^y) + B(Y_t^y, Y_t^y) - AY_t^y\big\}\mathrm{d}t + \sigma(Y_t^x)\mathrm{d}\tilde{W}_t + \mathrm{d}L_t^y, \quad t \geq 0,\ Y_0^y = y,$$

我们有

$$P_t f(y) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}[f(Y_t^y)], \quad t > 0,\ f \in \mathscr{B}_b(D),$$

其中 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}$ 是关于加权概率 $\mathbb{Q}_t$的期望。将其与杨氏不等式 [2, 引理2.4], 相结合，我们得到，对任意 $f \in \mathscr{D}(D)$（其在(3.1)中对 $E = D$定义），

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\log f(Y_t^y)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}[R_t^{-1}\log f(Y_t^y)] \leq \log \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}[f(Y_t^y)] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}[R_t^{-1}\log R_t^{-1}] \\ &= \log P_t f(y) - \mathbb{E}[\log R_t] = \log P_t f(y) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^t \|\beta_s\|_{\mathbb{H}}^2 \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

因此,

AF
$$\begin{aligned}&P_t \log f(x) = \mathbb{E}[\log f(X_t^x)] = \mathbb{E}[\log f(Y_t^y)] + \mathbb{E}[\log f(X_t^x) - \log f(Y_t^y)] \\ &\leq \log P_t f(y) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^t \|\beta_s\|_{\mathbb{H}}^2 \mathrm{d}s + \|\nabla \log f\|_\infty \mathbb{E}[\|X_t^x - Y_t^y\|], \quad t > 0,\ f \in \mathscr{D}(D).\end{aligned} \tag{3.11}$$

由施瓦茨不等式和下文的引理 3.3 可得

09
$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[\|X_t^x - Y_t^y\|_{\mathbb{H}}^2\big] \\ &\leq \Big(\mathbb{E}\Big[\mathrm{e}^{-2K_B^2\int_0^t \|X_s^x\|_{\mathbb{V}}^2 \mathrm{d}s}\|X_t^x - Y_t^y\|_{\mathbb{H}}^4\Big]\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\mathbb{E}\Big[\mathrm{e}^{2K_B^2\int_0^t \|X_s^x\|_{\mathbb{V}}^2 \mathrm{d}s}\Big]\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \mathrm{e}^{K_B^2 - r(N)t}\|x - y\|_{\mathbb{H}}^2, \quad t \geq 0,\ x, y \in \mathbb{H}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

结合式 (3.10) 可得

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^t \|\beta_s\|_{\mathbb{H}}^2 \mathrm{d}s \le \frac{\mathrm{e}^{K_B^2}\lambda_{N+1}^2\|\sigma^{-1}\|_{\mathbb{H}_N}^2}{2r(N)}\|x-y\|_{\mathbb{H}}^2.$$

此外，由 (3.12) 和詹森不等式,

$$\mathbb{E}\big[\|X_t^x - Y_t^y\|_{\mathbb{H}}\big] \le \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(K_B^2 - r(N)t)}\|x-y\|_{\mathbb{H}}.$$

因此，(3.11) 蕴含 (3.2)，其中 Φ和 Ψ 由 (3.8) 给出。 □

L^2引理 3.3。 在 (**A**) 和 ($\mathbf{A_N}$)条件下，对任意 $t>0$ 和 $x,\ y\in\mathbb{H}$，有

T1 (3.13) $$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda\int_0^t \|X_s^x\|_{\mathbb{V}}^2\mathrm{d}s}\right] \le \mathrm{e}^{\lambda+\lambda\left[(2K_b+\|b(0)\|_{\mathbb{V}^*}^2)+(4\lambda+2)(K_\sigma+\|\sigma(0)\|_{\mathscr{L}_2(\mathbb{H})}^2)\right]t}, \quad \lambda>0,$$

T2 (3.14) $$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-2K_B^2\int_0^t \|X_s^x\|_{\mathbb{V}}^2\mathrm{d}s}\|X_t^x - Y_t^y\|_{\mathbb{H}}^4\right] \le \mathrm{e}^{(4K_b+6K_\sigma-2\lambda_{N+1})t}\|x-y\|_{\mathbb{H}}^4.$$

证明。 下面分别证明 (3.13) 和 (3.14)。

(1) 由 (**A**)(**2**) 可得 $B(x,x,x)=0$, 而 (2.2) 与 $\phi=0$ 结合可得

$$\langle X_t^x, \mathrm{d}L_t^x\rangle \le 0.$$

因此，由伊藤公式可得

IT1IT1 (3.15)
$$\begin{aligned}\mathrm{d}\|X_t\|_{\mathbb{H}}^2 &\le 2\langle X_t^x, \sigma(X_t^x)\mathrm{d}W_t\rangle\\ &\quad + \big(\|\sigma(X_t^x)\|_{\mathscr{L}_2(\mathbb{H})}^2 + 2{}_{\mathbb{V}^*}\langle b(X_t^x), X_t^x\rangle_{\mathbb{V}} - 2\|X_t^x\|_{\mathbb{V}}^2\big)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由于 $X_t^x\in D$ 蕴含 $\|X_t^x\|_{\mathbb{H}}\le 1$，由 (**A**)(1) 可得

TTBTTB (3.16)
$$\begin{aligned}&{}_{\mathbb{V}^*}\langle b(X_t^x), X_t^x\rangle_{\mathbb{V}} = {}_{\mathbb{V}^*}\langle b(X_t^x)-b(0)+b(0), X_t^x\rangle_{\mathbb{V}}\\ &\le \|b(0)\|_{\mathbb{V}^*}\|X_t^x\|_{\mathbb{V}} + K_b\|X_t\|_{\mathbb{H}}^2\\ &\le \frac{1}{2}\|b(0)\|_{\mathbb{V}^*}^2 + K_b + \frac{1}{2}\|X_t^x\|_{\mathbb{V}}^2,\end{aligned}$$

and

TTSTTS (3.17)
$$\begin{aligned}&\|\sigma(X_t^x)\|_{\mathscr{L}_2(\mathbb{H})}^2 \le 2\|\sigma(0)\|_{\mathscr{L}_2(\mathbb{H})}^2 + 2\|\sigma(X_t^x)-\sigma(0)\|_{\mathscr{L}_2(\mathbb{H})}^2\\ &\le 2\|\sigma(0)\|_{\mathscr{L}_2(\mathbb{H})}^2 + 2K_\sigma\|X_t^x\|_{\mathbb{H}}^2 \le 2\|\sigma(0)\|_{\mathscr{L}_2(\mathbb{H})}^2 + 2K_\sigma.\end{aligned}$$

结合 (3.15)-(3.17) 和 $\|x\|_{\mathbb{H}}\le 1$，对于 $x\in D$，我们得到

$$\int_0^t \|X_s^x\|_{\mathbb{V}}^2\mathrm{d}s \le 1 + \big(\|b(0)\|_{\mathbb{V}^*}^2 + 2K_b + 2\|\sigma(0)\|_{\mathscr{L}_2(\mathbb{H})}^2 + 2K_\sigma\big)t + \int_0^t 2\langle X_s^x, \sigma(X_s^x)\mathrm{d}W_s\rangle,$$

因此，对于任意 $\lambda>0$,

TTZTT2 (3.18) $$\mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{\lambda\int_0^t\|X_s^x\|_{\mathbb{V}}^2\mathrm{d}s}\big]\le \mathrm{e}^{\lambda+\lambda\left(\|b(0)\|_{\mathbb{V}^*}^2+2K_b+2\|\sigma(0)\|_{\mathscr{L}_2(\mathbb{H})}^2+2K_\sigma\right)t}\,\mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{\lambda\int_0^t 2\langle X_s^x,\sigma(X_s^x)\mathrm{d}W_s\rangle}\big].$$

此外，由 (3.17) 和 $\|X_s^x\|_{\mathbb{H}}\le 1$ 可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{\lambda\int_0^t 2\langle X_s^x,\sigma(X_s^x)\mathrm{d}W_s\rangle}\big]\\&\le \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{\lambda\int_0^t 2\langle X_s^x,\sigma(X_s^x)\mathrm{d}W_s\rangle-2\lambda^2\int_0^t\|X_s^x\|_{\mathbb{H}}^2\|\sigma(X_s^x)\|_{\mathscr{L}_2(\mathbb{H})}^2\mathrm{d}s}\big]\mathrm{e}^{4\lambda^2\left(\|\sigma(0)\|_{\mathscr{L}_2(\mathbb{H})}^2+K_\sigma\right)t}\\&=\mathrm{e}^{4\lambda^2\left(\|\sigma(0)\|_{\mathscr{L}_2(\mathbb{H})}^2+K_\sigma\right)t}.\end{aligned}$$

将此与 (3.18) 结合，可得 (3.13)。

(2) 令

$$g_t=\mathrm{e}^{-2K_B^2\int_0^t\|X_s^x\|_{\mathbb{H}}^2\mathrm{d}s}.$$

由伊藤公式可得

$$\mathrm{d}\big\{g_t\|X_t^x-Y_t^y\|_{\mathbb{H}}^4\big\}=\mathrm{d}M_t+g_t\big(I_1(t)+I_2(t)+I_3(t)\big)\mathrm{d}t+\mathrm{d}\tilde{L}_t,$$

其中 M_t 是一个鞅，并且

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{L}_t&:=4g_t\|X_t^x-Y_t^y\|_{\mathbb{H}}^2\langle X_t^x-Y_t^y,\mathrm{d}L_t^x-\mathrm{d}L_t^y\rangle,\\I_1(t)&:=-2K_B^2\|X_t^x\|_{\mathbb{V}}^2\|X_t^x-Y_t^y\|_{\mathbb{H}}^4-4\|X_t^x-Y_t^y\|_{\mathbb{H}}^2\|X_t^x-Y_t^y\|_{\mathbb{V}}^2\\&\quad-2\lambda_{N+1}\|X_t^x-Y_t^y\|_{\mathbb{H}}^2\|\pi_N(X_t^x-Y_t^y)\|_{\mathbb{H}}^2,\\I_2(t)&:=4\|X_t^x-Y_t^y\|_{\mathbb{H}}^2\,{}_{\mathbb{V}^*}\langle b(X_t^x)-b(Y_t^y),X_t^x-Y_t^y\rangle_{\mathbb{V}}\\&\quad+4\sum_{i=1}^{\infty}\langle X_t^x-Y_t^y,\sigma_i(X_t^x)-\sigma_i(Y_t^y)\rangle^2\\&\quad+2\|X_t^x-Y_t^y\|_{\mathbb{H}}^2\|\sigma(X_t^x)-\sigma(Y_t^x)\|_{\mathscr{L}_2(\mathbb{H})}^2,\\I_3(t)&:=4\|X_t^x-Y_t^y\|_{\mathbb{H}}^2\,{}_{\mathbb{V}^*}\langle B(X_t^x,X_t^x)-B(Y_t^y,Y_t^y),X_t^x-Y_t^y\rangle_{\mathbb{V}}.\end{aligned}$$

由（2.2），

$$\mathrm{d}\tilde{L}_t\le 0,$$

由 **(A)** (1)，

$$I_2(t)\le(4K_b+6K_\sigma)\|X_t^x-Y_t^y\|_{\mathbb{H}}^4,$$

而 **(A)** (2) 意味着

$$\langle B(y,y),x-y\rangle=\bar{B}(y,y,x)=\bar{B}(y,x,-y)=\bar{B}(y,x,x-y),\quad x,y,z\in\mathbb{V},$$

and

$$|{}_{\mathbb{V}^*}\langle B(x,x)-B(y,y),x-y\rangle_{\mathbb{V}}|=|\bar{B}(x,x,x-y)-\bar{B}(y,x,x-y)|$$

$$= |{}_{\mathbb{V}^*}\langle B(x-y,x,x-y\rangle_{\mathbb{V}}| \le K_B\|x\|_{\mathbb{V}}\|x-y\|_{\mathbb{V}}\|x-y\|_{\mathbb{H}},$$

因此

$$\begin{aligned} I_3(t) &\le 4K_B\|X_t^x - Y_t^y\|_{\mathbb{H}}^3\|X_t^x\|_{\mathbb{V}}\|X_t^x - Y_t^y\|_{\mathbb{V}} \\ &\le 2K_B^2\|X_t^x\|_{\mathbb{V}}^2\|X_t^x - Y_t^y\|_{\mathbb{H}}^4 + 2\|X_t^x - Y_t^y\|_{\mathbb{H}}^2\|X_t^x - Y_t^y\|_{\mathbb{V}}^2. \end{aligned}$$

结合这些与 $\|X_t^x - Y_t^y\|_{\mathbb{V}}^2 \ge \lambda_{N+1}\|(1-\pi_N)(X_t^x - Y_t^y)\|_{\mathbb{H}}^2$，我们得到

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\big\{g_t\|X_t^x - Y_t^y\|_{\mathbb{H}}^4\big\} - \mathrm{d}M_t \\ &\le g_t\Big((4K_b + 6K_\sigma)\|X_t - Y_t\|_{\mathbb{H}}^4 - 2\|X_t^x - Y_t^y\|_{\mathbb{H}}^2\|X_t^x - Y_t^y\|_{\mathbb{V}}^2 \\ &\qquad\qquad - 2\lambda_{N+1}\|X_t^x - Y_t^y\|_{\mathbb{H}}^2\|\pi_N(X_t^x - Y_t^y)\|_{\mathbb{H}}^2\Big)\mathrm{d}t \\ &\le (4K_b + 6K_\sigma - 2\lambda_{N+1})g_t\|X_t^x - Y_t^y\|_{\mathbb{H}}^4\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

因此，由格朗沃尔不等式，我们证明了(3.14)。 □

4 对反射随机纳维-斯托克斯方程的应用

在这一部分，我们将主要结果应用于 C^1 有界开区域 $U \subset \mathbb{R}^d$上带反射的 d维随机纳维-斯托克斯方程。

对任意 $p \in [1,\infty]$，令 $L^p = L^p(U, \mathbb{R}^d)$为定义在 U 上的所有 $\mathbb{R}^d$值可测函数 v 所构成的空间，且

$$\|v\|_{L^p} := \big\||v|\big\|_{L^p(U)} < \infty,$$

whe其中$\|\cdot\|_{L^p(U)}$ 是关于 U上勒贝格测度的 L^p-范数。

令 Δ 为 U上的狄利克雷拉普拉斯算子。对于任意 $m \in \mathbb{R}$ 和 $q \ge 1$，令 $H^{m,q}$ 为 $C_0^\infty(U; \mathbb{R}^d)$，在以下范数下的闭包；这里 $C_0^\infty(U; \mathbb{R}^d)$表示 U上取值于 $\mathbb{R}^d$的具有紧支撑的光滑函数空间：

$$\|u\|_{H^{m,q}} := \|(-\Delta)^{\frac{m}{2}}u\|_{L^q(U)}.$$

对于 $v \in L^1$，若满足以下条件，我们记 $\mathrm{div}v = 0$

$$\int_U \langle v, \nabla f\rangle(x)\mathrm{d}x = 0, \quad f \in C_0^\infty(U),$$

wh其中 $C_0^\infty(U)$ 是 U 上所有具有紧支撑的光滑函数的集合 .

Let

$$\mathbb{H} := \big\{u \in L^2 : \ \mathrm{div}u = 0\big\}, \ \ \langle u, v\rangle := \langle u, v\rangle_{L^2}, \quad u, v \in \mathbb{H}.$$

我们考虑以下带反射的随机偏微分方程 $D := \{u \in \mathbb{H} : \ \|u\|_{\mathbb{H}} := \|u\|_{L^2} \le 1\}$：

SEE' SEE'
$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t^u &= \big\{b(X_t^u) + (X_t^u \cdot \nabla)X_t^u - \nu(-\Delta)^\theta X_t^u\big\}\mathrm{d}t + \sigma(X_t^u)\mathrm{d}W_t + \mathrm{d}L_t^u, \\ &\quad t \ge 0,\ X_0 = u \in D, \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中 $\nu,\ \theta \in (0,\ \infty)$ 是常数，而 $b,\ \sigma$ 将在后文确定。

为应用定理 3.2，我们取

AB
$$A = \nu(-\Delta)^\theta, \quad B(u,v) = (u\cdot\nabla)v \text{ for } u, v \in \mathbb{V}, \tag{4.2}$$

其中

$$\mathbb{V} := \big\{u \in H^{\theta,2} : \ \mathrm{div} u = 0\big\}, \ \ \|u\|_{\mathbb{V}} = \|A^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2} = \nu^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^{\theta,2}}.$$

设 $\mathbb{V}^*$ 是相对于 $\mathbb{H}$ 的 $\mathbb{V}$ 对偶空间，它是 $\mathbb{H}$ 关于该范数的闭包

$$\|u\|_{\mathbb{V}^*} := \nu^{-\frac{1}{2}}\|u\|_{H^{-\theta,2}}.$$

经典结论是，$(A,\ \mathscr{D}(A))$ 是 $\mathbb{H}$ 上的正定自伴算子，其特征值为 $\{\lambda_i\}_{i\ge1}$，并满足

$$c_1 i^{\frac{2\theta}{d}} \le \lambda_i \le c_2 i^{\frac{2\theta}{d}}, \ \ i \ge 1$$

对于某些常数 $c_2 > c_1 > 0$，使得 (1.1) 成立。

此外，容易看出

$$_{\mathbb{V}^*}\langle (u\cdot\nabla)v, w\rangle_{\mathbb{V}} = -{}_{\mathbb{V}^*}\langle (u\cdot\nabla)w, v\rangle_{\mathbb{V}}, \ \ {}_{\mathbb{V}^*}\langle (u\cdot\nabla)v, v\rangle_{\mathbb{V}} = 0, \quad u, v, w \in \mathbb{V}.$$

因此，下面的引理保证 $B(u,\ v) := (u\cdot\nabla)v$ 满足 (A)(2).

LN1 **引理 4.1.** 设 $B(u,v) := (u\cdot\nabla)v$，其中 $u, v \in \mathbb{V}$。若 $\theta \ge \frac{d+2}{4} \vee 1$，则存在常数$C, C_B \in (0,\infty)$ 使得

YY
$$\begin{aligned} &|{}_{H^{-\theta,2}}\langle B(u,v), w\rangle_{H^{\theta,2}}| \le C\|v\|_{H^{\theta,2}}\sqrt{\|u\|_{L^2}\|u\|_{H^{\theta,2}}\|w\|_{L^2}\|w\|_{H^{\theta,2}}}, \\ &\|B(u,v)\|_{H^{-\theta,2}} \le C_B\|u\|_{L^2}\|v\|_{H^{\theta,2}}, \quad u, v, w \in H^{\theta,2}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

证明. 根据 Sobole夫不等式，存在一个常数 $c_1 \in (0,\ \infty)$ 使得

SBOSB0
$$\|u\|_{H^{m,q}} \le c_1\|u\|_{H^{k,p}} \tag{4.4}$$

对任意满足以下条件的 $\infty > k \ge m > -\infty$ 和 $\infty \ge p,\ q \ge 1$

SB1SB1
$$\frac{1}{q} + \frac{k-m}{d} \ge \frac{1}{p}. \tag{4.5}$$

容易看出，对于以下情况，(4.5) 成立

$$m = \theta, \quad q = 2, \quad k = 0, \quad p = \frac{2d}{d+2\theta} \vee 1,$$

因此，由 (4.4) 可得

$$\|B(u,v)\|_{H^{-\theta,2}} \le c_1 \|B(u,v)\|_{L^{\frac{2d}{d+2\theta}\vee 1}}.$$

结合这一点与 Hölder 不等式，我们得到

$$\|B(u,v)\|_{H^{-\theta,2}} \le c_1 \|u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^{\frac{d}{\theta}\vee 2}} = c_1 \|u\|_{\mathbb{H}} \|\nabla v\|_{L^{\frac{d}{\theta}\vee 2}}.$$

注意到

$$\|\nabla v\|_{L^{\frac{d}{\theta}\vee 2}} \le c_2 \|u\|_{L^2} \|v\|_{H^{1,\frac{d}{\theta}\vee 2}}$$

对于某个常数 $c_2 \in (0,\infty)$，我们推得

BV2BV2 (4.6) $$\|B(u,v)\|_{H^{-\theta,2}} \le c_1 \|(u\cdot\nabla)v\|_{L^{\frac{2d}{d+2\theta}\vee 1}} \le c_1 c_2 \|u\|_{\mathbb{H}} \|v\|_{H^{1,\frac{d}{\theta}\vee 2}}.$$

此外，由于 $\theta \ge \frac{d+2}{4} \vee 1$ 蕴含对.....成立的 (4.5)

$$m = 1, \quad q = \frac{d}{\theta} \vee 2, \quad k = \theta, \quad p = 2,$$

因此，由 (4.4) 我们得到

$$\|v\|_{H^{1,\frac{d}{\theta}\vee 2}} \le c_1 \|v\|_{H^{\theta,2}}.$$

结合（4.6），我们得到（4.3）中的第二个不等式。

接下来，显然

$$|{}_{H^{-\theta,2}}\langle B(u,v), w\rangle_{H^{\theta,2}}| \le \|B(u,v)\|_{L^2} \|w\|_{L^2} = \|B(u,v)\|_{L^2} \|w\|_{\mathbb{H}}.$$

结合刚刚证明的（4.3）中的第二个不等式，剩下的就是求一个常数 $c \in (0, \infty)$，使得

** (4.7) $$\|B(u,v)\|_{L^2} \le c \|u\|_{H^{\theta,2}} \|v\|_{H^{\theta,2}}.$$

下面我们通过考虑两种不同的情形来证明这个估计。

(a) 设 $\theta < \frac{d+2}{2}$. 则

$$q_1 := \frac{2d}{d+2-2\theta} \in [2,\infty), \quad q_2 := \frac{2q_1}{q_1-2} \in (2,\infty]$$

满足 $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{2}$. 根据 Riesz变换 $\nabla(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$关于 $q \in (1, \infty)$ 的 L^q-有界性，存在一个常数 $c_3 \in (0, \infty)$，使得

$$\|\nabla v\|_{L^{q_1}} \le c_3 \|v\|_{H^{1,q_1}}.$$

结合这一结果与 H¨older 不等式，我们得到

BW (4.8) $$\|B(u,v)\|_{L^2} \le \|u\|_{L^{q_2}} \|\nabla v\|_{L^{q_1}} \le c_3 \|u\|_{H^{0,q_2}} \|v\|_{H^{1,q_1}}.$$

容易看出

$$\frac{1}{q_1}+\frac{\theta-1}{d}=\frac{1}{2}$$

且 $\theta \geq \frac{d+2}{4}$蕴含

$$\frac{1}{q_2}+\frac{\theta}{d}\geq\frac{1}{2}.$$

于是，对于 $(m,q,k,p)=(0,q_2,\theta,2)$ 或 $(1,q_1,\theta,2)$，式 (4.4) 成立，因此由式 (4.8) 可得，对于某个常数 $c\in(0,\infty)$.，式 (4.7) 成立。

(b) 设 $\theta \geq \frac{d+2}{2}$. 则

BW'B W'

$$\|B(u,v)\|_{L^2}\leq\|u\|_{L^4}\|\nabla v\|_{L^4}\leq c_3\|u\|_{H^{0,4}}\|v\|_{H^{1,4}} \tag{4.9}$$

对于某个常数 $c_3\in(0,\infty)$ 成立。注意，当 $\theta\geq\frac{d+2}{2}$ 时，对于 $(m,q,k,p)=(0,4,\theta,2)$ 或 $(1,4,\theta,2)$，条件 (4.5) 成立，因此我们由式 (4.9) 和 (4.4) 推得式 (4.7)。 □

现在，设

$$b:\mathbb{V}\to\mathbb{V}^* \qquad \sigma:\mathbb{H}\to\mathscr{L}_2(\mathbb{H})$$

为可测的，并满足以下假设。

(B) 存在常数 $C_b,K_\sigma\in(0,\infty)$ 使得

$$\begin{aligned}&\|b(x)-b(y)\|_{H^{-\theta,2}}\leq C_b\|x-y\|_{\mathbb{H}},\\&\|\sigma(x)-\sigma(y)\|^2_{\mathscr{L}_2(\mathbb{H})}\leq K_\sigma\|x-y\|^2_{\mathbb{H}},\quad x,y\in\mathbb{H}.\end{aligned}$$

注意

$$\|\cdot\|_{\mathbb{V}}=\nu^{\frac{1}{2}}\|\cdot\|_{H^{\theta,2}},\quad \|\cdot\|_{\mathbb{V}^*}=\|\cdot\|_{H^{-\theta,2}}.$$

由引理 4.1，以下结果是命题 2.1 和定理 3.2 的直接推论，特别适用于 $A=-\Delta$ （即 $\theta=1$），当 $d\leq 2$ 时。

TB **定理 4.2.** 假设 (B) 成立，并令 A,B 属于某些常数 $\nu\in(0,\infty)$ 和$\theta\in[1\vee\frac{d+2}{4},\infty)$对应的 (4.2)。则对于任意初始值 $x\in\mathbb{H}$，(4.1) 适定。

此外，令 C_B,C_b 和 K_σ 属于引理 4.1 (B)，令

$$K_B=\nu^{-1}C_B,\quad K_b=\nu^{-\frac{1}{2}}C_b,\quad \|b(0)\|_{\mathbb{V}^*}=\nu^{-\frac{1}{2}}\|b(0)\|_{H^{-\theta,2}},$$

并令 $r(N)$ 由定理 3.2定义。若存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $(\mathbf{A_N})$ 和$r(N)>0$ 成立，则定理 3.2 中的所有结论对 (4.1)均成立。

注记 4.3. 对 $A:=\nu(1-\Delta)^\theta$ 在 $\mathbb{T}^d$ 上重复上述论证，其中 $\nu\in(0,\infty)$和 $\theta\in[1\vee\frac{d+2}{4},\infty)$，定理 4.2 也成立，且

$$\begin{aligned}\mathbb{H}&:=\big\{u\in L^2(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^d):\ \mathrm{div}u=0\big\},\\\mathbb{V}&:=\big\{u\in H^{\theta,2}(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^d):\ \mathrm{div}u=0\big\},\end{aligned}$$

$\mathbb{V}^*$ 是 $\mathbb{V}$ 关于 $\mathbb{H}$的对偶空间，且 b、σ 满足（**B**）。

致谢。本研究部分得到国家重点研发计划（编号：2022 YFA1006001）和国家自然科学基金委员会（编号：12531007、12131019）的资助。

数据可用性。本文所述检索未使用任何数据。**披露声明**。

我们声明不存在任何利益冲突。

利益声明。

作者不为任何可能从本文中受益的组织工作、提供咨询、持有其股份或接受其资助，并声明除其研究机构外，不存在其他从属关系。

参考文献

AT [1] M. Arnaudon, A. Thalmaier, 曲率下界无界流形上的*Harnack*不等式与热核估计, 《数学科学通报》 **130** (2006), 223–233.ATW [2] M. Arnaudon, A. Thalmaier and F.-Y. Wang, 非紧黎曼流形上的梯度估计与*Harnack*不等式, 《随机过程及其应用》 **119**(2009), 3653–3670.BWY [3] J. Bao, F.-Y. Wang, C. Yuan, 无限记忆随机系统的渐近对数*Harnack*不等式及其应用, 《随机过程及其应用》**129**(2019), 4576–4596.BLZ [4]Z. Brz´ezniak, Q. Li and T.S. Zhang, 带反射随机演化方程的指数遍历性, arXiv预印本 arXiv:2511.14066, 2025年11月。https://arxiv.org/abs/2511.14066BZ [5] Z. Brze´zniak and T.S. Zhang, 无限维区域中随机演化方程的反射, Ann. Inst. H. Poincar´e**59**(3) (2023), 1549-1571.DP [6]C. Donati-Martin and E. Pardoux, 白噪声驱动的带反射随机偏微分方程, 《概率论及相关领域》 **95** (1993), 1-24.FO [7] T. Funaki and S. Olla, 壁上界面模型的涨落 $\nabla\Phi$ 壁上界面模型, 《随机过程及其应用》**94**(1) (2001), 1-27.HM [8] M.Hairer and J.C. Mattingly, 具有退化随机强迫的二维纳维-斯托克斯方程的遍历性, 《数学年刊》**164**(2006), 993–1032.LS [9] R.S. Liptser and A.N. Shiryayev, 《随机过程统计学》第一卷, Springer, 柏林 (2013)。

NP[10] D. Nualart andE. Pardoux, 白噪声驱动的带反射拟线性随机偏微分方程，《概率论及相关领域》**93** (1992), 77-89.W3 [11] F.-Y.Wang, 随机广义多孔介质方程的*Harnack*不等式及其应用，《概率年刊》 **35**(2007), 1333–1350.W2 [12] F.-Y.Wang, 带边界流形上的*Harnack*不等式及其应用，《纯粹与应用数学杂志》**94** (2010).W4 [13] F.-Y.Wang, 随机偏微分方程的*Harnack*不等式及其应用，Springer，柏林，(2013), 304–321.W [14] F.-Y.Wang, 非紧黎曼流形上的对数*Sobolev*不等式，《概率论及相关领域》**109** (1997), 417–424.X [15] L.Xu, 修正的对数*Harnack*不等式与渐近强*Feller*性质，《演化方程杂志》**11** (2011), 925–942.XZ [16] T. XuandT.S.Zhang, 白噪声驱动的带反射随机偏微分方程：存在性、唯一性与大偏差原理，《随机过程及其应用》 **119(10)** (2009),3453-3470.